

## الأعداد المركبة

## Complex Numbers

## المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-4)، بسّط كل عدد مستخدمًا الوحدة التخيلية  $i$

(1)  $\sqrt{-16} = 4i$

(2)  $\sqrt{-15} = \sqrt{15}i$

(3)  $3\sqrt{-9} = 9i$

(4)  $-\frac{1}{2}\sqrt{-100} = -5i$

في التمارين (5-8)، اكتب كل عدد في الصورة الجبرية.

(5)  $2 + \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{3}i$

(6)  $\sqrt{-1} + 2 = 2 + i$

(7)  $\frac{-\sqrt{-50} - 2}{6} = \frac{-1}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{6}i$

(8)  $\frac{\sqrt{-8} + 8}{2} = 4 + \sqrt{2}i$

في التمرينين (9-11)، حل المعادلات التالية:

(9)  $2x + 3yi = -14 + 9i$   $x = -7, y = 3$

(10)  $3x + 19i = 16 - 8yi$   $x = \frac{16}{3}, y = \frac{-19}{8}$

(11)  $14i^2 - 3i = 2x + (y + 5)i$   $x = -7, y = -8$

(12) مثل كلاً مما يلي في المستوى المركب:

(a)  $z_1 = -2 + 3i$

(b)  $z_2 = -4$

(c)  $z_3 = -i$

(d)  $z_4 = 2(2 + i)$

(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a)  $L(4, 5)$

(b)  $M(-4, -2)$

(c)  $N(-2, 6)$

(d)  $P(0, -3) = -3i$

$4 + 5i$

$-4 - 2i$

$-2 + 6i$

في التمارين (14-23)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(14)  $(2 + 4i) + (4 - i) = 6 + 3i$

(15)  $6 - (8 + 3i) = -2 - 3i$

(16)  $(4 + \sqrt{-9}) + (6 - \sqrt{-49}) = 10 - 4i$

(17)  $(8 - \sqrt{-1}) - (-3 + \sqrt{-16}) = 11 - 5i$

(18)  $(-2i)(5i) = 10$

(19)  $(4i)(-9i)^2 = -324i$

(20)  $-5(1 + 2i) + 3i(3 - 4i) = 7 - i$

(21)  $(-6 - 5i)(1 + 3i) = 9 - 23i$

(22)  $(-2 + \sqrt{-9})(6 + \sqrt{-25}) = -27 + 8i$

(23)  $i(-6i)^3 = -216$

$$z = -i, z^{12} = 1, z^{27} = i$$

(24) إذا كان  $z = \frac{1-i}{1+i}$  فأوجد:  $z^{12}, z^{27}$

(25) إذا كان  $z_1 = 2+i, z_2 = -3+4i$  فأوجد:

(a)  $-\frac{1}{3}z_2 = 1 - \frac{4}{3}i$

(b)  $z_1 \cdot z_2 = -10 + 5i$

(c)  $z_1^3$

(d)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = -2 + 11i$

(e)  $\overline{z_1} - \overline{z_2} = 5 + 3i$

(f)  $z_1 \cdot \overline{z_2} = -2 - 11i$

(26) إذا كان  $z = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$  فأوجد:  $-\sqrt{3} - i = \overline{z}$

(27) أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a)  $-3 - 2i$

(b)  $5i$

(c)  $3i - 4$

$-\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$

$-\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

$-\frac{1}{5}i$

(28) إذا كان  $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = -\sqrt{3} + 2i$  فأوجد:  $\frac{z_1}{z_2}, \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

$\frac{\overline{z_1}}{z_2} = -\frac{5}{7} - \frac{\sqrt{3}}{7}i, \frac{z_1}{\overline{z_2}} = -\frac{5}{7} + \frac{\sqrt{3}}{7}i, \left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right) = -\frac{1}{7} - \frac{3\sqrt{3}}{7}i$

(29) تفكير ناقد: أوجد العلاقة بين  $x, y$  عندما يكون  $(x+yi)^2$  عددًا تخيليًا.

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a)

(b)

(1) الصورة الجبرية للعدد:  $3 + \sqrt{-4} + 2i$  هي:  $3 + 2i$

(a)

(b)

(2) مرافق العدد المركب:  $z = 3 + 4i$  هو:  $\overline{z} = -3 - 4i$

(a)

(b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب  $z = 3 - 2i$  هو:  $-z = 3 + 2i$

(a)

(b)

(4) الصورة المبسطة للتعبير:  $(12 + 5i) - (2 - i)$  هي:  $10 + 6i$

في التمارين (14-5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد:  $\sqrt{-225} + 32$  يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

- (a)  $-15 + 6i$  (b)  $6 + 15i$  (c)  $6 - 15i$  (d)  $32 + 15i$

(6) حل المعادلة:  $-10 - 6i = 2x + 3yi$  هو:

- (a)  $x = 5, y = -2$  (b)  $x = -5, y = -2$  (c)  $x = -5, y = 2$  (d)  $x = 5, y = 2$

(7) إذا كان  $z_1 = 5i + 2$ ،  $z_2 = -3 - i$  فإن  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$  تساوي:

- (a)  $\frac{1}{10} + \frac{17}{10}i$  (b)  $\frac{-1}{10} - \frac{17}{10}i$  (c)  $\frac{-1}{10} + \frac{17}{10}i$  (d)  $\frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$

(8) إذا كان:  $xi^2 + 3yi = 5 + 3i^5$  فإن  $(x, y)$  تساوي

- (a)  $(5, 1)$  (b)  $(-5, -1)$  (c)  $(5, -1)$  (d)  $(-5, 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير:  $(3 + \sqrt{-4})(4 + \sqrt{-9})$  هي:

- (a)  $18 + 17i$  (b)  $18 + 3\sqrt{-9} + 4\sqrt{-4}$   
(c)  $6 + 17i$  (d)  $18$

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب:  $z = (1 + 2i)^2$  هي:

- (a)  $z = -3 + 4i$  (b)  $z = 5 + 4i$  (c)  $z = -3$  (d)  $z = 5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب:  $z = (2 - i)^3$  هي:

- (a)  $z = 14 + 13i$  (b)  $z = 14 - 13i$  (c)  $z = 2 - 11i$  (d)  $z = 2 - 13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب:  $z = \frac{i}{i+2}$  هي:

- (a)  $z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$  (b)  $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$   
(c)  $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$  (d)  $z = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

(13) إذا كان  $z = i$  فإن  $z^{250}$  يساوي:

- (a)  $-i$  (b)  $i$  (c)  $1$  (d)  $-1$

(14) ليكن  $x \in \mathbb{Z}^+$  فإن مجموعة قيم  $x$  التي تجعل العدد  $(5 + i^x)$  عددًا حقيقيًا هي:

- (a)  $\mathbb{Z}^+$  (b)  $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$  (c)  $\{1, 3, 5, \dots\}$  (d)  $\{2, 4, 6, \dots\}$

## الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

## Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

## المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد:

(a)  $|5 + 12i| = 13$  (b)  $|2 - 2i| = \sqrt{8}$  (c)  $|2i| = 2$

في التمارين (2-7)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2)  $(2, \frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$

(3)  $(1, \frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

(4)  $(1.5, \frac{7\pi}{3}) = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$

(5)  $(2, \pi) = -2$

(6)  $(2, 270^\circ) = -2i$

(7)  $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

في التمارين (8-13)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8)  $(1, 1) (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

(9)  $(-2, 5) (\sqrt{29}, 111.8)$

(10)  $(-3, 0) (3, \pi)$

(11)  $(0, 4) (4, 90)$

(12)  $(-2, -2\sqrt{3}) (4, \frac{4\pi}{3})$

(13)  $(3\sqrt{3}, -3) (6, \frac{11\pi}{6})$

في التمارين (14-21)، ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية مستخدماً السعة الأساسية:

(14)  $3i = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

(15)  $2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

(16)  $-2 + 2i\sqrt{3} = 4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

(17)  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$

(18)  $-2i = 2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$

(19)  $\sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

(20)  $8 = 8(\cos 0 + i \sin 0)$

(21)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 1(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$

في التمارين (22-28)، اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  حيث  $\theta \in [0, 2\pi)$ :

(22)  $5(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$

(23)  $8(\cos 30^\circ - i \sin(-150^\circ))$

(24)  $-\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$

(25)  $2(\cos 45^\circ + i \sin 405^\circ)$

P.12 القاريه (22-28) التبع في اصوره بالتدريه

$$\begin{aligned} (22) \quad 5(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}) &= 5(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4}) \\ &= 5(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (23) \quad 8(\cos 30 - i \sin(-150)) & \quad \sin(-150) = -\sin 30 \\ &= 8(\cos 30 - i(-\sin 30)) = 8(\cos 30 + i \sin 30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (24) \quad -\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) &= \sqrt{2}(-\cos \frac{7\pi}{6} - i \sin \frac{7\pi}{6}) \\ &= \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

$$(25) \quad 2(\cos 45 + i \sin 405) = 2(\cos 45 + i \sin 45)$$

$$\begin{aligned} (26) \quad 4(-\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) &= \quad -\cos \frac{\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) \\ &= 4(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) \quad = \cos \frac{7\pi}{6} \\ & \quad \sin \frac{\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (27) \quad 5(\cos(-60) + i \sin(-60)) &= 5(\cos 60 - i \sin 60) \\ &= 5(\cos 300 + i \sin 300) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (28) \quad 3(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}) &= \quad \sin \frac{\pi}{3} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) \\ &= 3(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \quad = \cos \frac{\pi}{6} \\ & \quad \cos \frac{\pi}{3} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) \\ & \quad = \sin \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$(26) 4\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$(27) 5(\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ))$$

$$(28) 3\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

في التمارين (29-33)، ضع كلاً مما يلي في الصورة الجبرية:

$$(29) 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$(30) \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 - i$$

$$(31) \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$(32) 7\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{2}i$$

$$(33) \sqrt{3}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة:  $A(4, \frac{7\pi}{6})$  هي:  $A(-2\sqrt{3}, 2)$   a  b
- (2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة:  $B(\sqrt{2}, 135^\circ)$  هي:  $B(-1, 1)$   a  b
- (3) الإحداثيات القطبية للنقطة:  $M(1, \frac{5\pi}{4})$  هي:  $M(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$   a  b
- (4) العدد المركب:  $z = \sqrt{3} - i$  بصورة المثلثية هو:  $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$   a  b
- (5) الصورة الجبرية للعدد المركب:  $z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$  هي:  $z = 1 - i$   a  b
- (6) السعة الأساسية للعدد  $z = \cos 30^\circ + i\cos 240^\circ$  هي  $330^\circ$   a  b

في التمارين (7-13)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

- (7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة:  $A(4, \frac{5\pi}{3})$  هي:  a  b  c  d
- (8) الإحداثيات القطبية للنقطة:  $B(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  هي:  a  b  c  d

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب:  $z = 2 - 2\sqrt{3}i$  حيث  $\theta \in [0, 2\pi)$  هي:

a  $z = 4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

b  $z = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

c  $z = 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

d  $z = 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب:  $z = \frac{-4}{1-i}$  حيث  $0 \leq \theta < 2\pi$  هي:

a  $z = 4\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

b  $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

c  $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

d  $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب:  $z = 3\left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$  حيث  $0 \leq \theta < 2\pi$  هي:

a  $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

b  $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

c  $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

d  $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12)  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$  فإن قيمة  $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$  تساوي:  $(1+i^6) i^{2n+2}$

a 1

b 0

c -1

d  $i^{-2n}$

(13)  $(6 - 2i + 3i^5)^2$  تساوي:

a  $35 - 12i$

b  $35 + 12i$

c  $81 - 12i$

d  $81 + 12i$

حل المسائل  
المجموعة A كما بين مقاليد P.15

$$\textcircled{1} \quad 3z - 1 + i = 5 - 2i$$

$$3z = 5 + 1 - 2i - i$$

$$3z = 6 - 3i$$

$$z = 2 - i$$

$$\textcircled{2} \quad z + 2\bar{z} = 4 + i$$

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$a + bi + 2(a - bi) = 4 + i$$

$$a + 2a + bi - 2bi = 4 + i$$

$$3a - bi = 4 + i$$

$$3a = 4 \quad -b = 1$$

$$a = \frac{4}{3}$$

$$b = -1 \Rightarrow z = \frac{4}{3} - i$$

$$\textcircled{3} \quad 5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$$

$$2z = 5 - 6i$$

$$z = \frac{5}{2} - 3i$$

$$\textcircled{4} \quad z + 3(1+i)z - 8(2-i) = 0$$

$$z = a + bi$$

$$[1 + (3 + 3i)](a + bi) - 16 + 8i = 0$$

$$(4 + 3i)(a + bi) = 16 - 8i$$

$$z = \frac{16 - 8i}{4 + 3i} \times \frac{4 - 3i}{4 - 3i}$$

$$z = \frac{8}{5} - \frac{16}{5}i$$

اريد مجموعة حل لكل من المعادلات التالية

$$(5) 16x^2 + 64 = 0$$

$$16x^2 = -64$$

$$x^2 = \frac{-64}{16} \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$$

$$\{2i, -2i\} = \text{مجموعة الحل}$$

$$(6) x^2 - 5x + 7 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 7$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(7) = -3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{-3}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\left\{ \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\} = \text{مجموعة الحل}$$

$$(7) x^2 + 5x + 25 = 0$$

$$\{-3 - 4i, -3 + 4i\} = \text{مجموعة الحل}$$

$$(8) z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$\{1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i\} = \text{مجموعة الحل}$$

$$(9) z + \frac{4}{z} = 2$$

$$z^2 + 4 = 2z \Rightarrow z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$\{1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i\} = \text{مجموعة الحل}$$

⑩ لتكن المعادلة  $z^2 + z + 2 = 0$  بدون حل المعادلة  
اثبت ان  $\frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$  هو جذر المعادلة ثم اوجد الجذر الثاني

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}\right) + 2 =$$

$$= \frac{-3 - \sqrt{7}i}{2} + \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2} + 2 =$$

$$\frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{7}i}{2} + \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2} + 2 = 0$$

$$\frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$$

∴ هو جذر المعادلة  
ويكون الجذر الثاني

ملاحظة:

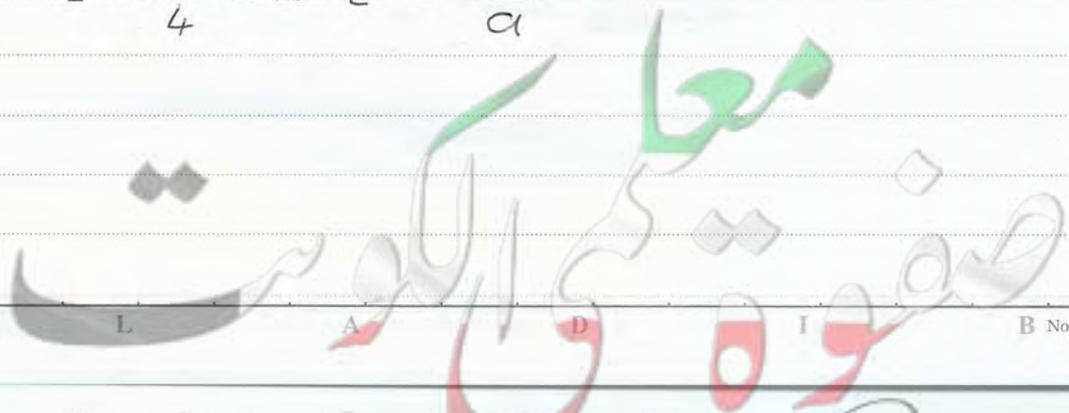
$$z_1 + z_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2} = \frac{-2}{2} = -1 = \frac{b}{a}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}\right) \left(\frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1 + \sqrt{7}i)(-1 - \sqrt{7}i)}{4}$$

$$= \frac{(-1)^2 + (\sqrt{7})^2}{4}$$

$$= \frac{1 + 7}{4} = 2 = \frac{c}{a}$$



⑪ اوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب  $Z = -3 + 4i$

بفرض ان  $m+ni$  هو الجذر التربيعي للعدد  $Z$  فيكون

$$w^2 = Z \Rightarrow (m+ni)^2 = -3+4i$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = -3 + 4i$$

بالمطابقة

$$m^2 - n^2 = -3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2mn = 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$|w|^2 = |Z| \Rightarrow (\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{(-3)^2+(4)^2}$$

$$m^2 + n^2 = \sqrt{(-3)^2+(4)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \quad \dots \textcircled{3}$$

بجمع  $\textcircled{1}$  و  $\textcircled{3}$

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow$$

$$m = 1 \quad \text{or} \quad m = -1$$

بالتعويض في  $\textcircled{2}$  نجد

$$2mn = 4$$

$$2mn = 4$$

$$2(1)n = 4$$

$$2(-1)n = 4$$

$$n = 2$$

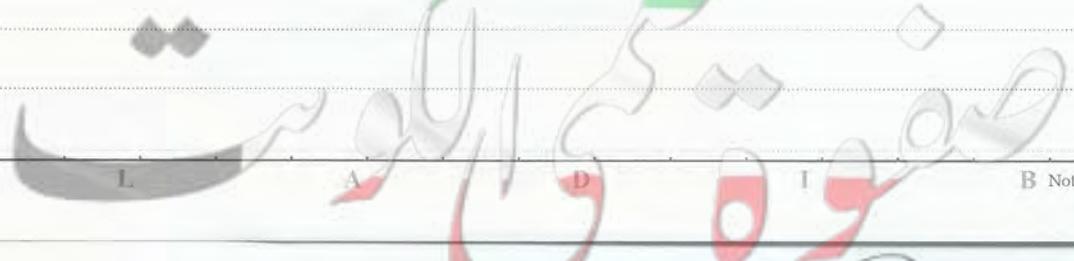
$$n = -2$$

الجذرين التربيعيين

$$1+2i$$

$$-1-2i$$

منلاحظ ان احد جذرين التربيعيين يقابلهما الآخر



(12) اوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب  $Z = 5 + 12i$

بفرض أن  $w = a + bi$  هو الجذر التربيعي للعدد  $Z$  فيكون

$$w^2 = Z \Rightarrow (a + bi)^2 = 5 + 12i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$$

بالمطابقة

$$a^2 - b^2 = 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2ab = 12 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$|w|^2 = |Z| \Rightarrow (\sqrt{m^2 + n^2})^2 = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$a^2 + b^2 = 13 \quad \dots \textcircled{3}$$

بجمع  $\textcircled{3}$ ,  $\textcircled{1}$

$$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$a = 3$$

or

$$a = -3$$

بالتعويض في  $\textcircled{2}$

$$2ab = 12$$

$$2ab = 12$$

$$2(3)b = 12$$

$$2(-3)b = 12$$

$$b = 2$$

$$b = -2$$

∴ الجذرين التربيعين

$$3 + 2i$$

$$-3 - 2i$$

ونلاحظ أنه هذين الجذرين أحدهما النقيض الكلي للآخر

$$(2+i)z^2 = 22-19i \quad \text{حل المعادلة} \quad (14)$$

$$z^2 = \frac{22-19i}{2+i} = 5-12i$$

بفرض  $z = a+bi$  فيكون  $(a+bi)^2 = 5-12i$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 5 - 12i$$

بالطابقه

$$a^2 + b^2 = 5 \quad \text{--- (1)}$$

$$2ab = -12 \quad \text{--- (2)}$$

$$|w|^2 = |z|^2 \Rightarrow (\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{5^2+(-12)^2}$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{5^2+(-12)^2} = 13$$

$$a^2 + b^2 = 13 \quad \text{--- (3)}$$

بجمع (1) و (3) نجد  $2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$

$$a = 3 \quad \text{or} \quad a = -3$$

بالتعويض في (2)

$$2ab = -12$$

$$2ab = -12$$

$$2(3)b = -12$$

$$2(-3)b = -12$$

$$b = -2$$

$$b = 2$$

$$z_1 = 3 - 2i$$

$$z_2 = -3 + 2i \quad \text{انز}$$

$$\{3-2i, -3+2i\} \quad \text{الحل للمعادلة}$$

## المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة:  $\bar{z} + 2 = 5 - i$  هو:  $z = 3 + i$   a  b

(2) حل المعادلة:  $2z + \bar{z} - 3 - 5i = 0$  هو:  $z = 1 - 5i$   a  b

(3) مجموعة حل المعادلة:  $z^2 - 4z + 5 = 0$  هي:  $\{-2 - i, 2 + i\}$   a  b

(4) الجذران التربيعيان للعدد  $-1$  هما:  $1, -1$   a  b

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب:  $z = 16 + 30i$  هما:  $z_1 = 5 + 3i, z_2 = -5 - 3i$   a  b

(6) إذا كان  $z_1, z_2$  جذران تربيعيان للعدد  $z$  فإن  $z_1 + z_2 = 0$   a  b

في التمارين (7-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة:  $2z - 5 + 6i = -3\bar{z}$  هو:

a  $z = 1 + 6i$        b  $z = -1 + 6i$        c  $z = 1 - 6i$        d  $z = -1 - 6i$

(8) مجموعة حل المعادلة:  $z^2 - 4z + 20 = 0$  هي:

a  $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$        b  $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

c  $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$        d  $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

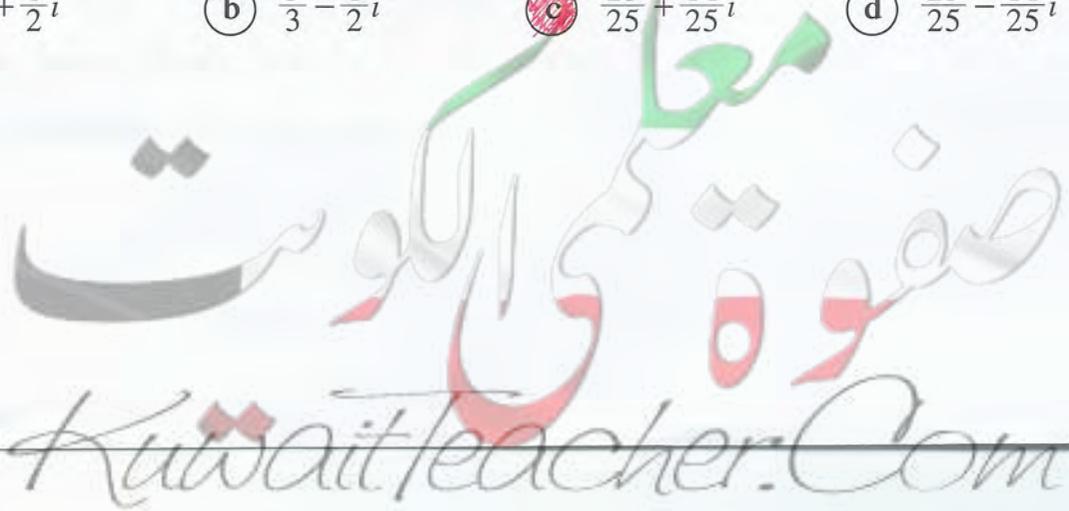
(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب:  $z = 33 - 56i$  هما:

a  $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$        b  $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

c  $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$        d  $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة  $(3 - 4i)z = 5 - 2i$  هو:

a  $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$        b  $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$        c  $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$        d  $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$



اختيار، العدد السابق

بسط كلا من المتباين التاليين

$$\textcircled{1} 4\sqrt{-9} - 2 = -2 + 12i$$

$$\textcircled{2} (4-i) + (5-9i) = 9-10i$$

$$\textcircled{3} (-3+2i) - (6+i) = -9+i$$

$$\textcircled{4} (2+3i)(8-5i) = (16+15) + (-10+24)i = 31+14i$$

$$\textcircled{5} \text{ المعكوس المجهول للعدد } 3-7i \text{ هو } -3+7i$$

$$\frac{1}{3-7i} = \frac{3+7i}{3^2+7^2} = \frac{3}{58} + \frac{7}{58}i$$

المتكوس العكسي للعدد  $3-7i$  هو  $3+7i$

$$\textcircled{6} \text{ اوجد القيمة المطلقة للعدد } 7-2i$$

$$|7-2i| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$$

العدد  $\textcircled{7}$

$$\textcircled{a} -3i^{77} = -3i$$

$$\textcircled{b} i^{50} = -1$$

$$\textcircled{8} (-2+3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$$

العدد مجموعة حل المعادلة  $2x^2+10=0$

$$x^2 = -5$$

$$x = \sqrt{5}i, \quad x = -\sqrt{5}i$$

مجموعة الحل =  $\{\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i\}$

٩) أكتب الأس في الصورة الجبرية ثم حولها

$$\frac{1+3i}{3+2i}$$

إلى الصورة المثلثية:

$$\frac{1+3i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(3+6) + (-2+9)i}{9+4} = \frac{9}{13} + \frac{7}{13}i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{9}{13}\right)^2 + \left(\frac{7}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{13}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{\frac{7}{13}}{\frac{9}{13}} \right| = \frac{7}{9} \Rightarrow \alpha = 37^\circ 52' 30''$$

$\theta = \alpha = 37^\circ 52' 30''$  ← تقع في الربع الأول

∴ الصورة المثلثية:

$$Z = \frac{\sqrt{130}}{13} (\cos 37^\circ 52' 30'' + i \sin 37^\circ 52' 30'')$$

١٠) اوجد مجموعة حل المعادلة

$$\frac{Z+1}{Z-1} = 2i$$

$$2i(Z-1) = Z+1$$

$$2iZ - 2i = Z+1$$

$$2iZ - Z = 1+2i$$

$$Z(2i-1) = 1+2i \Rightarrow Z = \frac{1+2i}{-1+2i}$$

$$Z = \frac{1+2i}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{(-1+4) + (-2-2)i}{1+4} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

(11) اوجد مرافق العدد  $\frac{3-i}{1+i}$

$$\frac{3-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{(3-1) + (-3+1)i}{1+1} = \frac{2}{2} + \frac{-4}{2}i$$

$$= 1 - 2i$$

$$\left( \frac{3-i}{1+i} \right) = 1 + 2i$$

(12) حل المعادلة

$$2z^2 - 6z + 5 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -6 \quad c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(2)(5) = -4$$

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{-4}}{2 \times 2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{-4}}{2 \times 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right\} = \text{مجموعة الحل}$$

(13) اكتب الأعداد التالية بالصيغة القطبية

(a)  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 0 + i \sin 0)$

(b)  $-3i = 3(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$

(c)  $2\sqrt{3} + 6i = 4\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$

(14) أكتب العدد  $Z = -3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$  في الصورة الجبرية  
في الصورة الجبرية بتعداً إلى الصورة الجبرية

$$Z = 3(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})$$

$$= 3(\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i \sin(\pi + \frac{\pi}{3}))$$

$$= 3(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$$

(15) أكتب العدد  $Z = \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$  في الصورة الجبرية

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\pi}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$Z = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$$

(16) اوجد الجذرين التربيعين للعدد  $-8 + 6i$

الجذرين التربيعين!

$$1 + 3i \quad , \quad -1 - 3i$$

(17) أكتب  $-2 + \frac{3}{2}i$  في الصورة الجبرية  $4z^2 + 16z + 25 = 0$  هو احد جذري المعادلة

(ب) اوجد الجذر الآخر

$$4(-2 + \frac{3}{2}i)^2 + 16(-2 + \frac{3}{2}i) + 25 =$$

$$= 4(\frac{7}{4} - 6i) + 16(-2 + \frac{3}{2}i) + 25$$

$$= 7 - 24i + -32 + 24i + 25 = 0$$

$$-2 - \frac{3}{2}i$$

الجذر الآخر

(a)  $y = 3 \cos x$

(b)  $y = \sin 2x$

(c)  $y = 3 \sin \frac{x}{3}$

(d)  $y = \frac{1}{3} \cos \frac{x}{2}$

الحل :

(a)  $y = 3 \cos x$

$\therefore a = 3, b = 1$

$|a| = 3$

سعة الدالة :

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

دورة الدالة :

(b)  $y = \sin 2x$

$\therefore a = 1, b = 2$

$|a| = 1$

سعة الدالة :

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

دورة الدالة :

(c)  $y = 3 \sin \frac{x}{3}$

$\therefore a = 3, b = \frac{1}{3}$

$|a| = |3| = 3$

السعة :

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = 6\pi$

الدورة :

(d)  $y = \frac{1}{3} \cos \frac{x}{2}$

$\therefore a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$

$|a| = |\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$

السعة :

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

الدورة :

② ص ١٩ أكتب معادلة الدالة على الصورة  $y = a \sin(bx)$  في كل

من الحالات التالية:

٩) الدورة  $\frac{2\pi}{3}$  و  $a=1$

الحل:

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3 \quad \text{الدورة:}$$

$$\therefore y = a \sin(bx) \Rightarrow$$

$$y = \sin 3x \quad \text{أو} \quad y = \sin(-3x)$$

١٠) الدورة  $\pi$  و  $a = \frac{1}{3}$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \quad \text{الدورة:}$$

$$\therefore y = \frac{1}{3} \sin(2x) \quad \text{أو} \quad y = \frac{1}{3} \sin(-2x)$$

١١) الدورة  $4\pi$  و  $a = -4$

الحل:

$$\frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \quad \text{الدورة:}$$

$$\therefore y = a \sin(bx)$$

$$y = -4 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \quad \text{أو} \quad y = -4 \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

اكتب معادلة الدالة على الصورة  $y = a \cos(bx)$  في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة  $3\pi$  و  $a = 5$

الحل  
الدورة:  $\frac{2\pi}{|b|} = 3\pi \Rightarrow |b| = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{2}{3}$

$\therefore y = a \cos(bx)$   
 $y = 5 \cos(\frac{2}{3}x)$  أو  $y = 5 \cos(-\frac{2}{3}x)$

(b) الدورة  $\pi$  ،  $a = -\frac{1}{2}$

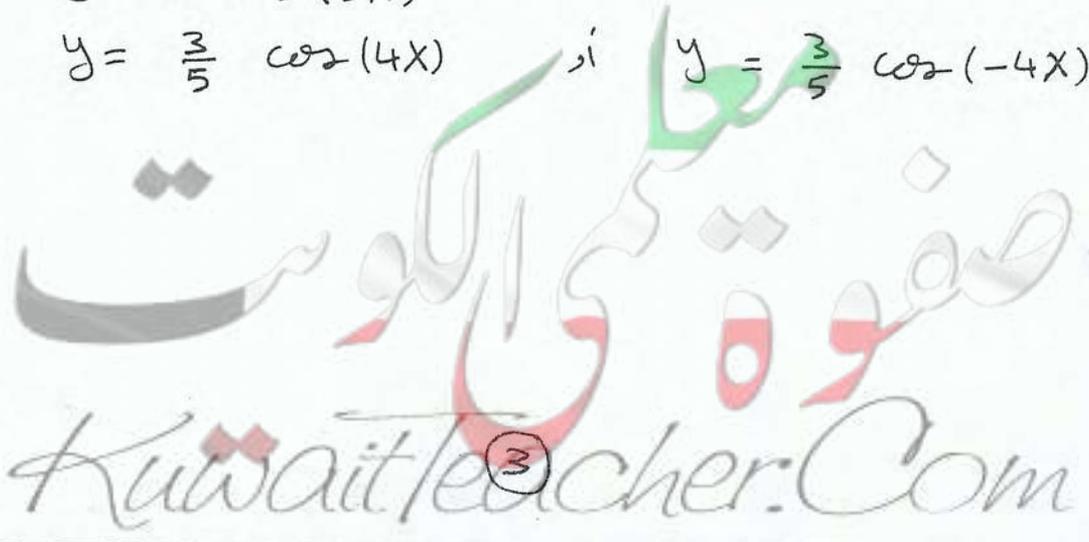
الحل  
الدورة:  $\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$

$\therefore y = a \cos(bx)$   
 $y = -\frac{1}{2} \cos(2x)$  أو  $y = -\frac{1}{2} \cos(-2x)$

(c) الدورة  $\frac{\pi}{2}$  ،  $a = \frac{3}{5}$

الحل  
الدورة:  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4 \Rightarrow b = \pm 4$

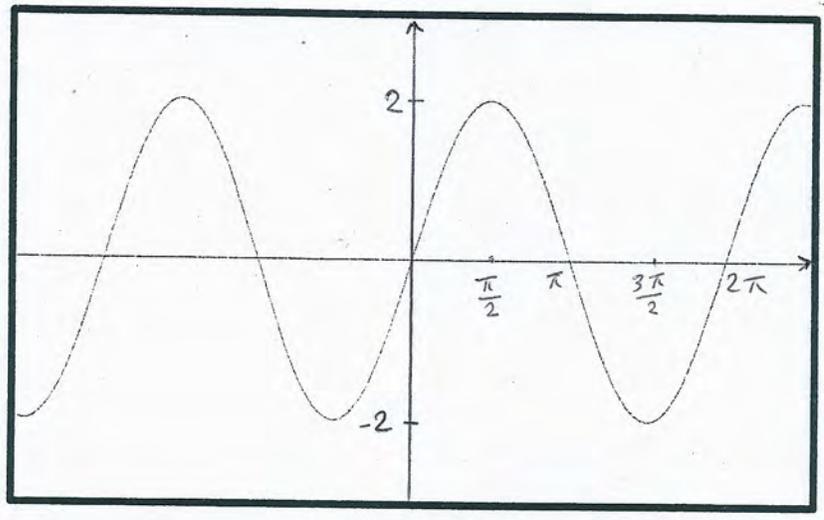
$\therefore y = a \cos(bx)$   
 $y = \frac{3}{5} \cos(4x)$  أو  $y = \frac{3}{5} \cos(-4x)$



(4) مثل بيانياً دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

- (a)  $y = 2 \sin x$
- (b)  $y = -3 \sin x$
- (c)  $y = 0.5 \sin 2x$
- (d)  $y = 4 \sin \frac{1}{2} x$
- (e)  $y = -\sin 5x$
- (f)  $y = 3 \cos x$
- (g)  $y = 3 \cos 5x$
- (h)  $y = -\cos 3x$
- (i)  $y = \cos 2x$

(a)  $y = \sin x$



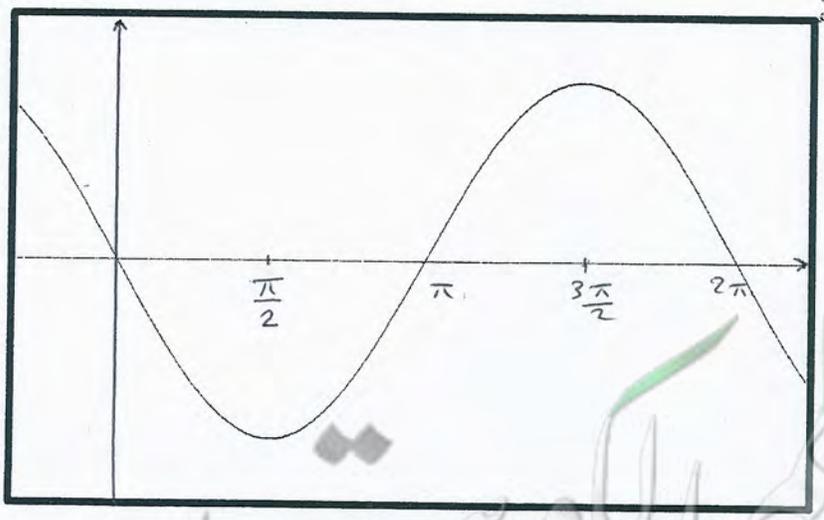
الخط الدالة دورية مجالها  $\mathbb{R}$

السعة:  $|a| = |2| = 2$   
 الدورة:  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ربع الدورة:  $\frac{\pi}{2}$

X	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
SinX	0	1	0	-1	0
2SinX	0	2	0	-2	0

(b)  $y = -3 \sin x$



الخط الدالة دورية مجالها  $\mathbb{R}$

السعة:  $|a| = |-3| = 3$   
 الدورة:  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ربع الدورة:  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

X	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
SinX	0	1	0	-1	0
-3SinX	0	-3	0	3	0

Ⓕ  $y = 3 \cos x$

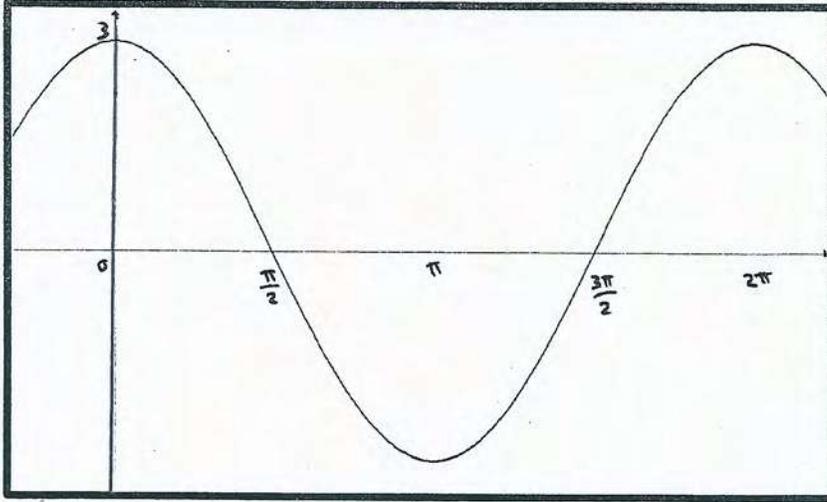
نظري

(الدالة  $y = 3 \cos x$  دالة دورية)

السعة:  $|a| = |3| = 3$

الدورة:  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ربع الدورة:  $\frac{\pi}{2}$



$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$3 \cos x$	3	0	-3	0	3

Ⓖ  $y = -\cos 3x$

نظري

(الدالة  $y = -\cos 3x$  دالة دورية بمجال  $\mathbb{R}$ )

$|a| = |-1| = 1$

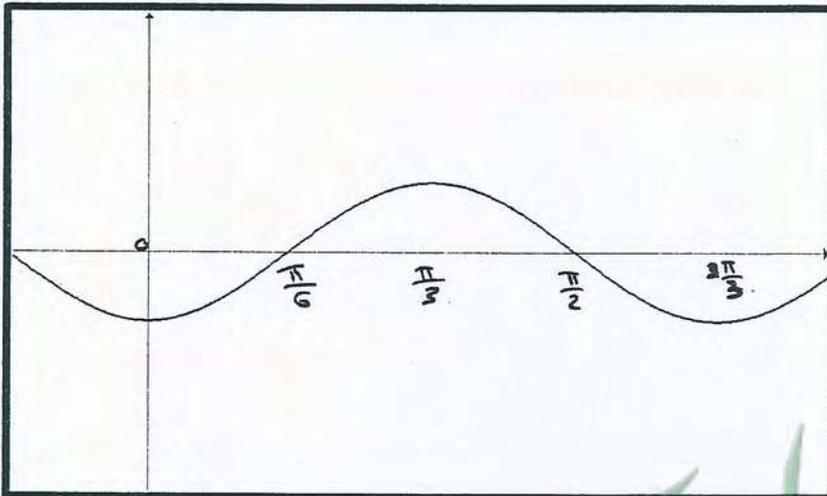
السعة: 1

الدورة:  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$

ربع الدورة:  $\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6}$

ربع الدورة:



$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos 3x$	1	0	-1	0	1
$-\cos 3x$	-1	0	1	0	-1

حدد دورة كل حالة مما يلي :

٥) ١٩

(a)  $y = \tan 5x$

الملاحظة  $y = \tan 5x$  هي دالة دورية الخط

الدورة :  $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5}$

---

(b)  $y = \tan \frac{3x}{2}$

الملاحظة  $y = \tan \frac{3x}{2}$  هي دالة دورية الخط :

الدورة :  $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|\frac{3}{2}|} = \frac{2\pi}{3}$

---

٦) ٢٥

اكتب معادلة الدالة عاكس الصورة  $y = \tan(bx)$  في كل من الحالات التالية :

(a) الدورة  $\frac{\pi}{5}$

الخط : الدورة :  $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = \pm 5$

$\therefore y = \tan(bx)$

$y = \tan(5x)$  أو  $y = \tan(-5x)$

---

(b) الدورة  $\frac{2\pi}{3}$  الخط

$\frac{\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$

$\therefore y = \tan(\frac{3}{2}x)$  أو  $y = \tan(-\frac{3}{2}x)$

٦

(7) مثل بيانياً دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية.

(a)  $y = \tan 2x$

(b)  $y = \tan \frac{x}{2}$

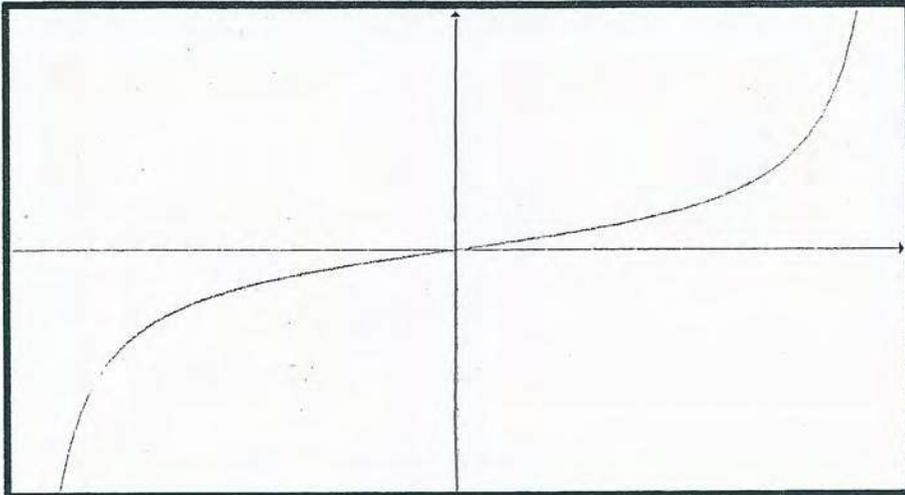
(c)  $y = -3 \tan x$

Ⓐ  $y = \tan 2x$

الخط الدالة دوريه

الدورة:  $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$

ربع الدورة:  $\frac{\pi}{8}$



$x$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$2x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan 2x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

Ⓑ  $y = -3 \tan x$

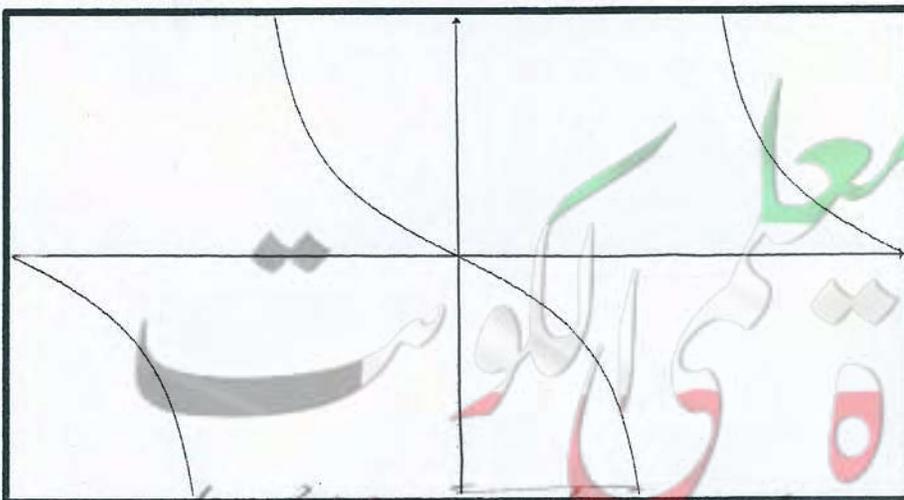
دوران

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف
$-3 \tan x$	غير معرف	3	0	-3	غير معرف

والدالة دوريه

الدورة:  $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

ربع الدورة:  $\frac{\pi}{4}$



صدق

(1) صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين  $f, h$  لكل مسألي:

(a)  $f(x) = \cos 2x, h(x) = \frac{5}{3} \cos 2x$

(b)  $f(x) = \sin \frac{x}{3}, h(x) = \frac{-2}{3} \sin \frac{x}{3}$

عليه حصول على التمثيل البياني للدالة  $h$  من  
التمثيل البياني للدالة  $f$  بتعدد رأسه  
عامله  $a = \frac{5}{3}$

عليه حصول على التمثيل البياني للدالة  $h$  من التمثيل  
البياني للدالة  $f$  بانكس رأسه عامله  $|a| = \frac{2}{3}$   
:: سالبه :: يوجد انعكاس في محور السينات

(c)  $f(x) = \sin x, h(x) = \sin 3x$

(d)  $f(x) = \cos x, h(x) = \cos \frac{x}{5}$

عليه حصول على التمثيل البياني للدالة  $h$  من التمثيل  
البياني للدالة  $f$  بانكس رأسه  
عامله  $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{3}$

عليه حصول على التمثيل البياني للدالة  $h$  من التمثيل  
البياني للدالة  $f$  بتعدد أقطر عامله  
 $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

(e)  $f(x) = \sin x, h(x) = -\frac{1}{3} \sin(-2x)$

(f)  $f(x) = \cos x, h(x) = 1.5 \cos 4x$

$h(x) = -\frac{1}{3} \sin(-2x)$   
 $\Rightarrow h(x) = \frac{1}{3} \sin 2x$

عليه حصول على التمثيل البياني للدالة  $h$  من التمثيل البياني للدالة  $f$   
بانكس رأسه عامله  $\frac{1}{3}$  وانكس رأسه أقطر عامله  $\frac{1}{2}$

عليه حصول على التمثيل البياني للدالة  $h$  من  
التمثيل البياني للدالة  $f$  بتعدد رأسه  
عامله 1.5 وانكس رأسه أقطر عامله  $\frac{1}{4}$

(g)  $f(x) = \cos 2x, h(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

(h)  $f(x) = \sin 3x, h(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{4})$

$h(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow h(x) = \cos 2(x + \frac{\pi}{6})$   
 $\Rightarrow h(x) = \cos 2(x - (-\frac{\pi}{6}))$

عليه حصول على التمثيل البياني للدالة  $h$  من التمثيل البياني للدالة  $f$   
بإزاحة أقطره لليسار بقطر  $\frac{\pi}{6}$

$h(x) = \sin(3(x - \frac{\pi}{12}))$

عليه حصول على التمثيل البياني للدالة  $h$  من التمثيل البياني  
للدالة  $f$  بإزاحة أقطره لليمين بقطر  
 $\frac{\pi}{12}$

(i)  $f(x) = 0.3 \cos 2x, h(x) = 0.3 \cos 2x + 4$

(j)  $f(x) = 3 \sin \frac{x}{2}, h(x) = 3 \sin \frac{x}{2} - 1$

عليه حصول على التمثيل البياني للدالة  $h$  من التمثيل البياني  
للدالة  $f$  بإزاحة رأسه لأعلى 4 وحدات

عليه حصول على التمثيل البياني للدالة  $h$  من  
التمثيل البياني للدالة  $f$  بإزاحة رأسه  
وعدة واحدة لأقل

ص ٤٢

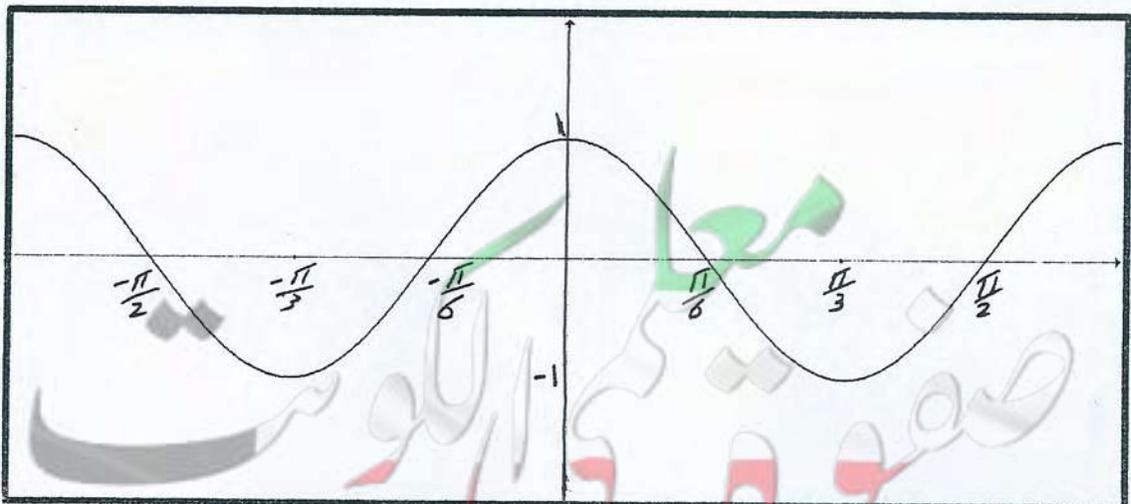
(2) صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من  $y_1 = \cos x$  ،  $y_2 = \cos 3x$  ثم ارسم دورتين من الدالة  $y_2$

بطلبه الحصول على التمثيل البياني للدالة  $y_2 = \cos 3x$  صد التمثيل لبيان للدالة  $y_1 = \cos x$  بالكمائن أنقصر معاملة  $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{|3|} = \frac{1}{3}$

نظرة أخرى معاملة بالكمائن  $\frac{1}{3}$

$x_1$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y_1$	1	0	-1	0	1
$x_2$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$y_2$	1	0	-1	0	1

صيغة الدالة  $y_2 = \cos 3x$   
 دستة  $|a| = |1| = 1$   
 دورتها  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$   
 ربع الدورة  $\frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$



(3) وضح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين باستخدام تحويلات الدوال المثلثية  $y = \sin x$  أو  $y = \cos x$ ، ثم أوجد سعة كل دائرة ودورتها.

(a)  $y = -2 \sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$

(b)  $y = +3.5 \sin(2x - \frac{\pi}{2}) - 1$

٢٢  
صت

٩)  $y = -2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1 \Rightarrow y = -2 \sin(x - (-\frac{\pi}{4})) + 1$

بالمقارنة مع  $y = a \sin(b(x - \frac{h}{b})) + k$

فإنه  $a = -2$  ،  $b = 1$  ،  $\frac{h}{b} = -\frac{\pi}{4}$  ،  $k = 1$

يتم الحصول على التمثيل البياني للدالة  $y$  من التمثيل البياني للدالة  $\sin x$  بطريقة التحويلات التالية بسبب الترتيب التالي:

أولاً: إزاحة أفقية إلى اليسار بمقدار  $\frac{\pi}{4}$  للحصول على  $\sin(x + \frac{\pi}{4})$

ثانياً: تمدد رأسر بعامل  $|a| = |-2| = 2$  للحصول على  $2 \sin(x + \frac{\pi}{4})$

ثالثاً: انعكاس في محور السينات للحصول على  $-2 \sin(x + \frac{\pi}{4})$

رابعاً: إزاحة رأسية وحدة لأعلى للحصول على  $y = -2 \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1$

وتكون سعة:  $|a| = |-2| = 2$

دورتها:  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

b)  $y = 3.5 \sin(2x - \frac{\pi}{2}) - 1$

$\Rightarrow y = 3.5 \sin(2(x - \frac{\pi}{4})) - 1$

بالمقارنة مع  $y = a \sin(b(x - \frac{h}{b})) + k$

فإنه  $a = 3.5$  ،  $b = 2$  ،  $\frac{h}{b} = \frac{\pi}{4}$  ،  $k = -1$

يتم الحصول على التمثيل البياني للدالة  $y$  من التمثيل البياني للدالة  $\sin x$  بطريقة التحويلات التالية:

أولاً: انكماش أفقي بعامل  $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{2}$  للحصول على  $\sin 2x$

ثانياً: إزاحة أفقية لليسار بمقدار  $\frac{\pi}{4}$  للحصول على  $\sin(2(x - \frac{\pi}{4}))$

ثالثاً: تمدد رأسر بعامل  $3.5$  و  $|3.5| = 3.5$  للحصول على  $3.5 \sin(2(x - \frac{\pi}{4}))$

رابعاً: إزاحة رأسية وحدة لأسفل للحصول على  $y = 3.5 \sin(2(x - \frac{\pi}{4})) - 1$

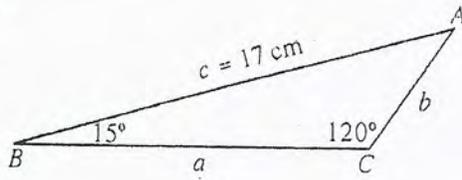
وتكون سعة:  $|a| = |3.5| = 3.5$

دورتها:  $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1-2)، حلّ كلّ من المثلثين التاليين:

(1)



الحل:

$$* \alpha = 180^\circ - (120^\circ + 15^\circ) = 45^\circ$$

$$* \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

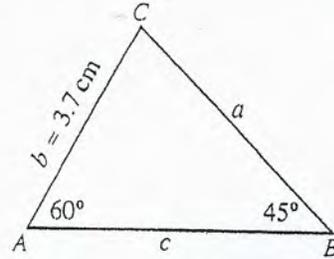
$$\frac{\sin 45^\circ}{a} = \frac{\sin 120^\circ}{17}$$

$$a = \frac{17 \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 13.9 \text{ cm}$$

$$* \frac{\sin 120^\circ}{17} = \frac{\sin 15^\circ}{b}$$

$$b = \frac{17 \sin 15^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 5.1 \text{ cm}$$

(2)



الحل:

$$* \gamma = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

$$* \frac{\sin 60^\circ}{a} = \frac{\sin 45^\circ}{3.7}$$

$$a = \frac{3.7 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 4.5 \text{ cm}$$

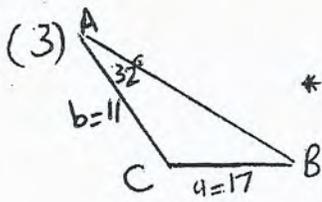
$$* \frac{\sin 75^\circ}{c} = \frac{\sin 45^\circ}{3.7}$$

$$c = \frac{3.7 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 5.1 \text{ cm}$$

في التمرينين (3-4)، حلّ المثلث ABC:

(3)  $m(\hat{A}) = 32^\circ, a = 17 \text{ cm}, b = 11 \text{ cm}$

الحل:



$$* \frac{\sin 32^\circ}{17} = \frac{\sin \beta}{11}$$

$$\sin \beta = \frac{11 \sin 32^\circ}{17} \approx 0.34$$

$$\therefore \beta_1 \approx 19.9^\circ \quad \text{or} \quad \beta_2 = 180 - 19.9 \approx 160.1^\circ$$

$$\beta_1 + \alpha < 180^\circ$$

مقبولة

$$\beta_2 + \alpha > 180^\circ$$

مرفوضة

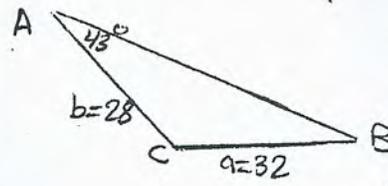
$$\therefore \gamma = 180^\circ - (32^\circ + 19.9^\circ) \approx 128^\circ$$

$$\therefore \frac{\sin 32^\circ}{17} = \frac{\sin 128^\circ}{c}$$

$$\therefore c = \frac{17 \sin 128^\circ}{\sin 32^\circ} \approx 25.3 \text{ cm}$$

(4)  $m(\hat{A}) = 43^\circ, a = 32 \text{ cm}, b = 28 \text{ cm}$

الحل:



$$\frac{\sin 43^\circ}{32} = \frac{\sin \beta}{28}$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{28 \sin 43^\circ}{32} \approx 0.47$$

$$\therefore \beta_1 = 36.2^\circ$$

$$\text{or} \quad \beta_2 = 180^\circ - 36.2^\circ = 143.8^\circ$$

$$\therefore \beta_1 + \alpha < 180^\circ$$

مقبولة

$$\therefore \beta_2 + \alpha > 180^\circ$$

مرفوضة

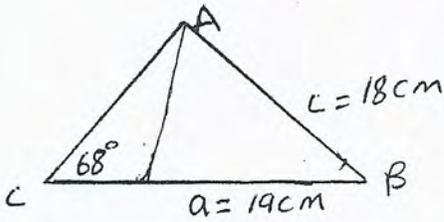
$$\therefore \gamma = 180^\circ - (36.2^\circ + 43^\circ) = 100.8^\circ$$

$$\therefore \frac{\sin 43^\circ}{32} = \frac{\sin 100.8^\circ}{c}$$

$$\therefore c = \frac{32 \sin 100.8^\circ}{\sin 43^\circ} \approx 46 \text{ cm}$$

في التمرينين (5-6)، يمكن تكوين مثلثين باستخدام القياسات المعطاة، حل كل منهما:

(5)  $m(\widehat{C}) = 68^\circ, a = 19 \text{ cm}, c = 18 \text{ cm}$



$$\frac{\sin 68^\circ}{18} = \frac{\sin \alpha}{19}$$

$$\sin \alpha = \frac{19 \sin 68^\circ}{18} \approx 0.98$$

$$\therefore \alpha_1 = 78.5^\circ \text{ or } \alpha_2 = 101.5^\circ$$

$$\alpha_1 + \gamma < 180^\circ$$

$$\beta_1 = 180^\circ - (68^\circ + 78.5^\circ) = 33.5^\circ$$

$$\frac{\sin 68^\circ}{18} = \frac{\sin 33.5^\circ}{b_1}$$

$$\therefore b_1 = \frac{18 \sin 33.5^\circ}{\sin 68^\circ}$$

$$b_1 \approx 10.7 \text{ cm}$$

$$\alpha_2 + \gamma < 180^\circ$$

$$\beta_2 = 180^\circ - (101.5^\circ + 68^\circ)$$

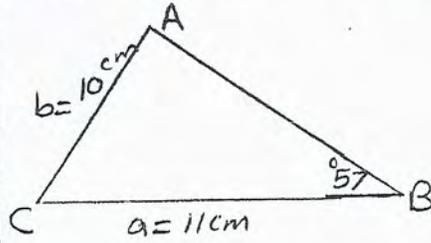
$$\beta_2 = 10.5^\circ$$

$$\frac{\sin 68^\circ}{18} = \frac{\sin 10.5^\circ}{b_2}$$

$$\therefore b_2 = \frac{18 \sin 10.5^\circ}{\sin 68^\circ}$$

$$b_2 \approx 3.5 \text{ cm}$$

(6)  $m(\widehat{B}) = 57^\circ, a = 11 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}$



$$\frac{\sin \alpha}{11} = \frac{\sin 57^\circ}{10}$$

$$\sin \alpha = \frac{11 \sin 57^\circ}{10} \approx 0.92$$

$$\therefore \alpha_1 \approx 67^\circ$$

$$\alpha_1 + \beta < 180^\circ$$

$$\therefore \gamma_1 = 180^\circ - (67^\circ + 57^\circ)$$

$$\gamma_1 \approx 56^\circ$$

$$\frac{\sin 57^\circ}{10} = \frac{\sin 56^\circ}{c_1}$$

$$\therefore c_1 = \frac{10 \sin 56^\circ}{\sin 57^\circ}$$

$$c_1 \approx 9.9 \text{ cm}$$

$$\text{or } \alpha_2 \approx 113^\circ$$

$$\alpha_2 + \beta < 180^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - (113^\circ + 57^\circ)$$

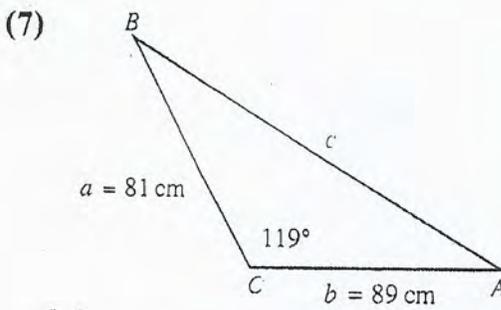
$$\gamma_2 \approx 10^\circ$$

$$\frac{\sin 57^\circ}{10} = \frac{\sin 10^\circ}{c_2}$$

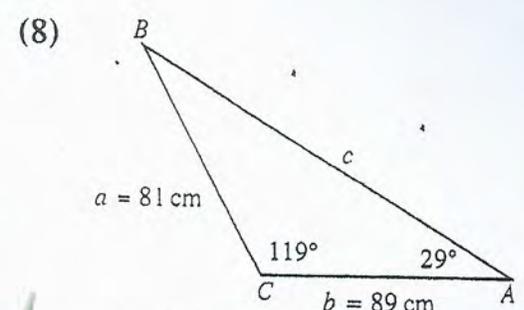
$$c_2 = \frac{10 \sin 10^\circ}{\sin 57^\circ}$$

$$c_2 \approx 2.1 \text{ cm}$$

في التمرينين (7-8)، قرر ما إذا كان يمكن حل المثلث باستخدام قانون الجيب، ثم حله إذا كان ذلك ممكناً. وإذا لم يكن ممكناً فاشرح السبب.

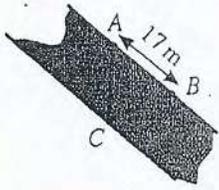


الحل:  
لا يمكن حل المثلث باستخدام قانون الجيب  
السبب:  
جانب مقابل لزاوية معلومة



الحل:  
 $B = 180^\circ - (119^\circ + 29^\circ) = 32^\circ$   
 $\frac{\sin 29^\circ}{81} = \frac{\sin 119^\circ}{c}$   
 $c = \frac{81 \sin 119^\circ}{\sin 29^\circ} \approx 146 \text{ cm}$

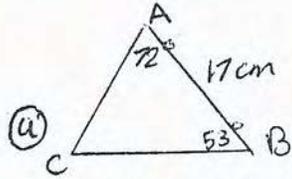
(9) مسح جداول المياه: تقع العلامتان A, B على الحافة نفسها لجدول مياه، تساوي المسافة بينهما 17 m وتقع علامة ثالثة C على الحافة المقابلة بحيث  $m(\widehat{ABC}) = 53^\circ$ ,  $m(\widehat{BAC}) = 72^\circ$



(a) أوجد المسافة بين A, C

(b) أوجد المسافة بين حافتي الجدول على افتراض أنهما متوازيتان.

الحل:



$$\textcircled{a} \quad r = 180^\circ - (72^\circ + 53^\circ) = 55^\circ$$

$$\frac{\sin 53^\circ}{AC} = \frac{\sin 55^\circ}{17}$$

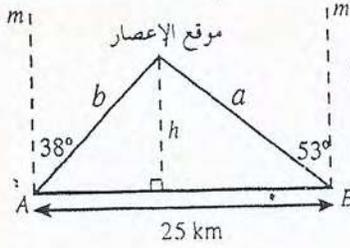
$$AC = \frac{17 \sin 53^\circ}{\sin 55^\circ} \approx 16.6 \text{ cm}$$

$$\textcircled{b} \quad \sin 72^\circ = \frac{h}{16.6}$$

$$h = 16.6 \sin 72^\circ \approx 15.8 \text{ cm}$$

(10) التوقع بحالة الطقس: وقف اثنان من مصلحة الأرصاد الجوية أحدهما في غرب الطريق عند النقطة A والآخر

في شرق الطريق عند النقطة B، تفصل بينهما مسافة 25 km



رأى الواقف عند النقطة A إعصارًا في اتجاه  $38^\circ$  شرق الشمال ورأى الواقف عند النقطة B الإعصار نفسه في اتجاه  $53^\circ$  غرب الشمال.

(a) أوجد المسافة بين كل من الشخصين وموقع الإعصار.

(b) أوجد المسافة بين الإعصار والطريق.

الحل:

$$\textcircled{a} \quad * \alpha = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 91^\circ$$

$$* \frac{\sin 52^\circ}{a} = \frac{\sin 91^\circ}{25}$$

$$a = \frac{25 \sin 52^\circ}{\sin 91^\circ} \approx 19.7 \text{ km}$$

$$* \frac{\sin 37^\circ}{b} = \frac{\sin 91^\circ}{25}$$

$$b = \frac{25 \sin 37^\circ}{\sin 91^\circ} \approx 15 \text{ km}$$

$$\textcircled{b} \quad \sin 52^\circ = \frac{h}{15}$$

$$\therefore h = 15 \sin 52^\circ \approx 11.8 \text{ km}$$

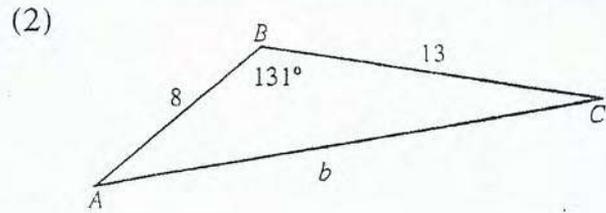
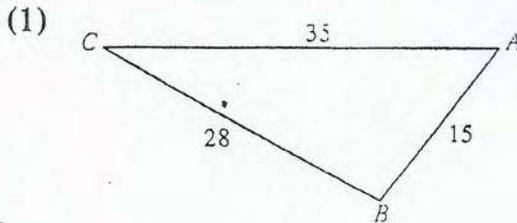
8-4

قانون جيب التمام

Law of Cosine

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1-2)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:



الحل: نوجد قياسات الزوايا الثلاث باستخدام قانون جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(35)^2 + (15)^2 - (28)^2}{2 \times 35 \times 15}$$

$$\cos \alpha = \frac{111}{175} \Rightarrow \alpha \approx 50.6^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{(28)^2 + (15)^2 - (35)^2}{2 \times 28 \times 15}$$

$$\cos \beta = -\frac{9}{35} \Rightarrow \beta \approx 104.9^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow \gamma \approx 24.5^\circ$$

[2]

الحل: نوجد  $\alpha$  ،  $\gamma$  ،  $b$ 

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$b^2 = (13)^2 + (8)^2 - 2 \times 13 \times 8 \cos 131^\circ$$

$$= 169 + 64 - 208 \cos 131^\circ$$

$$= 233 - 208 \times -0.656$$

$$b^2 = \frac{46181}{125} = 369.4$$

$$b = 19.22 \text{ cm}$$

لإيجاد قياس  $\alpha$  ،  $\gamma$  نستخدم قانون جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{369.4 + 64 - 169}{2 \times 19.22 \times 8}$$

$$\cos \alpha = 0.8597$$

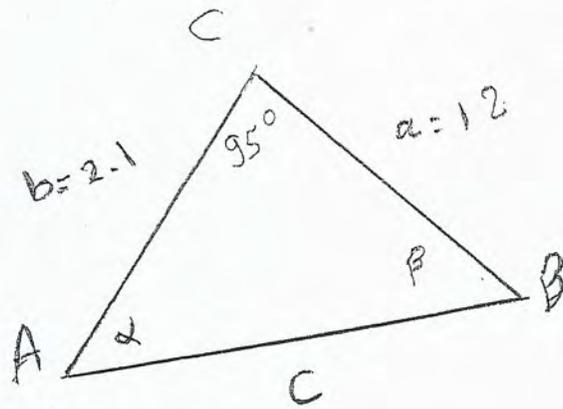
$$\alpha \approx 30.7^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{169 + 369.4 - 64}{2 \times 13 \times 19.22}$$

$$\cos \gamma = 0.9493 \Rightarrow \gamma \approx 18.3^\circ$$

(3)  $a = 12, b = 21, m(\widehat{C}) = 95^\circ$



$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ &= (12)^2 + (21)^2 - (2 \times 12 \times 21) \cos 95^\circ \\ &= 144 + 441 - 504 \cos 95^\circ \\ &= 585 - (-43.9264) \\ &= 628.9264 \end{aligned}$$

$$c \approx 25.0 \text{ cm}$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{441 + 628.9264 - 144}{2 \times 21 \times 25}$$

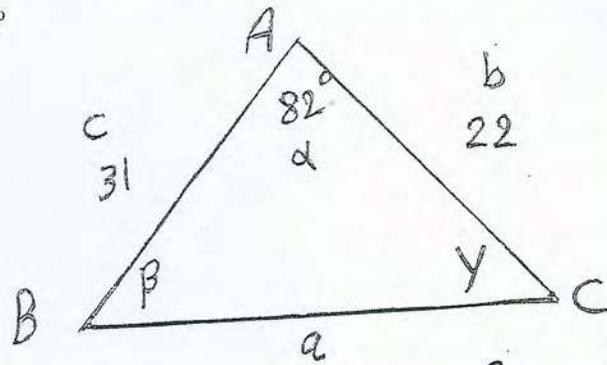
$$\cos \alpha = -0.3161 \Rightarrow \alpha \approx 28.6^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(12)^2 + 628.9264 - 441}{2 \times 12 \times 25}$$

$$\cos \beta = 0.55321$$

$$\beta \approx 56.4^\circ$$

(4)  $b = 22, c = 31, m(\widehat{A}) = 82^\circ$



الكل:- نوجد  $a, \beta, \gamma$

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ &= (22)^2 + (31)^2 - 2 \times 22 \times 31 \times \cos 82^\circ \\ &= 484 + 961 - 1364 \cos 82^\circ \\ &= 1445 - 189.832 \end{aligned}$$

$$a^2 = 1255.168$$

$$a = 35.4 \text{ cm}$$

لإيجاد قياس  $\beta, \gamma$  نستخدم قانون جيب التمام :-

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{1255.168 + 961 - 484}{2 \times 35.4 \times 31} \end{aligned}$$

$$\cos \beta = 0.789$$

$$\beta \approx 38^\circ$$

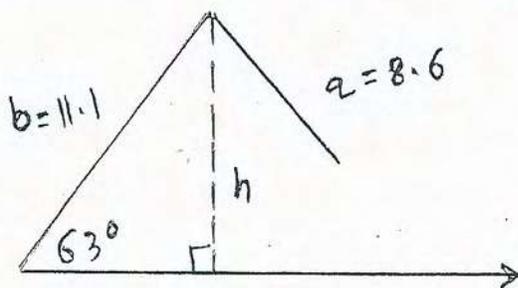
$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ \cos \gamma &= \frac{1255.168 + 484 - 961}{2 \times 35.4 \times 22} = 0.499594 \\ &\therefore \gamma \approx 60^\circ \end{aligned}$$

(5)  $a=1, b=5, c=4$

الحل :- لا يوجد ضللت لأن :-

$$\begin{aligned} a+c &= 1+4 \\ &= 5 \\ &= b \end{aligned}$$

(7)  $m(\widehat{A}) = 63^\circ, a = 8.6, b = 11.1$



الحل :-

$$\begin{aligned} h &= b \sin \alpha \\ &= 11.1 \times \sin 63^\circ \end{aligned}$$

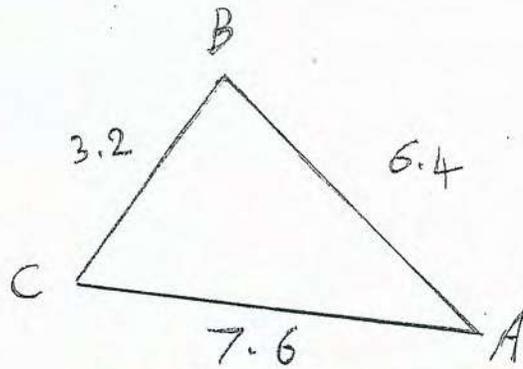
$$h = 9.89 \text{ cm}$$

$$\therefore a = 8.6 < 9.89$$

$$\therefore a < h$$

لا يوجد ضللت

(6)  $a = 3.2, b = 7.6, c = 6.4$



الحل :- نوجد قيمات الزوايا الثلاث باستخدام قانون جيب التمام :-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(7.6)^2 + (6.4)^2 - (3.2)^2}{2 \times 7.6 \times 6.4}$$

$$\cos \alpha = \frac{553}{668} = 0.9095$$

$$\alpha \approx 24.6^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

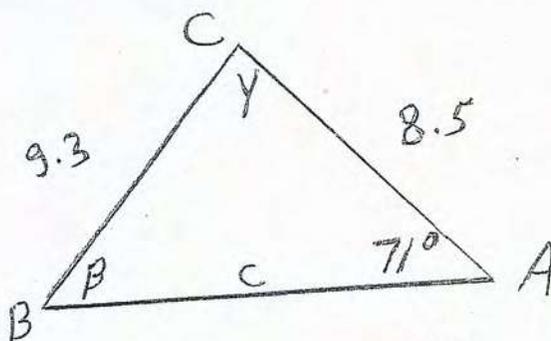
$$= \frac{(3.2)^2 + (6.4)^2 - (7.6)^2}{2 \times 3.2 \times 6.4}$$

$$\cos \beta = -\frac{41}{256} \Rightarrow \beta \approx 99.2^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(3.2)^2 + (7.6)^2 - (6.4)^2}{2 \times 3.2 \times 7.6}$$

$$\cos \gamma = \frac{169}{304} \Rightarrow \gamma \approx 56.2^\circ$$

(8)  $m(\hat{A}) = 71^\circ, a = 9.3, b = 8.5$



الحل :- نوجد  $c, \beta, \gamma$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$(9.3)^2 = (8.5)^2 + c^2 - 2 \times 8.5 \times c \times \cos 71^\circ$$

$$86.49 = 72.25 + c^2 - 5.53c$$

$$0 = c^2 - 5.53c - 14.24$$

$$c = \frac{5.53 \pm \sqrt{(-5.53)^2 + 4 \times 1 \times 14.24}}{2}$$

$c \approx 7.443$  أو  $c \approx -1.913$  (مرفوضه)  
∴ لدينا صلت واحد :-

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

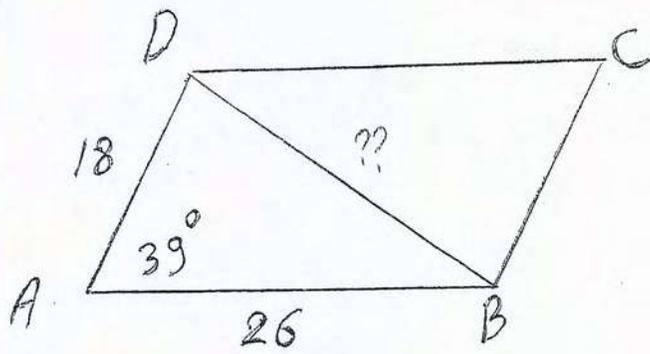
$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$$

$$\cos \beta = \frac{(9.3)^2 + (7.443)^2 - (8.5)^2}{2 \times 9.3 \times 7.443}$$

$$\cos \beta = 0.503 \Rightarrow \beta \approx 60^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \gamma \approx 49^\circ$$

(9) في الهندسة: متوازي أضلاع يساوي طول ضلعيه المتجاورين 18 cm، 26 cm وقياس الزاوية بينهما  $39^\circ$ .  
أوجد طول قطره الأصغر.



الحل :-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

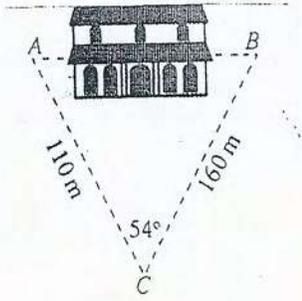
$$(DB)^2 = (18)^2 + (26)^2 - 2 \times 18 \times 26 \times \cos 39^\circ$$

$$= 324 + 676 - 936 \cos 39^\circ$$

$$= 1000 - 727.4$$

$$(DB)^2 = \frac{1363}{5}$$

$$DB = 16.5 \text{ cm.}$$



(10) قياس المسافة بطريقة غير مباشرة: أراد عادل أن يقيس المسافة بين نقطتين A و B في جهتين مختلفتين من مبنى وذلك من الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 110 m وعن B مسافة 160 m كما في الشكل المقابل.  
إذا كان  $m(\widehat{C}) = 54^\circ$ . فأوجد المسافة AB.

الحل :-

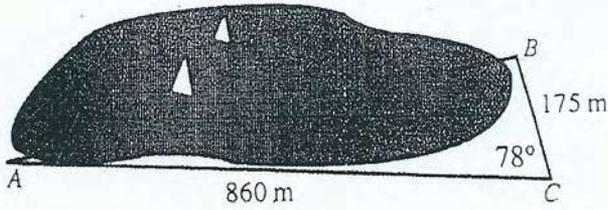
$$\begin{aligned} (AB)^2 &= (AC)^2 + (CB)^2 - 2(AC)(CB) \cos C \\ &= (110)^2 + (160)^2 - 2(110)(160) \cos 54^\circ \\ &= 12100 + 25600 - 35200 \cos 54^\circ \\ &= 37700 - 20690 \end{aligned}$$

$$(AB)^2 = 17010$$

$$(AB) = 9\sqrt{210}$$

$$AB = 130.4 \text{ m}$$

(11) حسابات مساحي الأراضي: أراد خالد أن يقيس المسافة من A إلى B في جهتين مختلفتين من البحيرة. فوقف في الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 860 m وعن B مسافة 175 m وقاس الزاوية C فوجد أن قياسها  $78^\circ$ ، أوجد طول المسافة AB.



الكل

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 - 2(BC)(AC) \cos C$$

$$= (175)^2 + (860)^2 - 2 \times 175 \times 860 \times \cos 78^\circ$$

$$= 30625 + 739600 - 301000 \cos 78^\circ$$

$$= 30625 + 739600 - 62581.4189$$

$$= 707643.5811$$

$$AB = 841.2155 \text{ m}$$

Area of Triangle

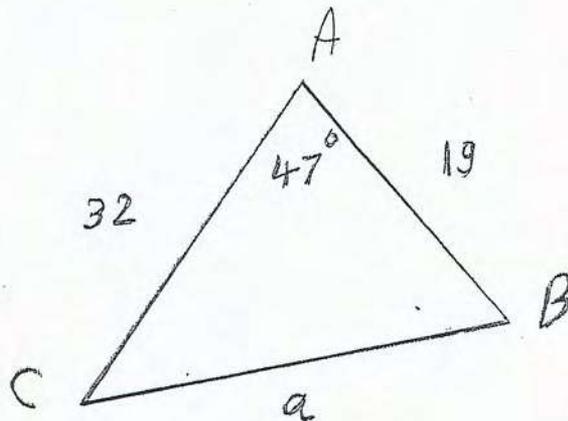
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1-2)، أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين.

(1)  $m(\hat{A}) = 47^\circ$ ,  $b = 32$  cm,  $c = 19$  cm

(2)  $a = 4$  cm,  $b = 5$  cm,  $c = 8$  cm

①



الحل :-

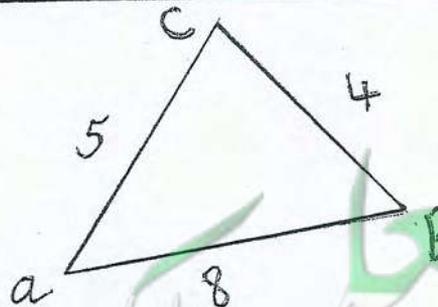
$$\text{Area} = \frac{1}{2} b c \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{2} \times 32 \times 19 \times \sin 47^\circ$$

$$= 304 \sin 47^\circ$$

$$\text{Area} \approx 222.33 \text{ cm}^2$$

②



$$s = \frac{1}{2} (a + b + c) = \frac{1}{2} (4 + 5 + 8)$$

$$s = \frac{1}{2} \times 17 = 8.5 \text{ cm}$$

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8.5(8.5-4)(8.5-5)(8.5-8)} = \frac{3\sqrt{119}}{4} \approx 8.181 \text{ cm}^2$$

في التمارين (3-6)، استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه كالتالي. (الأطوال بالسنتيمتر).

(3)  $a = 5, b = 9, c = 7$

(4)  $a = 23, b = 19, c = 12$

الحل

(3)  $S = \frac{1}{2} (a + b + c)$

$$= \frac{1}{2} (5 + 9 + 7)$$

$$= \frac{1}{2} \times 21$$

$$S = 10.5 \text{ cm}$$

$$\text{Area} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$= \sqrt{10.5(10.5-5)(10.5-9)(10.5-7)}$$

$$= \sqrt{10.5 \times 5.5 \times 1.5 \times 3.5}$$

$$\text{Area} = \frac{21\sqrt{11}}{4} \approx 17.4 \text{ cm}^2$$

(4)  $S = \frac{1}{2} (a + b + c)$

$$= \frac{1}{2} (23 + 19 + 12)$$

$$= \frac{1}{2} (54)$$

$$S = 27 \text{ cm}$$

$$\text{Area} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$= \sqrt{27(27-23)(27-19)(27-12)}$$

$$= \sqrt{12960} = 36\sqrt{10} \approx 113.8419 \text{ cm}^2$$

$$(5) a = 19.3, b = 22.5, c = 31$$

$$(6) a = 18.2, b = 17.1, c = 12.3$$

$$\begin{aligned} (5) \quad s &= \frac{1}{2} (a + b + c) \\ &= \frac{1}{2} (19.3 + 22.5 + 31) \\ &= \frac{1}{2} \times 72.8 \end{aligned}$$

$$s = \frac{182}{5} = 36.4 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{36.4(36.4-19.3)(36.4-22.5)(36.4-31)} \\ &= \sqrt{46720.3464} \end{aligned}$$

$$\text{Area} \approx 216.1488 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} (6) \quad s &= \frac{1}{2} (a + b + c) \\ &= \frac{1}{2} (18.2 + 17.1 + 12.3) \\ &= \frac{1}{2} \times 47.6 \end{aligned}$$

$$s = \frac{119}{5} = 23.8 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{23.8(23.8-18.2)(23.8-17.1)(23.8-12.3)} \end{aligned}$$

$$\text{Area} \approx 101.337 \text{ cm}^2$$

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-9)، استخدم المتطابقات الأساسية في تبسيط كل من المقادير التالية:

(1)  $\csc x - \csc x \cos^2 x$

$$= \csc x (1 - \cos^2 x)$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \sin^2 x$$

$$= \sin x$$

(2)  $\frac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$

$$= \tan^2 x \cdot \frac{1}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x$$

$$= \sin^2 x$$

(3)  $\frac{1 + \tan^2 x}{\csc^2 x}$

$$= \frac{\sec^2 x}{\csc^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

(4)  $\cos x \csc x + \sin x \sec x$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \csc x \cdot \sec x$$

« باستخدام متطابقتي المقلوب  
وناتج القسمة »

(5)  $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x}$

$$= \sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= 1$$

« متطابقة فيثاغورث »

(6)  $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$

$$= \frac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{(\cancel{\cos x} + \sin x)}{\cos x} \times \frac{\sin x}{(\sin x + \cancel{\cos x})} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

« باستخدام متطابقتي المقلوب  
وناتج القسمة »

$$= \tan x$$

$$(7) \frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x}$$

$$= \frac{1+\sin x + 1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \frac{2}{1-\sin^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x} = 2 \sec^2 x \quad \text{«متطابقة ظلوب»}$$

$$(8) \frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + (1-\cos x)^2}{(1-\cos x) \cdot \sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x}{(1-\cos x) \cdot \sin x}$$

$$= \frac{1+1-2\cos x}{(1-\cos x) \cdot \sin x} \quad \text{«متطابقة فيثاغورث»}$$

$$= \frac{2-2\cos x}{(1-\cos x) \cdot \sin x}$$

$$= \frac{2(1-\cos x)}{(1-\cos x) \cdot \sin x} = \frac{2}{\sin x} = 2 \csc x \quad \text{«متطابقة المقلوب»}$$

$$= \frac{2(1-\cos x)}{(1-\cos x) \cdot \sin x} = \frac{2}{\sin x} = 2 \csc x$$

$$= \frac{2(1-\cos x)}{(1-\cos x) \cdot \sin x} = \frac{2}{\sin x} = 2 \csc x$$

$$(9) \frac{\tan x \csc x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

«متطابقة المقلوب»

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

في التمارين (10-16)، بسط المقادير إلى 1 أو -1

$$(10) \frac{1}{\cot^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x}{\cos^2 x} = -1$$

$$(11) \frac{1}{\csc^2 x} + \frac{1}{\sec^2 x}$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= 1$$

« متطابقة المقلوب »

متطابقة فيثاغورث

$$(12) \frac{\tan x \times \cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

باستثناء متطابقة القسمة

$$(13) \cot(-x) \tan(-x)$$

$$= (-\cot x) \cdot (-\tan x)$$

$$= \cot x \cdot \tan x$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$(14) \sec^2(-x) - \tan^2 x$$

$$= (\sec x)^2 - (\tan^2 x)$$

$$= \sec^2 x - \tan^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

« متطابقت المقلوب والقسمة »

« متطابقة فيثاغورث »

$$(15) \sin^2(-x) + \cos^2(-x)$$

$$= (-\sin x)^2 + (\cos x)^2$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$= 1$$

« متطابقة فيثاغورث »

$$(16) \frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 x - \tan^2 x}{1}$$

$$= 1$$

« باستخدام متطابقات فيثاغورث »

في التمارين (17-19)، استخدم التحليل إلى عوامل في كل مما يلي:

$$(17) \sin^2 c + \sin^2 c \tan^2 c$$

$$= \sin^2 c (1 + \tan^2 c)$$

$$= \sin^2 c \cdot \sec^2 c$$

$$= \frac{\sin^2 c}{\cos^2 c} = \tan^2 c$$

$$(18) 1 - 2 \sin x + (1 - \cos^2 x)$$

$$= 1 - 2 \sin x + \sin^2 x$$

$$= \sin^2 x - 2 \sin x + 1$$

$$= (\sin x - 1)^2$$

« من متطابقة فيثاغورث »

$$(19) \cos x - 2 \sin^2 x + 1$$

$$= \cos x - 2(1 - \cos^2 x) + 1$$

$$= \cos x - 2 + 2 \cos^2 x + 1$$

$$= 2 \cos^2 x + \cos x - 1$$

$$= (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$$

« من متطابقة فيثاغورث »

« بالتحليل »

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5-1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة المبسطة للمقدار:  $E(x) = \frac{\sin^2 x + \tan^2 x + \cos^2 x}{\sec x}$  هي:  $E(x) = \sec x$

(b)

(2) الصورة المبسطة للمقدار:  $E(x) = (\sec^2 x + \csc^2 x) - (\tan^2 x + \cot^2 x)$  هي:  $E(x) = 2$

(b)

(3) المقدار:  $E(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x}$  هو:  $E(x) = 1 + \sin x$

(a)

(4) المقدار:  $E(x) = \frac{(\cos x + \sin x)^2 - 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x}$  هو:  $E(x) = \sec^2 x$

(b)

(5) المقدار:  $E(x) = \csc x - \cos x \cot x$  هو:  $E(x) = \cos x$

(a)

في التمارين (10-6)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) المقدار:  $E(x) = \frac{\tan^2 x}{1 - \sec^2 x}$  بالصورة المبسطة هو:  $E(x) =$

(a) 1

(b) -1

(c)  $\tan^4 x$

(d)  $-\tan^4 x$

$E(x) =$

(7) المقدار:  $E(x) = \frac{1}{\sec x + 1} - \frac{1}{\sec x - 1}$  بالصورة المبسطة هو:

(a)  $2 \tan^2 x$

(b)  $-2 \tan^2 x$

(c)  $2 \cot^2 x$

(d)  $-2 \cot^2 x$

(8) تحليل المقدار:  $E(x) = \cos^2 x + \frac{3}{\sec x} + 2$  إلى عوامل هو:  $E(x) =$

(a)  $(1 - \cos x)(2 + \cos x)$

(b)  $(1 + \cos x)(2 + \cos x)$

(c)  $(1 + \cos x)(2 - \cos x)$

(d)  $(1 - \cos x)(2 - \cos x)$

(9) الدالة  $f(x) = \sqrt{\sec^2 x - 1}$  بالصورة المبسطة هي:  $f(x) =$

(a)  $\tan x$

(b)  $-\tan x$

(c)  $\cot x$

(d)  $|\tan x|$

(10) الدالة  $f(x) = \sqrt{\csc^2 x - 1}$  بالصورة المبسطة هي:  $f(x) =$

(a)  $|\cot x|$

(b)  $\tan x$

(c)  $-\cot x$

(d)  $\cot x$

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-14)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(1)  $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

$$\begin{aligned} \cos x (\tan x + \sin x \cot x) &= \cos x \left( \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) \\ &= \cos x \left( \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x \right) \\ &= \cancel{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} + \cos x \times \cos x = \sin x + \cos^2 x \end{aligned}$$

∴ الطرف الأيسر = الطرف اليمين

(2)  $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

$$\begin{aligned} (\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) &= \sin x \times \left( \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x \times \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ &= (\sin x) \times \left( \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \right) \\ &= \cancel{\sin x} \times \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} + \sin x \times \sin x = \cos x + \sin^2 x \end{aligned}$$

∴ الطرف الأيسر = الطرف اليمين

(3)  $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2 \tan x$

$$\begin{aligned} (1 - \tan x)^2 &= 1 - 2 \tan x + \tan^2 x \\ &= (1 + \tan^2 x) - 2 \tan x \\ &= \sec^2 x - 2 \tan x \end{aligned}$$

∴ الطرف الأيسر = الطرف اليمين

(4)  $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

$$\begin{aligned} \tan x + \cot x &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{1}{\sin x} \times \frac{1}{\cos x} = \csc x \times \sec x \\ &= \sec x \csc x \end{aligned}$$

∴ الطرف الأيسر = الطرف اليمين

$$(5) \tan x + \cot x + 2 = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$$

$$\tan x + \cot x + 2 = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 2$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$$

المقام = البسط ∴

$$(6) \frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = 2 \csc^2 x$$

$$\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{(1 + \cos x) + (1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{2}{1 - \cos^2 x} = \frac{2}{\sin^2 x} = 2 \csc^2 x$$

المقام = البسط ∴

$$(7) \frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$$

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \tan^2 x \div (\sec x + 1) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \div \left( \frac{1}{\cos x} + 1 \right)$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \div \left( \frac{1 + \cos x}{\cos x} \right) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{\cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} \times \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos x \cdot \cos x} \times \frac{\cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\cos x}$$

المقام = البسط ∴

$$(8) \cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$$

$$\begin{aligned} \cot^2 x - \cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \cos^2 x \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cos^2 x \cot^2 x \end{aligned}$$

∴ الكون = الكون ∴

$$(9) \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned} \cos^4 x - \sin^4 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 1 \times (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

∴ الكون = الكون ∴

$$(10) \frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sec x + 1}{\tan x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tan x}{\sec x - 1} &= \frac{\tan x}{\sec x - 1} \times \frac{\sec x + 1}{\sec x + 1} \\ &= \frac{\tan x \times (\sec x + 1)}{\sec^2 x - 1} = \frac{\tan x (\sec x + 1)}{\tan^2 x} \\ &= \frac{\sec x + 1}{\tan x} \end{aligned}$$

∴ الكون = الكون ∴

$$(11) \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 + 2 \sin x \cos x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} &= \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \times \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} \\ &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin^2 x - (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \\ &= \frac{\sin^2 x - 1 + \sin^2 x}{1 + 2 \sin x \cos x} = \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 + 2 \sin x \cos x} \end{aligned}$$

∴ الكون = الكون ∴

$$(12) \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2(1 + \cos x)}{\sin x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} &= \frac{\sin^2 x + (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 - \cos x) \sin x} \\ &= \frac{\sin^2 x + 1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x) \sin x} = \frac{1 - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x) \sin x} \\ &= \frac{2 - 2 \cos^2 x}{(1 - \cos x) \sin x} = \frac{2(1 - \cos^2 x)}{(1 - \cos x) \sin x} \\ &= \frac{2(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x) \sin x} = \frac{2(1 + \cos x)}{\sin x} \\ &\quad \text{∵ } (1 - \cos x) = \text{مخرج الكسر} \therefore \end{aligned}$$

$$(13) \sin^2 x \cos^3 x = (\sin^2 x - \sin^4 x)(\cos x)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^3 x &= \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cos x \\ &= \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \\ &= (\sin^2 x - \sin^4 x)(\cos x) \\ &\quad \text{∵ } (1 - \sin^2 x) = \text{مخرج الكسر} \therefore \end{aligned}$$

$$(14) \sin^3 x \cos^3 x = (\sin^3 x - \sin^5 x)(\cos x)$$

$$\begin{aligned} \sin^3 x \cos^3 x &= \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \\ &= \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \\ &= (\sin^3 x - \sin^5 x)(\cos x) \\ &\quad \text{∵ } (1 - \sin^2 x) = \text{مخرج الكسر} \therefore \end{aligned}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المتطابقة:  $3 \sin x = \sin(3x)$  صحيحة.

(a)  (b)

(2) المتطابقة:  $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$  صحيحة.

(a)  (b)

(3) المتطابقة:  $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$  صحيحة.

(a)  (b)

(4) الصورة المبسطة للمقدار:  $\sqrt{\frac{\csc x}{\sin^3 x} - \frac{\cot x}{\sin^3 x}}$  هي:  $\frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$

(a)  (b)

في التمارين (5-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار:  $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$  متطابق مع المقدار:

(a)  $\sin x \tan x$

$\sin x \sec^2 x$

(c)  $\cos x \sec^2 x$

(d)  $\sin x \csc x$

(6) المقدار:  $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$  متطابق مع المقدار:

(a)  $-4 \sin x \cos x$

(b) 2

(c) -2

$4 \sin x \cos x$

(7) المقدار:  $\frac{1}{\tan x} + \tan x$  متطابق مع المقدار:

$\sec x \csc x$

(b)  $\sec x \sin x$

(c)  $\sec x \cos x$

(d)  $\sin x \cos x$

(8) المقدار:  $\tan^2 x - \sin^2 x$  متطابق مع المقدار:

(a)  $\tan^2 x$

(b)  $\cot^2 x$

$\tan^2 x \sin^2 x$

(d)  $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار:  $1 + \frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x}$  متطابق مع المقدار:

(a) 1

(b) -1

2

(d) -2

(10) المقدار:  $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$  متطابق مع المقدار:

$-\tan x \sin x$

(b)  $-\tan x$

(c)  $\tan x \sin x$

(d)  $\tan x$

# Solving Trigonometric Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-8)، حل كلاً من المعادلات التالية:

(1)  $\sin x = \frac{-1}{2}$

**الحل**

نفرض أن  $\alpha$  هي زاوية الاسناد للزاوية  $x$

$$\sin \alpha = |\sin x| = \left| \frac{-1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore \sin x < 0$   $\therefore x$  تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما  $x$  تقع في الربع الرابع

$$x = (2\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\therefore x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$\therefore$  حل المعادلة:  $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$  أو  $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(2)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**الحل**

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن  $\alpha$  هي زاوية الاسناد للزاوية  $x$

$$\cos \alpha = |\cos x| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore \cos x > 0$

$\therefore x$  تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما  $x$  تقع في الربع الرابع

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (2\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

$\therefore$  حل المعادلة:  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  أو  $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

حيث  $k \in \mathbb{Z}$

$$(3) 2 \cos x = -1$$

الحل

$$2 \cos x = -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

نفرض أن  $\alpha$  هي زاوية الإسناد للزاوية  $x$

$$\therefore \cos \alpha = |\cos x| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \cos x < 0$$

$\therefore x$  تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث .

عندما  $x$  تقع في الربع الثالث .

$$x = \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\therefore \text{حل المعادلة : } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث}$$

$$(4) \sqrt{3} \tan x = 1$$

الحل

$$\sqrt{3} \tan x = 1$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

نفرض أن  $\alpha$  هي زاوية الإسناد للزاوية  $x$

$$\tan \alpha = |\tan x| = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \tan x > 0$$

$\therefore x$  تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث .

ولكن آلة  $\tan x$  دورية ودورها  $\pi$

$$\therefore \tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\therefore \text{حل المعادلة : } x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث}$$

(5)  $2 \cos x \sin x - \cos x = 0$

**الحل**

$2 \cos x \sin x - \cos x = 0$

$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0$  أو  $2 \sin x - 1 = 0$   
 $2 \sin x = 1$   
 $\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos x = 0$   
 $x$  زاوية ربعية  $\therefore$

$x = \frac{\pi}{2}$

أو  $x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

نرض  $\alpha \sim$  هي زاوية الاسناد للزاوية  $x$

$\sin \alpha = |\sin x| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \sin x > 0$   
 $x$  تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما  $x$  تقع في الربع الأول

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

عندما  $x$  تقع في الربع الثاني

$x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\therefore$  حل المعادلة:

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  أو  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

أو  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  أو  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

حيث  $k \in \mathbb{Z}$

(6)  $\tan x \sin^2 x = \tan x$

**الحل**

$\tan x \sin^2 x = \tan x \Rightarrow \tan x \sin^2 x - \tan x = 0$

$\tan x (\sin^2 x - 1) = 0$

$\tan x (\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$\tan x = 0$  أو  $\sin x = 1$  أو  $\sin x = -1$

نرض  $\alpha \sim$  هي زاوية الاسناد للزاوية  $x$

$\sin x = 1$   
 $x$  زاوية ربعية  $\therefore$

$x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -1$

$\sin x = -1$

$x$  زاوية ربعية

$x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\tan \alpha = |\tan x| = 0$

$\therefore \alpha = 0$

$\tan(\pi + x) = \tan x$

لأن الدالة  $\tan x$  دورية ودورتها  $\pi$

$\therefore x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = k\pi$  أو  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  أو  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

حيث  $k \in \mathbb{Z}$

(7)  $\tan^2 x = 3$

**الحل**

$$\tan^2 x = 3$$

$$\tan^2 x - 3 = 0$$

$$(\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\tan x = \sqrt{3} \quad \text{أو} \quad \tan x = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = \sqrt{3}$$

نفرض أن  $\alpha_1$  هي زاوية الاضداد للزاوية  $x$

$$\tan \alpha_1 = |\tan x| = |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \tan x > 0$$

$x$  تقع في الربع الأول أو الثالث

$\therefore$  الدالة  $\tan x$  دالة دورية ودورتها  $\pi$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{2\pi}{3} + k\pi: \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

**أو**

$$\tan x = -\sqrt{3}$$

نفرض أن  $\alpha_2$  هي زاوية الاضداد للزاوية  $x$

$$\tan \alpha_2 = |\tan x| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \tan x < 0$$

$x$  تقع في الربع الثاني أو الرابع

$\therefore$  الدالة  $\tan x$  دالة دورية ودورتها  $\pi$

$$\therefore \tan(\pi - x) = \tan(2\pi - x)$$

$$\therefore x = (\pi - \frac{\pi}{3}) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$(8) 4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$$

الحل

$$4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$$

$$(2 \cos x - 1)^2 = 0$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

نرض أن  $\alpha$  هي زاوية الاسناد للزاوية  $x$

$$\cos \alpha = |\cos x| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore \cos x > 0$   $\therefore x$  تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما  $x$  تقع في الربع الرابع  $\left| \begin{array}{l} x = (2\pi - \frac{\pi}{3}) + 2K\pi, K \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2K\pi \end{array} \right.$  عندما  $x$  تقع في الربع الأول  $x = \frac{\pi}{3} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$

$\therefore$  حل المعادلة:  $x = \frac{\pi}{3} + 2K\pi$  أو  $x = \frac{5\pi}{3} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$  حيث

في التمارين (9-11)، أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة  $[0, 2\pi)$

$$(9) \sin 2x = 1$$

الحل

$$\sin 2x = 1 \quad 0 \leq x < 2\pi$$

$$0 \leq 2x < 4\pi$$

$\therefore 2x$  تقع في دورتين

$$\therefore \sin 2x = 1$$

$\therefore 2x$  زاوية ربعية

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + K\pi$$

$$K=0 \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ و } \frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

$$K=1 \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} + \pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \text{ و } \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

$$K=2 \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{4} \text{ و } \frac{9\pi}{4} \notin [0, 2\pi)$$

$\therefore$  حل المعادلة:

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ و } x = \frac{5\pi}{4}$$

KuwaitTeacher.Com

(10)  $2 \cos 3x = 1$

الحل

$$0 \leq x < 2\pi$$

$$0 \leq 3x < 6\pi$$

$\therefore 3x$  تقع في 3 دورات

$$2 \cos 3x = 1$$

نفرض أن  $\alpha$  هي زاوية الاسناد للزاوية  $\frac{1}{3} \times 2x$

$$\cos \alpha = |\cos 3x| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore \cos 3x > 0$   $\therefore 3x$  تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع  
عندما  $3x$  تقع في الربع الأول:

$$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$$

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} \text{ و } \frac{\pi}{9} \in [0, 2\pi)$$

$$k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi = \frac{7\pi}{9} \text{ و } \frac{7\pi}{9} \in [0, 2\pi)$$

$$k=2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}(2\pi) = \frac{13\pi}{9} \text{ و } \frac{13\pi}{9} \in [0, 2\pi)$$

$$k=3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}(3\pi) = \frac{19\pi}{9} \text{ و } \frac{19\pi}{9} \notin [0, 2\pi)$$

عندما  $3x$  تقع في الربع الرابع:

$$3x = (2\pi - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi \Rightarrow 3x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$$

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} \text{ و } \frac{5\pi}{9} \in [0, 2\pi)$$

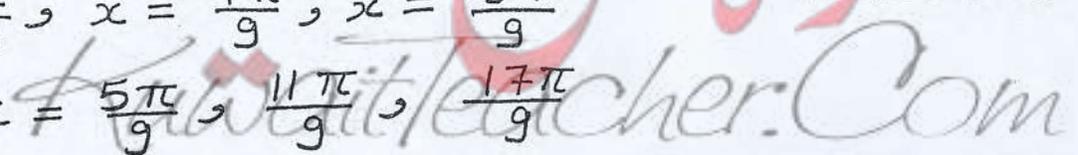
$$k=1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{9} \text{ و } \frac{11\pi}{9} \in [0, 2\pi)$$

$$k=2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}(2\pi) = \frac{17\pi}{9} \text{ و } \frac{17\pi}{9} \in [0, 2\pi)$$

$$k=3 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}(3\pi) = \frac{23\pi}{9} \text{ و } \frac{23\pi}{9} \notin [0, 2\pi)$$

$\therefore$  حل المعادلة:  $x = \frac{\pi}{9}$  و  $x = \frac{7\pi}{9}$  و  $x = \frac{13\pi}{9}$

أو  $x = \frac{5\pi}{9}$  و  $\frac{11\pi}{9}$  و  $\frac{17\pi}{9}$



$$(11) \tan 2x = 1$$

الحل

$$0 \leq x < 2\pi$$

$$0 \leq 2\pi < 4\pi$$

$2x$  تقع في دورتين

$$\tan 2x = 1$$

نفرض أن  $\alpha$  هي زاوية الإسناد للزاوية  $2x$

$$\tan \alpha = |\tan 2x| = |1| = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$2x$  تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث  $\because \tan 2x > 0$

الدالة  $\tan 2x$  دالة دورية ودورها  $\pi$

$$\tan 2x = \tan(2x + \pi)$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi}$$

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ و } \frac{\pi}{8} \in [0, 2\pi)$$

$$k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}, \quad \frac{5\pi}{8} \in [0, 2\pi)$$

$$k=2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}, \quad \frac{9\pi}{8} \in [0, 2\pi)$$

$$k=3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(3\pi) = \frac{13\pi}{8}, \quad \frac{13\pi}{8} \in [0, 2\pi)$$

$$k=4 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(4\pi) = \frac{17\pi}{8}, \quad \frac{17\pi}{8} \notin [0, 2\pi)$$

$$x = \frac{\pi}{8} \text{ و } x = \frac{5\pi}{8} \text{ و } x = \frac{9\pi}{8} \text{ و } x = \frac{13\pi}{8} \quad \therefore \text{ حل المعادلة}$$

في التمارين (12-14)، حل المعادلات التالية:

$$(12) \sin^2 x - 2\sin x = 0$$

الحل

$$\sin^2 x - 2\sin x = 0$$

$$\sin x (\sin x - 2) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{أو} \quad \sin x = 2$$

$$\sin x = 0$$

$$\text{أو} \quad \sin x = 2$$

$x$  زاوية رهيبة

$$y = \sin x \text{ لها } [-1, 1]$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \pi$$

$$2 \notin [-1, 1]$$

$\therefore \sin x = 2$  ليس لها حل

$$x = 2k\pi \quad \text{و} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{أو} \quad x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$  حل المعادلة

$$x = 2k\pi$$

$$\text{أو} \quad x = \pi + 2k\pi$$

$$\text{و} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(13) 2 \sin^2 x + 3 \sin x = 2$$

الحل

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x = 2$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad \sin x + 2 = 0$$

$$2 \sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

أو

$$\sin x = -2$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

أو

$$\sin x = -2$$

نفرض أن  $\alpha$  هي زاوية الإحداثيات للزاوية  $x$

$$\sin \alpha = |\sin x| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \because \sin x > 0$$

$\therefore x$  تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما  $x$  تقع في الربع الأول

$$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

عندما  $x$  تقع في الربع الثاني

$$x = \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) + 2K\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$$

$\therefore$  حل المعادلة :

حيث  $K \in \mathbb{Z}$

$$y = \sin x \text{ مداها } [-1, 1]$$
$$-2 \notin [-1, 1]$$

$\sin x = -2$  ليس له حل

$$(14) \tan^2 x \cos x + 5 \cos x = 0$$

الحل

$$\tan^2 x \cos x + 5 \cos x = 0$$

$$\cos x (\tan^2 x + 5) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{أو} \quad \tan^2 x + 5 = 0$$

$$\tan^2 x = -5$$

$$\cos x = 0$$

$$\text{أو} \quad \tan^2 x = -5$$

$\therefore x$  زاوية ربعية

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$\text{أو} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

ليس له حل

$$\therefore \text{ حل المعادلة : } x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$$

$$\text{أو} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi, \quad K \in \mathbb{Z} \text{ حيث}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (1) حل المعادلة  $\sin x = \frac{1}{2}$  هو:  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث  $k$  عدد صحيح. (a)  (b)
- (2) حل المعادلة  $\cos x = \sqrt{2}$  هو:  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  أو  $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث  $k$  عدد صحيح. (a)  (b)
- (3) حل المعادلة  $\tan x = -\sqrt{3}$  هو:  $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$ ، حيث  $k$  عدد صحيح. (a)  (b)
- (4) حلول المعادلة  $\sin x \tan^2 x = \sin x$  على الفترة  $(0, \pi)$  هي:  $\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{3\pi}{4}$ . (a)  (b)
- (5) حلول المعادلة  $2 \sin^2 x = 1$  على الفترة  $[0, 2\pi)$  هي:  $\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{5\pi}{4}$ . (a)  (b)

في التمارين (6-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان  $\sin x + \cos x = 0$  فإن  $x$  تقع في الربع:

- (a) الأول (b) الأول أو الثالث  
(c) الثالث (d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة:  $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$  على الفترة  $[0, 2\pi)$  هي:

- (a)  $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$  (b)  $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$   
(c)  $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$  (d)  $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة:  $2\sqrt{2} \sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x - 2 \sin x = -1$  على الفترة  $[0, 2\pi)$  هي:

- (a)  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$  (b)  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$   
(c)  $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$  (d)  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

(9) عدد حلول المعادلة:  $2 \cos 4x = 1$  حيث  $x \in [0, \frac{\pi}{8})$  هو:

- (a) 0 (b) 1  
(c) 2 (d) 3

(10) حلول المعادلة:  $3 \tan 2y = \sqrt{3}$  هي:

(a)  $\frac{\pi}{6} + k\pi$ ، حيث  $k$  عدد صحيح.

(b)  $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ، حيث  $k$  عدد صحيح.

(c)  $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{7\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ ، حيث  $k$  عدد صحيح.

(d)  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث  $k$  عدد صحيح.

(11) مجموعة حل المعادلة  $3 \tan(3x) = \sqrt{3}$  على الفترة  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  هي:

- (a)  $\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}\}$  (b)  $\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\}$  (c)  $\{-\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\}$  (d)  $\{-\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\}$

تمرّن

9-4

## متطابقات المجموع والفرق

## Sum and Difference Identities

### المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-3)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(1)  $\sin 15^\circ$

(2)  $\tan 135^\circ$

(3)  $\cos 75^\circ$

1]  $\sin 15^\circ$

$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin (45^\circ - 30^\circ) &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

2]  $\tan 135^\circ$

$$135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan 135^\circ &= \frac{\tan 180^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 180^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{0 - 1}{1 + 0} \\ &= -1\end{aligned}$$

$$[3] \cos 75^\circ$$

$$75 = 30 + 45$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos 75^\circ &= \cos (30^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$(4) \text{ إذا كان } \sin \gamma = \frac{4}{5}, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \beta = -\frac{8}{17}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

$$(a) \text{ أوجد: } \sin(\beta + \gamma)$$

$$(b) \text{ أوجد: } \cos(\beta - \gamma)$$

$$(c) \text{ أوجد: } \tan(\gamma + \beta)$$

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\therefore \cos^2 \gamma = \frac{9}{25}$$

$$\cos \gamma = \pm \frac{3}{5}$$

$$\therefore 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \cos \gamma = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\sin^2 \beta + \left(-\frac{8}{17}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \beta = \frac{225}{789}$$

$$\sin \beta = \pm \frac{15}{17}$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{15}{17}$$

$$[a] \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma$$

$$= \frac{15}{17} \times \frac{3}{5} + \frac{-8}{17} \times \frac{4}{5} = \frac{13}{85}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \cos(\beta - \gamma) &= \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \\ &= \frac{8}{17} \times \frac{3}{5} + \frac{15}{17} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{36}{85} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \tan(\delta + \beta) &= \frac{\tan \delta + \tan \beta}{1 - \tan \delta \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{4}{3} + \frac{-15}{8}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{-15}{8}} \\ &= \frac{-13}{84} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{\sin \delta}{\cos \delta} \\ &= \frac{4}{3} \\ \tan \beta &= \frac{-15}{8} \end{aligned}$$

في التمارين (5-10)، اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أو ظل الزاوية.

(5)  $\sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ$

(6)  $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{5}$

(7)  $\frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ}$

(8)  $\cos \frac{\pi}{7} \cos x + \sin \frac{\pi}{7} \sin x$

(9)  $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

(10)  $\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

$$\begin{aligned} \text{5)} \quad \sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ \\ = \sin(42^\circ - 17^\circ) = \sin 25^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{6)} \quad \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{5} \\ = \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{7\pi}{10} \end{aligned}$$

$$\text{7)} \quad \frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ} = \tan(19^\circ + 47^\circ) = \tan 66^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{8)} \quad & \cos \frac{\pi}{7} \cos x + \sin \frac{\pi}{7} \sin x \\ & = \cos \left( \frac{\pi}{7} - x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{9)} \quad & \sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x \\ & = \sin (3x - x) = \sin 2x \end{aligned}$$

$$\text{10)} \quad \frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x} = \tan (2y + 3x)$$

(11) اختصر:  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} \\ & = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} \\ & = \frac{\sin (3x - x)}{\sin x \cos x} \\ & = \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = \end{aligned}$$

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

a  b

(1) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن:  $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

a  b

(2) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن:  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(3)  $\cos \left( h + \frac{\pi}{2} \right) = -\cos h$

a  b

(4)  $\tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12} = 14$

a  b

في التمارين (5-11)، ظلّ رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن:  $\tan \frac{7\pi}{12}$  تساوي:

(a)  $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

(b)  $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

(c)  $2+\sqrt{3}$

(d)  $-2-\sqrt{3}$

(6)  $\sin(x + \frac{\pi}{6})$  تساوي:

(a)  $\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$

(b)  $\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

(c)  $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$

(d)  $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$

(7)  $\tan(h + \frac{\pi}{4})$  تساوي:

(a)  $1 + \tan h$

(b)  $\frac{1 - \tan h}{1 + \tan h}$

(c)  $\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}$

(d)  $1 - \tan h$

(8)  $\cos(x - \frac{\pi}{4})$  تساوي:

(a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

(b)  $\sqrt{2}(\cos x + \sin x)$

(c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$

(d)  $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$

(9)  $\cos 94^\circ \cos 18^\circ + \sin 94^\circ \sin 18^\circ$  تساوي:

(a)  $\cos 112^\circ$

(b)  $\cos 76^\circ$

(c)  $\sin 112^\circ$

(d)  $\sin 76^\circ$

(10)  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{3}$  تساوي:

(a)  $\cos \frac{4\pi}{21}$

(b)  $\sin \frac{4\pi}{21}$

(c)  $\cos \frac{10\pi}{21}$

(d)  $\sin \frac{10\pi}{21}$

(11)  $\frac{\tan \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{3}}$  تساوي:

(a)  $\tan \frac{2\pi}{15}$

(b)  $\tan \frac{8\pi}{15}$

(c)  $\tan \left( \frac{-8\pi}{15} \right)$

(d)  $\tan \left( \frac{-2\pi}{15} \right)$



متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

## Double-Angle and Half-Angle Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-4)، اكتب المقدار بدلالة  $\sin x$  أو  $\cos x$ .

(1)  $\sin 2x + \cos x$

(2)  $\sin 2x + \cos 2x$

(3)  $\cos 3x$

(4)  $\cos 4x$

$$\begin{aligned} (1) \sin 2x + \cos x &= 2 \sin x \cos x + \cos x \\ &= \cos x (2 \sin x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sin 2x + \cos 2x &= 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 2 \cos x (\sin x + \cos x) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \cos 3x &= \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ &= \cos x (2 \cos^2 x - 1) - \sin x (2 \sin x \cos x) \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \cos 4x &= \cos(2(2x)) \\
 &= 1 - 2 \sin^2 2x \\
 &= 1 - 2(2 \sin x \cos x)^2 \\
 &= 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x \\
 &= 1 - 8 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \\
 &= 1 - 8 \sin^2 x + 8 \sin^4 x
 \end{aligned}$$

في التمارين (5-7)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

$$(5) 2 \csc 2x = \csc^2 x \tan x$$

$$(6) \sin 3x = (\sin x)(4 \cos^2 x - 1)$$

$$(7) \cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\begin{aligned}
 (5) 2 \csc 2x &= \frac{2}{\sin 2x} \\
 &= \frac{2}{2 \sin x \cos x} \\
 &= \frac{1}{\sin x \cos x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \csc^2 x \tan x &= \frac{\tan x}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}
 \end{aligned}$$

الحل :-

∴ الطرفان متساويان

حل آخر :-

$$\begin{aligned}
 2 \csc 2x &= \frac{2}{\sin 2x} \\
 &= \frac{2}{2 \sin x \cos x} \\
 &= \frac{1}{\sin x \cos x} \times \frac{\sin x}{\sin x} \quad : \sin x \neq 0 \\
 &= \frac{1}{\sin^2 x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \\
 &= \csc^2 x \cdot \tan x
 \end{aligned}$$

∴ الطرفان متساويان

$$\begin{aligned}
 (6) \sin 3x &= \sin(x + 2x) \\
 &= \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \\
 &= \sin x (2 \cos^2 x - 1) + \cos x (2 \sin x \cos x) \\
 &= 2 \sin x \cos^2 x - \sin x + 2 \sin x \cos^2 x
 \end{aligned}$$

وزارة التربية \_ منطقة الجهراء التعليمية \_ التوجيه الفني للرياضيات \_ مدرسة ثانوية الجهراء بنات \_ ورشة الصف الحادي عشر علمي

$$= 4 \sin x \cos^2 x - \sin x$$
$$= \sin x (4 \cos^2 x - 1)$$

$$(7) \cos 4x = \cos 2(2x)$$
$$= 1 - 2 \sin^2 2x$$
$$= 1 - 2(2 \sin x \cos x)^2$$
$$= 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

في التمارين (8-10)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

(8)  $\sin 15^\circ$

(9)  $\tan 195^\circ$

(10)  $\cos 75^\circ$

الحل :-

$$(8) \sin 15^\circ = \sin \left( \frac{30^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$\therefore \sin 15^\circ > 0$   
 $\therefore \sin 15^\circ > 0$   
 $\approx 0.2598$

$$(9) \tan 195^\circ = \tan \left( \frac{390^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 390^\circ}{1 + \cos 390^\circ}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}}$$
$$= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} \approx \pm 0.2679$$

$\therefore \tan 195^\circ > 0$   
 $\therefore \tan 195^\circ > 0$   
 $= 0.2679$

$$(10) \cos 75^\circ = \cos \frac{150^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 150^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$
$$\approx \pm 0.2598$$

$\therefore \cos 75^\circ > 0$   
 $\therefore \cos 75^\circ > 0$   
 $\approx 0.2598$

(11) اختصر كلاً من التعابير التالية:

(a)  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

(b)  $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$

(c)  $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

a)  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{1 + 2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$  المثلث

(b)  $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$   
 $\therefore \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$   
 $2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$   
 $\therefore \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$   
 $\therefore \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$

(c)  $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$   
 $\therefore \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$   
 $\therefore 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$   
 $\therefore \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$   
 $\therefore 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$   
 بالعويض  
 $\therefore \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2}$

حل آخر:-  
 $\therefore \tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$   
 $\therefore \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

(12) إذا كانت  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$  ،  $\sin x = -\frac{12}{13}$  فأوجد  $\sin \frac{x}{2}$

المطلوب :- متطابقة فيثاغورث

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{144}{169}$$
$$= \frac{25}{169}$$

$$\therefore \cos x = \pm \frac{5}{13} \quad \therefore \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

$$\therefore \cos x = \frac{5}{13}$$
$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$
$$= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}}$$
$$= \pm 0.5547$$

$$\therefore \sin \frac{x}{2} = 0.5547$$

$$270 < x < 360$$

$$135 < \frac{x}{2} < 180$$

$\therefore \frac{x}{2}$  تقع في الربع الثاني

$$\therefore \sin \frac{x}{2} > 0$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1)  $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$

a  b

(2)  $\sin 4x = -4 \cos x \sin^3 x + 4 \cos^3 x \sin x$

a  b

(3)  $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

a  b

(4)  $\cos 6x = 2 \cos^2 3x - 1$

a  b

(5)  $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

a  b

في التمارين (6-10)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6)  $\sin 3x + \cos 2x$  تساوي:

a  $3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

b  $3 \cos^2 x \sin x - \sin^2 x + \cos^2 x$

c  $3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x - \sin^2 x + \cos^2 x$

d  $3 \sin^2 x \cos x - \sin^3 x + \cos^2 x$

(7)  $2 \cos^2 \frac{x}{2}$  تساوي:

a  $\frac{1 + \cos x}{2}$

b  $1 + \cos x$

c  $1 + \cos 2x$

d  $\frac{1 - \cos 2x}{2}$

(8)  $\sin 3x$  تساوي:

a  $\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x$

b  $3 \sin x - \sin^3 x$

c  $(3 - 2 \sin^2 x)(\sin x)$

d  $3 \sin x - 4 \sin^3 x$

(9) باستخدام متطابقات نصف الزاوية نجد أن  $\cos \frac{\pi}{8}$  تساوي:

a  $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

b  $\sqrt{2} - 1$

c  $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

d  $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$

(10) إذا كان:  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ,  $\cos \theta = \frac{-7}{25}$  فإن  $\cos \frac{\theta}{2}$  يساوي:

a  $\frac{2}{5}$

b  $\frac{-2}{5}$

c  $\frac{-3}{5}$

d  $\frac{3}{5}$

### اختبار الوحدة التاسعة

في التمارين (1-3)، حوّل المقادير إلى  $\sin$  و  $\cos$ . اكتب إجابتك على صورة كسر واحد.

(1)  $\tan x + \cot x$

(2)  $\sin x \cot x - \cos x \tan x$

(3)  $\frac{\sec y}{\cos y} - \frac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

1]  $\tan x + \cot x$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

2]  $\sin x \cot x - \cos x \tan x$

$$= \sin x \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \cos x - \sin x$$

3]  $\frac{\sec y}{\cos y} - \frac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

$$= \frac{1}{\cos^2 y} - \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 y}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} = 1$$

في التمارين (4-8)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

$$(4) \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 2 \sec x$$

$$(5) \frac{1 - 3 \cos x - 4 \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - 4 \cos x}{1 - \cos x}$$

$$(6) \sqrt{1 - \cos x} \times \sqrt{1 + \cos x} = \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(7) \frac{2 \sin x \times \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x$$

$$(8) \frac{1 + 2 \sin x \times \cos x}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$$

$$[4] \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 2 \sec x$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \frac{\cos (1 - \sin x) + \cos (1 + \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \frac{\cos x - \cos x \sin x + \cos x + \cos x \sin x}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2}{\cos x} = 2 \sec x \end{aligned}$$

$$[5] \frac{1 - 3 \cos x - 4 \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - 4 \cos x}{1 - \cos x}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - 3 \cos x - 4 \cos^2 x}{\sin^2 x} &= \frac{1 - 3 \cos x - 3 \cos^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x - 3 \cos x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{3 \cos x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\
 &= 1 - \frac{3 \cos x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\
 &= 1 - \frac{3 \cos x}{1 - \cos x} \\
 &= \frac{1 - \cos x - 3 \cos x}{1 - \cos x} \\
 &= \frac{1 - 4 \cos x}{1 - \cos x}
 \end{aligned}$$

حل آخر

$$\begin{aligned}
 \text{الطرف الأول} &= \frac{(1 - 4 \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\
 &= \frac{1 - 4 \cos x}{1 - \cos x} \\
 &= \text{الطرف الثاني}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{6} \quad \sqrt{1 - \cos x} \times \sqrt{1 + \cos x} = \sin x \quad \left( 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 - \cos x} \times \sqrt{1 + \cos x} &= \sqrt{1 - \cos^2 x} \\
 &= \sqrt{\sin^2 x} \\
 &= \sin x
 \end{aligned}$$

$$\boxed{7} \quad \frac{2 \sin x \times \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2 \sin x \times \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} &= \frac{2 \sin x \times \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} \\
 &= \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x
 \end{aligned}$$

$$[8] \frac{1 + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$$

ب) 1

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} \\ &= \sin x + \cos x \end{aligned}$$

في التمارين (9-13)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(9)  $\tan \frac{5\pi}{12}$

(10)  $\sin \frac{-\pi}{12}$

(11)  $\cos(x-y) - \cos(x+y)$

(12)  $\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$

(13)  $\sin(\frac{\pi}{3} + x) - \sin(\frac{\pi}{3} - x)$

[9]  $\tan \frac{5\pi}{12}$

$$= \tan 75^\circ$$

$$= \tan(30^\circ + 45^\circ)$$

$$= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1} = 2 + \sqrt{3}$$

حل آخر

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4}}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

$$\boxed{10} \sin -\frac{\pi}{12}$$

$$= -\sin \frac{\pi}{12}$$

$$= -\sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= -[\sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30]$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\boxed{11} \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$= \cos x \cos y + \sin x \sin y - (\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$= 2 \sin x \sin y$$

$$\boxed{12} \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right)$$

$$= \sin x - \cos x$$

$$\begin{aligned} \boxed{13} \quad & \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\ &= \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) \\ &= 2\cos\frac{\pi}{3}\sin x \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \sin x \\ &= \sin x \end{aligned}$$

(14) (a) أوجد ناتج:  $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$

(b) أوجد القيمة الصحيحة لكل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1)  $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(2)  $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(15) أوجد قيمة  $\sin 2x$ ، إذا كان  $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$

(16) أوجد:  $\cos 2x$ ، إذا كان  $\cos x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$$\boxed{14} \quad (a) \quad \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \boxed{1} \quad & \cos \frac{11\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{15} \quad \therefore \sin x - \cos x = \frac{1}{5}$$

$$\therefore (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = \frac{1}{25}$$

$$1 - 2\sin x \cos x = \frac{1}{25}$$

$$1 - \frac{1}{25} = 2\sin x \cos x$$

$$\therefore \sin 2x = \frac{24}{25}$$

$$\boxed{16} \cos x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$= 2 \left( \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)^2 - 1$$

$$= 2 \left( \frac{2 + 6 + 4\sqrt{3}}{16} \right) - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

محمد العبدالله

المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-5)، هل الشكل يجب أن يكون موجوداً في مستوٍ واحد فقط؟

(1)

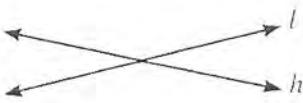


(2) • E

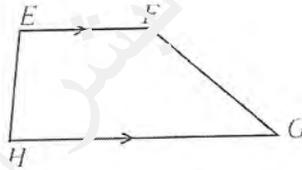
(1) مستقيم واحد لا يعين مستوٍ وحيد لئلا فالمستقيم يملكه أنه يكون في عدد لا نهائي من المستويات .

(2) النقطة الواحدة لا تعين مستوٍ وحيد لئلا فالنقطة تكون موجودة في عدد لا نهائي من المستويات

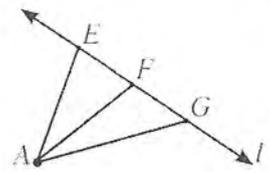
(3)



(4)



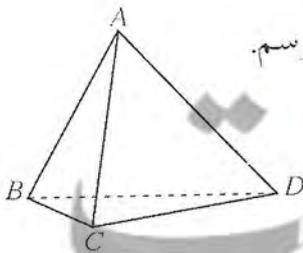
(5)



(3) مستقيمان متقاطعان يعينان مستوياً واحداً فقط لئلا فالمستقيمان يلتقيا في نقطة واحدة يجب أن يكونا في مستوٍ واحد فقط

(4) شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان والمستقيمان المتوازيان مختلفان يعينان مستوٍ وحيد

(5) مستقيم ونقطة خارجة عنه يعينان مستوياً واحداً فقط فالشكل يجب أن يكون موجوداً في مستوٍ واحد فقط



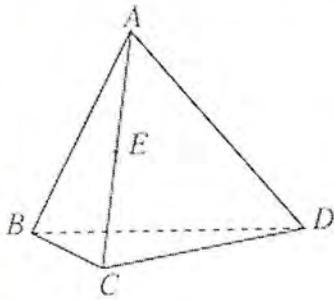
(6) ABCD هرم ثلاثي القاعدة. سم المستويات الأربعة التي تجدها في الرسم.

أربع نقاط مختلفة وليست مستوية يمر بها حدوده المستويات

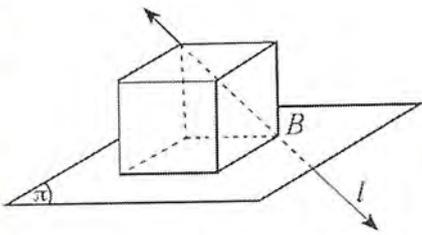
ياوي  $4C_3 = 4$  حيث أنه المستوي يعينه بثلاث نقاط

مختلفة وليست على استقامة والمستويات هي

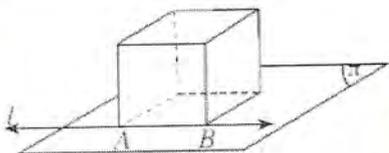
(ABC) , (ACD) , (ABD) و (BCD)



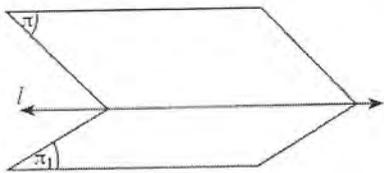
(7) أثبت أن النقطة  $E$  تقع في المستوي  $ADC$  وفي المستوي  $ABC$   
 $E \in \overleftrightarrow{AC}$  ,  $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ABC)$  ,  $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ADC)$   
 $\therefore E$  تقع في المستويين  $ABC, ADC$



(8) (a) أوجد نقطة تقاطع المستوي  $\pi$  والمستقيم  $l$ .  
 المستقيم  $l$  هو قطر وجه من أوجه المكعب يمر من أحد رؤوس المكعب أو وجهه محتوي في المستوي  $\pi$  ،  $B$  أحد رؤوس المكعب  
 $\therefore B \in l$  ,  $B \in \pi \quad \therefore l \cap \pi = \{B\}$



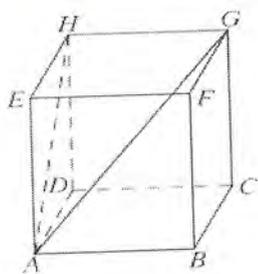
(b) أوجد تقاطع المستوي  $\pi$  والمستقيم  $l$ .  
 النقطتان  $A, B$  تنتميان إلى المستوي  $\pi$  وإلى المستقيم  $l$   
 $\therefore l$  يقع بالكامل في المستوي  $\pi$   
 $\therefore l \cap \pi = l$



(c) أوجد تقاطع المستوي  $\pi$  والمستوي  $\pi_1$ .  
 $\overleftrightarrow{l} \subseteq \pi$  ,  $\overleftrightarrow{l} \subseteq \pi_1$   
 $\pi, \pi_1$  مستويان مختلفان  
 $\therefore \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{l}$

معا  
 صفوة الكو  
 صفوة الكو

(9) في شبه المكعب المقابل، أكمل:



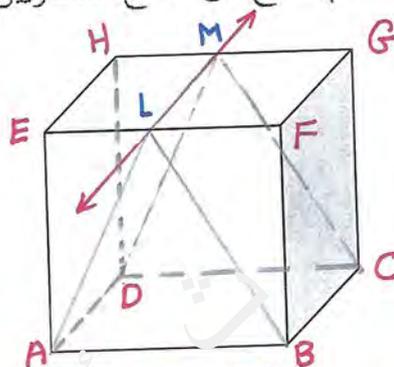
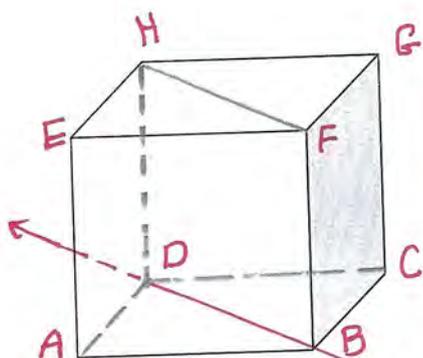
$$(a) (AGH) \cap (ABC) = \overleftrightarrow{AB} \quad (AGH) = (ABGH)$$

$$(ABC) = (ABCD)$$

(b) ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين BFH, ABCD

(c) إذا كانت L نقطة تنتمي إلى  $\overleftrightarrow{EF}$ ,

ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين ADL, BCL



$$b) \overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{DH} \therefore \overleftrightarrow{HD} \subseteq (BFH) \therefore (BFH) = (BFHD)$$

$$\overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABCD), \overleftrightarrow{BD} \subseteq (BFHD) \therefore (ABCD) \cap (BFH) = \overleftrightarrow{BD}$$

$$c) \overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{GF} \parallel \overleftrightarrow{EH}$$

أخذ  $M \in \overleftrightarrow{HG}$  بحيث  $EL = HM$

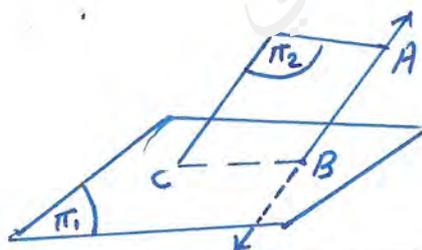
$\overleftrightarrow{BC}$  و  $\overleftrightarrow{LM}$  متوازيان يربوفاً مستوى  $BCML$

$\overleftrightarrow{AD}$  و  $\overleftrightarrow{LM}$  متوازيان يربوفاً مستوى  $ADML$

$$\therefore (BCML) \cap (ADML) = \overleftrightarrow{LM}$$

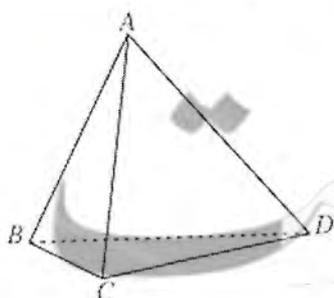
$$\therefore (ADL) \cap (BCL) = \overleftrightarrow{LM}$$

(10) ارسم  $\overleftrightarrow{AB}$  يقطع مستويًا  $\pi_1$  في النقطة B، ثم ارسم المستوي  $\pi_2$  يقطع المستوي  $\pi_1$  في مستقيم يمر بالنقطة B.



$$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi_1 = \{B\}$$

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{AB}$$

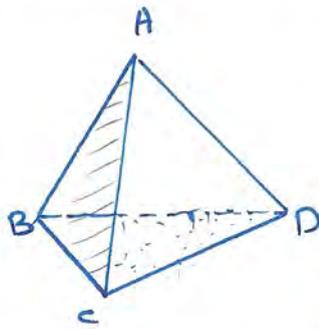


(11) هرم ثلاثي القاعدة أوجد:

(a) تقاطع  $\overleftrightarrow{AB}$  مع المستوي BCD؟

$$B \in \overleftrightarrow{AB} \quad B \in (BCD)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \cap (BCD) = \{B\}$$



(b) تقاطع  $\overleftrightarrow{AB}$  مع المستوي  $\triangle ACD$  ؟

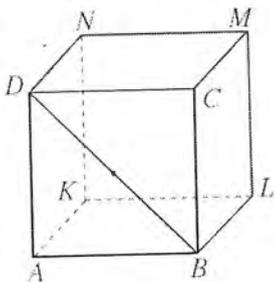
$$A \in \overleftrightarrow{AB}, A \in (\triangle ACD) \text{ و } B \notin (\triangle ACD)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \cap (\triangle ACD) = \{A\}$$

(c) تقاطع  $(ABC)$  مع المستوي  $\triangle BCD$  ؟

$$\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC), \overleftrightarrow{BC} \subseteq (\triangle BCD)$$

$$\therefore (\triangle BCD) \cap (ABC) = \overleftrightarrow{BC}$$



(12) في الرسم المقابل مكعب  $ABCDKLMN$  أوجد إن أمكن العلاقة بين:

(a)  $\overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{ND}$  مستقيمان متقاطعان في نقطة D

(b)  $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AD}$  من خواص المكعب، وجهه من أوجه مربع مستقيمان متوازيان حيثما

$\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$  متقابلتان في الوجه  $ABCD$

(c)  $\overleftrightarrow{ML}, \overleftrightarrow{BD}$   $\overleftrightarrow{BD} \subset \triangle BDC, \overleftrightarrow{ML}$  غير متقاطعان ولا يحويها مستوى واحد  
فهما مستقيمان متخالفتان

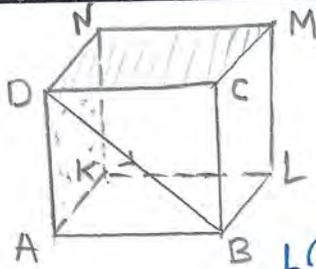
(d)  $\overleftrightarrow{ML}$  والمستوي  $\triangle ABLK$  يشتركان في نقطة واحدة وهي نقطة L

$\overleftrightarrow{ML} \cap (\triangle ABLK) = \{L\}$  فيها متقاطعان ويكون

(e) سمّ المستقيم الذي هو تقاطع المستويين  $ABCD, NBD$  يحويها مستوى واحد فقط  
 $(NBD) = (NLBD) : \overleftrightarrow{NL} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore (NLBD) \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore$  المستقيم  $\overleftrightarrow{BD}$  هو تقاطع المستويين  $(NBD), ABCD$



(f) أثبت أن النقاط  $L, B, D, N$  تنتمي إلى مستوى واحد.

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AK} \parallel \vec{LB} \quad , \quad \vec{AK} \parallel \vec{ND} \\ \therefore \vec{LB} \parallel \vec{ND} \end{aligned}$$

$\therefore \vec{LB}, \vec{ND}$  يصفياهما مستوى واحد يمر بنقاط  $L, B, D, N$

(g) هل  $\vec{ML}, \vec{ND}$  يعينان مستويًا واحدًا؟

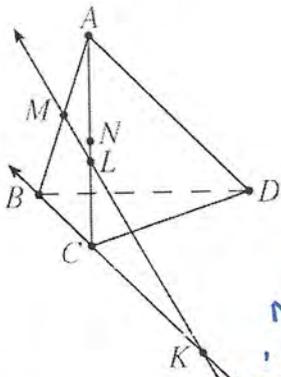
$\vec{ML}, \vec{ND}$  متصفياهما متخالفاهما لا يصفياهما مستويًا واحدًا.

(h) أثبت أن المستويين  $CMN, ADK$  يتقاطعان.

$$N \in (ADK) \quad , \quad D \in (CMN) \quad \therefore (ADK) = (ADNK) \quad , \quad (CMN) = (CMND)$$

$$\therefore (ADNK) \cap (CMND) = (\vec{ND})$$

$\therefore$  المستويين  $ADK, CMN$  يتقاطعان في المستقيم  $\vec{ND}$ .



(13) هرم  $ABCD$  ثلاثي القاعدة.

$M$  منتصف  $\overline{AB}$ ,  $N$  منتصف  $\overline{AC}$ ,  $L \in \overline{BC}$ ,  $L \neq N$

(a) أثبت أن  $\vec{ML}$  يقع في المستوي  $ABC$

$$M \in \overline{AB} \quad \therefore M \in (ABC) \quad , \quad L \in \overline{AC} \quad \therefore L \in (ABC)$$

$\therefore$  المستقيم  $\vec{ML}$  يترك مع المستوي  $ABC$  من نقطتين  $M, L$  فيقع بالملء فيه.

(b) أثبت أن  $\vec{ML}, \vec{CB}$  يتقاطعان في النقطة  $K$

$$\therefore \vec{MN} \parallel \vec{BC} \quad \text{و} \quad L \neq N$$

$\vec{ML}, \vec{CB}$  يوجبا المستوي  $(ABC)$  وغير متوازيين فهما متقاطعان

$$\therefore \vec{ML} \cap \vec{CB} = \{K\} \quad \text{و} \quad K \in \vec{ML} \quad , \quad K \in \vec{CB}$$

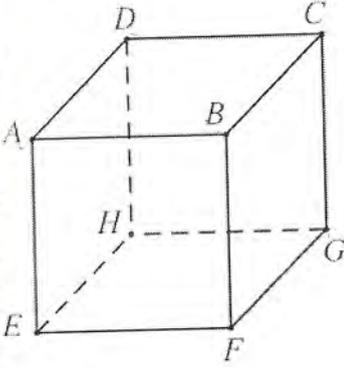
(c) ما نقطة تقاطع المستقيم  $\vec{ML}$  مع المستوي  $BCD$ ؟

$$\therefore K \in \vec{CB} \quad , \quad \vec{CB} \subseteq (BCD) \quad \therefore K \in (BCD) \quad \text{و} \quad M \notin (BCD)$$

$$\therefore K \in \vec{ML} \quad \therefore \vec{ML} \cap (BCD) = \{K\}$$

## المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.  
مكعب ABCDEFGH



(1) المستقيمان  $AB, HG$  يعينان مستويًا. (a) (b)

$$\overleftrightarrow{HG} \parallel \overleftrightarrow{DC}, \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC} \rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HG}$$

مستقيمان متوازيان مختلفان ليسا مستويين

(2) النقاط  $B, D, H, F$  تعين مستويًا. (a) (b)

$$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{HF}$$

مستقيمان متوازيان يمينان يسويان يمران بنقاط  $B, D, H, F$

(3) النقاط  $A, B, G, C$  تعين مستويًا. (a) (b)

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{GC}, \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BG}$$

نقطتان لا يمينان يسويان

(4) المستقيمان  $GC, EF$  يعينان مستويًا. (a) (b)

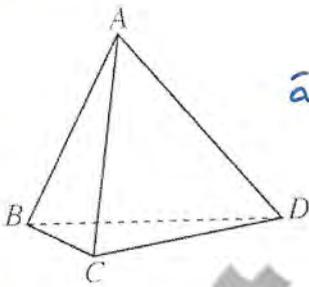
$$\overleftrightarrow{GC} \parallel \overleftrightarrow{EF}$$

مستقيمان متوازيان مختلفان ليسا مستويين

(5) المستقيمان  $BC, AB$  يعينان مستويًا. (a) (b)

$$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AB}$$

نقطتان يمينان يسويان



في التمرينين (6-7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) النقاط  $B, C, D$  تعين: (a) مستويًا واحدًا (b) مستويين مختلفين (c) عدد لا منه من المستويات المختلفة (d) لا يمكن أن تعين مستويًا

(7) أوجه منشور قائم خماسي القاعدة يعين:

(a) خمسة مستويات مختلفة (b) ستة مستويات مختلفة (c) سبعة مستويات مختلفة (d) ثمانية مستويات مختلفة

إتقاعه ووجهه

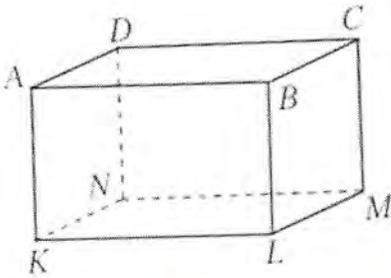
(a) خمسة مستويات مختلفة (b) ستة مستويات مختلفة (c) سبعة مستويات مختلفة (d) ثمانية مستويات مختلفة

(a) خمسة مستويات مختلفة (b) ستة مستويات مختلفة (c) سبعة مستويات مختلفة (d) ثمانية مستويات مختلفة

إتقاعه ووجهه

المستقيّات والمستويّات المتوازية في الفضاء  
Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية



(1) ABCDKLMN شبه مكعب.

(a) أثبت أن:  $\overline{AK} \parallel \overline{CM}$

(b) أثبت أن النقاط A, K, M, C تنتمي إلى مستو واحد.

(c) أثبت أن:  $\overline{AD}$  يوازي المستوي MKN

9)  $\overleftrightarrow{CM} \parallel \overleftrightarrow{BL}$  ,  $\overleftrightarrow{BL} \parallel \overleftrightarrow{AK}$   $\therefore \overleftrightarrow{CM} \parallel \overleftrightarrow{AK}$  من خواص شبه المكعب

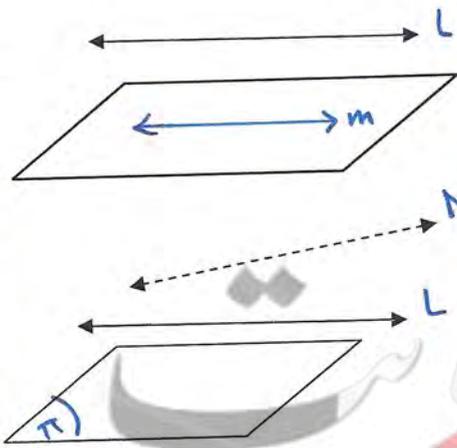
(b)  $AK$  و  $CM$  يوازيهما  $\rightarrow$  واحد لهما متوازيان  
 $\therefore$  النقاط A, K, M, C تنتمي إلى مستو واحد

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{KN}$  و  $\overleftrightarrow{KN} \subseteq (MKN)$  (c)  
 $\therefore \overleftrightarrow{AD} \parallel (MKN)$

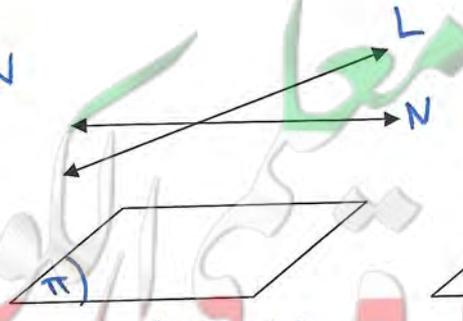
(2) (a) متى يكون المستقيم l موازيًا للمستوي  $\pi$ ? وضح ذلك بالرسم

(b) ارسم مستقيماً آخرًا يوازي المستوي  $\pi$

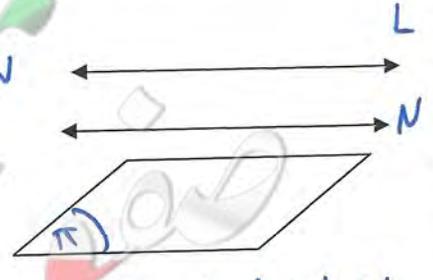
(a) إذا وازر l مستقيماً يوازي  $\pi$  فإنه يوازي  $\pi$



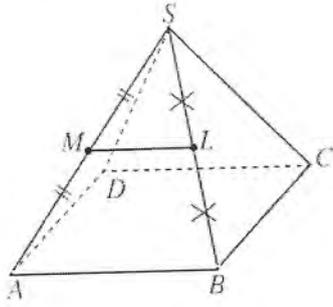
$N/L$  يوازيان  $\pi$   
و متوازيان



$N$  و  $L$  يوازيان  $\pi$   
و متوازيان



$N$  و  $L$  يوازيان  $\pi$   
و متوازيان

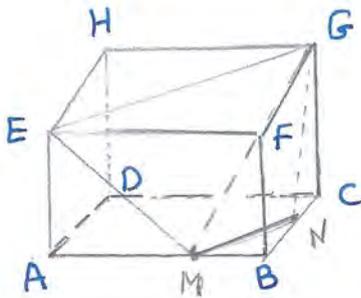


(3) هرم  $SABCD$  قاعدته  $ABCD$  مربعة الشكل.

$M$  منتصف  $SA$ ،  $L$  منتصف  $SB$

أثبت أن:  $\overline{ML} \parallel (ABCD)$

$M$  منتصف  $SA$ ،  $L$  منتصف  $SB$  ::  
 $\therefore \overline{ML} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \overline{ML} \parallel \overline{AB}$   
 $\therefore \overline{AB} \subseteq (ABCD)$   
 $\therefore \overline{ML} \parallel (ABCD)$



(4) مكعب  $ABCDEFGH$

المستوي  $GEM$  يقطع  $\overline{BC}$  في النقطة  $N$ ،  $M \in \overline{AB}$

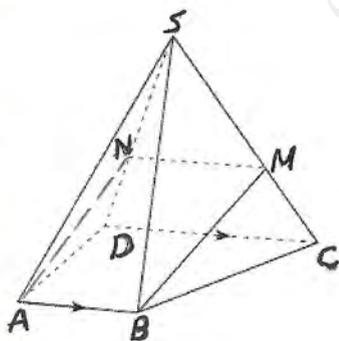
أثبت أن:  $\overline{GE} \parallel \overline{MN}$

$\therefore GEM$  يقطع  $\overline{BC}$  من  $N$

$\therefore NE \in (GEM)$

المستوي  $ABCD$  و  $EFGH$  متوازيان يقطعوا المستوي  $GEMC$  من المستقيمين  $EG, MN$

$\therefore \overline{EG} \parallel \overline{MN}$



(5) هرم  $SABCD$  قاعدته شبه المنحرف  $ABCD$  حيث إن  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$M \in \overline{SC}$ ، المستوي  $ABM$  يقطع  $\overline{SD}$  في  $N$

(a) أثبت أن:  $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$  المستوي  $SDC$

(b) أثبت أن:  $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$

$N \in (ABM)$

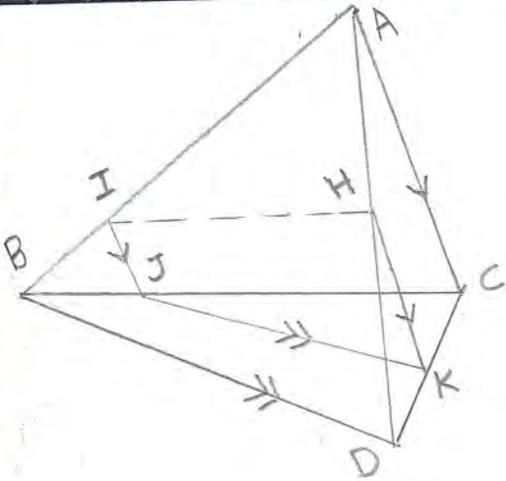
$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ،  $\overline{DC} \subseteq (SDC)$

$\therefore \overline{AB} \parallel (SDC)$

$\overline{AB}$  متوازيان و  $\overline{AB}$  و  $\overline{DC}$  متوازيان و  $\overline{DC} \subseteq (SDC)$  و تقاطعا في  $MN$

$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

(6)



(6) هرم ثلاثي القاعدة، القاعدة،  $I \in \overline{AB}$

المستقيم الموازي لـ  $\overline{AC}$  والمار بالنقطة  $I$  يقطع  $\overline{BC}$  في  $J$

المستقيم الموازي لـ  $\overline{BD}$  والمار بالنقطة  $J$  يقطع  $\overline{CD}$  في  $K$

المستقيم الموازي لـ  $\overline{AC}$  والمار بالنقطة  $K$  يقطع  $\overline{AD}$  في  $H$

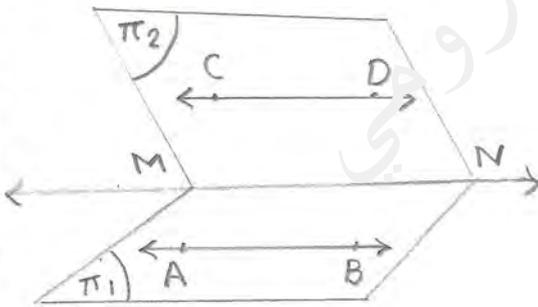
(a) ضع رسماً مناسباً.

(b) أثبت أن:  $\overline{IH} \parallel \overline{BD}$

$$\therefore \overline{IJ} \parallel \overline{AC} \text{ و } \overline{HK} \parallel \overline{AC}$$

$\therefore \overline{HK} \parallel \overline{IJ}$  (تتبعها المستويين  $(IJKH)$ )

$\overline{BD}$  و  $\overline{JK}$  مستقيمان متوازيان ومر بجل منها المستويين  
 $\overline{BDHI}$  و  $\overline{JKHI}$  على الترتيب وتقاطعا المستويين من  
 $\therefore \overline{IH} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{JK}$



(7) ليكن  $\pi_1, \pi_2$  مستويان متقاطعان في  $\overline{MN}$  حيث:

$$\overline{AB} \subset \pi_1, \overline{AB} \parallel \pi_2$$

$$\overline{CD} \subset \pi_2, \overline{CD} \parallel \pi_1$$

أثبت أن:  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

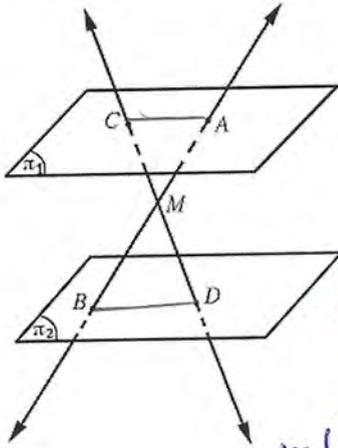
$$\therefore \overline{AB} \parallel \pi_2, \overline{AB} \subset \pi_1, \pi_1 \cap \pi_2 = \overline{MN}$$

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{MN} \text{ ----- (1)}$$

$$\therefore \overline{CD} \parallel \pi_1, \overline{CD} \subset \pi_2, \pi_1 \cap \pi_2 = \overline{MN}$$

$$\therefore \overline{CD} \parallel \overline{MN} \text{ ----- (2)}$$

من (1) و (2) نستنتج أن  
 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$   
 المستقيمان المتوازيان الثالث في الفضاء متوازيان.



(9) في الشكل المقابل  $\pi_1, \pi_2$  مستويان متوازيان،  $M$  نقطة واقعة بينهما،

$$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{M\} \text{ حيث}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD} \text{ أثبت أن:}$$

$\overleftrightarrow{AB}$  و  $\overleftrightarrow{CD}$  متقاطعهما فهما يمينانه متوازيان  
ولذلك  $\pi_3$  تقطع  $\pi_1, \pi_2$  على لترتيب من  $\overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{BD}$   
 $\therefore \overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

في المثلث  $\triangle ACM \sim \triangle BDM$ ،  $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$  و  $m(\hat{C}) = m(\hat{D})$   
 $\therefore$  المثلثان  $\triangle ACM, \triangle BDM$  متماثلان

$$\therefore \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$$

### المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل.

يشارك المستويان في مستقيم (تقاطعهما)  
أي أنه إذا اشترك المستويان في تقاطع واحد يكونا متوازيين أو متقاطعين

(a) (b)

(2) إذا وازى مستقيم مستويين فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نتيتهما.

إذا وازى المستقيم بأمله في المستوي فإنه يوازيه  
وفي هذه الحالة يكون بينهما نقاط مشتركة

(a) (b)

(3) إذا وازى مستقيم  $l$  مستوي  $\pi$  فإن  $T$  يوازي مستقيماً وحيداً في  $\pi$

إذا وازى مستقيم مستويين فإنه يوازي عدد لا نهائي  
من المستقيمان داخل هذا المستوي

(a) (b)

(4) إذا كان:  $\pi \parallel m, \pi \parallel T$  فإن  $T \parallel m$

قد يكون  $m, T$  متوازيين أو متقاطعين أو متوازيين

(a) (b)

(5) إذا وازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعهما فإنه  
تقاطعهما هو مستقيم يوازي كل من هذين المستقيمين

في التمارين (6-8)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

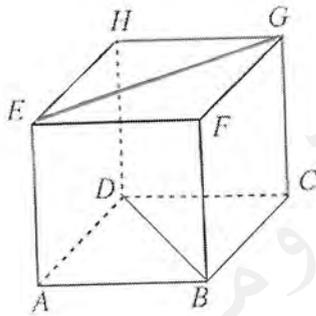
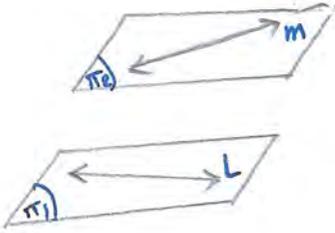
(6) إذا توازي مستويان مختلفان وقطعهما مستو ثالث فإن خطي التقاطع:

- (a) متقاطعان
- (b) متخالفان
- (c) متوازيان
- (d) متعامدان

(7) إذا كان  $\pi_1 \parallel \pi_2$ ،  $\bar{l} \subset \pi_1$ ،  $\bar{m} \subset \pi_2$  فإن:

- (a)  $\bar{l} \parallel \bar{m}$
- (b)  $\bar{l} \perp \bar{m}$
- (c) متخالفان  $\bar{l}, \bar{m}$
- (d)  $\bar{l} \cap \bar{m} = \phi$

يُحتمل أنه يكونا متوازيين أو متخالفاً



(8) في المكعب ABCDEFGH،  $\overline{BD}$ ،  $\overline{EG}$  هما:

- (a) متوازيان
- (b) متقاطعان
- (c) متخالفان
- (d) يحويهما مستو واحد

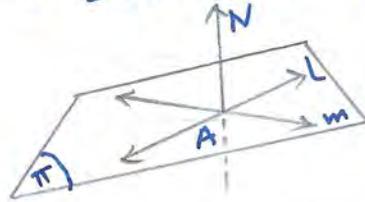
معاينة  
صفحة الكومست

Perpendicular Line with a Plane

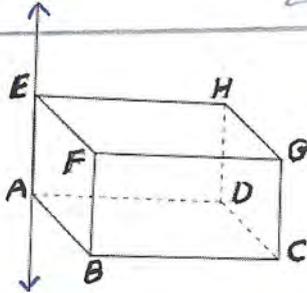
المجموعة A تمارين مقالية

- (1) (a) متى يكون المستقيم عمودياً على المستوي؟  
(b) ارسم مستقيماً عمودياً على مستوي.

(a) يكون المستقيم عمودياً على مستوي اذا كان عمودياً على متجهيه قسماً طوعيه فيه.



(b)  
 $\vec{C} \perp \pi, \vec{M} \subset \pi$   
 $\vec{L} \perp \vec{M} = \{A\}, N \perp L, N \perp M$



(2) ABCDEFGH شبه مكعب

(a) سمّ المستقيمت المتعامد مع  $\vec{AE}$

(b) سمّ المستويات المتعامدة مع  $\vec{AE}$

(c) أثبت أن  $\vec{AD}$  عمودي على المستوي CGH

(a)  $\vec{AE} \perp \vec{EH}, \vec{AE} \perp \vec{FG}, \vec{AE} \perp \vec{BC}, \vec{AE} \perp \vec{AD}$   
 وكذلك  $\vec{AE}$  عمودياً على كل من  $\vec{HG}, \vec{CD}, \vec{AB}, \vec{EF}$

(b) المستويات المتعامدة مع  $\vec{AE}$  هي  
 $(ABCD), (EFGH)$

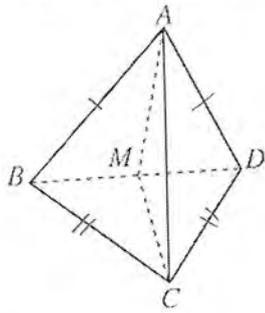
(c)  $\vec{CG} \parallel \vec{DH}$  يمينان متساويان

$\therefore D \in (CGH) \therefore (CGH) = (CGHD)$

$\vec{AD} \perp \vec{DH}, \vec{AD} \perp \vec{DC}$

$\vec{HD} \cap \vec{DC} = \{D\}$

$\therefore \vec{AD} \perp (DCGH)$



(3) هرم ثلاثي القاعدة.

$$AD = AB, CD = CB$$

النقطة M منتصف  $\overline{DB}$

(a) أثبت أن:  $\overline{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن:  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

في المثلث ABD ← في المثلث ABD  
 $\therefore AB = AD$  و  $\overline{DB}$  منتصف M

$$\therefore \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BD} \quad \longrightarrow (1)$$

في المثلث CBD ← في المثلث CBD  
 $CB = CD$  و  $\overline{BD}$  منتصف M

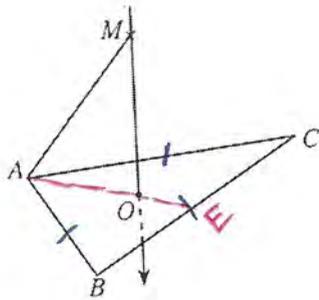
$$\therefore \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{BD} \quad \longrightarrow (2)$$

$\therefore \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM}$  متقاطعان بعينان  $\perp$  على  $\overrightarrow{BD}$  في  $(AMC)$

$$\therefore \overrightarrow{BD} \perp (AMC)$$

$$\therefore \overline{AC} \subseteq (AMC)$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$$



(4) مثلث متطابق الأضلاع مركزه O،  $\overline{MO}$  من نامد مع  $(ABC)$

أثبت أن:  $\overline{CB} \perp \overline{AM}$

لعمرك: نضد  $\overrightarrow{AO}$  يقطع  $\overline{BC}$  في E

$\therefore$  المثلث ABC متطابق الأضلاع مركزه O

$$\therefore \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC} \quad \dots (1)$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} \perp (ABC) \text{ و } \overline{BC} \subseteq (ABC)$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{BC} \quad \dots (2)$$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$  متقاطعان بعينان  $\perp$  على  $\overline{BC}$  في  $(AOM)$

$$\therefore \overline{CB} \perp (AOM)$$

(5) في الشكل المقابل،  $\overline{AB}$  عمودي على المستوي  $\pi_1, \pi_2$ ،  $\overline{AD} \perp \overline{DE}$ ،  $\overline{DE} \subset \pi_1$ ،  $\pi_2$  فإذا كانت  $D$  منتصف  $\overline{AB}$ ،  $F$  منتصف  $\overline{AC}$

أثبت أن:  $\pi_1 \parallel \pi_2$

$\therefore D$  منتصف  $\overline{AB}$ ،  $F$  منتصف  $\overline{AC}$

$$\therefore \overrightarrow{FD} \parallel \overrightarrow{CB}$$

$$\therefore \overline{AB} \perp \pi_2 \text{ و } \overline{CB} \subset \pi_2 \therefore \overline{AB} \perp \overline{CB}$$

$$\therefore \overline{AB} \perp \overline{FD} \quad \therefore \overrightarrow{FD} \parallel \overrightarrow{CB}$$

$$\therefore \overline{AD} \perp \overline{DE} \text{ ، } \overline{AD} \perp \overline{FD}$$

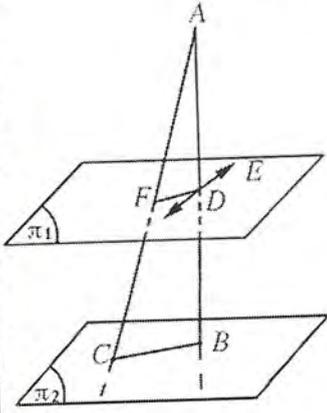
$\overline{AD} \perp \overline{DE}$  و  $\overline{AD} \perp \overline{FD}$  متقاطعا وكونوا محاور من  $\pi_1$

$$\therefore \overline{AD} \perp \pi_1 \Rightarrow \overline{AB} \perp \pi_1$$

المستقيم العمود على محورين مختلفين يكونان متوازيين

$$\therefore \overline{AB} \perp \pi_1 \text{ ، } \overline{AB} \perp \pi_2$$

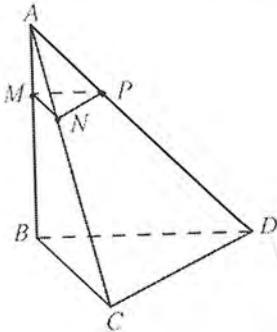
$$\therefore \pi_1 \parallel \pi_2$$



(6) في الشكل المقابل،  $ABCD$  هرم ثلاثي القائم حيث  $\overline{AB} \perp (BCD)$  فإذا كان:

$$AD = 3AP \text{ ، } AC = 3AN \text{ ، } AB = 3AM$$

أثبت أن  $\overline{AB}$  عمودي على  $(MNP)$



$$\therefore AD = 3AP \Rightarrow \frac{AD}{AP} = 3$$

$$AC = 3AN \Rightarrow \frac{AC}{AN} = 3$$

$$AB = 3AM \Rightarrow \frac{AB}{AM} = 3$$

$$\therefore \frac{AD}{AP} = \frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} = 3$$

$$\therefore \overrightarrow{NP} \parallel \overrightarrow{CD} \text{ ، } \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC} \text{ ، } \overrightarrow{MP} \parallel \overrightarrow{BD}$$

$$\therefore (BCD) \parallel (MNP)$$

$$\therefore \overline{AB} \perp (BCD)$$

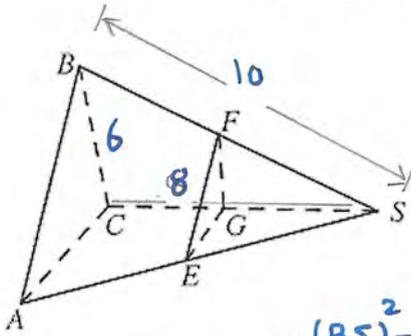
$$\therefore \overline{AB} \perp (MNP)$$

(7) في الشكل المقابل،  $(ABC) \parallel (EFG)$ ،  $S$  نقطة خارج  $(ABC)$ ،  $(EFG)$

بحيث  $\vec{SC} \perp \vec{AC}$

فإذا كان:  $SB = 10 \text{ cm}$ ,  $SC = 8 \text{ cm}$ ,  $BC = 6 \text{ cm}$

أثبت أن:  $\vec{SC} \perp \vec{FE}$



في المثلث  $BCS$

$$\therefore (BS)^2 = 100, (BC)^2 + (CS)^2 = 36 + 64 = 100$$

$\therefore$  المثلث قائم الزاوية من  $C$

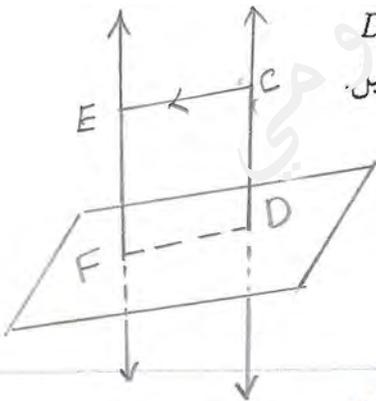
$$\left. \begin{array}{l} \therefore \vec{SC} \perp \vec{BC} \\ \therefore \vec{SC} \perp \vec{AC} \end{array} \right\} \therefore \vec{SC} \perp (ABC)$$

$$\therefore (ABC) \parallel (EFG)$$

$$\therefore \vec{SC} \perp (EFG)$$

$$\therefore \vec{FE} \subseteq (EFG)$$

$$\therefore \vec{SC} \perp \vec{FE}$$



(8) ليكن  $\vec{CD}$ ،  $\vec{EF}$  عموديان على المستوي  $\pi$  ويقطعانه في  $D$ ،  $E$  على الترتيب. فإذا كان  $\vec{CE}$  يوازي  $\pi$ . أثبت أن  $CDFE$  مستطيل.

$$\therefore \vec{CD} \perp \pi, \vec{EF} \perp \pi$$

$$\therefore \vec{CD} \parallel \vec{EF} \Rightarrow CDFE \text{ مستطيل}$$

$$\therefore \vec{CE} \parallel \pi, \vec{FD} \subseteq \pi$$

$$\therefore \vec{CE} \parallel \vec{FD}$$

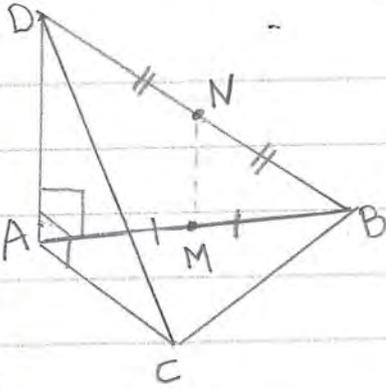
من (1) (2)  $ECDF$  مستطيل أصلي

$$\vec{EF} \perp \pi, \vec{FD} \subseteq \pi \Rightarrow \vec{EF} \perp \vec{FD} \quad m(\hat{EFD}) = 90^\circ$$

$ECDF$  مستطيل

(9)  $ABC$  مثلث، أخذت النقطة  $D$  خارج مستوي المثلث بحيث كان:  $\overline{DA}$  عمودياً على كل من  $\overline{AB}$ ،  $\overline{AC}$

فإذا كانت  $M$  منتصف  $\overline{AB}$ ،  $N$  منتصف  $\overline{DB}$ ، أثبت أن:  $\overline{MN} \perp (ABC)$



$$\therefore \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{AC}$$

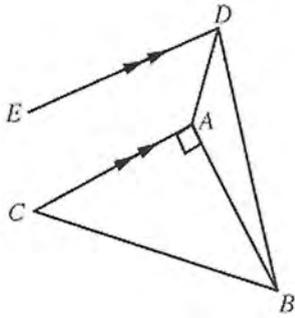
$$\therefore \overrightarrow{DA} \perp (ABC) \dots (1)$$

$$\overline{BD} \text{ منتصف } N \text{ و } \overline{AB} \text{ منتصف } M \therefore$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{DA} \dots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن

$$\overrightarrow{MN} \perp (ABC)$$



(10) في الشكل المقابل،  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$

رسم  $\overline{AD}$  عمودي على مستوي المثلث  $ABC$ ، ورسم  $\overline{ED} \parallel \overline{CA}$

أثبت أن:  $\overline{ED} \perp \overline{AB}$

$$\therefore \overrightarrow{AD} \perp (ABC), \overrightarrow{AC} \subseteq (ABC)$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$$

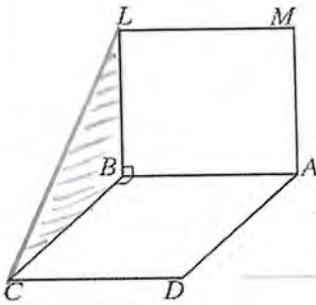
$$\therefore \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC} \end{array} \right\} \therefore \overrightarrow{AC} \perp (ABD)$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD} \subseteq (ABD)$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} \parallel \overrightarrow{CA} \therefore \overrightarrow{ED} \perp \overrightarrow{BD}$$

(11)  $ABLM$ ،  $ABCD$  مربعان ليسا في مستوي واحد، لهما ضلع مشترك  $\overline{AB}$ ،

أثبت أن:  $\overline{LM} \perp (LBC)$



من خواص المربع

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \perp (LBC) : \overrightarrow{LB} \cap \overrightarrow{CB} = \{B\}$$

$$\therefore \overrightarrow{LM} \parallel \overrightarrow{AB}$$

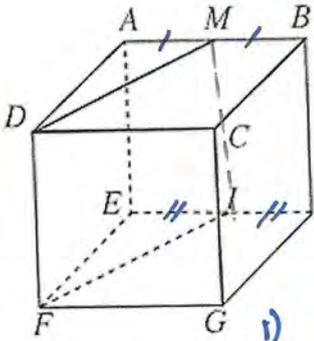
$$\therefore \overrightarrow{LM} \perp (LBC)$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (1-2)، على الشكل المقابل حيث مكعب  $ABCDEFHG$

النقطة  $M$  منتصف  $\overline{AB}$ ،  $I$  منتصف  $\overline{EH}$ .



(1)  $\overline{MI} \perp (EFGH)$

a  b

(2)  $\overline{MD} \perp (BCGH)$

a  b

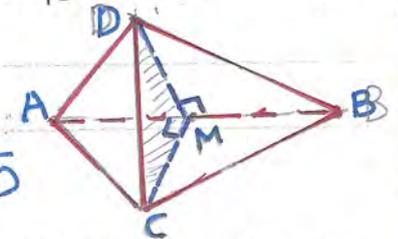
1)  $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{EF} \therefore \overrightarrow{AE} \perp (EFGH) \therefore \overline{MI} \parallel \overrightarrow{AE}$

2)  $\overline{MD} \subset \overline{DC}$  متطابقاً مع  $(BCGH)$   $\therefore \overline{MD} \perp (BCGH)$  لأن  $\overline{MD}$  عمودياً على  $(BCGH)$ .

(3) إذا كان  $ABCD$  هرم ثلاثي القائمة جميع أحرافه متطابقة فإن:  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

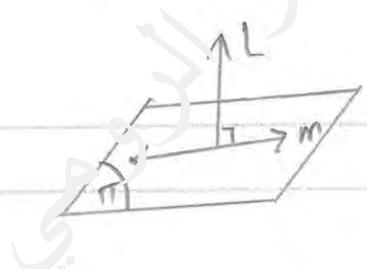
a  b

لأن  $M$  منتصف  $\overline{AB}$   
 $\overline{CM} \perp \overline{AB}$  و  $\overline{DM} \perp \overline{AB}$   
 $\therefore \overline{AB} \perp (CMD) \therefore \overline{AB} \perp \overline{CD}$



(4) إذا كان  $\overline{m} \subset \pi$  فإن  $\overline{l} \perp \overline{m}$

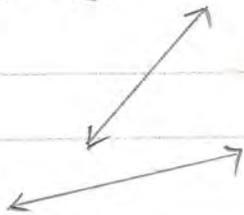
a  b



(5) إذا كان المستقيمان  $l, m$  متخالفان وكان  $\overline{n} \perp \overline{m}$  فإن  $\overline{l} \perp \overline{n}$

a  b

$\overline{l}, \overline{n}$  قد يكونا متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين



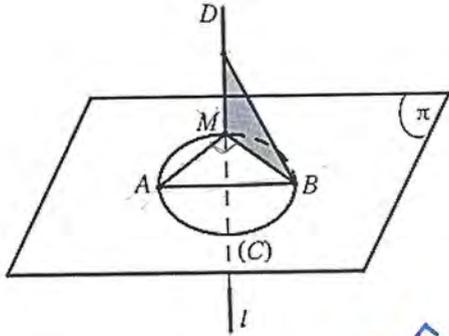
(6) إذا كان المستقيمان  $l, m$  متخالفان وكان  $\overline{n} \perp \overline{m}$  فإن  $\overline{l} \perp \overline{n}$  متخالفان.

a  b

متخالفان أو متوازيين أو متقاطعين

في التمارين (8-11)، ظلل رمز الدائرة الذال على الإجابة الصحيحة.

(7) في الشكل المقابل :



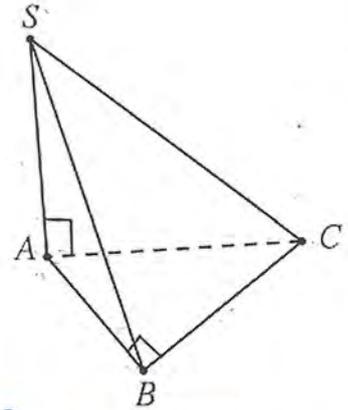
إذا كان  $\vec{l} \perp (AMB)$ ،  $\overline{AB}$  قطر في الدائرة (C) فإن:

- (a)  $\overline{AB} \perp \overline{BD}$       (b)  $\vec{l} \perp (BMD)$   
 (c)  $\overline{AM} \perp (BMD)$       (d)  $\overline{AB} \perp \overline{BM}$

$$m(\widehat{AMB}) = 90^\circ \therefore \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{MB} \dots (1)$$

$$\therefore \vec{l} \perp (AMB) \therefore \vec{l} \perp \overrightarrow{AM} \Rightarrow \vec{CD} \perp \overrightarrow{AM}$$

(8) في الشكل المقابل إذا كان  $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ ،  $\overline{SA} \perp (ABC)$  فإن:



(a) المثلث SAB قائم في  $\widehat{B}$

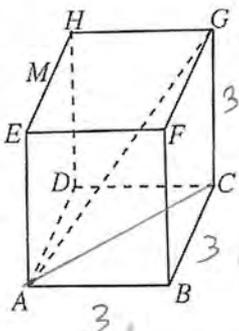
(b)  $\overline{CB} \perp (SAB)$

(c) المثلث SAB متطابق الضلعين.

(d) المثلث SCB قائم في  $\widehat{C}$

$$\overrightarrow{SA} \perp \overline{BC}, \overline{AB} \perp \overline{BC} \therefore \overline{BC} \perp (ASB)$$

(9) يمثل الشكل المقابل مكعباً، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره  $\overline{AG}$  يساوي



(a)  $\sqrt{3}$  cm

(b)  $3\sqrt{3}$  cm

(c) 9 cm

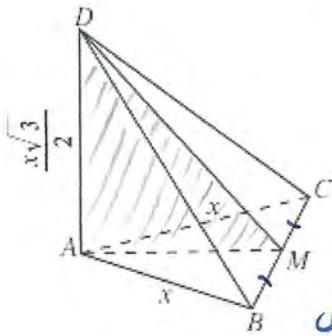
(d) 18 cm

$$\begin{aligned} \text{طول قطره المكعب } AC &= \text{طول الحرف} \times \sqrt{2} \\ \text{طول قطر المكعب } AG &= \text{طول الحرف} \times \sqrt{3} \end{aligned}$$

## الزاوية الزوجية

## The Dihedral Angle

## المجموعة A تمارين مقالية

(1) مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه  $x$  $\overline{AD}$  متعامد مع المستوي  $ABC$ ،  $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$  $M$  منتصف  $\overline{BC}$ (a) أثبت أن  $\overline{CB}$  متعامد مع المستوي  $AMD$ نثبت أن  $\overline{BC}$  عمودي على مستويين متقاطعين في  $M$ 

$$\therefore \overrightarrow{AD} \perp (ABC), \overline{BC} \subseteq (ABC) \therefore \overrightarrow{AD} \perp \overline{BC} \quad (1)$$

المثلث  $ABC$  متطابق الأضلاع،  $M$  منتصف  $\overline{BC}$ 

$$\therefore \overrightarrow{AM} \perp \overline{BC} \quad (2)$$

من (1) و (2)  $\overline{BC}$  عمودياً على مستويين  $\overrightarrow{AD}$ ،  $\overrightarrow{AM}$  متقاطعين

$$\therefore \overline{BC} \perp (AMD)$$

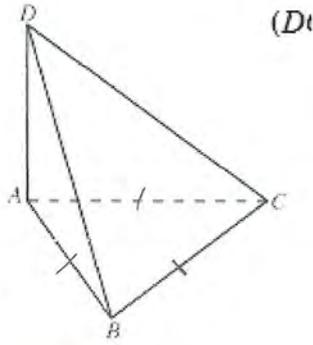
(b) عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية  $(DCB, \overline{BC}, ACB)$  $\overline{BC}$  هو خط تقاطع المستويين  $(DCB)$ ،  $(ACB)$  $\overrightarrow{AM} \perp \overline{BC}$  في المستوي  $ACB$  $\overrightarrow{DM} \perp \overline{BC}$  في المستوي  $DCB$ ∴ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية هي  $\widehat{AMD}$ (c) أوجد قياس الزاوية الزوجية  $(DCB, \overline{BC}, ACB)$ المثلث  $AMC$  مثلث متساوي الساقين طول وتره  $x$ ،  $\overline{AM}$  مقابل للزاوية  $60^\circ$ 

$$\therefore AM = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

المثلث  $DAM$  قائم الزاوية متطابق الأضلاع فيه  $DA = AM$ 

$$\therefore m(\widehat{AMD}) = \frac{\pi}{4}$$

∴ قياس الزاوية الزوجية =  $\frac{\pi}{4}$



(2)  $ABC$  مثلث متطابق الأضلاع.

$\overline{AD}$  متعامد مع المستوي  $ABC$

أوجد قياس الزاوية الزوجية  $(DAB, \overline{DA}, DAC)$

$\overleftrightarrow{DA}$  هو خط تقاطع المستويين  $DAB, DAC$

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AD}$  في المستوي  $ADC$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$  في المستوي  $ADB$

$\therefore$  الزاوية  $(\widehat{BAC})$  هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية  $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

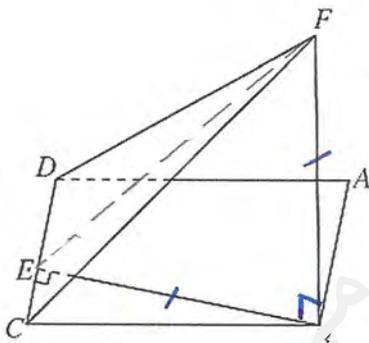
$\therefore$  مثلث  $ABC$  صفاً به الأضلاع متساوية

$$\therefore m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{3}$$

(3) في الشكل المقابل  $ABCD$  شكل رباعي،  $\overline{FB}$  عمودي على المستوي  $ABCD$ .

$\overline{BE} \perp \overline{CD}$  فإذا كان  $FB = BE$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين  $(FCD), (ABCD)$



$\overleftrightarrow{CD}$  خط تقاطع بين  $FCD, ABCD$

①  $\overleftrightarrow{EB} \perp \overleftrightarrow{CD}$  في المستوي  $(ABCD)$

②  $\therefore (ABCD) \perp \overleftrightarrow{BF}$  فهو عمودي على  $\overleftrightarrow{DC}$  فيه

من ①، ②  $\overleftrightarrow{DC} \perp (FBE)$

③  $\therefore \overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{DC}$  في المستوي  $FCD$

من ①، ③  $(\widehat{FEB})$  هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية

المثلث  $EFB$  قائم الزاوية فيه  $BE = FB$

$$\therefore m(\widehat{FEB}) = \frac{\pi}{4}$$

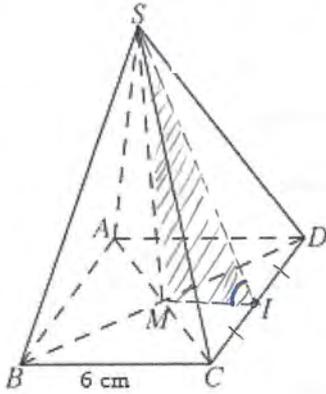


(5) هرم  $SABCD$  مربع القاعدة طول ضلعها  $6\text{ cm}$  ومركزها  $M$

بحيث إن  $\overline{SM} \perp (ABCD)$ ،  $I$  منتصف  $\overline{CD}$

(a) أثبت أن:  $(M\hat{I}S)$  هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية  $(ABCD, \overline{CD}, SCD)$

(b) أوجد:  $m(M\hat{I}S)$  إذا كان  $SM = \sqrt{3}\text{ cm}$



(a)  $\overleftrightarrow{CD}$  خط تقاطع المستويين  $ABCD$  و  $SCD$

$\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{MI} \therefore \overleftrightarrow{CD}$  منتصف  $I$

$\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{SM} \therefore \overleftrightarrow{SM} \perp (ABCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (SMI)$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{SI}$  في المستوي  $SCD$

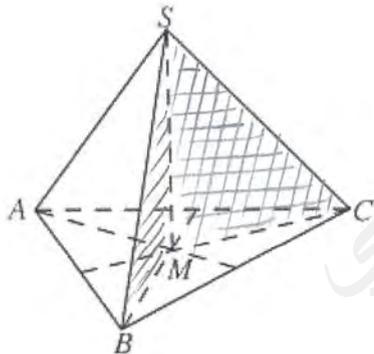
$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{MI}$  في المستوي  $ABCD$

$\therefore (SIM)$  هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

(b) في مثلث  $MIS$  الزاوية في  $M$  فيه  $SM = \sqrt{3}$

$MI = \frac{1}{2} BC = 3$   $M$  مركز المربع

$$\therefore \tan(M\hat{I}S) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m(M\hat{I}S) = \frac{\pi}{6}$$



(6) هرم  $SABC$  قاعدته مثلث متطابق الأضلاع مركزه  $M$

بحيث إن  $\overline{SM} \perp (ABC)$

أوجد قياس الزاوية الزوجية  $(SMB, \overline{SM}, SMC)$

$\overleftrightarrow{SM}$  هو خط التقاطع بين المستويين

$\overleftrightarrow{MC} \perp \overleftrightarrow{SM}$  في المستوي  $SMC$

$\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{SM}$  في المستوي  $SMB$

$\therefore (B\hat{M}C)$  هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية  $(SMB, \overline{SM}, SMC)$

$\therefore$  المثلث  $ABC$  متطابق الأضلاع،  $M$  مركز المثلث

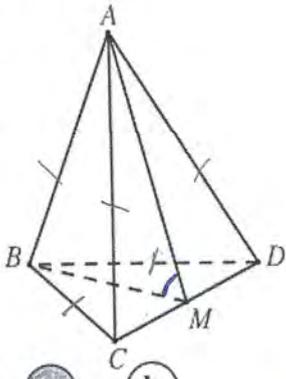
$$\therefore m(B\hat{M}C) = 120^\circ$$

$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$\therefore$  قياس الزاوية الزوجية يساوي

قياس الزاوية بين المستويين هو الزاوية الحادة

## المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (1-4)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.  
أسئلة التمرينين (1-2)، على الشكل المقابل.

إذا كان ABCD هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف  $\overline{CD}$  فإن:

(1)  $\overline{CD}$  عمودي على  $\overline{AB}$

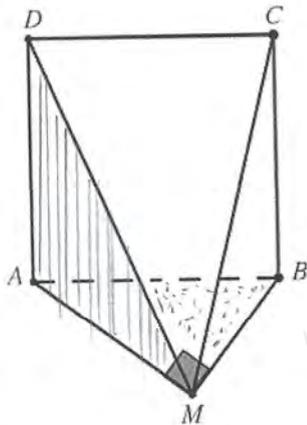
(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية ( $BDC, \overline{DC}, ADC$ ) هي  $\widehat{AMD}$

$\widehat{AMB}$

(a) (1)  $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{CD}$  ,  $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}$   
 $\therefore \overrightarrow{CD} \perp (AMB)$  ,  $\overline{AB} \subseteq (AMB)$

(2) (a)  $\overrightarrow{DC}$  خط النطاق بين المستويين ،

$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}$  في  $\perp$   $ADC$   
 $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{CD}$  في  $\perp$   $BDC$



أسئلة التمرينين (3-4)، على الشكل المقابل.

المثلث  $AMB$  قائم الزاوية في  $M$ ،  $\overline{AD}$  متعامد مع المسوي  $AMP$   
 إذا أخذنا النقطة  $C$  بحيث يكون  $ABCD$  مربعاً فإن:

(a) (b)

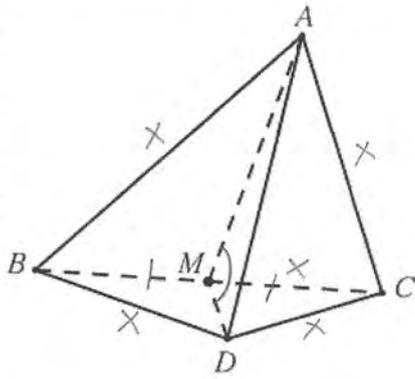
(3)  $\overrightarrow{BM}$  متعامد مع  $(MAD)$

(a) (b)

(4)  $\overrightarrow{CB}$  متعامد مع  $(AMB)$

$\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AM}$  ,  $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{DA} \rightarrow \overrightarrow{BM} \perp (MAD)$  (3)

$\overrightarrow{AD} \perp (AMB)$  ,  $\overrightarrow{CB} \parallel \overrightarrow{AD} \therefore \overrightarrow{CB} \perp (AMB)$  (4)



في التمارين (10-5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.  
أسئلة التمارين (7-5)، على الشكل المقابل. حيث إن:

$M$  منتصف  $\overline{BC}$

$ABC$ ,  $DBC$  مثلثان لهما ضلع مشترك  $\overline{BC}$  حيث  $BC = x$   
وهما متطابقا الأضلاع ولا يحويهما مستو واحد.

(5) الزاوية الزوجية ( $BAC$ ,  $\overline{BC}$ ,  $BCD$ ) هي:

(a)  $\widehat{AMD}$

(b)  $\widehat{BMC}$

(c)  $\widehat{AMB}$

(d)  $\widehat{BAM}$

$$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

$$\overleftrightarrow{DM} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

من المثلث  $ABC$  متطابق الأضلاع،  $M$  منتصف  $\overline{BC}$  ←

من المثلث  $BDC$  متطابق الأضلاع،  $M$  منتصف  $\overline{BC}$  ←

∴ زاوية ( $\widehat{AMD}$ ) هي زاوية قائمة للزاوية الزوجية  $\overleftrightarrow{BC}$

(6) إذا كان:  $m(\widehat{AMD}) = 60^\circ$  فقيمة  $AD$  بدلالة  $x$  هي:

(a)  $\frac{x}{2}$

(b)  $\frac{x\sqrt{2}}{2}$

(c)  $x\sqrt{3}$

(d)  $\frac{x\sqrt{3}}{2}$

∴ المثلثان  $ABC$ ,  $DBC$  مثلثان متطابقان الأضلاع وطول ضلع كل منهما  $x$

$$\therefore AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

في المثلث  $AMD$   $DM = AM$ ،  $m(\widehat{AMD}) = 60^\circ$  ∴ سيكون  $AMD$  مثلث متطابق الأضلاع  
 $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 60^\circ$   
 $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

(7) إذا كان  $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ ، فإن:  $m(\widehat{AMD})$  يساوي: ★

(a)  $90^\circ$

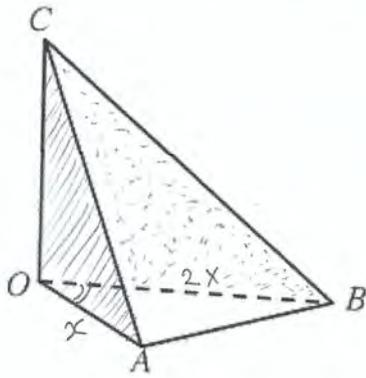
(b)  $45^\circ$

(c)  $60^\circ$

(d)  $30^\circ$

$$\therefore AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

∴  $DA = AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ،  $m(\widehat{AMD}) = 60^\circ$   
سيتكون المثلث  $AMD$  متطابق الأضلاع



أسئلة التمرين (8-9) على الشكل المقابل.

إذا كان  $OAB$  مثلث فيه:

$$m(\widehat{AOB}) = 60^\circ, OB = 2x, OA = x$$

$\vec{OC}$  متعامد مع المستوي  $OAB$

(8) طول  $\overline{AB}$  يساوي:

- (a)  $x$       (b)  $x\sqrt{2}$       (c)  $x\sqrt{3}$       (d)  $\frac{x}{2}$

في مثلث  $OAB$  صدق قاعدة جيب التمام

$$(AB)^2 = (2x)^2 + x^2 - 2(2x)(x) \cos 60^\circ = 3x^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3} x$$

(9) قياس الزاوية الزوجية  $(AOC, \vec{OC}, BOC)$  هو:

- (a)  $30^\circ$       (b)  $45^\circ$       (c)  $60^\circ$       (d)  $90^\circ$

$\vec{OC}$  خط التقاطع أو حافة الزاوية الزوجية

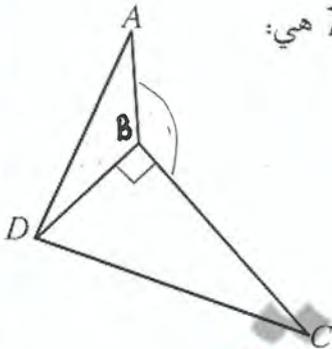
$\vec{OB} \perp \vec{OC}$  في المستوي  $OBC$

$\vec{OA} \perp \vec{OC}$  في المستوي  $AOC$

$\therefore$  زاوية  $(\widehat{AOB})$  هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية وقياسها  $60^\circ$

(10) في الشكل المقابل، المثلث  $DBC$  قائم الزاوية في  $B$ ,

فإذا كان  $\overline{AB}$  عمودي على  $(DBC)$  فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية  $\overline{BD}$  هي:



- (a)  $\widehat{DBC}$       (b)  $\widehat{ABC}$   
(c)  $\widehat{ABD}$       (d)  $\widehat{ADC}$

$\vec{BD}$  حافة الزاوية الزوجية

$\vec{DB} \perp \vec{BC}$

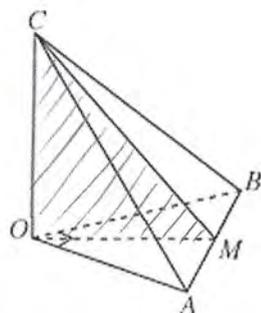
$\vec{AB} \perp (DBC) \therefore \vec{AB} \perp \vec{BD}$

$\therefore$  الزاوية  $(\widehat{ABC})$  بين  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$  هي الزاوية المستوية.

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية



(1)  $OAB$  مثلث قائم في  $O$ ،  $OA = OB = 1$

$\vec{OC}$  متعامد مع المستوي  $OAB$ ،  $OC = 1$

$M$  منتصف  $\overline{AB}$

(a) أثبت أن المستوي  $COM$  متعامد مع المستوي  $OAB$

$$\vec{OC} \perp (OAB), \vec{CO} \subseteq (COM)$$

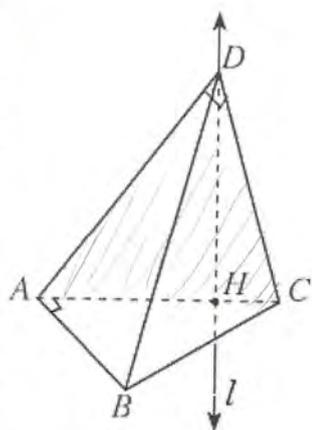
$$\therefore (COM) \perp (OAB)$$

(b) أثبت أن المستوي  $COM$  متعامد مع المستوي  $CAB$

$$\vec{AB} \perp \vec{OC} \text{ و } \because OA = OB, MA = MB \therefore \vec{AB} \perp \vec{OM}$$

$$\therefore \vec{AM} \perp (CM) \therefore \vec{AM} \subseteq (CAB)$$

$$\therefore (COM) \perp (CAB)$$



(2)  $ABC$  مثلث قائم في  $A$ ،  $H \in \overline{AC}$

نأخذ المستقيم  $l$  المتعامد مع المستوي  $ABC$  والمار بالنقطة  $H$

$D \in l$  حيث يكون المثلث  $ADC$  قائم الزاوية في  $D$

(a) أثبت أن  $\overline{AB}$  متعامد مع  $(ACD)$

$$\vec{AB} \perp \vec{AC} \text{ ..... (1) } \text{ بطل}$$

$$\therefore \vec{DH} \perp (ABC) \therefore \vec{DH} \perp \vec{AB} \text{ ..... (2)}$$

من (1) و (2)

$$\vec{AB} \perp (ADC)$$

حيث  $\vec{DH}$  و  $\vec{AC}$  متقاطعا، يعنيهما مستويين وحيده هو  $ADC$

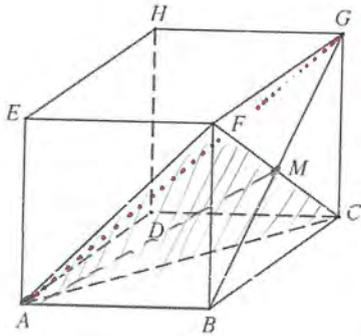


(b) أثبت أن المثلث  $ACF$  متطابق الأضلاع.  
 $\overline{AC}$  ,  $\overline{CF}$  ,  $\overline{AF}$  هي أوتار لمثلثات قائمة أطوال أضلاع لقائمة

فيها جميعاً مطابقة وكلها يساوي ضلع لقائمة  $a$

$$\therefore AC = CF = AF = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

أو أقطار لثلاثة مكعب



(c)  $M$  نقطة تقاطع  $\overline{BG}$  ,  $\overline{FC}$

أثبت أن:  $\overline{AM} \perp \overline{FC}$

∵ المثلث  $ACF$  متطابق الأضلاع

$M$  منتصف  $\overline{FC}$

$$\therefore \overline{AM} \perp \overline{FC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{FC}$$

(d) أثبت أن:  $(BCGF) \perp (ABG)$   
 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$  ,  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BF}$   $\rightarrow \overrightarrow{AB} \perp (BCGF)$   
 $\overrightarrow{AB} \subseteq (ABG)$

$$\therefore (BCGF) \perp (ABG)$$

(e) أثبت أن:  $(ABG) \perp \overline{FC}$   
 $\overrightarrow{AB} \perp (BCGF)$  ,  $\overline{FC} \subseteq (BCGF)$

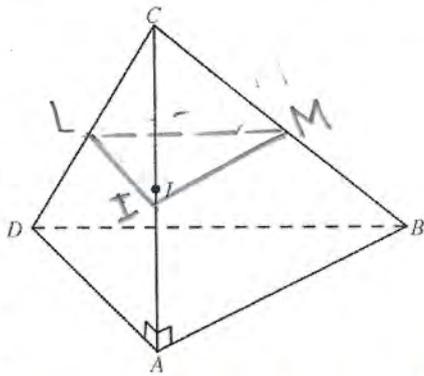
$$\therefore \overrightarrow{AB} \perp \overline{FC} \quad \dots \dots (1)$$

$$\overrightarrow{BG} \perp \overline{FC} \quad \dots \dots (2)$$

قطر المربع متعامدان

$$\overrightarrow{FC} \perp (ABG)$$

من (1) و (2)



(4) هرم ثلاثي القاعدة فيه:

$\overline{CA} \perp (ABD)$ ,  $I$  منتصف  $\overline{AC}$

أثبت أن المستوي العمودي من  $I$  على  $\overline{AC}$  يقطع  $(ADC)$

بمستقيم يمر في منتصف  $\overline{DC}$  ويقطع  $(ABC)$  بمستقيم

يمر في منتصف  $\overline{BC}$

نفرض  $ILM$  مستوي عمودي على  $\overline{AC}$  ويقطع  $\overline{DC}$  في  $L$  ويقطع  $\overline{BC}$  في  $M$

$\therefore \overline{AC} \perp (ABD)$ ,  $\overline{AC} \perp (ILM)$

$\therefore (ABD) \parallel (ILM)$

المستويين  $ILM$ ,  $ABC$  متوازيين  $\therefore$  قاطع لهما في  $IM$ ,  $AB$  على الترتيب

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{IM} \quad \therefore \frac{CM}{MB} = \frac{CI}{IM} = 1$$

$$\therefore CM = MB$$

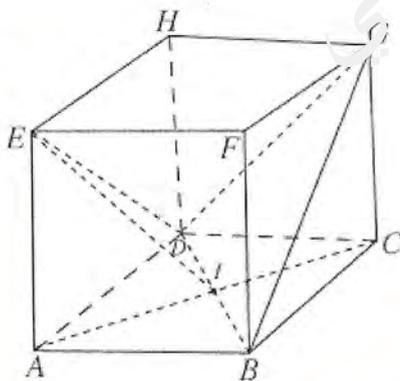
$\therefore M$  منتصف  $BC$

بالمثل المستوي  $ADC$  قاطع للمستويين المتوازيين في  $AD$  و  $IL$  على الترتيب

$$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{IL} \Rightarrow \frac{CI}{IA} = \frac{CL}{LD}$$

$$\therefore CL = LD$$

$\therefore L$  منتصف  $DC$



(5) مكعب  $ABCDEFGH$  طول ضلعه  $5 \text{ cm}$

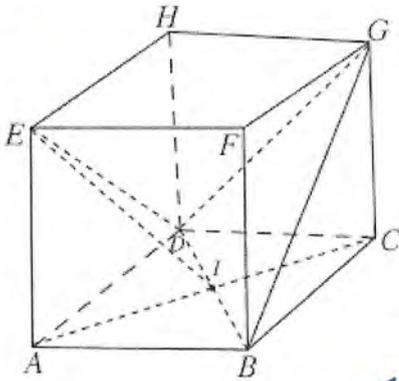
(a) أثبت أن المثلث  $EDB$  متطابق الأضلاع.

$\overline{ED}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{EB}$  أو ما رآ في مثلثات قائمة أضلاع لقائمة فيها جميعاً تساوي طول ضلع المكعب  $5$

$$\therefore ED = BD = EB = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$\therefore$  المثلث  $EDB$  متطابق الأضلاع

أو هي أقطار لوجه مكعب فهي متساوية في الطول.



(b) نقطة تقاطع القطرين في المربع  $ABCD$ ,  
 أثبت أن:  $(DBG) \perp (AEI)$

المستويين  $AEGC$  ,  $AEI$  متطابقان

$$\therefore AEI = AEGC$$

$$\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AC} \dots\dots (1) \quad \text{قطر مربع}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{EA} \perp (ABCD), \overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABCD)$$

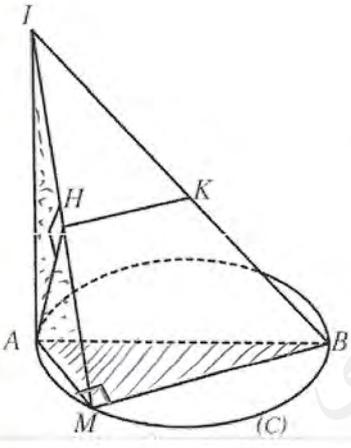
$$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{EA} \dots\dots (2)$$

من (1) , (2) نستنتج أن  $\overleftrightarrow{DB} \perp (ACGE)$

$$\therefore \overleftrightarrow{DB} \subseteq (DBG)$$

$$\therefore (DBG) \perp (ABCD)$$

$$\therefore (DBG) \perp (AEI)$$



(6) في الشكل المقابل:

(C) دائرة قطرها  $\overline{AB}$ ,  $M$  نقطة على الدائرة مختلفة عن  $A$  و  $B$

$\overline{IA}$  عمودي على مستوى الدائرة.

(a) أثبت أن:  $(IMB) \perp (IAM)$

$$\overline{AB} \text{ قطر في الدائرة} \rightarrow m(\widehat{AMB}) = 90^\circ$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{MB} \dots\dots (1)$$

$\overleftrightarrow{IA}$  عمودي على مستوى الدائرة  $\overleftrightarrow{MB}$  محتوي في مستوى الدائرة

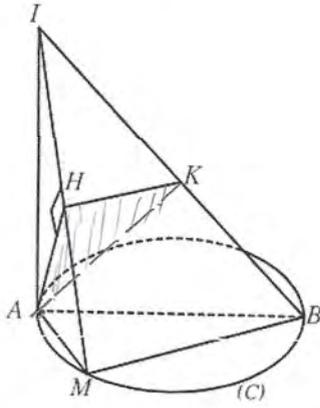
$$\therefore \overleftrightarrow{IA} \perp \overleftrightarrow{MB} \dots\dots (2)$$

من (1) , (2)

$$\overleftrightarrow{MB} \perp (IAM) \dots\dots *$$

$$\therefore \overleftrightarrow{MB} \subseteq (IMB) \dots\dots **$$

$$(IAM) \perp (IMB) \dots\dots ** (* **)$$



(b) إذا كان  $\overline{AH} \perp \overline{IM}$  ،  $K$  نقطة على  $\overline{IB}$

أثبت أن:  $(IMB) \perp (AHK)$

$$\overleftrightarrow{MB} \perp (AM) , \overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{IA}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{MB} \perp (IAM)$$

$$\overleftrightarrow{AH} \subseteq (IAM) \therefore \overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{AH} \dots (1)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{IM} \dots (2)$$

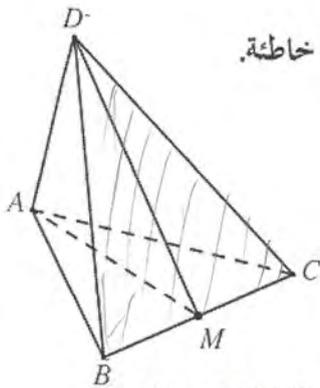
من (1) (2) نستنتج أن

$$\overleftrightarrow{AH} \perp (IMB)$$

$$\overleftrightarrow{AH} \subseteq (AHK)$$

$$\therefore (AHK) \perp (IMB)$$

### المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (1-6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمارين (1-5)، على الشكل المقابل.

إذا كان  $\overline{AD}$  متعامد مع  $(ABC)$ ،  $AB = AC$ ،  $M$  منتصف  $\overline{BC}$  فإن:

(1)  $(ABC) \perp (DAC)$

a

b

$$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC) , \overleftrightarrow{AD} \subseteq (DAC)$$

(2)  $(DBC) \perp (DAC)$

a

b

(3)  $(AMD) \perp (ABC)$

a

b

$$\overleftrightarrow{BC} \perp (AMD) , \overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$$

(4)  $(AMD) \perp (DBC)$

a

b

$\vec{BC} \perp (AMD) , \vec{BC} \subseteq (DBC)$

(5)  $DC = DB$

a

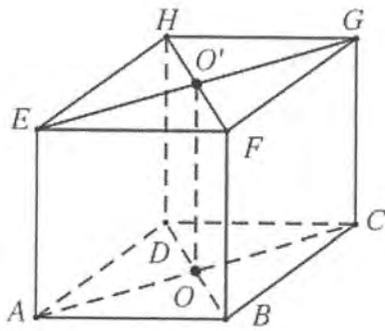
b

$\vec{DM} \perp \vec{BC} , M$  منتصف  $\vec{BC}$

a

b

(6) المستويان العمودان على ثالث متوازيان.  
ممكنه يكونا متوازيين أو متقاطعين



في التمارين (7-12)، ظلل رمز الدائرة اندال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمرينين (7-8)، على الشكل المرفق، حيث إن:

ABCDEFHGH شبه مكعب فيه:

O مركز المستطيل ABCD، O' مركز المستطيل EFGH

(7) (EFGH)، (FGCB) هما:

d ليس أيًا مما سبق

c منطبقان

b متوازيان

متعامدان

$\vec{FF} \perp (FGCB) , \vec{EF} \subseteq (EFGH)$

(8) (ABCD)، (DBFH) هما:

d ليس أيًا مما سبق

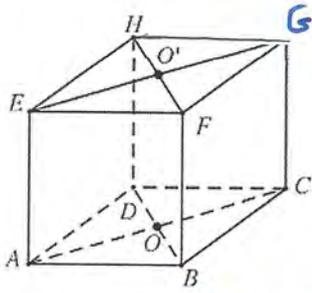
e متعامدان

b منطبقان

a متوازيان

$\vec{FB} \perp (ABCD) , \vec{FB} \subseteq (FGCB)$

أسئلة التمرين (9-10)، على الشكل المقابل حيث إن:  $ABCDEFGH$  مكعب طول ضلعه  $a$ .  
 $O$  مركز المربع  $ABCD$ ,  $O'$  مركز المربع  $EFGH$



(9)  $(EACG)$ ,  $(DHFB)$  هما:

- (a) منطبقان      (b) متعامدان  
 (c) متوازيان      (d) ليس أيًا مما سبق

$$\vec{AC} \perp (DHFB), \vec{AC} \subseteq (EACG)$$

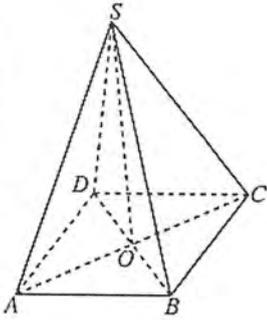
$$\therefore \vec{AC} \perp \vec{OO'}, \vec{AC} \perp \vec{DB} \rightarrow \vec{AC} \perp (DHFB)$$

(10)  $(OAB)$ ,  $(HGE)$  هما:

- (a) متعامدان      (b) متوازيان      (c) منطبقان      (d) ليس أيًا مما سبق

$$\left. \begin{array}{l} HGE = HGFE \\ OAB = ABCD \end{array} \right\} \therefore HGFE \parallel ABCD$$

$$\therefore \vec{GE} \parallel \vec{OB}$$



(11) إذا كان  $ABCD$  مربع مركزه  $O$ ,  $\vec{SO} \perp (ABCD)$  فإن:

- (a)  $(SAP) \perp (SBC)$       (b)  $(SAC) \perp (SBD)$   
 (c)  $(SAB) \parallel (SCD)$       (d)  $(SAD) \perp (ABCD)$

$$\vec{AC} \perp \vec{DB}, \vec{AC} \perp \vec{SO} \therefore \vec{AS} \perp (SBD)$$

$$\vec{AS} \subseteq (SAC)$$

$$\therefore (SAC) \perp (SBD)$$

(12) إذا كان:  $T \subset \pi_2, T \perp \pi_1$  فإن:

- (a)  $\pi_1 \parallel \pi_2$       (b)  $\pi_1 \perp \pi_2$       (c)  $\pi_1 \cap \pi_2 = T$       (d)  $\pi_1 = \pi_2$

إذا تعامد مستقيم على مستوى فكل مستوى آخر يمر بهذا  
 المستقيم يكون عمودًا على المستوى الأول.

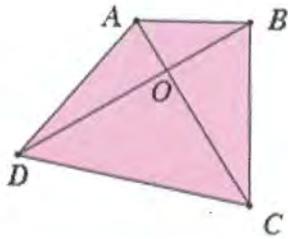
## حاول ان تحل هندسة الفضاء

### المستقيمات والمستويات في الفضاء

### Lines and Planes in Space

مسلمات الفضاء-حالات تعيين مستوى في الفضاء -أوضاع المستقيمات في الفضاء - أوضاع مستويين في الفضاء

حاول أن تحل

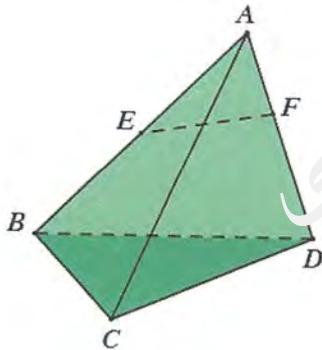


1 في الشكل المقابل  $\overline{AC}$  ,  $\overline{BD}$  يتقاطعان في  $O$

أثبت أن أضلاع الرباعي  $ABCD$  تقع جميعها في مستوي واحد.

$\overline{AC}$  و  $\overline{BD}$  متقاطعتان، فهما يصفيان مستوى وحيد وليكن  $\pi$   
 التقاطع  $A$  و  $B$  تقعان في هذا المستوى فليكون  $\overline{AB} \subset \pi$   
 بالمثل  $B$  و  $C$  تقعان في  $\pi$  فليكون  $\overline{BC} \subset \pi$   
 بالمثل  $A$  و  $D$  تقعان في  $\pi$  فليكون  $\overline{AD} \subset \pi$  ،  $\overline{CD} \subset \pi$

حاول أن تحل



2 إذا كان  $ABCD$  هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة  $E$  تنتمي إلى  $\overline{AB}$ ، النقطة  $F$  تنتمي إلى  $\overline{AD}$ .

$\overline{EF}$  لا يوازي  $\overline{BD}$ . أثبت أن  $\overline{EF}$  يقطع  $(BCD)$ .

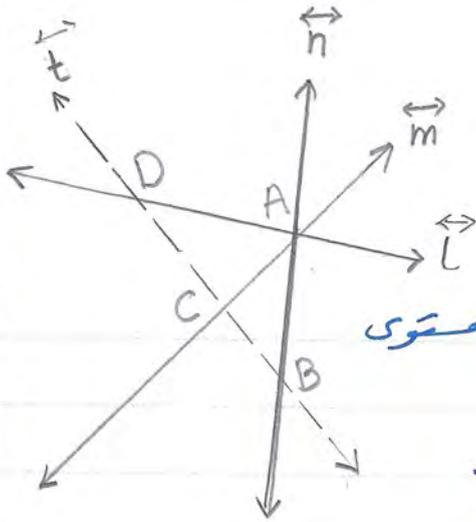
$\overrightarrow{BD}$  و  $\overrightarrow{EF}$  غير متوازيين و يحدوينا مستوى واحد هو  $(ABD)$  فهما متقاطعتان في نقطة وليكن  $K$

$$\therefore \overrightarrow{EF} \cap \overrightarrow{BD} = \{K\}$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} \subset (BCD) \therefore K \in (BCD)$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} \cap (BCD) = \{K\}$$

حاول أن تحل



3 ثلاث مستقيمات مختلفة تتقاطع في A.  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$

المستقيم  $t$  يقطع المستقيمات الثلاثة في  $B, C, D$  على الترتيب.

أثبت أن المستقيمات  $l, m, n, t$  تقع في مستر واحد.

$\vec{l}, \vec{m}$  متقاطعه في  $A$  فهما بعينه مستوى  
وحيد ولتكنه  $\pi$

$$\therefore \vec{l} \cap \vec{m} = \{A\}, \vec{l} \cap \vec{t} = \{D\}$$

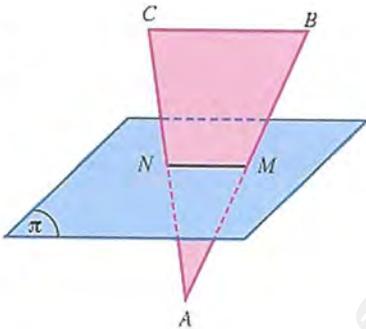
$$\therefore \{A, D\} \subset \vec{l} \cap \pi \quad \therefore \vec{l} \subset \pi$$

$$\therefore \vec{l} \cap \vec{n} = \{B\}, \vec{m} \cap \vec{n} = \{A\}$$

$$\therefore \{A, B\} \subset \vec{n} \cap \pi \quad \therefore \vec{n} \subset \pi$$

المستقيما  $t$  والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space



حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل: المثلث  $ABC$  فيه  $M$  منتصف  $\overline{AB}$ ,  $N$  منتصف  $\overline{AC}$ ,

$M, N$  تنتمي إلى المستوي  $\pi$ .

أثبت أن  $\overline{BC} \parallel \pi$ .

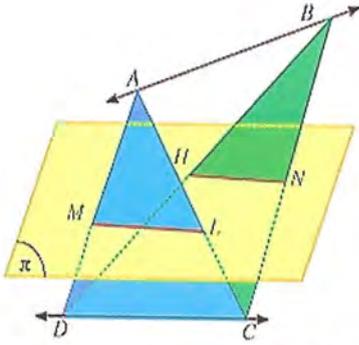
$$\overline{AC} \text{ منتصف } N \subset \overline{AB} \text{ منتصف } M \therefore$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{MN} \subset \pi$$

$$\therefore \overrightarrow{CB} \parallel \pi$$

معا  
طفرة الكوست

حاول أن تحل



2 في الشكل المقابل: إذا كان  $\overline{AB}, \overline{CD}$  متخالفان،  $\overline{CD} \parallel \pi$ .

$\overline{AD}$  تقطع  $\pi$  في  $M$ ،  $\overline{AC}$  تقطع  $\pi$  في  $L$ .

$\overline{BD}$  تقطع  $\pi$  في  $H$ ،  $\overline{BC}$  تقطع  $\pi$  في  $N$ .

إذا كان  $\overline{AB} \parallel \pi$  فأثبت أن  $LMHN$  متوازي أضلاع.

$$\overline{CD} \parallel \pi, \overline{DC} \subset (ADC), (ADC) \cap \pi = \overline{ML}$$

$$\therefore \overline{DC} \parallel \overline{ML} \dots (1)$$

$$\overline{CD} \parallel \pi, \overline{DC} \subset (DCB), (DCB) \cap \pi = \overline{HN}$$

$$\therefore \overline{DC} \parallel \overline{HN} \dots (2) \quad \therefore \overline{ML} \parallel \overline{HN} \dots$$

بالمثل:

$$\overline{AB} \parallel \pi, \overline{AB} \subset (ABC), (ABC) \cap \pi = \overline{NL}$$

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{NL}$$

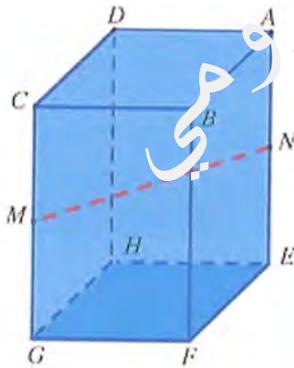
$$\overline{AB} \parallel \overline{MH}$$

بالمثل لتطبيع الاتجاهات ~

$$\therefore \overline{NL} \parallel \overline{MH}$$

∴  $LMHN$  متوازي أضلاع

حاول أن تحل



3  $ABCDEFHG$  شبه مكعب.

$M$  منتصف  $\overline{CG}$ ،  $N$  منتصف  $\overline{AE}$ .

أثبت أن  $(EFGH)$  يوازي  $\overline{MN}$ .

من خواص شبه المكعب  $AEGC$  متطيل

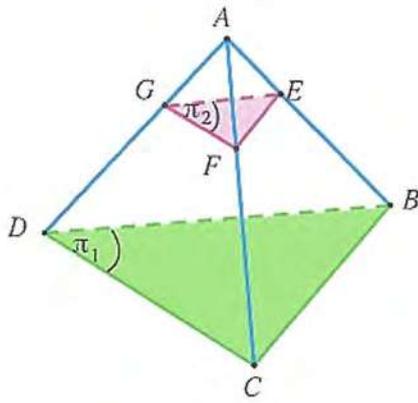
$M$  منتصف  $\overline{CG}$ ،  $N$  منتصف  $\overline{AE}$

∴ الشغل  $MNEG$  متطيل

$$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{GE}, \overline{GE} \subset (EFGH)$$

$$\therefore \overline{MN} \parallel (EFGH)$$

حاول أن تحل



4 في الشكل المقابل، هرم ثلاثي.

المستويان  $\pi_1$  ،  $\pi_2$  متوازيان.

إذا كان  $FG = 6 \text{ cm}$  ،  $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$

فأوجد DC

$\pi_1$  و  $\pi_2$  متوازيان و المستوي ADC يقطعها في  $DC$  ،  $GF$   
 $\therefore \overrightarrow{GF} \parallel \overrightarrow{DC} \rightarrow \frac{FG}{DC} = \frac{AF}{AC} \dots (1)$

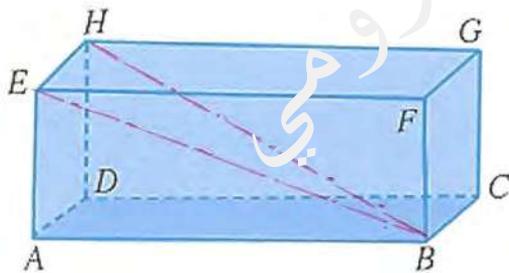
بالمثل  $\pi_1$  ،  $\pi_2$  يقطعها في المستوي ABC في  $FE$  ،  $CB$   
 $\therefore \overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{CB} \rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \dots (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن

$$\frac{AF}{AC} = \frac{FG}{DC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3} \quad \therefore DC = 18 \text{ سم}$$

تعامد مستقيمان مع مستوي

Perpendicular Line With a Plane



حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل،

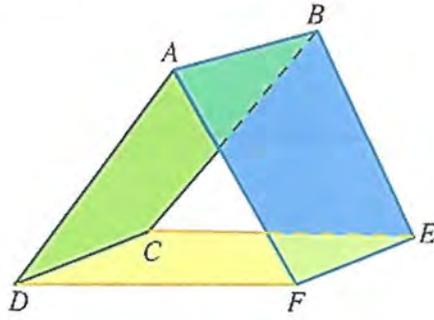
أثبت أن المثلث BEH قائم في E.

$\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{EA}$  ،  $\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{EF} \therefore \overrightarrow{EH} \perp (ABFE)$

$\therefore \overrightarrow{EB} \subset (ABFE)$

$\therefore \overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{EB} \therefore m(\widehat{BEH}) = 90^\circ$

$\therefore$  المثلث BEH قائم في E



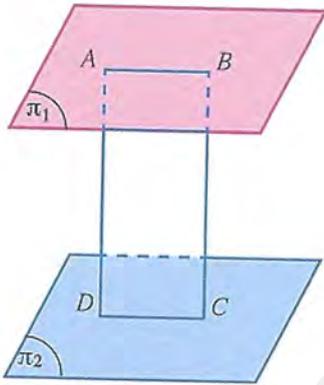
حاول أن تحل

2 في الشكل المقابل:

مستطيلان  $ABEF, ABCD$

أثبت أن:  $(AFD) // (BEC)$

$\vec{AB} \perp \vec{BC}$  ,  $\vec{AB} \perp \vec{BE}$   $\therefore \vec{AB} \perp (BEC) \dots 1$   
 بالمثل  $\vec{AB} \perp \vec{AD}$  ,  $\vec{AB} \perp \vec{AF}$   $\therefore \vec{AB} \perp (AFD) \dots 2$   
 إذا كان مستقيم عمودياً على مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين  
 $\therefore (BEC) // (AFD)$



حاول أن تحل

3 في الشكل المقابل:  $\pi_1 // \pi_2$

$A, B$  نقطتان في  $\pi_1$ ,

$C, D$  نقطتان في  $\pi_2$  حيث:  $A, B, C, D$  في مستوى واحد

أثبت أن  $\overline{AD} \perp \pi_2$  ,  $\overline{BC} \perp \pi_2$  مستطيل.

$\pi_1, \pi_2$  متوازيين متوازيين يقطعوا مستوى  $ABCD$  من  $\vec{AB}$  ,  $\vec{DC}$

$$\therefore \vec{AB} // \vec{DC} \dots (1)$$

$$\therefore \vec{BC} \perp \pi_2 \therefore m(\hat{BCD}) = 90^\circ$$

$$\therefore \vec{AD} \perp \pi_2 \therefore m(\hat{ADC}) = 90^\circ$$

$(\hat{ADC})$  ,  $(\hat{BCD})$  زاويتاه داخلية للمستقيمين  $\vec{AD}, \vec{BC}$

ومجموع قياسهما يساوي  $180^\circ$

$$\therefore \vec{AD} // \vec{BC} \dots (2)$$

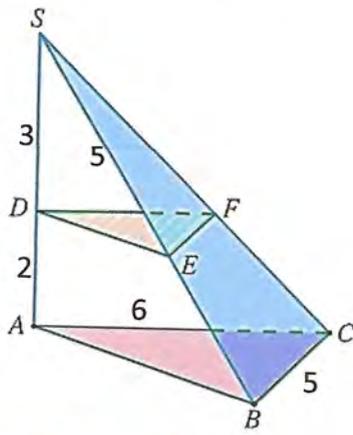
من (1), (2) لنصل  $ABCD$  مستطيل أضلاعه إحدى زواياه قائمة فهو مستطيل

حاول أن تحل

4 في الشكل المقابل:

المستويان  $(ABC)$ ,  $(DEF)$  متوازيان

$\vec{SA} \perp (ABC)$



إذا كان:  $SE = 5 \text{ cm}$ ,  $SD = 3 \text{ cm}$ ,  $DA = 2 \text{ cm}$ ,  $BC = 5 \text{ cm}$ ,  $AC = 6 \text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث  $DEF$

$(ABC)$  و  $(DEF)$  مستويان متوازيان يقطعهما المستوى  $(SAC)$  في  $\vec{DF}$ ,  $\vec{AC}$

$$\therefore \vec{DF} \parallel \vec{AC} \rightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{DF}{AC} = \frac{SE}{SB} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore DF = \frac{3 \times 6}{5} \quad \therefore DF = \frac{18}{5} \quad \text{DF} = 3.6$$

بالمثل  $(ABC)$  و  $(DEF)$  متوازيان ويقطعهما المستوى  $(SBC)$  في  $\vec{EF}$ ,  $\vec{BC}$

$$\therefore \vec{EF} \parallel \vec{BC} \rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{EF}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore EF = 3$$

$\therefore \vec{SA} \perp (ABC)$  و  $(ABC) \parallel (DEF)$

$\therefore \vec{SA} \perp (DEF) \quad \therefore \vec{DE} \subset (DEF)$

$\therefore \vec{SA} \perp \vec{DE}$

في المثلث القائم  $SDE$  ومعرفةً عن

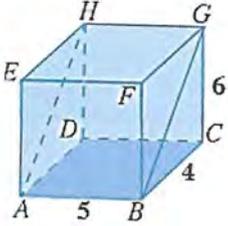
$$DE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \quad \therefore DE = 4$$

$\therefore$  محيط المثلث  $DEF$  يساوي

$$DF + EF + DE = 3.6 + 3 + 4 = 10.6 \text{ سم}$$

معا  
صفوة الكوشت

# الزاوية الزوجية The Dihedral Angle

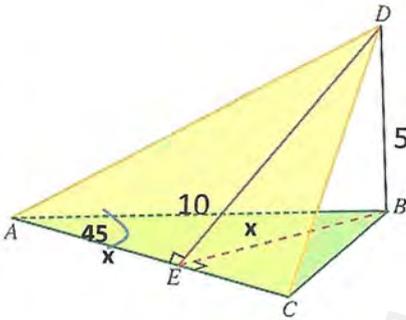


حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية  $GBC$  هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين  $(ABGH)$ ،  $(ABCD)$ ، ثم أوجد قياسها.

$\vec{AB}$  حافة لزاوية الزوجية بين المستويين  $ABGH$  و  $ABCD$   
 $\vec{BC} \perp \vec{AB}$  في المستوي  $ABCD$   
 $\vec{BG} \perp \vec{AB}$  في المستوي  $ABGH$  حيث  $\vec{BG} \subset (BCGF)$   
 $\therefore (\widehat{CBG})$  هي زاوية المستوية للزاوية الزوجية  
 $\therefore \tan(\widehat{CBG}) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \therefore \widehat{CBG} = 56.3^\circ$   
 $\therefore$  قياس الزاوية الزوجية =  $56.3^\circ$

حاول أن تحل



2 في الشكل المقابل  $D$  نقطة خارج مستوى المثلث  $ABC$   
 $DB = 5 \text{ cm}$  ،  $AB = 10 \text{ cm}$  ،  $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$

$$\overline{DB} \perp (ABC)$$

$$\overline{BE} \perp \overline{AC} , \overline{DE} \perp \overline{AC}$$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين  $BAC$  ،  $DAC$   
 $\vec{AC}$  الحافة للزاوية الزوجية بين  $BAC$  و  $DAC$   
 $\vec{AC} \perp \vec{BE}$  في المستوي  $(ABC)$  ،  $\vec{AC} \perp \vec{DE}$  في المستوي  $ADC$   
 $\therefore (\widehat{DEB})$  هي زاوية المستوية للزاوية الزوجية

$$\therefore m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$$

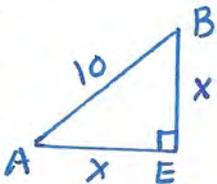
$\therefore$  المثلث  $AEB$  قائم الزاوية متطابقه لـ  $\triangle AEB$

$$\therefore AE = EB = 5\sqrt{2} \iff x^2 + x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50$$

في المثلث  $DBE$

$$\overline{DB} \perp (ABC) , \overline{EB} \subset (ABC) \therefore \overline{DB} \perp \overline{EB}$$

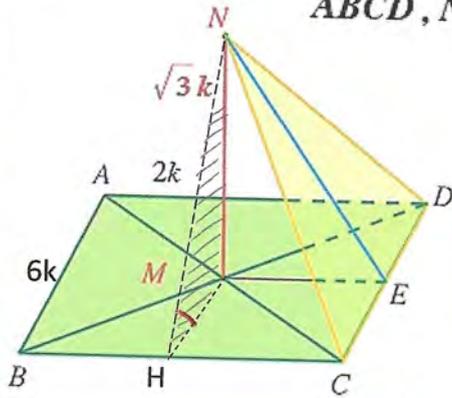
$$\therefore \tan(\widehat{DEB}) = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore m(\widehat{DEB}) = 35.3^\circ$$



3  $ABCD$  مستطيل تقاطع قطراه في  $M$ ، وفيه  $AD = 2k$

أقيم  $\overline{NM}$  عموداً على  $(ABCD)$  حيث  $N$  خارج مستواه بحيث  $MN = \sqrt{3}k$

إذا كان  $AB = 6k$ ، فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين  $ABCD$ ،  $NBC$



رسم عمود من نقطة  $M$  يقطع  $\overline{BC}$  في  $H$   
ثم نصل  $\overline{NH}$

$$MH = \frac{1}{2}AB = 3k$$

$\overline{BC}$  حافة الزاوية الزوجية

(1) .....  $\overline{BC} \perp \overline{MH}$  في المستوي  $ABCD$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{NM} \perp \overline{BC} \\ \overline{MH} \perp \overline{BC} \end{array} \right\} \therefore \overline{BC} \perp (MHN)$$

(2) .....  $\overline{BC} \perp \overline{NH}$  في المستوي  $(NBC)$

من (1)، (2)

زاوية  $(N\hat{H}M)$  هي الزاوية الزوجية للزاوية الزوجية

$$\tan (\widehat{NHM}) = \frac{NM}{HM} = \frac{\sqrt{3}k}{3k} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

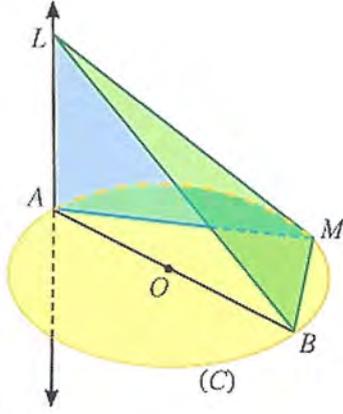
$$\therefore m(\widehat{NHM}) = 30^\circ$$

$\therefore$  قياس الزاوية الزوجية بين المستويين  $ABCD$  و  $NBC$

ساوي  $30^\circ$

معا  
صفحة الكونت

## المستويات المتعامدة Perpendicular Planes



حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل،  $C$  دائرة مركزها  $O$ ،  $\overline{AB}$  قطر.

$M$  نقطة تنتمي إلى الدائرة.

$\overline{LA}$  متعامد مع مستوي الدائرة.

أثبت أن: a  $\overline{BM} \perp (LAM)$

b  $(LBM) \perp (LAM)$

(a)

$\overline{AB}$  قطر في لدايرة  
 $\therefore m(\widehat{AMB}) = 90^\circ \therefore \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \dots (1)$   
 $\overrightarrow{LA}$  متعامد مع مستوي لدايرة ،  $\overrightarrow{BM}$  محتوي في مستوي لدايرة  
 $\therefore \overrightarrow{LA} \perp \overrightarrow{MB} \dots (2)$   
 من (1) ، (2)

$\overrightarrow{MB} \perp (LAM)$

(b)

$\therefore \overrightarrow{MB} \perp (LAM)$  ،  $\overrightarrow{MB} \subset (LBM)$

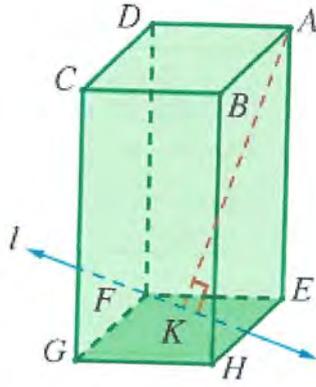
$\therefore (LBM) \perp (LAM)$

معاينة

صفحة الكونت

صفحة الكونت

حاول أن تحل



2 في شبه المكعب  $ABCDEFGH$  المقابل:

$\vec{l}$  مستقيم في  $(EFGH)$  يمر في  $F$ .

$$\overline{AK} \perp \vec{l}$$

a  $\overline{EK} \perp \vec{l}$  أثبت أن:

b  $(FDK) \perp (AEK)$

(a) من خواص شبه المكعب

$$\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{EH}, \quad \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{FE}$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \perp (EFGH)$$

$$\therefore \vec{l} \subset (EFGH)$$

$$\therefore \vec{l} \perp \overrightarrow{AK} \dots (2)$$

$$\therefore \vec{l} \perp \overrightarrow{AE} \dots (1)$$

من (1) و (2)

$$\vec{l} \perp (AEK)$$

$$\therefore \overline{EK} \subset (AEK)$$

$$\therefore \overline{EK} \perp \vec{l}$$

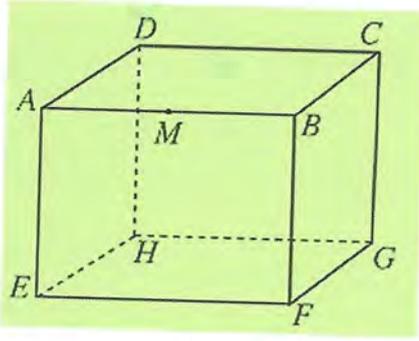
$$\therefore \vec{l} \perp (AEK), \quad \vec{l} \subset (FDK) \quad (b)$$

حيث  $\vec{l}$  يمر في نقطة  $F$  ،  $K \in \vec{l}$

$$\therefore (AEK) \perp (FDK)$$

معاينة  
صفحة الكوئيت

## اختبار الوحدة العاشرة



(1) مكعب  $ABCDEFGH$  ،  $M$  منتصف  $\overline{AB}$

(a) هل  $\overline{AB}$  والنقطة  $M$  تعينان مستويًا واحدًا؟

$M$  منتصف  $\overline{AB}$

$$\therefore M \in \overleftrightarrow{AB}$$

$\therefore \overleftrightarrow{AB}$  ، والنقطة  $M$  لا تصيناها مستويًا واحدًا . (نقطة خارج الخطم وليست عليه)  
تصيناها مستويًا واحدًا

(b) هل  $\overline{AB}$  ،  $\overline{GH}$  يعينان مستويًا واحدًا؟

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF} & \quad \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{HG} \\ \therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HG} \end{aligned}$$

من خواص المكعب

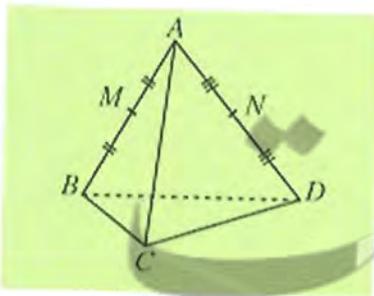
والمستقيمان المختلفان المتوازيان يصيناها مستويًا واحدًا

(c) سمّ ثلاثة مستويات تحتوي كل منها على النقطة  $M$

$$\begin{aligned} M \in \overline{AB} & \quad \therefore M \in \overleftrightarrow{AB} \\ \overleftrightarrow{AB} \subset ABCD & \quad \overleftrightarrow{AB} \subset ABFE \quad , \quad \overleftrightarrow{AB} \subset ABHG \\ \therefore \text{المستويات } (ABCD) & \text{ و } (ABFE) \text{ و } (ABHG) \text{ تحتوي كل} \\ & \text{ منها النقطة } M \end{aligned}$$

(2) هرم ثلاثي القاعدة. النقطة  $M$  منتصف  $\overline{AB}$  والنقطة  $N$  منتصف  $\overline{AD}$

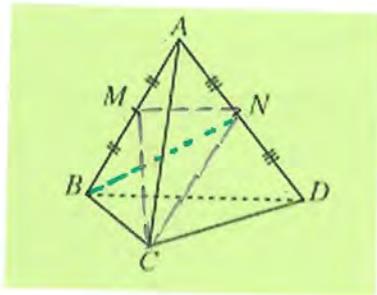
(a)  $\overline{NM} \parallel \overline{BD}$



في المثلث  $ABD$

$M$  منتصف  $\overline{AB}$  ،  $N$  منتصف  $\overline{AD}$

$$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{BD} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BD}$$



$$(ABD) \cap (CNM) = \overleftrightarrow{MN} \quad (b)$$

$$M \in \overline{AB} \quad \therefore M \in (ABD)$$

$$N \in \overline{AD} \quad \therefore N \in (ABD)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{MN} \subset (ABD)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{MN} \subset (CNM) \quad \left. \vphantom{\overleftrightarrow{MN}} \right\} (ABD) \cap (CNM) = \overleftrightarrow{MN}$$

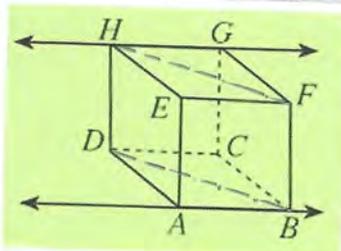
$$(CNB) \cap (ABD) = \dots\dots (c)$$

$$\therefore N \in \overline{AD} \quad \therefore N \in (ABD) \quad , \quad \therefore B \in (ABD)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{BN} \subset (ABD)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{BN} \subset (BNC)$$

$$\therefore (CNB) \cap (ABD) = \overleftrightarrow{BN}$$



ABCDEFHG شبه مکعب (3)

(a) أثبت أن:  $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

من خواص شبه المكعب

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF} \quad , \quad \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{HG} \quad \therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HG}$$

المستقيما المتوازيين لثالث في لفضاء متوازيين

(b) أثبت أن: BDHF هو مستطيل.

$$\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD) \quad , \quad \overleftrightarrow{HD} \perp (ABCD)$$

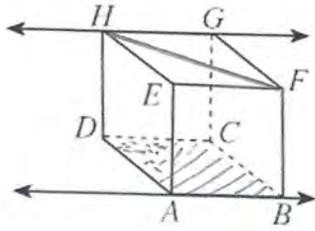
$$\therefore \overleftrightarrow{FB} \parallel \overleftrightarrow{HD} \quad , \quad \therefore FB = HD \quad \text{ضرباه في المكعب}$$

$\therefore$  BDHF متوازي أضلاع

$$\therefore \overleftrightarrow{DB} \subset (ABCD) \quad \therefore \overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{BD}$$

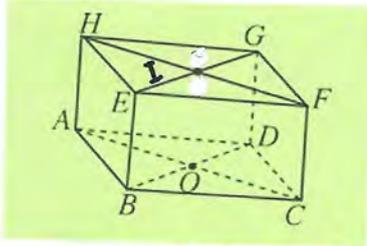
$$\therefore m(\widehat{FBD}) = 90^\circ$$

$\therefore$  BDHF متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل



(c) أثبت أن:  $\vec{HF}$  مواز للمستوي  $ABCD$   
 $\vec{FB} \perp (ABCD)$  ,  $\vec{HD} \perp (ABCD) \therefore \vec{FB} \parallel \vec{HD}$   
 $\therefore FB = HD$

$\therefore$  الشكل  $DBFH$  متوازي أضلاع  
 $\therefore \vec{HF} \parallel \vec{DB}$  ,  $\vec{DB} \subset (ABCD) \therefore \vec{HF} \parallel (ABCD)$



(4)  $ABCDHEFG$  شبه مكعب.

النقطة  $O$  مركز المربع  $ABCD$ ,

النقطة  $I$  مركز المربع  $EFGH$

(a) أثبت أن النقاط:  $E, G, D$  تقع في المستوي  $EGDB$

$$\vec{EB} \parallel \vec{DG}$$

$\therefore$  هما يمينانه متوازيين هو  $(EBDG)$

$\therefore$  النقاط  $E, G, D$  تقع في المستوي  $(EGDB)$

(b) أكمل:  $(BEGD) \cap (AHFC) = \vec{OI}$

$$I \in \vec{HF} , O \in \vec{AC} \therefore \vec{OI} \subset (AHFC)$$

$$I \in \vec{EG} , O \in \vec{BD} \therefore \vec{OI} \subset (BEGD) \quad \text{بالمثل.}$$

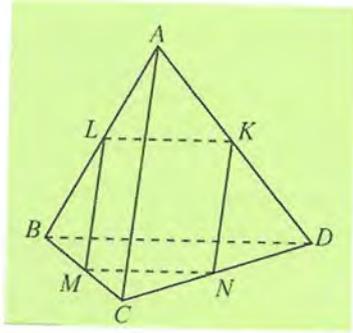
$$\therefore (BEGD) \cap (AHFC) = \vec{OI}$$

(c) أثبت أن:  $\vec{AH} \parallel \vec{CF} \parallel \vec{OI}$

$$\vec{FC} \parallel \vec{EB} , \vec{EB} \parallel \vec{HA} \therefore \vec{FC} \parallel \vec{HA}$$

$$\therefore I \text{ منتصف } HF , O \text{ منتصف } AC$$

$$\therefore \vec{OI} \parallel \vec{HA} \parallel \vec{CF}$$



(5) هرم ثلاثي القاعدة:  $L$  منتصف  $\overline{AB}$ ،  $M$  منتصف  $\overline{CB}$ ،

$N$  منتصف  $\overline{CD}$ ،  $K$  منتصف  $\overline{AD}$

(a) أثبت أن:  $\overline{NK} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{LM}$

في المثلث  $ACD$   $K$  منتصف  $\overline{AD}$ ،  $N$  منتصف  $\overline{CD}$

$$\therefore \overline{NK} \parallel \overline{AC} \quad \dots (1)$$

باطل في المثلث  $ACC$   $L$  منتصف  $\overline{AB}$ ،  $M$  منتصف  $\overline{BC}$

$$\therefore \overline{ML} \parallel \overline{AC} \quad \dots (2)$$

$$\overline{NK} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{LM} \quad \text{صد (1) ، (2)}$$

(b) أثبت أن:  $KLMN$  هو متوازي أضلاع.

في المثلث  $ABD$   $L$  واصلتة بينه منتصفى ضلعيه فيه  $\overline{AB}$  و  $\overline{AD}$

$$\therefore \overline{LK} \parallel \overline{BD} \quad \dots (1)$$

باطل في المثلث  $BCD$   $M$  واصلتة بينه منتصفى  $\overline{BC}$  و  $\overline{CN}$

$$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{BD} \quad \dots (2)$$

$$\overline{LK} \parallel \overline{MN} \quad \text{صد (1) ، (2)}$$

$\therefore$  بطل  $KLMN$  فيه كل ضلعا متقابلا متوازيان فهو متوازي أضلاع

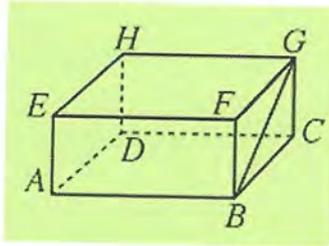
(c) أثبت أن:  $\overline{NL}$  يتقاطع مع  $\overline{KM}$

$\therefore$  بطل  $KLMN$  متوازي أضلاع

$\therefore$  النقاط  $N$ ،  $M$ ،  $L$ ،  $K$  تعينه مستوى واحد

$\therefore \overline{LN}$  و  $\overline{KM}$  يقعا في مستوى واحد وهما غير متوازيان

$\therefore \overline{LN}$  و  $\overline{KM}$  متقاطعان

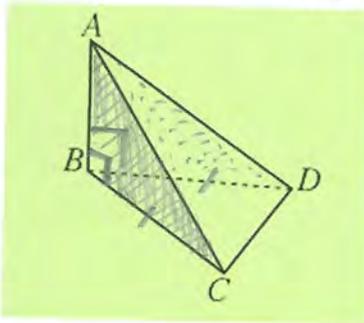


(6) ABCDEFGH شبه مكعب.

أثبت أن:  $\vec{GH}$  متعامد مع  $\vec{GB}$

$$\begin{aligned} \vec{HG} \perp \vec{CG}, \vec{HG} \perp \vec{GF} &\therefore \vec{HG} \perp (\text{BCGF}) \\ \therefore \vec{BG} \subset (\text{BCGF}) & \\ \therefore \vec{GH} \perp \vec{GB} & \end{aligned}$$

(7) ABCD هرم ثلاثي القاعدة  $BC = BD$ ,  $\vec{AB}$  متعامد مع المستوي BCD



أثبت أن:  $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB})$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \perp (\text{BCD}), \vec{BC} \subset (\text{BCD}), \vec{BD} \subset (\text{BCD}) & \\ \therefore \vec{AB} \perp \vec{BD}, \vec{AB} \perp \vec{BC} & \end{aligned}$$

$\therefore$  المثلثان ABC و ABD قائما الزاوية

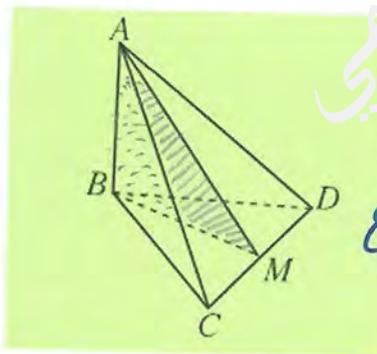
فيهما  $\vec{AB}$  مشترك  $BC = BD$

$\therefore$  المثلثان متطابقان

$$\therefore m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB})$$

(8) ABCD هرم ثلاثي القاعدة، قاعدته BCD مثلث متطابق الأضلاع،  $\vec{AB} \perp (\text{BCD})$

M منتصف  $\vec{CD}$



$$\begin{aligned} \vec{DC} \perp (\text{ABM}), \vec{CD} \subset (\text{BCD}) & \\ \therefore \vec{AB} \perp (\text{BCD}), \vec{CD} \subset (\text{BCD}) & \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{AB} \perp \vec{CD} \longrightarrow (1)$$

$\therefore$  M منتصف  $\vec{CD}$  في مثلث BCD المتطابق الأضلاع

$$\therefore \vec{BM} \perp \vec{CD} \longrightarrow (2)$$

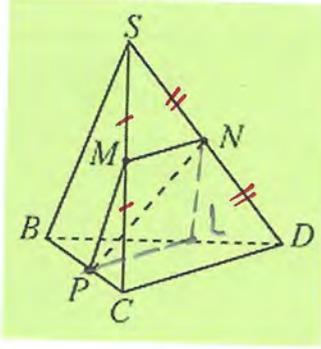
$$\vec{CD} \perp (\text{ABM}) \longleftarrow \text{من (1) و (2)}$$

(b) استنتج أن:  $\vec{DC} \perp \vec{AM}$

$$\vec{CD} \perp (\text{ABM}), \vec{AM} \subset (\text{ABM})$$

$$\therefore \vec{CD} \perp \vec{AM}$$

(9) هرم ثلاثي قاعدته  $BCD$ ،  $M$  منتصف  $SC$ ،  $N$  منتصف  $SD$ ،  $P$  نقطة على  $BC$



(a) أثبت أن  $\overline{MN}$  مواز للمستوي  $BCD$

في المثلث  $SCD$

$N$  منتصف  $DS$ ،  $M$  منتصف  $SC$

$$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{CD} \quad \therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (BCD)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel (BCD)$$

(b) إذا كان  $(PMN)$  يقطع  $\overline{BD}$  في النقطة  $L$

أثبت أن:  $\overline{PL} \parallel \overline{CD}$

$\therefore$  المستوي  $(PMN)$  يقطع  $\overline{BD}$  في  $L$

$$\therefore L \in (PMN)$$

$\therefore \overleftrightarrow{MN}$  يوازي  $(BCD)$  ويحتوي في  $(MNPL)$  والمستوي  $\sim$

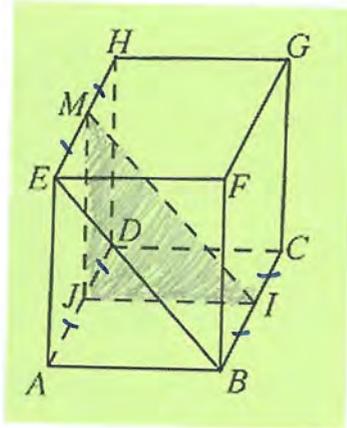
متقاطعه في  $\overleftrightarrow{PL}$

$$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PL}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{PL} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

معاينة الكومنت  
صفحة الكومنت



(10) مكعب  $ABCDEFGH$  ،  $I$  منتصف  $\overline{BC}$  ،

$J$  منتصف  $\overline{AD}$  ،  $M$  منتصف  $\overline{EH}$

(a) أثبت أن  $\overline{AD} \perp (IJM)$

$I$  منتصف  $\overline{BC}$  ،  $J$  منتصف  $\overline{AD}$

$$\therefore \vec{JI} \parallel \vec{DC} \parallel \vec{AB}$$

$$\therefore \vec{AD} \perp \vec{JI} \quad \longrightarrow (1)$$

$$\vec{MJ} \parallel \vec{HD} \parallel \vec{AE}$$

بالمثل  $\longleftarrow$

$$\therefore \vec{AD} \perp \vec{MJ} \quad \longrightarrow (2)$$

$$\vec{AD} \perp (IJM)$$

من (1) ، (2)

(b) أثبت أن  $\overline{AD} \perp (AEB)$

$$\therefore \vec{AD} \perp \vec{AB} \quad , \quad \vec{AD} \perp \vec{AE}$$

$$\therefore \vec{AD} \perp (AEB)$$

(c) أثبت أن  $(IJM)$  ،  $(ABE)$  متوازيان

لأنهما توازي مستويين نسبتاً إلى لطفان مستقيم عمودي على كلاهما

$$\therefore \vec{AD} \perp (IJM) \quad \text{و} \quad \vec{AD} \perp (ABE)$$

$$\therefore (IJM) \parallel (ABE)$$

(d) أثبت أن:  $\overline{IJ} \perp (ADHE)$

$$\therefore \vec{AB} \perp (ADEH) : \vec{AB} \perp \vec{AD} \quad , \quad \vec{AB} \perp \vec{AE}$$

$$\therefore \vec{AB} \parallel \vec{JI}$$

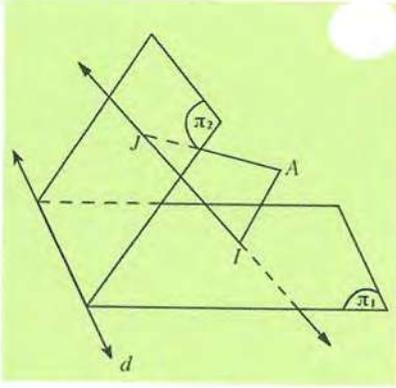
$$\therefore \vec{IJ} \perp (ADHE)$$

(11)  $(\pi_1)$  ،  $(\pi_2)$  يتقاطعان في  $\vec{d}$  ، نقطة خارج  $(\pi_1)$  وخارج  $(\pi_2)$

$$\vec{AJ} \perp (\pi_2) , \vec{AI} \perp (\pi_1)$$

(a) أثبت أن  $(AIJ) \perp (\pi_1)$

وأن  $(AIJ) \perp (\pi_2)$



$$\therefore \vec{AI} \perp \pi_1 , \vec{AI} \subset (AIJ)$$

$$\therefore (AIJ) \perp \pi_1$$

$$\therefore \vec{AJ} \perp \pi_2 , \vec{AJ} \subset (AJI)$$

$$\therefore (AJI) \perp \pi_2$$

(b) أثبت أن  $\vec{d} \perp (AIJ)$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AI} \perp \pi_1 , \vec{d} \subset \pi_1 \\ \therefore \vec{AI} \perp \vec{d} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad (1)$$

← بالمثل

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AJ} \perp \pi_2 , \vec{d} \subset \pi_2 \\ \therefore \vec{AJ} \perp \vec{d} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad (2)$$

$$\vec{d} \perp (AIJ)$$

من (1) ، (2)

(c) أثبت أن  $\vec{d} \perp \vec{IJ}$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{d} \perp (AIJ) \\ \vec{IJ} \subset (AIJ) \\ \therefore \vec{d} \perp \vec{IJ} \end{aligned}$$

انتهى نسألكم الدعاء

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

المجموعة A تمارين مقالية

70 ص

تمرين  
11-2

(1) استخدم مثلث باسكال لفك كل مما يلي:

(a)  $(a+b)^3$

(b)  $(a+b)^4$

(c)  $(x+y)^6$

(a)

نستخدم الأعداد من المثلث لكتابة المعادلات  

$$\therefore (a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(b) نستخدم الأعداد من المثلث لكتابة المعادلات

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$
  

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

(c) نستخدم الأعداد من المثلث لكتابة المعادلات

$$(x+y)^6 = 1x^6y^0 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6x^1y^5 + 1x^0y^6$$
  

$$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

(2) استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل مما يلي:

(a)  $(x+y)^4$

(b)  $(x-y)^4$

(c)  $(x-2)^5$

(a) 
$$(x+y)^4 = 4C_0x^4y^0 + 4C_1x^3y^1 + 4C_2x^2y^2 + 4C_3x^1y^3 + 4C_4x^0y^4$$
  

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

(b) 
$$(x-y)^4 = 4C_0x^4(-y)^0 + 4C_1x^3(-y)^1 + 4C_2x^2(-y)^2 + 4C_3x^1(-y)^3 + 4C_4x^0(-y)^4$$
  

$$= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

(c) 
$$(x-2)^5 = 5C_0x^5(-2)^0 + 5C_1x^4(-2)^1 + 5C_2x^3(-2)^2 + 5C_3x^2(-2)^3 + 5C_4x^1(-2)^4 + 5C_5x^0(-2)^5$$
  

$$= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$$

(3) فك كلاً مما يلي:

(a)  $(3x-y)^5$

(b)  $(x^2+y)^4$

(c)  $(3x+5y)^3$

$$\begin{aligned} (a) (3x-y)^5 &= {}^5C_0 (3x)^5 (-y)^0 + {}^5C_1 (3x)^4 (-y)^1 + {}^5C_2 (3x)^3 (-y)^2 + {}^5C_3 (3x)^2 (-y)^3 \\ &\quad + {}^5C_4 (3x)^1 (-y)^4 + {}^5C_5 (3x)^0 (-y)^5 \\ &= 243x^5 - 405x^4y + 270x^3y^2 - 90x^2y^3 + 15xy^4 - y^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) (x^2+y)^4 &= {}^4C_0 (x^2)^4 y^0 + {}^4C_1 (x^2)^3 y^1 + {}^4C_2 (x^2)^2 y^2 + {}^4C_3 (x^2)^1 y^3 \\ &\quad + {}^4C_4 (x^2)^0 y^4 \\ &= x^8 + 4x^6y + 6x^4y^2 + 4x^2y^3 + y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) (3x+5y)^3 &= {}^3C_0 (3x)^3 (5y)^0 + {}^3C_1 (3x)^2 (5y)^1 + {}^3C_2 (3x)^1 (5y)^2 \\ &\quad + {}^3C_3 (3x)^0 (5y)^3 \\ &= 27x^3 + 135x^2y + 225xy^2 + 125y^3 \end{aligned}$$

في التمارين (4-8)، أوجد الحد المعين من مفكوك ثنائية الحد لحي كل مما يلي:

(4) الحد الثالث من  $(x+3)^{12}$

(5) الحد الثاني من  $(x+3)^9$

(6) الحد الثاني عشر من  $(2+x)^{11}$

(7) الحد الثامن من  $(x-2y)^{15}$

(8) الحد السابع من  $(x^2-2y)^{11}$

$$(4) T_{2+1} = {}^{12}C_2 (x^{10}) (3^2) = 594x^{10}$$

$$(5) T_{1+1} = {}^9C_1 (x)^8 (3)^1 = 27x^8$$

$$(6) T_{11+1} = {}^{11}C_{11} (2)^0 (x)^{11} = x^{11}$$

$$(7) T_{7+1} = {}^{15}C_7 (x)^8 (-2y)^7 = -823680x^8y^7$$

$$(8) T_{6+1} = {}^{11}C_6 (x^2)^5 (-2y)^6 = 29568x^{10}y^6$$

(9) تحليل الخطأ: زعم أحد الطلاب بأن  $(7Cx^2y)^4$  هو أحد حدود ذات الحدين. اشرح خطأ الطالب.

$$7-2=5 \quad \text{لأن } 5=y \quad (*)$$

$$n=7 \quad \text{لأنه أن يكون مجموع أسس } x \text{ و } y \text{ يباين } n=7 \quad (*)$$

(10) أوجد الحد الذي يحتوي على  $x^2y^3$  في مفكوك  $(3x-7y)^5$

$$T_4 = T_{3+1} = 5C_3 (3x)^2 \cdot (-7y)^3 = -30870 x^2 y^3$$

(11) في مفكوك  $(5-3ab)^7$  أوجد الحد الذي يحتوي على  $a^3b^3$

$$T_4 = T_{3+1} = 7C_3 (5)^4 \cdot (-3ab)^3 = -590625 a^3 b^3$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- ~~(b)~~  
(a) ~~(b)~~  
~~(b)~~  
(a) ~~(b)~~  
(a) ~~(b)~~

- (1) مفكوك  $(c+1)^2$  هو  $c^2 + 5c^4 + 10c^3 + 10c^2 + 5c + 1$ .  
(2) إذا كان الحد  $125c^4d^8$  أحد حدود مفكوك  $(c+d)^n$ ، فإن قيمة  $n$  هي 5.  
(3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك  $(r+x)^n$  هو 7 فإن قيمة  $n$  هي 7.  
(4) الحد الثاني من  $(x+3)^9$  هو  $54x^8$ .  
(5) معامل الحد السابع في مفكوك  $(x-y)^9$  هو عدد سالب.

في التمارين (6-11)، ظلّل رمز الدائرة للدال على الإجابة الصحيحة:  
(6) مفكوك  $(a-b)^3$  هو:

- (a)  $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$   
(c)  $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

- (b)  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$   
~~(d)  $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$~~

(7) الحد الثالث من مفكوك  $(a-b)^3$  هو:

- (a)  $-21a^3b^2$   
(c)  $7a^3b$

- (b)  $-7a^3b$   
~~(d)  $21a^3b^2$~~

(8) في مفكوك  $(2a-3b)^6$  الحد الذي معامله 2160 هو:

- (a) الحد الثاني  
(c) الحد الرابع

- ~~(b) الحد الثالث~~  
(d) الحد الخامس

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك  $(3c-4b)^7$  هو:

- (a) 5170  
~~(c) 4320~~

- (b) 3312  
(d) 2316

(10) في مفكوك  $(x+y)^9$  تكون رتبة الحد  $126x^3y^4$  هي:

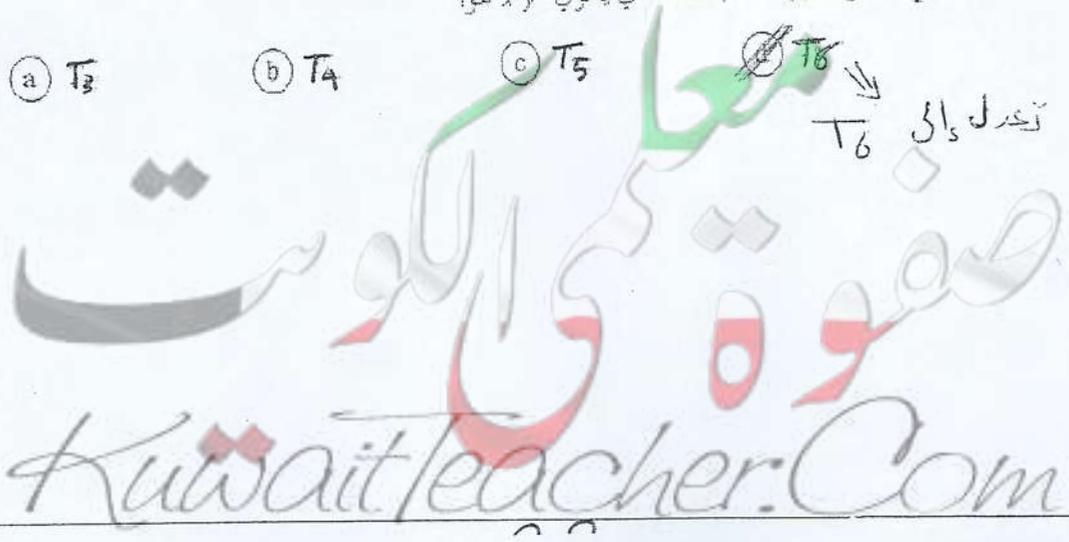
- (a) الرابعة  
(b) الخامسة  
(c) السادسة  
(d) التاسعة

(11) في مفكوك  $(3x+2y)^8$  الحد الذي يحتوي  $x^3y^5$  هو:

- (a)  $T_3$   
(b)  $T_4$

- (c)  $T_5$   
~~(d)  $T_6$~~

تدخل إلى  $T_6$



تَمَرَات

3-11

73

الاحتمال

Probability

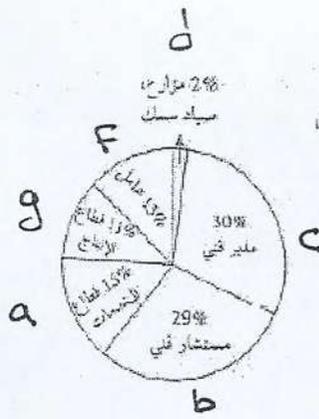
المجموعة A: تمارين مقالية

- لحي الصبريين (1-2)، ومبت سحري تزد. فن ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا.
- (1) مجموع العددين الظاهريين هو عدد أولي، المجموع أصغر من 4
- (2) ناتج ضرب العددين الظاهريين 24، أحد العددين هو عدد أولي.

الحل :

- 1- الحدثان غير متنافيان لأن  $3 = 1+2$  عدد أولي أصغر من 4
- 2- متنافيان  $24 = 6 \times 4$  عدد أولي ، 4 ، 6 عددين غير أوليين

معلمة الكويت  
KuwaitTeacher.Com



(3) يمين التمثيل البياني أدناه، أنواع عقود العمل في إحدى الدول في العام 2011،

أوجد احتمال كل حدث مما يلي،

- (a) اختيار شخص من قطاع الخدمات.  
 (b) اختيار شخص من قطاع الخدمات أو مستشار في.  
 (c) اختيار شخص ليس مديرًا فعليًا.  
 (d) اختيار شخص ليس عاملاً وليس من قطاع الإنتاج.

a)- 15%

b)- 44%

c)- 70%

d)- 76%

$$(15\% + 29\% = 44\%)$$

$$(1 - 30\% = 70\%)$$

$$1 - (30\% + 11\%) = 76\%$$

a)  $P(a) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

b)  $P(a \cup b) = \frac{15}{100} + \frac{29}{100} = \frac{44}{100} = \frac{11}{25}$

c)  $P(\bar{c}) = 1 - \frac{30}{100} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$

d)  $P(\bar{f} \cap \bar{g}) = P(\overline{f \cup g}) = 1 - P(f \cup g)$

$$= 1 - \left( \frac{13}{100} + \frac{11}{100} \right)$$

$$= \frac{76}{100} = \frac{19}{25}$$

مراجعة

المجموع	شاطئ البحر	العجول	المسكن
20	6	14	استجار شقة لي ميني
28	12	16	فندق
26	18	8	منزل مستقل
74	36	38	المجموع

(4) يبين الجدول المقابل كيف يمضي موظفو إحدى المؤسسات عطلتهم الصيفية. اختير عشوائياً موظف من هذه المؤسسة. ما احتمال أن يسكن خلال عطلة الصيفية في فندق على شاطئ البحر؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{74} = \frac{6}{37} \quad \underline{\underline{\text{الكل}}}$$

(5) يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون و 4 كرتين حمراء اللون. أخذت كرتان معاً من دون النظر داخل الكيس. أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

(a) الكرتان زرقاوان.

(b) كرة زرقاء و كرة حمراء.

(c) الكرتان من اللون نفسه.

الحل :

$$n(S) = {}^6C_2 = 15$$

طريقته يمكن

A حدث وان  $n(A)$  للكرتان زرقاوان

$$n(A) = {}^4C_2 \times {}^2C_0 = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

a)\*  $\frac{2}{5}$

B حدث وان  $n(B)$  للكرة الزرقاء و الكرة الحمراء

$$n(B) = {}^4C_1 \times {}^2C_1 = 8$$

$$P(B) = \frac{8}{15}$$

b)\*  $\frac{8}{15}$

C الحدث وان  $n(C)$  للكرتان من اللون نفسه

$$n(C) = {}^4C_2 \times {}^2C_0 + {}^2C_2 \times {}^4C_0 = 7$$

$$P(C) = \frac{7}{15}$$

c)\*  $\frac{7}{15}$

(6) إذا كان الحدثان  $t, r$  غير متنافيين، أكمل الجدول أدناه لإيجاد كل احتمال.

	$P(t)$	$P(r)$	$P(t \cap r)$	$P(t \cup r)$
(a)	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{11}$
(b)	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
(c)	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$
(d)	$\frac{2}{x}$	$\frac{3}{2x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{5}{2x}$

(7) إذا كان الحدان  $t, r$  متناهيان، أوجد  $P(t \cup r)$ .

(a)  $P(t) = \frac{5}{8}, P(r) = \frac{1}{8}$

(b)  $P(t) = 12\%, P(r) = 27\%$

a)  $P(t \cup r) = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

الكل

b)  $P(t \cup r) = \frac{12}{100} + \frac{27}{100} = \frac{39}{100} = 39\%$

(8) إذا كان الحدثان  $m, n$  مستقلان، أوجد  $P(m \cap n)$ .

(a)  $P(m) = \frac{1}{4}$ ;  $P(n) = \frac{2}{3}$

(b)  $P(m) = 0.6$ ;  $P(n) = 0.9$

a)\*  $p(m \cap n) = p(m) \times p(n)$

b)\*  $p(m \cap n) = 0.6 \times 0.9 = 0.54$

$$p(m \cap n) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

(9) في أحد البلدان، 30% من السكان هم تحت سن العشرين، 17% فوق الستين، اختير شخص من السكان عشوائياً. فما احتمال أن يكون تحت سن العشرين أو فوق الستين؟

$$P(A) = \frac{30}{100}$$

الاحتمال

$$P(B) = \frac{17}{100}$$

$$P(A \cup B) = \frac{30}{100} + \frac{17}{100} = \frac{47}{100} = 47\%$$

(10) رعبت حجر نرد. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية.

(a) 3 أو عدد فردي.

(b) عدد زوجي أو عدد أصغر من 4

(c) عدد فردي أو عدد أولي

(d) 4 أو عدد أصغر من 6

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$n(S) = 6$$

$$a) * \frac{1}{2}$$

$$b) * \frac{5}{6}$$

$$c) * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$d) * \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$a) a = \{1, 3, 5\}$$

$$P(a) = \frac{n(a)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$b) b = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad n(b) = 5$$

$$P(b) = \frac{n(b)}{n(S)} = \frac{5}{6}$$

$$c) c = \{1, 2, 3, 5\} \quad n(c) = 4$$

$$P(c) = \frac{n(c)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$d) d = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad n(d) = 5$$

$$P(d) = \frac{n(d)}{n(S)} = \frac{5}{6}$$

40%

(11) في إحدى المدن، وافق ~~سبعة~~ من السكان على مرور القطار السريع في المذاق قريب، منهم 4 اختار  
10 أشخاص عشوائيًا من سكان المدينة، فما احتمال أن يكون 4 منهم قد وافقوا على مرور القطار السريع؟

$$p(A) = {}_{10}C_4 \times (0.40)^4 \times (0.60)^6 \cong 0.25$$

معلمي الكويت  
قفوة  
KuwaitTeacher.Com

(12) يستخدم حوالي 11% من الطلاب اليد اليسرى للكتابة. يوجد في أحد الصفوف 30 طالباً. فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة؟

$$p(A) = {}_{30}C_4 \times (0.11)^4 \times (0.89)^{26} \cong 0.1939$$

المجموعة B تصارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إن اختيار لون السيارة عشوائيًا، اختيار الدواب عشوائيًا هما حدثان مستقلان.

(2) الحدثان  $m, n$  مستقلان،  $P(m) = \frac{12}{17}$ ،  $P(n) = \frac{3}{8}$ ، إذا  $P(m \cap n) = \frac{9}{17}$

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي  $\frac{1}{2}$

(4) في اختبار صح - خطأ، أجب عن 5 أسئلة عشوائيًا. احتمال أن تكون 3

من إجاباتك صحيحة هو  $\frac{5}{16}$

في التمارين (5-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان  $m, n$  مستقلان،  $P(m) = \frac{1}{3}$ ،  $P(n) = \frac{9}{10}$ ، إذا  $P(m \cap n)$  تساوي،

(a)  $\frac{1}{3}$

(b)  $\frac{25}{30}$

(c)  $\frac{3}{10}$

(d)  $\frac{11}{30}$

(6) الحدثان  $r, s$  متنافيان  $P(r) = \frac{3}{5}$ ،  $P(s) = \frac{1}{3}$ ، إذا  $P(r \cup s)$  تساوي،

(a)  $\frac{1}{5}$

(b)  $\frac{14}{15}$

(c)  $\frac{4}{15}$

(d) 0

(7) الحدثان  $r, s$  متنافيان  $P(r) = \frac{1}{7}$ ،  $P(s) = 60\%$ ، إذا  $P(r \cup s)$  تساوي،

(a) 28%

(b) 42%

(c)  $\frac{16}{35}$

(d)  $\frac{26}{35}$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي،

(a)  $\frac{2}{3}$

(b)  $\frac{5}{6}$

(c)  $\frac{1}{2}$

(d) 1

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائيًا كرتان معًا من

الكيس. احتمال الحدث، أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء هو،

(a)  $\frac{1}{14}$

(b)  $\frac{28}{15}$

(c)  $\frac{2}{7}$

(d)  $\frac{15}{28}$

$${}^5C_3$$

$$\times ({}^3C_1 \times {}^5C_1)$$

$$= \frac{5}{16}$$

(10) يتوزع طلاب مدرستين A, B على الصفوف الثلاثة الأخيرة وفق النسب التالية:

الصف	العاشر	الحادي عشر	الثاني عشر
A	37%	35%	28%
B	38%	34%	28%

اختير عشوائيًا طالب من كل مدرسة. احتمال أن يكون طالب من الصف العاشر أو الصف الحادي عشر من المدرسة A وطالب من الصف الثاني عشر من المدرسة B هو:

- a) 20.16%       b) 100%  
 c) 0%       d) 79.84%

(11) 90% من القمصان التي تنتجها إحدى الشركات لا عيب فيها. اختار مراقب الجودة 8 قمصان عشوائيًا. احتمال أن يكون 3 قمصان من هذه المجموعة فيها عيب هو:

- a) 0.033       b)  $5.9 \times 10^{-4}$   
 c)  $4 \times 10^{-4}$        d) 2.955