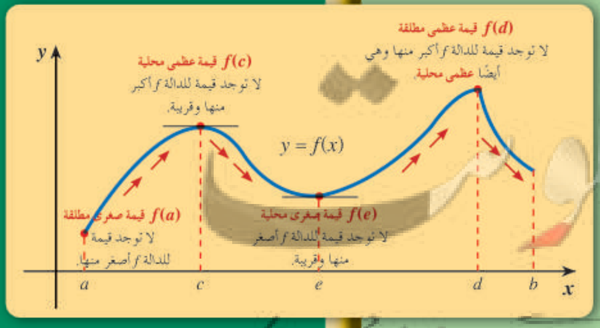
وزارة التربية

الرياضيات

كتاب المعلّم



الصّف الثاني عشر علمي

١٢

الفصل الدراسي الأوّل

الطبعة الثانية

شركة مطابع الرسالة - الكويت

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٣١٧) بتاريخ ٣١/ ١٢/ ٢٠١٥م

وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الأول

كتاب المعلّم

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي

أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٣٧ - ١٤٣٨ هـ

٢٠١٦ - ٢٠١٧ م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. صديقة أحمد صالح الأنصاري | أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف

أ. مجدي محمد يس دراز | أ. يحيى عبد السلام خالد عقل

أ. وضحى ابراهيم مزعل الدوسري

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٤

الطبعة الأولى ٢٠١٤

الطبعة الثانية ٢٠١٦

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدّمة من كتاب المعلِّم

توجيهات عامّة للمعلِّم

هذه السلسلة تعمل على تنمية أساليب التفكير، وذلك بتركيزها على بناء المفاهيم الرياضيّة وربطها بالواقع الحياتيّ من خلال:

١ - الأنشطة العمليّة في استكشاف المفاهيم ودعم إحساس الطالب بهذه المفاهيم، وذلك باستخدام عدّة طرائق مختلِفة:

العمل في فريق.

عمل مجلّات رياضيّة.

اِستخدام المحسوسات وشبه المحسوسات.

التعبير الشفهيّ (التواصل) - التفكير الناقد.

٢ - الاعتماد على المصوَّرات، وذلك من خلال التمثيل البيانيّ للمعلومات وقراءة البيانات الممثَّلة بيانيًّا.

٣ - الاعتماد على المواقف والقصص الحياتيّة وربطها بالموضوعات، وكذلك توظيف الموضوعات الرياضيّة في حلّ المسائل الحياتيّة.

٤ - التأكيد على فهم المفاهيم واستيعابها، والربط بين الرياضيّات وباقي الموادّ.

تطبيق السلسلة

لتطبيق السلسلة، يجب مراعاة ما يلي:

وجود ملفّين لكلّ تلميذ بحيث يُخصَّص أحدهما للأنشطة الصفّيّة واللاصفّيّة، أمّا الآخر فيُخصَّص للاختبارات والملحوظات الميدانيّة على أداء الطالب، ويُدوِّنها المعلِّم، وهذا أوّل ما يقوم به، مقرونةً بتواريخ المتابعة.

يُنوِّع المعلِّم في طرائق التدريس، وخاصّةً التي تشمل الاستكشاف وحلّ المشكلات.

نماذج المعلِّم لتقييم الطلاب تشمل:

- تقييم الأداء في حلّ المسائل.
- التقييم المستمرّ في حلّ المسائل والملاحظة والتعليم التعاونيّ.
- التقييم الفرديّ في الملاحظة والمراقبة.
- التقييم العامّ للطالب.

تقييم الأداء في حلّ المسائل

الِاسم .... التّاريخ ....

تقييم الأداء في حلّ المسائل

❶ ضع إشارة ✓ قرب العبارة التي تصف بدقّة أداء الطالب.

اِفهَمْ

- يقرأ المسألة بتأنٍّ.
- يقرأ أيّ جدوَل أو أيّ تمثيل بياني.
- يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصّة.
- يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة.
- يستطيع فهم وإدراك السؤال الذي يجب الإجابة عليه.

خَطِّطْ

- يختار الخطّة الأنسب لحلّ المسألة.
- يقدِّر الإجابة الصحيحة.

حُلَّ

- يعمل وفقًا لمنهجية معيّنة.
- يعرض الحلّ بطريقة منظَّمة وسليمة.
- يحسب بطريقة صحيحة.
- يعطي الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات.

راجِعْ ولاحِظْ

- يُلاحِظُ معقولية الإجابة.
- يجرِّب طرقًا أخرى لحلّ المسألة.

❷ اِتبعِ المواصفات التالية لتقييم أداء الطالب:

مستوى ٤ (يتقن الطالب ١١-١٣ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهمًا عميقًا للمسألة ويفسِّرها بشكل موجز وواضح ويكون قادرًا على ربط المسألة بعمل سبق أن أنجزه.

مستوى ٣ (يتقن الطالب ٨-١٠ من المهمات السابق ذكرها). يفهم الطالب المسألة ويعرض الحلّ الصحيح بطريقة منظَّمة وواضحة.

مستوى ٢ (يتقن الطالب ٤-٧ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهمًا إجماليًّا للمسألة غير أنّه قد يرتكب بعض الأخطاء في تفاصيل معيّنة.

مستوى ١ (يتقن الطالب ٠-٣ فقط من المهمات السابق ذكرها). لا يُظهر الطالب إلّا فهمًا سطحيًّا أو جزئيًّا للمسألة وهو ليس قادرًا على إتمام العمل المطلوب أو حتى اعتماد المنهجية الصحيحة، كما أنّه لا يعطي إجابة صحيحة أو تكون خطّته غير مناسبة، وفي أغلب الأحيان لا نجد حلًّا ولا تجاوبًا مناسبًا أو إجابة صحيحة مرفقةً بجهد ما.

التقييم المستمرّ: حلّ المسائل

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
– بحاجة للتطوير
غ.ت غير قابل للتطبيق

	يقرأ المسألة بتأنٍّ	يدرس الصوَر والجداول والتمثيلات البيانيّة	يستطيع إعادة صياغة المسألة بأسلوبه الخاصّ	يستطيع تحديد المعلومات	يستطيع تحديد الأسئلة التي تطلّب الإجابة عليها	يختار الخطّة المناسبة	يقدّر ما ستكون عليه الإجابة	يعمل بانتظام	يكتب الحلّ بطريقة منظّمة	يُجري العمليات الحسابية بدقّة	يكتب الإجابة في جملة كاملة مع ذكر الوحدات الصحيحة	يلاحِظ صحة الإجابة ومعقوليتها	يجرّب طرقًا أخرى للحلّ
١ .													
٢ .													
٣ .													
٤ .													
٥ .													
٦ .													
٧ .													
٨ .													
٩ .													
١٠ .													
١١ .													
١٢ .													
١٣ .													
١٤ .													
١٥ .													
١٦ .													
١٧ .													
١٨ .													
١٩ .													
٢٠ .													
٢١ .													
٢٢ .													
٢٣ .													
٢٤ .													
٢٥ .													
٢٦ .													
٢٧ .													
٢٨ .													

التقييم المستمرّ: الملاحظة

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
– بحاجة للتطوير
غ.ت غير قابل للتطبيق

	يُظهر معرفة بالمهارات	يدرك المفاهيم	يعمل بترتيب وانتظام	يعمل بنجاح مع الآخرين	يُظهر مواقف إيجابية	يحترم أفكار الغير ويستخدمها	يُظهر صبرًا ومثابرة	يطلب المساعدة عند الحاجة	يستخدم الوقت بإنتاجية	يجرّب طرقًا أخرى			
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

التقييم المستمرّ: التعلُّم التعاوني

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
– بحاجة للتطوير
غ.**ت** غير قابل للتطبيق

	يُظهر قدرة على حلّ المسائل	يعمل بانتظام	يعمل مع آخرين في الفريق	يوجّه ويساعد الآخرين	يحترم آراء الآخرين ويستخدمها	يتكلّم بهدوء	يُثير أسئلة	يظهر ميولًا إيجابية	يُظهر صبرًا ومثابرة	يُظهر عدم موافقة دون اشمئزاز			
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

المحتويات

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال Limits and Continuity

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1–1: النهايات

جزء **1**: الجوار.

جزء **2**: نهاية دالة عند نقطة.

جزء **3**: النهاية من جهة واحدة أو من جهتين.

جزء **4**: حساب النهايات.

جزء **5**: قاعدة القوة.

جزء **6**: إلغاء العامل الصفري في المقام.

1–2: نهايات تشتمل على $-\infty$، ∞

جزء **1**: نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$

جزء **2**: نهايات غير محددة $\pm\infty$ عندما $x \to c$

جزء **3**: الخط المقارب الأفقي والخط المقارب الرأسي.

1–3: صيغ غير معينة

1–4: نهايات بعض الدوال المثلثية

جزء **1**: نهايات بعض الدوال المثلثية.

جزء **2**: نظرية الإحاطة.

1–5: الاتصال

جزء **1**: الاتصال عند نقطة.

جزء **2**: التخلص من الانفصال.

1–6: نظريات الاتصال

جزء **1**: خواص الدوال المتّصلة، دوال متّصلة.

جزء **2**: اتصال الدوال الجذرية عند نقطة.

جزء **3**: الدالة المركبة.

جزء **4**: اتصال الدوال المركبة عند نقطة.

1–7: الاتصال على فترة

جزء **1**: الاتصال على فترة.

مقدمة الوحدة

تتطرق هذه الوحدة إلى موضوعي النهاية والاتصال.

يعتبر الموضوعان من المواضيع المبدئية والجوهرية في علم الطوبولوجيا وهما غنيان جدًّا بالخواص الطوبولوجية لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

طرح الرياضيون والفلاسفة منذ القدم مسائل تتعلق بموضوع النهايات. نذكر على سبيل المثال متناقضة زينون (Zeno's Paradox) وهي تتصوّر سباقًا بين «أخيل» أسرع عداء في بلاد الإغريق وسلحفاة عجوز.

في بداية السباق يعطي «أخيل» السلحفاة ميزة مئة متر.

عندما يجري «أخيل» المئة متر تكون السلحفاة قد قطعت مسافة قصيرة (لنفرض أنها مترًا واحدًا) ما يتطلب من أخيل زمنًا إضافيًّا لقطع هذه المسافة وأثناء ذلك تكون السلحفاة قد قطعت مسافة أقصر. يحدث هذا السباق إلى ما لا نهاية ويستنتج زينون أن أخيل لا يستطيع التفوق على السلحفاة.

حُلّت مسألة المتناقضة هذه في علم التفاضل والتكامل الحديث باستخدام مبدأ أن متسلسلة لا نهائية من الأعداد الموجبة يمكن أن تقترب من عدد محدد.

تقودنا دراسة النهايات إلى التبصر والتمعن بمفهوم اللا نهاية ∞. عندما يأخذ المتغير x قيمًا أكبر فأكبر، وأكبر من أي عدد موجب معطى، نقول إن x تقترب من اللانهاية ونكتب $x \to \infty$ كذلك التعبير $x \to -\infty$ يعني أن قيمة x أصغر من أي عدد سالب معطى.

وفي تمارين النهايات نتعرض لصيغ غير معينة ومنها:

صفر $\times \infty$، $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\infty - \infty$، $\dfrac{\infty}{\infty}$، ...

لإيجاد النهاية يجب أوّلًا التخلص من الصيغة غير المعينة.

فمثلًا لإيجاد $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 4}$ نصل إلى صيغة غير معيّنة $\dfrac{0}{0}$.

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

Limits and Continuity

مشروع الوحدة: السرعة اللحظية

1 مقدمة المشروع: تسقط صخرة من مرتفع. يمكن ضبط زمن السقوط وحساب السرعة المتوسطة لسقوط الصخرة بسهولة، ولكن في لحظة ما أثناء السقوط ما هي سرعة الصخرة؟

2 الهدف: معرفة سرعة الصخرة عند اللحظة $t = 2\ s$.

3 اللوازم: أوراق رسم، آلة حاسبة علمية، حاسوب، جهاز عرض.

4 أسئلة حول التطبيق:

تسقط الصخرة وفق العلاقة (قانون جاليليو للسقوط الحر): $d(t) = 4.9t^2$ ، حيث:

$d(t)$ المسافة التي تقطعها الصخرة بالأمتار (m)، t الزمن بالثواني s

a احسب السرعة المتوسطة $\dfrac{\Delta d}{\Delta t}$ خلال أول ثانيتين من السقوط.

b أكمل الجدول التالي الذي يمثّل السرعة المتوسطة للصخرة في الفترة الزمنية من اللحظة $t = 2$ إلى اللحظة $t = 2 + h$، حيث $\Delta t = h$ هو الفارق في الزمن.

مدة الفترة الزمنية h بالثانية	السرعة المتوسطة $\dfrac{\Delta d}{\Delta t}$
0.4	
0.1	
0.05	
0.01	
0.001	
0.0001	

c ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى معدل السرعة عندما تقترب h كثيرًا من الصفر؟

d ما تقريبًا سرعة الصخرة عند $t = 2$؟

5 التقرير: ضع تقريرًا مفصّلًا يبيّن النتائج التي حصلت عليها مشيرًا إلى المعطيات من دروس الوحدة التي استفدت منها. دعّم تقريرك بملصق أو بعرض على جهاز العرض.

دروس الوحدة

النهايات	نهايات تشتمل على $-\infty$ ، ∞	صيغ غير معينة	نهايات بعض الدوال المثلثية	الاتصال	نظريات الاتصال	الاتصال على فترة
1–1	1–2	1–3	1–4	1–5	1–6	1–7

10

ونكتب:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-4)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-4} = -\frac{2}{3}$$

بعد ذلك تتطرق الوحدة إلى مفهوم الاتصال وهو مفهوم يأتي متداخلًا مع مفهوم النهايات ولكن لتنظيم الأفكار ومنع الكثير من التكرار في دراسة الموضوعين اعتمد هذا الترتيب. ونسجل هنا أن للرياضي «كوشي» الفضل في الإجابة عن الكثير من المسائل المتعلقة بالنهايات والاتصال.

الوحدة الأولى

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- رسمت بيان الدالة التربيعية.
- رسمت بيانات دوال القوى.
- وصفت منحنيات كثيرات الحدود.
- أوجدت أصفار دالة كثيرة الحدود.
- تعلمت الكثير من المتطابقات المثلثية.
- رسمت بيانات بعض الدوال.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرّف مفهوم نهاية دالة عند نقطة.
- حساب نهايات بعض الدوال.
- استخدام نظريات النهايات.
- إلغاء العامل الصفري (صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$).
- نهايات تشمل على ∞، $-\infty$.
- صيغ غير معينة.
- نهايات بعض الدوال المثلثية.
- نظرية الإحاطة.
- استخدام نظرية الإحاطة لإيجاد بعض النهايات.
- تعرف اتصال دالة عند نقطة ودراسة الاتصال.
- تعرف بعض نظريات الاتصال الأساسية.
- بحث اتصال دالة ناتجة من تركيب دالتين.
- فهم معنى دالة متصلة على فترة.
- تعرف اتصال دالة على فترة.

المصطلحات الأساسية

نهاية دالة عند نقطة — النهاية من الجهتين — النهاية من جهة واحدة — العامل الصفري — صيغ غير معينة — نظرية الإحاطة — خط مقارب (محاذي) رأسي — خط مقارب (محاذي) أفقي — اللانهاية— اتصال دالة عند نقطة — نقاط الاتصال ونقاط الانفصال — التخلص من الانفصال — دالة مركبة — اتصال دالة على فترة .

أضف إلى معلوماتك

في النصف الثاني من القرن الثامن عشر، كان الباحثون في الرياضيات قد أدركوا أنه بدون أسس منطقية، سيكون حساب التكامل والتفاضل محدودًا. طوّر أوغوستين لويس كوشي (Augustin–Louis Cauchy) نظرية في النهايات، فألغى معظم الشكوك حول صحة منطق حساب التكامل والتفاضل.

وصف المؤرخ هوارد إيف (Howard Eves) كوشي بأنه إضافة إلى كونه عالمًا رياضيًّا من الطراز الأوّل قدم الكثير لعالم الرياضيات فقد كان أيضًا محاميًّا (مارس المهنة لمدة أربعة عشر عامًا)، ومتسلق جبال، ورسام (استخدم الألوان المائية). ومن صفات كوشي التي ميزته عن معاصريه احترامه للبيئة ودفاعه عنها.

أوغوستين لويس كوشي
(Augustin–Louis Cauchy)

11

مشروع الوحدة

ماذا سيتعلم الطلاب؟

ولماذا؟

سيتعرف الطلاب في هذه الوحدة النهايات وخصائصها، ومن ثم سيتفهمون نقاط الاتصال والانفصال والدوال المتصلة وتطبيقاتها الحياتية.

أسأل الطلّاب إذا كانوا قد شاهدوا سقوط أجسام مختلفة الأحجام والأوزان وذلك من ارتفاعات متعددة. ناقش معهم توقعاتهم لسرعة صخرة كبيرة أو حجر صغير أو ريشة أثناء السقوط وذلك في أوقات متفاوتة.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) $\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(0)^2}{2-0} = 9.8 \text{ m/s}$

(b)

السرعة المتوسطة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$	مدة الفترة الزمنية بالثانية h
21.56	0.4
20.09	0.1
19.845	0.05
19.649	0.01
19.6049	0.001
19.60049	0.0001

(c) يقترب معدل السرعة من 19.6

(d) 19.6 m/s

سلّم التقييم

4	الحسابات صحيحة بكاملها – الجدول واضح ويبرز النتائج – التوقعات معقولة – التقرير مفصل ودقيق.
3	معظم الحسابات صحيحة مع أخطاء قليلة – الجدول واضح مع بعض الأخطاء – التوقعات معقولة بأغلبيتها – التقرير مفصل.
2	يوجد أخطاء متعدّدة في الحسابات – الجدول غير واضح وفيه أخطاء متنوّعة – التقرير غير مفصّل وفيه نواقص.
1	معظم عناصر المشروع غير كاملة أو ناقصة.

1–1: النهايات

1 الأهداف

- يتعرف جوار العدد.
- يتعرف النهاية عند نقطة.
- يحسب النهايات من التمثيلات البيانية.
- يستخدم النظريات لحساب بعض النهايات.
- يبسط النهاية من جهة واحدة فقط ومن الجهتين.
- يبسط الصيغة غير المعينة $\frac{0}{0}$.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

جوار – المعيار – جوار ناقص – النهاية من جهة واحدة – النهاية من الجهتين – صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ما هما طرفا الفترات المفتوحة التالية:

$(10, 28)\ ,\ (-5, 9)\ ,\ (-4, -2)$

(b) أوجد العددين في منتصف المسافة للفترات المفتوحة التالية:

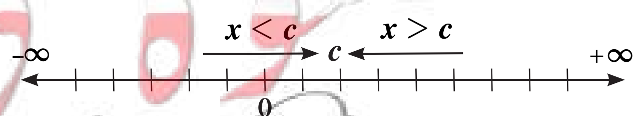
$(-2, 2)\ ,\ (13, 10^2)\ ,\ (-4, 5)$

(c) أوجد بعد كلّ من طرفي الفترة عن العدد في منتصفها كما ورد في السؤال (b).

5 التدريس

يمكن اعتماد عدة طرق منها العددية ومنها الحسية لفهم مبدأ النهاية.

مثال عددي: يمكن استخدام خط الأعداد فنثبت العدد c على الخط ونقرّب منه العدد x من الجهتين: من اليمين إلى اليسار يقترب x من c $(x > c)$ ومن اليسار إلى اليمين يقترب x من c $(x < c)$.



1–1

النهايات

Limits

سوف تتعلم
- النهاية عند النقطة.
- حساب النهايات من التمثيلات البيانية.
- حساب النهايات باستخدام النظريات.
- النهاية من جهة واحدة فقط أو من الجهتين.
- صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$.

المفردات والمصطلحات:
- جوار Neighbourhood
- المعيار Norm
- جوار ناقص Punctured Neighbourhood
- النهاية من جهة واحدة One–Sided Limit
- النهاية من الجهتين Two–Sided Limits
- صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$ Indeterminate Form $\frac{0}{0}$

عمل تعاوني

أولًا: أكمل الجدول التالي كما في 1 :

	الفترة المفتوحة	العدد في منتصف الفترة	التمثيل على خط الأعداد	صورة أخرى للفترة المفتوحة	بُعد العدد عن طرفي الفترة
1	$(3, 5)$	4		$(4-1, 4+1)$	1
2	$\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$				
3	$\left(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$				
4	$(0, 1)$				
5	$(2.9, 3.1)$				
6	$(6.8, 7.2)$				

ثانيًا: اكتب الفترة المفتوحة التي يبعد طرفاها بمقدار $\frac{1}{5}$ عن العدد الحقيقي 3.

ثالثًا: اكتب فترة مفتوحة يبعد طرفاها بمقدار a عن العدد الحقيقي c.

من «العمل التعاوني» السابق، **الفترة المفتوحة $(c-a\ ,\ c+a)$ تسمّى جوارًا للعدد c وفقًا للمعيار a حيث $a > 0$.**

فمثلًا، الفترة المفتوحة $(3, 5)$ هي جوار للعدد 4 وفقًا للمعيار 1.

والفترة $\left(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$ هي جوار للعدد 2 وفقًا للمعيار $\frac{1}{4}$.

وكذلك الفترة $\left(1\frac{99}{100}, 2\frac{1}{100}\right)$ هي جوار للعدد 2 وفقًا للمعيار $\frac{1}{100}$.

وعليه يمكننا تحديد جوار لأي عدد باختيارنا معيارًا مناسبًا.

إذا كانت لدينا دالة معرّفة على فترة مفتوحة I من الأعداد الحقيقية وتحوي العدد c فإننا نقول إن هذه الدالة معرّفة في جوار للعدد c (أي I تحوي جوارًا للعدد c).

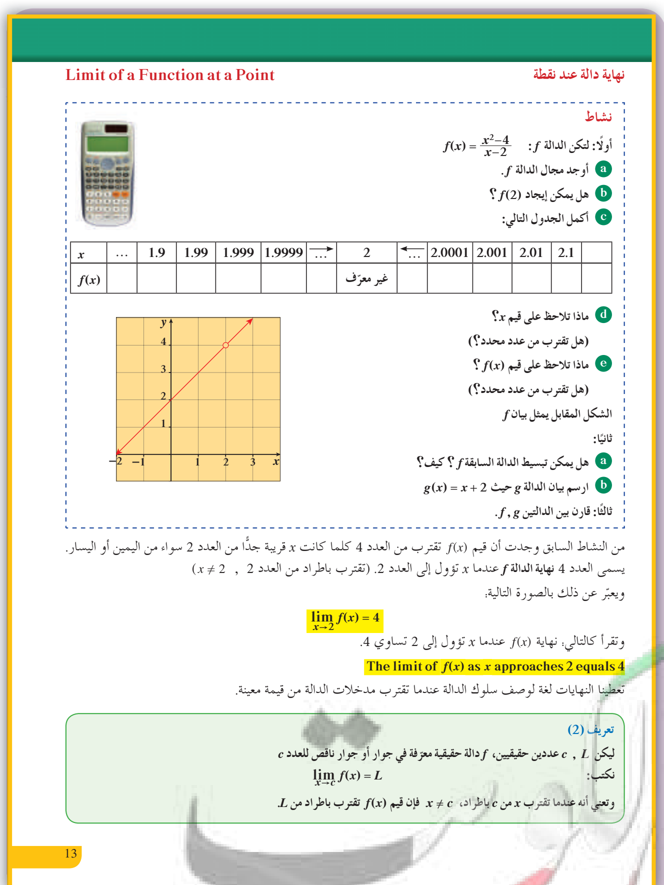
أما إذا كانت الدالة معرّفة عند جميع عناصر الفترة I ولكنها غير معرفة عند العدد c نفسه فإن الدالة تكون معرّفة في جوار ناقص للعدد c.

تعريف (1)

لتكن x كمية متغيرة، c عددًا حقيقيًّا.

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.

12



نهاية دالة عند نقطة

Limit of a Function at a Point

نشاط

أولًا: لتكن الدالة f: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

a أوجد مجال الدالة f.

b هل يمكن إيجاد $f(2)$؟

c أكمل الجدول التالي:

x	…	1.9	1.99	1.999	1.9999	… →	2	← …	2.0001	2.001	2.01	2.1	
$f(x)$							غير معرّف						

d ماذا تلاحظ على قيم x؟ (هل تقترب من عدد محدد؟)

e ماذا تلاحظ على قيم $f(x)$؟ (هل تقترب من عدد محدد؟)

الشكل المقابل يمثل بيان f

ثانيًا:

a هل يمكن تبسيط الدالة السابقة f؟ كيف؟

b ارسم بيان الدالة g حيث $g(x) = x+2$

ثالثًا: قارن بين الدالتين f, g.

من النشاط السابق وجدت أن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4 كلما كانت x قريبة جدًا من العدد 2 سواء من اليمين أو اليسار. يسمى العدد 4 **نهاية الدالة f** عندما x تؤول إلى العدد 2. (تقترب باطراد من العدد 2 , $x \neq 2$)

ويعبّر عن ذلك بالصورة التالية:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

وتقرأ كالتالي: نهاية $f(x)$ عندما x تؤول إلى 2 تساوي 4.

The limit of $f(x)$ as x approaches 2 equals 4

تعطينا النهايات لغة لوصف سلوك الدالة عندما تقترب مدخلات الدالة من قيمة معينة.

تعريف (2)

ليكن L , c عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرّفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c

نكتب: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x \neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L.

13

كلما اقترب x من c كلما صغرت المسافة بينهما. لنصل إلى أصغر قيمة موجبة قريبة جدًّا من الصفر أو تساويه.

مثال حسّي: بإمكان طالب أن يقف في مكان ثابت في غرفة الصف ونطلب من زميلين له أن يدنوا منه على نفس الخط ولكن كل منهما من جهة بحيث يصبحان قريبين منه إلى أدنى مسافة ممكنة.

أمّا فيما يتعلق بنهاية دالة ما f عند العدد المحدد c. فنحن نقيس ردة فعل هذه الدالة f عند اقتراب المتغير x من العدد c، بحيث يكون $|x - c|$ عددًا موجبًا صغيرًا جدًّا، وردة الفعل يعبّر عنها بالرمز L الذي يمكن أن يكون عددًا حقيقيًّا أو غير موجود. إذا تساوت النهايات من جهتي العدد c فيكون للدالة نهاية.

في المثال (1) وفي التدريب (1)

أكّد للطلاب كيفية حساب النهايات: بملاحظة التمثيل البياني للدالة يتم حساب النهايات كالتالي: نوجد النهاية إلى يسار c أي (c^-) وإلى يمين c أي (c^+) عندما تتساوى النهايتان يكون للدالة نهاية عند العدد c.

في المثالين (2), (3)

يتمكن الطالب من تطبيق قواعد حساب النهايات في حالات جمع، طرح، ضرب، قسمة الدوال. وأيضًا في حالة ضرب الدوال في ثابت ممّا يسهل عملية إيجاد النهايات.

في المثالين (4), (5)

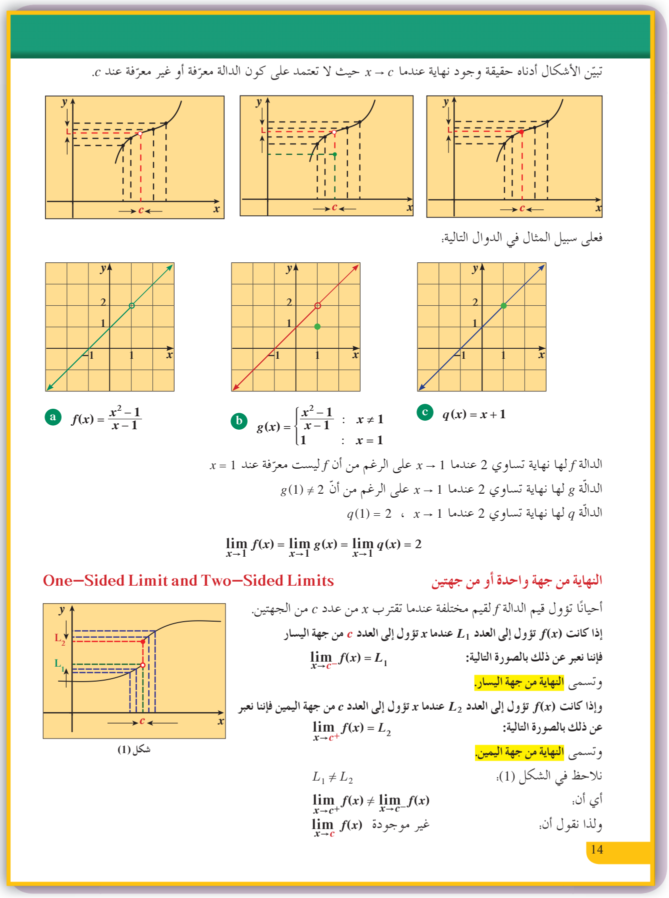
يوجد الطالب النهاية من جهة اليمين ومن جهة اليسار ليتحقق من وجود النهاية عند نقطة لدوال معرفة بأكثر من قاعدة.

في التدريب (2) وفي المثال (6)

تستخدم إعادة تعريف القيمة المطلقة لإيجاد النهايات في جوار العدد المحدد.

في المثال (7)

تستخدم نظرية (6) في إيجاد نهاية دوال تحتوي على أسس أو جذور.


تبيّن الأشكال أدناه حقيقة وجود نهاية عندما $x \to c$ حيث لا تعتمد على كون الدالة معرّفة أو غير معرّفة عند c.

فعلى سبيل المثال في الدوال التالية:

a $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

b $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & : x \neq 1 \\ 1 & : x = 1 \end{cases}$

c $q(x) = x + 1$

الدالة f لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ على الرغم من أن f ليست معرّفة عند $x = 1$

الدالة g لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ على الرغم من أنّ $g(1) \neq 2$

الدالة q لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ ، $q(1) = 2$

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1} q(x) = 2$

النهاية من جهة واحدة أو من جهتين One-Sided Limit and Two-Sided Limits

أحيانًا تؤول قيم الدالة f لقيم مختلفة عندما تقترب x من عدد c من الجهتين.

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_1 عندما x تؤول إلى العدد c من جهة اليسار

فإننا نعبر عن ذلك بالصورة التالية: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L_1$

وتسمى النهاية من جهة اليسار.

وإذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_2 عندما x تؤول إلى العدد c من جهة اليمين فإننا نعبر عن ذلك بالصورة التالية: $\lim_{x\to c^+} f(x) = L_2$

وتسمى النهاية من جهة اليمين.

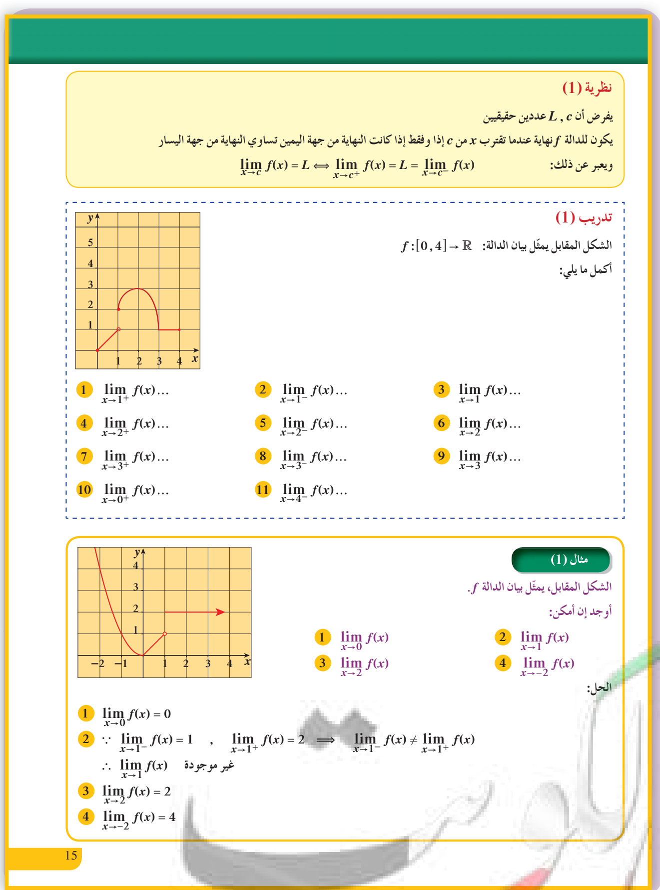
نلاحظ في الشكل (1): $L_1 \neq L_2$

أي أن: $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

ولذا نقول أن: $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة

شكل (1)

14


نظرية (1)

يفرض أن L, c عددين حقيقيين

يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

ويعبر عن ذلك: $\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x)$

تدريب (1)

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة: $f:[0,4] \to \mathbb{R}$

أكمل ما يلي:

1 $\lim_{x\to1^+} f(x)$... 2 $\lim_{x\to1^-} f(x)$... 3 $\lim_{x\to1} f(x)$...
4 $\lim_{x\to2^+} f(x)$... 5 $\lim_{x\to2^-} f(x)$... 6 $\lim_{x\to2} f(x)$...
7 $\lim_{x\to3^+} f(x)$... 8 $\lim_{x\to3^-} f(x)$... 9 $\lim_{x\to3} f(x)$...
10 $\lim_{x\to0^+} f(x)$... 11 $\lim_{x\to4^-} f(x)$...

مثال (1)

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:

1 $\lim_{x\to0} f(x)$ 2 $\lim_{x\to1} f(x)$ 3 $\lim_{x\to2} f(x)$ 4 $\lim_{x\to-2} f(x)$

الحل:

1 $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

2 $\because \lim_{x\to1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)$ غير موجودة

3 $\lim_{x\to2} f(x) = 2$

4 $\lim_{x\to-2} f(x) = 4$

15

في الأمثلة (8), (9), (10)

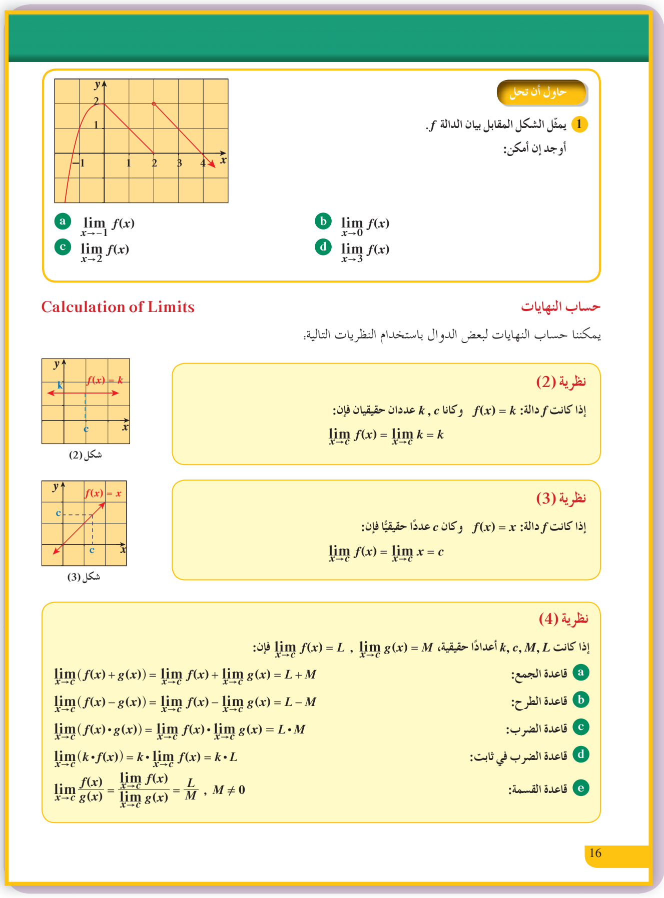
يستخدم التحليل أو مرافق العدد أو قسمة كثيرات الحدود لإلغاء العامل الصفري في المقام لإيجاد نهايات الدوال.

6 الربط

يقدّر الباحثون عدد الحيوانات المهددة بالانقراض باستخدام علاقات وضعوها من خلال مراقباتهم.
ويستخدمون النهايات لتوقع عدد هذه الحيوانات في الأمد البعيد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

في حساب النهايات وخاصة في حالات القيمة المطلقة ودوال الحدودية النسبية يجب التبسيط قبل التعويض في حالة الصيغ غير المعيّنة، كذلك الأمر في حالات الأسس ولكن يجب الانتباه إلى طبيعة الأس وما إذا كان فردي أو زوجي.



حاول أن تحل

1 يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة f.
أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x\to -1} f(x)$ b $\lim_{x\to 0} f(x)$
c $\lim_{x\to 2} f(x)$ d $\lim_{x\to 3} f(x)$

حساب النهايات Calculation of Limits

يمكننا حساب النهايات لبعض الدوال باستخدام النظريات التالية:

نظرية (2)
إذا كانت f دالة: $f(x)=k$ وكانا k, c عددان حقيقيان فإن:
$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$

شكل (2)

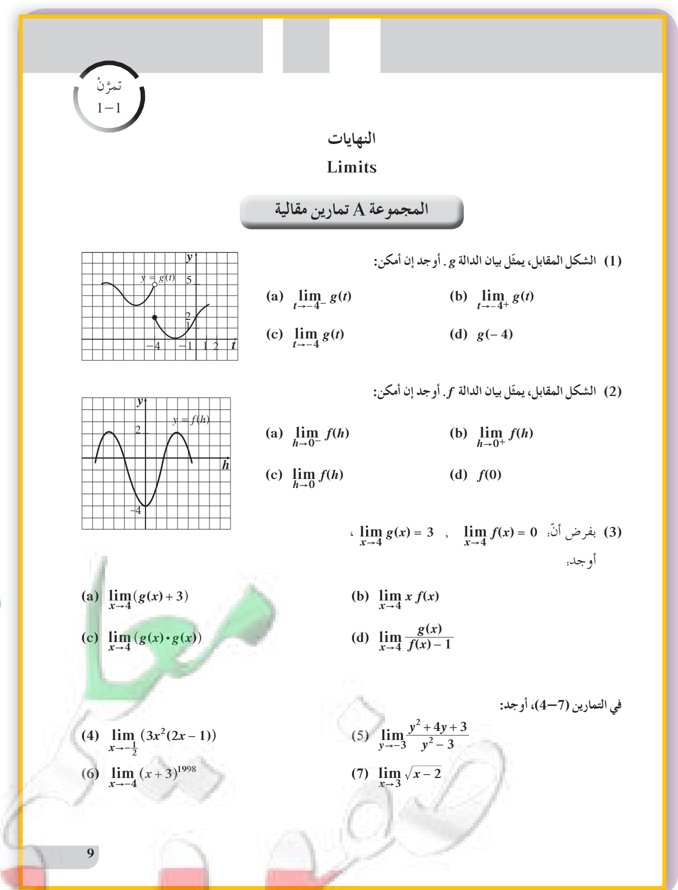
نظرية (3)
إذا كانت f دالة: $f(x)=x$ وكان c عددًا حقيقيًّا فإن:
$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$

شكل (3)

نظرية (4)
إذا كانت k, c, M, L أعدادًا حقيقية، $\lim_{x\to c} f(x) = L$, $\lim_{x\to c} g(x) = M$ فإن:

a قاعدة الجمع: $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L+M$
b قاعدة الطرح: $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L-M$
c قاعدة الضرب: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L\cdot M$
d قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot \lim_{x\to c} f(x) = k\cdot L$
e قاعدة القسمة: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

16



تمرَّنْ 1-1

النهايات
Limits

المجموعة A تمارين مقالية

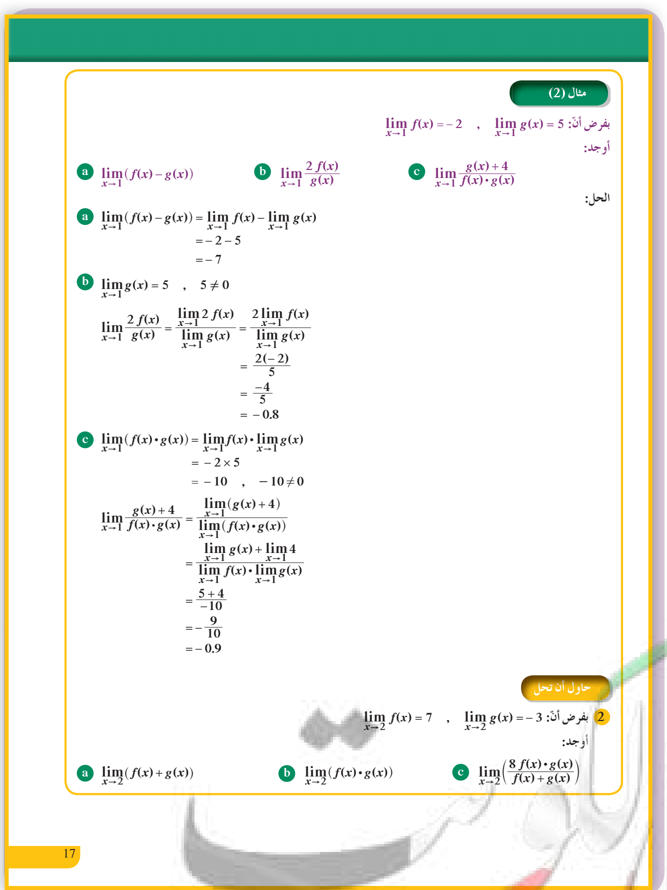
(1) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة g . أوجد إن أمكن:
(a) $\lim_{t\to -4^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to -4^+} g(t)$
(c) $\lim_{t\to -4} g(t)$ (d) $g(-4)$

(2) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:
(a) $\lim_{h\to 0^-} f(h)$ (b) $\lim_{h\to 0^+} f(h)$
(c) $\lim_{h\to 0} f(h)$ (d) $f(0)$

(3) بفرض أنّ: $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 4} g(x) = 3$،
أوجد:
(a) $\lim_{x\to 4}(g(x)+3)$ (b) $\lim_{x\to 4} x\, f(x)$
(c) $\lim_{x\to 4}(g(x)\cdot g(x))$ (d) $\lim_{x\to 4}\frac{g(x)}{f(x)-1}$

في التمارين (4–7)، أوجد:
(4) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} (3x^2(2x-1))$ (5) $\lim_{y\to -3}\frac{y^2+4y+3}{y^2-3}$
(6) $\lim_{x\to -4} (x+3)^{1998}$ (7) $\lim_{x\to 3}\sqrt{x-2}$

9



مثال (2)

بفرض أنّ: $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$
أوجد:

a $\lim_{x\to 1}(f(x)-g(x))$ b $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)}$ c $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)}$

الحل:

a $\lim_{x\to 1}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x)$
$= -2-5$
$= -7$

b $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$, $5 \neq 0$

$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1} 2f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)} = \frac{2\lim_{x\to 1} f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)}$
$= \frac{2(-2)}{5}$
$= \frac{-4}{5}$
$= -0.8$

c $\lim_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) \cdot \lim_{x\to 1} g(x)$
$= -2\times 5$
$= -10$, $-10 \neq 0$

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1}(g(x)+4)}{\lim_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x))}$
$= \frac{\lim_{x\to 1} g(x) + \lim_{x\to 1} 4}{\lim_{x\to 1} f(x)\cdot \lim_{x\to 1} g(x)}$
$= \frac{5+4}{-10}$
$= -\frac{9}{10}$
$= -0.9$

حاول أن تحل

2 بفرض أنّ: $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$
أوجد:

a $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$ b $\lim_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$ c $\lim_{x\to 2}\left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

17

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل»، وتحقق من مدى إدراكهم لمفاهيم هذا الدرس ونظرياته.

اختبار سريع

أوجد النهايات الآتية:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ $\dfrac{1}{5}$

(b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ 6

(c) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-2|x+1|}{x+2}$ -1

(d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\,,\ f(x)=\begin{cases} 2(x+1) & : x<3 \\ 8 & : x=3 \\ x^2-1 & : x>3 \end{cases}$ 8

نظريات حساب النهايات صحيحة عند حساب النهاية من جهة واحدة.

مثال (4)

إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & : x<1 \\ 5 & : x=1 \\ \dfrac{5}{x} & : x>1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

الحل:

النهاية من جهة اليسار $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x+2)=3(1)+2=5$

النهاية من جهة اليمين $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{5}{x}=\dfrac{5}{1}=5$

(يمكن التحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$)

$\because \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=5$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$

حاول أن تحل

4 إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & : x<2 \\ x-1 & : x>2 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

مثال (5)

إذا كانت الدالة g:

$$g(x)=\begin{cases} x^2-2 & : x\leqslant 0 \\ 1-2x & : x>0 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

الحل:

النهاية من جهة اليسار $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-2)=-2$

النهاية من جهة اليمين $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-2x)=1$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة

حاول أن تحل

5 إذا كانت الدالة g:

$$g(x)=\begin{cases} x^3+x & : x>1 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & : x\leqslant 1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

19

نظرية (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوديات النسبيّة

Polynomial and Rational Functions

a إذا كانت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_0$$

b إذا كانت $f(x)\,,g(x)$ كثيرتي حدود، c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(c)}{g(c)}\ ,\quad g(c)\neq 0$$

ملاحظة: يمكن تطبيق نظرية a 5 على الدوال التي على الصورة: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ ومجالها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

مثال (3)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to -1}(x^4-2x^3+5)$ b $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$ c $\lim\limits_{x\to 3}(x^2(2-x))$

الحل:

a نظرية (5)

$$\lim_{x\to -1}(x^4-2x^3+5)=(-1)^4-2(-1)^3+5=1+2+5=8$$

b $g(x)=x+2$ تحقق من أن المقام $\neq 0$

$g(2)=2+2=4\ ,\ 4\neq 0$ أي أن المقام $\neq$ صفر

نظرية (5)

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{(2)^2+2(2)+4}{2+2}=\frac{4+4+4}{4}=\frac{12}{4}=3$$

c نظرية (5)

$$\lim_{x\to 3}(x^2(2-x))=\lim_{x\to 3}(2x^2-x^3)=2(3)^2-(3)^3=18-27=-9$$

حاول أن تحل

3 a هل يمكن حل c في المثال (3) بطريقة أخرى؟

b أوجد:

1 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+3x^2-2x-17)$ 2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$

18

(8) لتكن الدالّة f:

$$f(x)=\begin{cases} 3-x\,, & x<2 \\ 2\,, & x=2 \\ \dfrac{x}{2}\,, & x>2 \end{cases}$$

أوجد: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

(9) لتكن الدالّة f:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{1-x^2}\,, & 0\leq x<1 \\ 1\,, & 1\leq x<2 \\ 2\,, & x=2 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

(10) لتكن الدالّة f:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+4\,, & -1\leq x<1 \\ 2\,, & 1\leq x<2 \\ x\,, & 2\leq x<4 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

في التمارين (11–16)، أوجد:

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4+x)^2-16}{x}$ (12) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-3t+2}{t^2-4}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^3-27}{x}$ (14) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

(15) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$ (16) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{9x}+3}$

في التمارين (17–19)، أوجد النهايات التالية:

(17) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}$

(18) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-7x^2-18}{x-3}$

(19) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3-5x^2-12}{x-2}$

في التمارين (20–22)، أوجد كلًّا مما يلي:

(20) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ (21) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$ (22) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4x}{x^2-4}\right)$

10

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

أوّلًا:

	الفترة المفتوحة	العدد في منتصف الفترة	التمثيل على خط الأعداد	صورة أخرى للفترة المفتوحة	بعد العدد عن طرفي الفترة
1	$(3,\ 5)$	4	$1 \quad 1$ ؛ $3 \quad 4 \quad 5$	$(4-1, 4+1)$	1
2	$\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$	1	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$ ؛ $\frac{1}{2} \quad 1 \quad 1\frac{1}{2}$	$\left(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$
3	$\left(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$	2	$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$ ؛ $1\frac{3}{4} \quad 2 \quad 2\frac{1}{4}$	$\left(2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$
4	$(0,\ 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$ ؛ $0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$	$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$
5	$(2.9,\ 3.1)$	3	$0.1 \quad 0.1$ ؛ $2.9 \quad 3 \quad 3.1$	$(3-0.1, 3+0.1)$	0.1
6	$(6.8,\ 7.2)$	7	$0.2 \quad 0.2$ ؛ $6.8 \quad 7 \quad 7.2$	$(7-0.2, 7+0.2)$	0.2

ثانيًا: $\left(2\frac{4}{5}\ ,\ 3\frac{1}{5}\right)$

ثالثًا: $(c-a\ ,\ c+a)$

«حاول أن تحل»

1. (a) 1 (b) 2
   (c) غير موجودة (d) 1
2. (a) 4 (b) -21 (c) -42
3. (a) $\left(\lim\limits_{x\to3} x^2\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to3}(2-x)\right) = 9\times(2-3) = -9$
   (b) (1) -15 (2) 5
4. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 1$

   $\therefore \lim\limits_{x\to2} f(x) = 1$

تدريب (2)

لتكن $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ حيث $x \neq 1$

a. اكتب $f(x)$ بدون استخدام رمز القيمة المطلقة. (بإعادة تعريف المطلق)

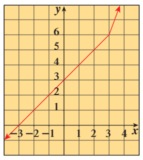
b. أوجد $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

c. هل للدالّة f نهاية عندما $x \to 1$؟ فسّر.

تذكر: $|x-a| = \begin{cases} x-a : x \geqslant a \\ -x+a : x < a \end{cases}$

مثال (6)

لتكن: $f(x) = |x-3| + 2x$ الممثلة بالشكل.



a. اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b. أوجد $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$

c. هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$؟

الحل:

a. $f(x) = \begin{cases} x-3+2x & : x \geqslant 3 \\ -x+3+2x & : x < 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} 3x-3 & : x \geqslant 3 \\ x+3 & : x < 3 \end{cases}$

b. $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+}(3x-3) = 3(3)-3 = 6$

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-}(x+3) = 3+3 = 6$

c. $\because \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} f(x) = 6$

$\therefore \lim\limits_{x\to3} f(x) = 6$

$\therefore$ للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ وهذه النهاية تساوي 6.

الربط بالحياة: يقدّر الباحثون عدد الحيوانات المهددة بالانقراض باستخدام علاقات وضعوها من خلال مراقباتهم. ويستخدمون النهايات لتوقع عدد هذه الحيوانات في الأمد البعيد.

حاول أن تحل

6. لتكن f : $f(x) = x^2 - |x+2|$

a. اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b. أوجد: $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$

c. هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$؟

20

قاعدة القوة

تعلمت مما سبق أن $\lim\limits_{x\to2}(x+1) = 2+1 = 3$

$$\lim_{x\to2}(x+1)^2 = \lim_{x\to2}((x+1)\cdot(x+1)) = \lim_{x\to2}(x+1)\cdot\lim_{x\to2}(x+1) = (3)^2$$

$$\lim_{x\to2}(x+1)^3 = \lim_{x\to2}((x+1)^2(x+1)) = \lim_{x\to2}(x+1)^2\cdot\lim_{x\to2}(x+1) = (3)^2\cdot3 = 3^3$$

وبالمثل يمكن إيجاد قيمة $\lim\limits_{x\to2}(x+1)^n$ حيث n عددًا صحيحًا موجبًا وهي تساوي $(3)^n$.

نظرية (6)

بفرض أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

a. $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)^n$

b. $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن يكون $c > 0$)

c. $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$)

ملاحظة: سنكتفي بدراسة حالات الجذور التربيعية والتكعيبية للدوال فقط.

مثال (7)

أوجد:

a. $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-3x-1)^5$ b. $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[3]{x-3}$ c. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

الحل:

a. $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-3x-1)^5 = \left(\lim\limits_{x\to-1}(x^2-3x-1)\right)^5 = 3^5 = 243$

b. $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to2}(x-3)} = \sqrt[3]{2-3} = \sqrt[3]{-1} = -1$

c. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to3}(x-2) = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$ تحقّق أن نهاية المقام $\neq 0$

$\lim\limits_{x\to3}(3x^2-2) = 25 \quad , \quad 25 > 0$ تحقّق أن نهاية ما تحت الجذر > 0

$\lim\limits_{x\to3}\sqrt{3x^2-2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to3}(3x^2-2)} = \sqrt{25} = 5$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to3}\sqrt{3x^2-2}}{\lim\limits_{x\to3}(x-2)} = \dfrac{5}{1} = 5$

21

5 $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 2$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ غير موجودة

6 (a) $\begin{cases} x^2 + x + 2 & : \quad x < -2 \\ 4 & : \quad x = -2 \\ x^2 - x - 2 & : \quad x > -2 \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 4$

(c) نعم توجد نهاية عندما $x \longrightarrow -2$ تساوي 4.

7 (a) $2\sqrt{5}$ (b) 1296 (c) $\frac{-2}{3}$

8 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{6}{7}$ (c) $\frac{1}{10}$

9 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\sqrt[3]{3}$ (c) -6

10 (a) 11 (b) -67

«تدريب» (1)

1 $\;2$	2 $\;1$	3 غير موجودة
4 $\;3$	5 $\;3$	6 $\;3$
7 $\;1$	8 $\;1$	9 $\;1$
10 $\;0$	11 $\;1$	

«تدريب» (2)

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x > 1 \\ -1 & : \quad x < 1 \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

(c) لا، لأن $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

حاول أن تحل

7 أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-5}$ b $\lim\limits_{x\to 4}(x+\sqrt{x})^4$ c $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

إلغاء العامل الصفري في المقام
Eliminating Zero Factor of the Denominator

إذا كان لدينا دالة نسبية وكانت نهاية مقام هذه الدالة النسبية لا تساوي الصفر عندما $x \to c$ فإننا نطبّق نظرية (4) فرع e لإيجاد نهاية هذه الدالة. أما إذا ساوت نهاية المقام الصفر، فإننا نقوم باختصار العامل الصفري المشترك بين البسط والمقام، إن وجد، ثم نستخدم الصيغة المبسطة لإيجاد النهاية.

ملاحظات:

1 عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط والمقام وحصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى **صيغة غير معينة (Indeterminate Form)**.

2 يمكن استخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة.

مثال (8)

أوجد إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ b $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$ c $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

الحل:

a عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$(x-1)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام.

$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}$

$= \frac{x+2}{x} \quad , \quad x \neq 1$

استخدم الصيغة المبسطة

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x}$

$\because \lim\limits_{x\to 1} x = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$

عوّض عن x بـ 1

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$

تذكر:

مرافق العدد الجذري هو عدد جذري بحيث يكون ناتج ضرب العددين عددًا نسبيًا.

أمثلة:

- $\sqrt{2}+1$ ، $\sqrt{2}-1$ مترافقان
- $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ مترافقان
- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ ، $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ مترافقان
- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ ، $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ مترافقان

تذكر:

إذا كان a صفر للدالة الحدودية $f(x)$ فإن $(x-a)$ عامل من عوامل $f(x)$.

22

---

b عند التعويض المباشر عن x بـ 0 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$\frac{(2+x)^3-8}{x} = \frac{(2+x-2)\left((2+x)^2+2(2+x)+(2)^2\right)}{x}$

x عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$= \frac{\cancel{x}(4+4x+x^2+4+2x+4)}{\cancel{x}}$

$= x^2+6x+12 \quad , \quad x \neq 0$

استخدم الصيغة المبسطة

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x^2+6x+12) = 12$

c عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

اكتب البسط دون استخدام رمز القيمة المطلقة وحلّل المقام إلى عوامل $(x-1)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$\frac{|x-1|}{x^2-1} = \begin{cases} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} & : \quad x > 1 \\ \frac{\cancel{1-x}}{(\cancel{x-1})(x+1)} & : \quad x < 1 \, , \, x \neq -1 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{1}{x+1} & : \quad x > 1 \\ \frac{-1}{(x+1)} & : \quad x < 1 \, , \, x \neq -1 \end{cases}$

لإيجاد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

نتحقق من نهاية المقام $\neq 0$

$\because \lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = 2 \quad , \quad 2 \neq 0$

استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليمين)

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$\because \lim\limits_{x\to 1^-} -(x+1) = -(1+1) = -2 \quad , \quad -2 \neq 0$

استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليسار)

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-1}{(x+1)} = \frac{-1}{(1+1)} = -\frac{1}{2}$

$\because \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2-1} \neq \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$ غير موجودة

حاول أن تحل

8 أوجد إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$ b $\lim\limits_{x\to -7}\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

c $\lim\limits_{x\to 5}\frac{|x+2|-7}{x^2-25}$

تذكر:

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

23

«نشاط»

أوّلًا: (a) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

(b) لا، لأن f غير معرّفة عند $x = 2$.

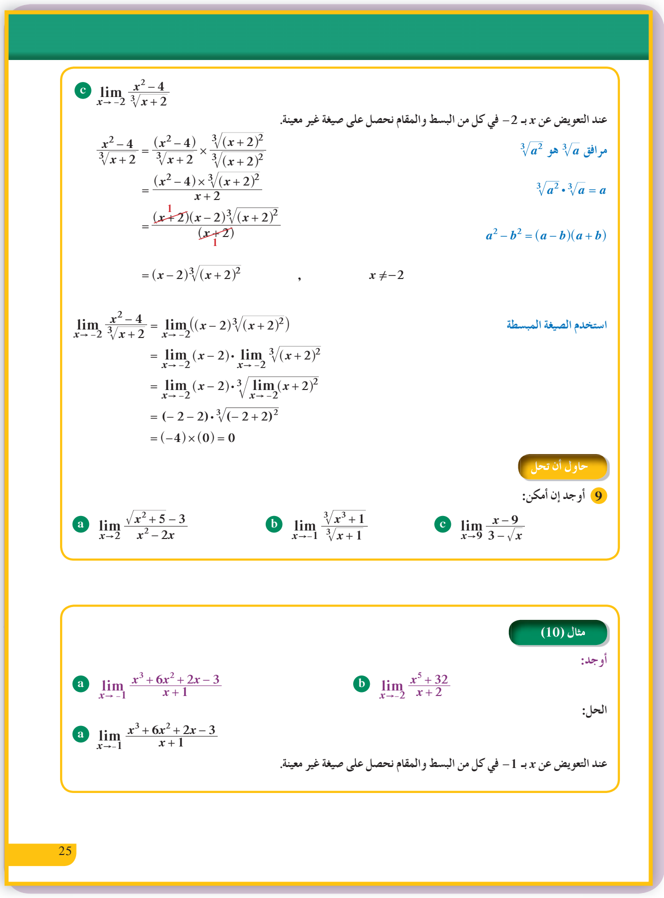
(c)

x	$\cdots$	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\longrightarrow \cdots$
$f(x)$	$\cdots$	3.9	3.99	3.999	3.9999	

x	2	$\longleftarrow \cdots$	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	غير معرّف		4.0001	4.001	4.01	4.1

(d) تقترب قيم x من 2 من الجهتين.

(e) تقترب قيم $f(x)$ من 4



ⓒ $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

عند التعويض عن x بـ -2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$

$$\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{(x^2-4)}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = a$

$$= \frac{(x^2-4) \times \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2}$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{(x+2)}}$$

$$= (x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2} \quad , \quad x \neq -2$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \lim_{x \to -2}\left((x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)$$
$$= \lim_{x \to -2}(x-2) \cdot \lim_{x \to -2}\sqrt[3]{(x+2)^2}$$
$$= \lim_{x \to -2}(x-2) \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \to -2}(x+2)^2}$$
$$= (-2-2) \cdot \sqrt[3]{(-2+2)^2}$$
$$= (-4) \times (0) = 0$$

حاول أن تحل

9 أوجد إن أمكن:

ⓐ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$ ⓑ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$ ⓒ $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

مثال (10)

أوجد:

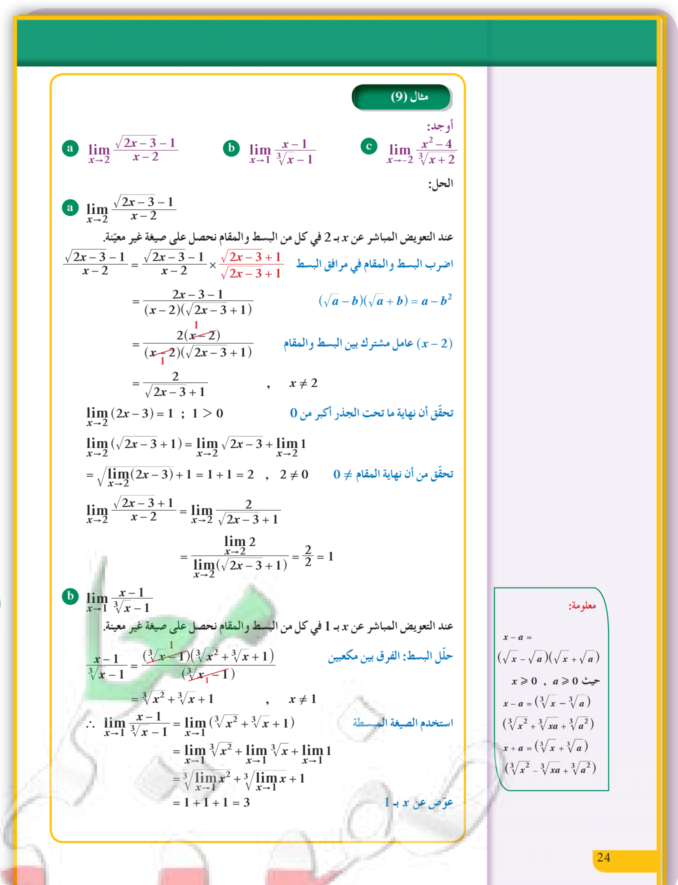
ⓐ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$ ⓑ $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^5+32}{x+2}$

الحل:

ⓐ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

عند التعويض عن x بـ -1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

25



مثال (9)

أوجد:

ⓐ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$ ⓑ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ ⓒ $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

الحل:

ⓐ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

اضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$$\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} = \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} \times \frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b) = a - b^2$

$$= \frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$(x-2)$ عامل مشترك بين البسط والمقام

$$= \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} \quad , \quad x \neq 2$$

تحقّق أن نهاية ما تحت الجذر أكبر من 0

$$\lim_{x \to 2}(2x-3) = 1 \; ; \; 1 > 0$$

$$\lim_{x \to 2}(\sqrt{2x-3}+1) = \lim_{x \to 2}\sqrt{2x-3} + \lim_{x \to 2} 1$$

تحقّق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$$= \sqrt{\lim_{x \to 2}(2x-3)} + 1 = 1 + 1 = 2 \quad , \quad 2 \neq 0$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}+1}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$
$$= \frac{\lim_{x \to 2} 2}{\lim_{x \to 2}(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2}{2} = 1$$

ⓑ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

حلّل البسط: الفرق بين مكعبين

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}}$$

$$= \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 \quad , \quad x \neq 1$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \to 1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$
$$= \lim_{x \to 1}\sqrt[3]{x^2} + \lim_{x \to 1}\sqrt[3]{x} + \lim_{x \to 1} 1$$
$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x^2} + \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x} + 1$$

عوّض عن x بـ 1

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

معلومة:

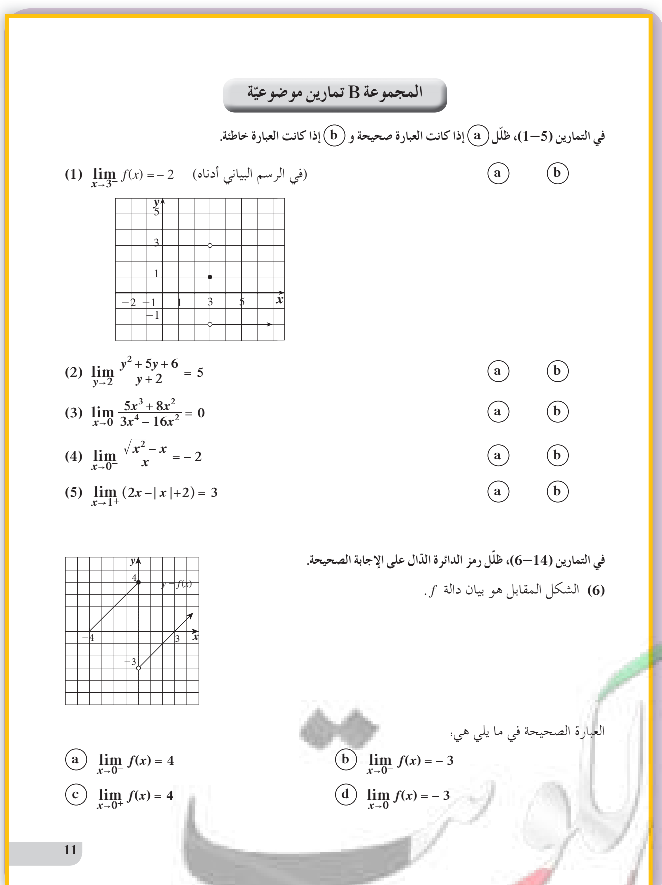
$x - a = (\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$

حيث $a \geqslant 0$, $x \geqslant 0$

$x - a = (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})$

$x + a = (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})$

24



المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه) ⓐ ⓑ

(2) $\lim\limits_{y \to 2} \dfrac{y^2+5y+6}{y+2} = 5$ ⓐ ⓑ

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = 0$ ⓐ ⓑ

(4) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}-x}{x} = -2$ ⓐ ⓑ

(5) $\lim\limits_{x \to 1^+} (2x - |x| + 2) = 3$ ⓐ ⓑ

في التمارين (6–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الشكل المقابل هو بيان دالة f.

العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

ⓐ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 4$ ⓑ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -3$

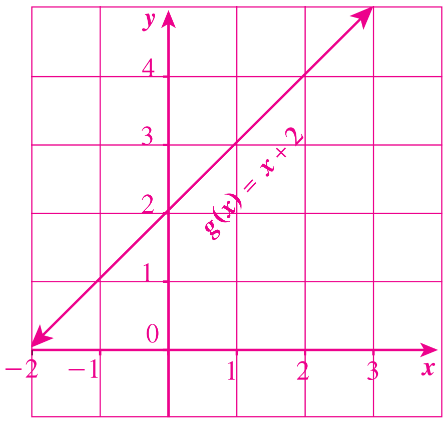
ⓒ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$ ⓓ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$

11

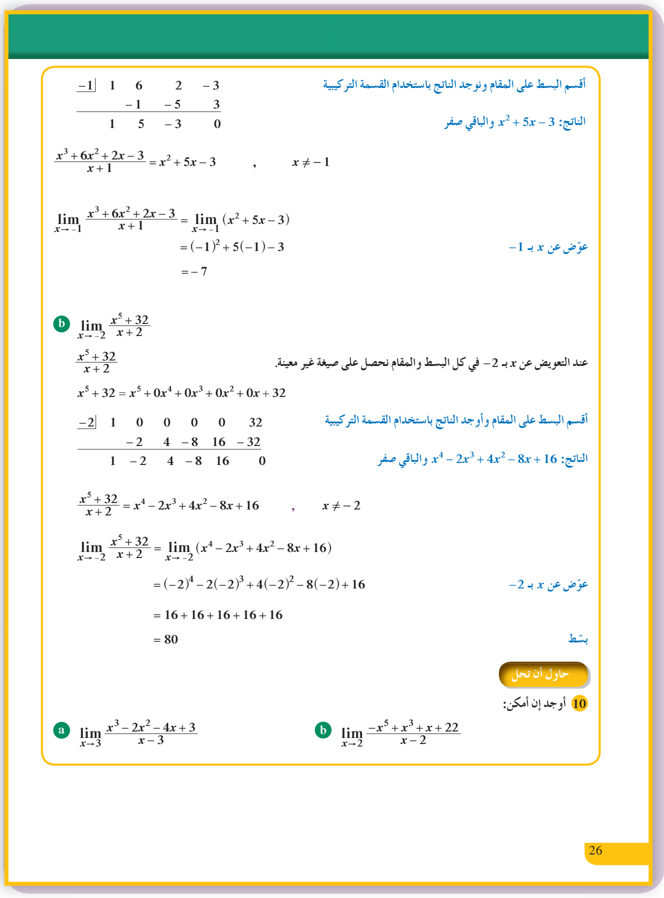
ثانيًا: (a) نعم

$f(x) = x + 2 \quad , \quad x \neq 2$

(b)



ثالثًا: النقطة $(2, 4)$ تنتمي إلى بيان g ولا تنتمي إلى بيان f.



أقسم البسط على المقام ونوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 2 & -3 \\ & & -1 & -5 & 3 \\ \hline & 1 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

الناتج: $x^2 + 5x - 3$ والباقي صفر

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1} = x^2 + 5x - 3 \quad , \quad x \neq -1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x^2 + 5x - 3)$$

عوّض عن x بـ -1

$$= (-1)^2 + 5(-1) - 3$$

$$= -7$$

b $\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$

$\frac{x^5 + 32}{x + 2}$ عند التعويض عن x بـ -2 في كل البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$x^5 + 32 = x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 32$$

أقسم البسط على المقام وأوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 0 \end{array}$$

الناتج: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$ والباقي صفر

$$\frac{x^5 + 32}{x + 2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \quad , \quad x \neq -2$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

عوّض عن x بـ -2

$$= (-2)^4 - 2(-2)^3 + 4(-2)^2 - 8(-2) + 16$$

$$= 16 + 16 + 16 + 16 + 16$$

بسّط

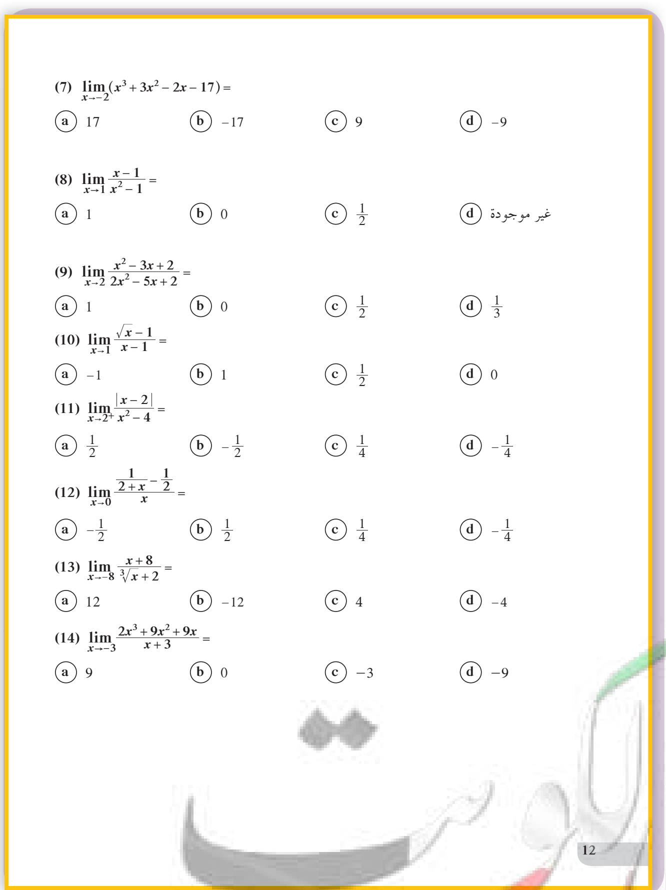
$$= 80$$

حاول أن تحل

10 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ **b** $\lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$

26



(7) $\lim_{x \to -2} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17) =$

(a) 17 (b) -17 (c) 9 (d) -9

(8) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} =$

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) غير موجودة

(9) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2} =$

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

(10) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} =$

(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

(11) $\lim_{x \to 2^+} \frac{|x - 2|}{x^2 - 4} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

(12) $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2 + x} - \frac{1}{2}}{x} =$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

(13) $\lim_{x \to -8} \frac{x + 8}{\sqrt[3]{x} + 2} =$

(a) 12 (b) -12 (c) 4 (d) -4

(14) $\lim_{x \to -3} \frac{2x^3 + 9x^2 + 9x}{x + 3} =$

(a) 9 (b) 0 (c) -3 (d) -9

12

2–1: نهايات تشتمل على ∞–، ∞

❶ الأهداف

- يحسب نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$.
- يحسب نهايات غير محددة $(\pm\infty)$ عندما $x \to c$.
- يوجد الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية.

❷ المفردات والمفاهيم الجديدة

نهاية محددة – خط مقارب أفقي – خط مقارب رأسي.

❸ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

❹ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) لتكن: $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

أوجد:

(a) $f(-2)$

(b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

(c) $f(3)$

(2) بسّط كلًّا من التعبيرات الجبرية التالية:

(a) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

(b) $\dfrac{x - 3}{\sqrt{x - 2} - 1}$

(c) $\dfrac{x^2 - 4|x| + 3}{(x - 1)(x + 3)}$

1–2

نهايات تشتمل على ∞–، ∞

Limits Involving $-\infty$, ∞

سوف تتعلم

- نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$.
- نهايات غير محددة عندما $x \to a$.
- الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية.

المفردات والمصطلحات:

- نهاية محددة Finite Limit
- خط مقارب أفقي Horizontal Asymptote
- خط مقارب رأسي Vertical Asymptote

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدوال التالية: $g(x) = x^2 + 1$ ، $f(x) = \frac{1}{x}$

ⓐ أكمل الجدول التالي:

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x^2 + 1$
-100		
$-3\,000$		
$-60\,000$		
100		
$3\,000$		
$60\,000$		

ⓑ استنتج قيم الدوال الواردة أعلاه عندما تأخذ x قيمًا موجبة كبيرة جدًا وعندما تأخذ x قيمًا سالبة صغيرة جدًا.

أولًا: نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$ Finite Limits as $x \to \pm\infty$

إذا كانت x تأخذ قيمًا كبيرة جدًا أي أن قيم x تكبر بلا حدود (تتحرك مبتعدة كثيرًا جهة اليمين على خط الأعداد) فإننا نقول $x \to \infty$.

وإذا كانت x تأخذ قيمًا صغيرة جدًا أي أن قيم x تصغر بلا حدود (تتحرك مبتعدة كثيرًا جهة اليسار على خط الأعداد) فإننا نقول $x \to -\infty$.

تعريف (3)

لتكن f دالة معرفة في الفترة (a, ∞) فإن:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞.

تعريف (4)

لتكن f دالة معرفة في الفترة $(-\infty, a)$ فإن:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

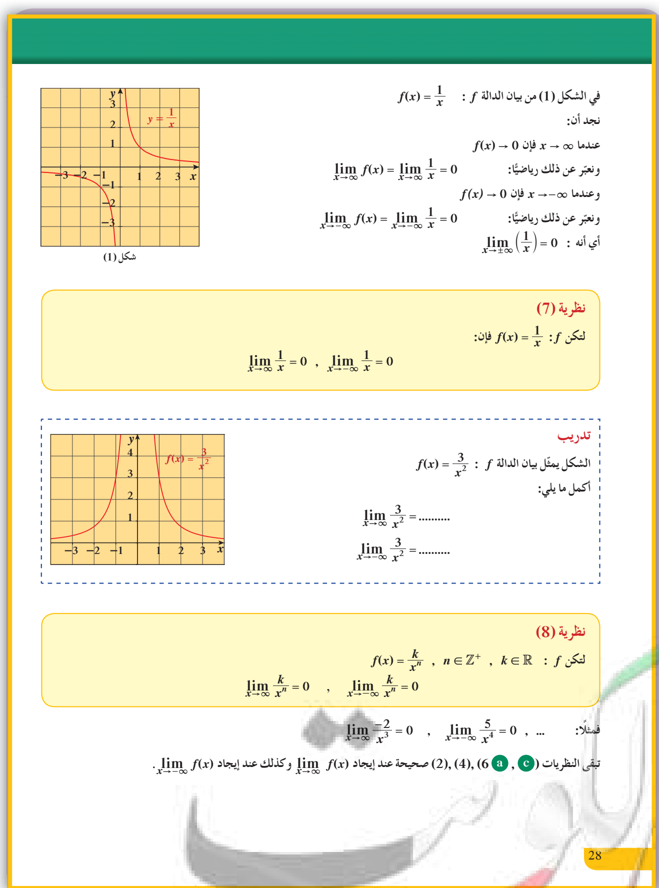
يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.

معلومة:

من الأزل إلى الأبد

- الأزل: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية من الماضي.
- الأبد: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية في المستقبل.

27



في الشكل (1) من بيان الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$

نجد أن:

عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to 0$

ونعبر عن ذلك رياضيًا: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to 0$

ونعبر عن ذلك رياضيًا: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

أي أنه: $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

شكل (1)

نظرية (7)

لتكن f: $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن:

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

تدريب

الشكل يمثل بيان الدالة f : $f(x) = \frac{3}{x^2}$

أكمل ما يلي:

$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^2} = \ldots\ldots\ldots$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2} = \ldots\ldots\ldots$

نظرية (8)

لتكن f : $f(x) = \frac{k}{x^n}$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $k \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$

فمثلًا: $\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{x^3} = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^4} = 0$ ، ...

تبقى النظريات ⓒ، ⓐ، (6)، (4)، (2) صحيحة عند إيجاد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ وكذلك عند إيجاد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

28

5 التدريس

تشكل الدالة $y = \frac{1}{x}$ مثالًا جيّدًا يمكن البدء به لدراسة النهايات عندما $x \to \pm\infty$.

استخدم الحاسوب وجهاز الإسقاط (Data Show) لعرض بيان الدالة $y = \frac{1}{x}$.

استخدم خاصية التكبير +Zoom لتعرض بيان الدالة عندما $x \to \infty$.

ناقش مع الطلاب فكرة الاقتراب من المحور السيني دون التقاطع معه.

أشر إلى الخطأ البصري حيث نرى أن الخط المنحدر يتطابق مع المحور السيني.

اسأل الطلاب كيف تتغير قيمة الكسر $\frac{1}{x}$ عندما تأخذ x قيمًا موجبة أكبر فأكبر وعندما تأخذ x قيمًا سالبة أصغر فأصغر.

بعد ذلك اطرح فكرة الخط المقارب الأفقي وطريقة كتابته.

شدّد على معنى $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ وهو أن قيم $f(x)$ تقترب كثيرًا من الصفر دون أن تساويه. عندما x تأخذ قيمًا كبيرة جدًّا (x تكبر بلا حدود).

في المثال (1)

نستخدم بطريقة مباشرة أو غير مباشرة النظرية (8) عن طريق تحليل العوامل بأخذ x^n حيث n أكبر أس في التعبير الجبري، ومن ثم نبسط، ونوجد النهاية.

مثال (1)

أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+4}$ b $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+5}{x^2+25}$ c $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3}{5-7x^3}$

الحل:

a $\frac{1}{x+4} = \frac{1}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{x}}\right)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x} = 0$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x} = 1+0 = 1$, $1 \neq 0$ تحقّق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)}$

$= 0\times\frac{1}{1+0} = 0$

b $\frac{x+5}{x^2+25} = \frac{\cancel{x}^{1}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x^2}_{x}\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{25}{x^2}}$, $x \neq 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2+25} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{25}{x^2}}\right)\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{25}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{25}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{25}{x^2} = 1+0 = 1$, $1\neq 0$ $0 \neq$ تحقّق أن نهاية المقام ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{25}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2+25} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{25}{x^2}\right)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x} = 1+0 = 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2+25} = 0\times\frac{1}{1} = 0$

c $\frac{6x^3}{5-7x^3} = \frac{6\cancel{x^3}^{1}}{\cancel{x^3}_{1}\left(\frac{5}{x^3}-7\right)} = \frac{6}{\frac{5}{x^3}-7}$, $x\neq 0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3}{5-7x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{\frac{5}{x^3}-7}$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}-7\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3} - \lim\limits_{x\to\infty} 7 = 0-7 = -7$, $-7\neq 0$ $0 \neq$ تحقّق من أن نهاية المقام ، $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3} = 0$

29

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{\frac{5}{x^3}-7} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 6}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}-7\right)}$ نظرية (4)

$= \frac{6}{-7} = -\frac{6}{7}$

حاول أن تحل

1 أوجد النهايات التالية إن أمكن:

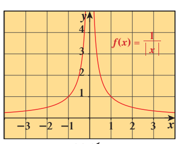
a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}$ b $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x^2+9}$ c $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+1}{x^3+5}$

ثانيًا: نهايات غير محددة $(\pm\infty)$ عندما $x \to c$ — Infinite Limits as $x \to c$

لنعتبر على سبيل المثال الدالتين:

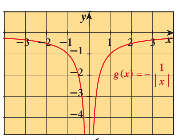
$$f(x) = \frac{1}{|x|} \quad , \quad g(x) = \frac{-1}{|x|}$$

والممثلتين بيانيًّا بالمنحنيين المرسومين



شكل (2)

$f(x) = \frac{1}{|x|}$



شكل (3)

$g(x) = \frac{-1}{|x|}$

نلاحظ من الشكل (2) أن قيم $f(x)$ تزداد بلا حدود كلما اقتربت قيم x من الصفر سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار لذلك فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة لأنها تتزايد بلا حدود.

ونعبّر عن ذلك رياضيًّا بالصيغة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = \infty$$

ويجب أن ندرك أن الرمز ∞ لا يعني قيمة معينة. (لا يمثل عددًا حقيقيًّا).

وإنما يفيد أن الدالة f : $f(x) = \frac{1}{|x|}$ تتزايد بلا حدود عندما $x \to 0$

وبالمثل نرى أن الدالة g : $g(x) = \frac{-1}{|x|}$ الممثلة بيانيًّا بالشكل (3) تتناقص بلا حدود كلما اقتربت قيم x من الصفر سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار أي عندما $x \to 0$ ، أي أن $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة لأنها تتناقص بلا حدود.

ونعبر عن ذلك رياضيًّا بالصيغة:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{|x|} = -\infty$$

30

في المثال (2)

نستخدم نظرية (10) بعد إعادة تعريف القيمة المطلقة لإيجاد النهاية.

في المثال (3)

استخدام التبسيط ونظريات النهايات لإيجاد معادلات الخطوط المقاربة الأفقية والخطوط المقاربة الرأسية.

6 الربط

من الأزل إلى الأبد

- الأزل: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية من الماضي.
- الأبد: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية في المستقبل.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يعتقد بعض الطلاب أنه إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ فإن $y = b$ هو خط مقارب أفقي.

شدّد على أن الخطوط المقاربة تنتج فقط عندما x أو y تقترب من اللا نهاية.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» وتحقق من مدى إدراكهم لمفاهيم هذا الدرس ونظرياته.

اختبار سريع

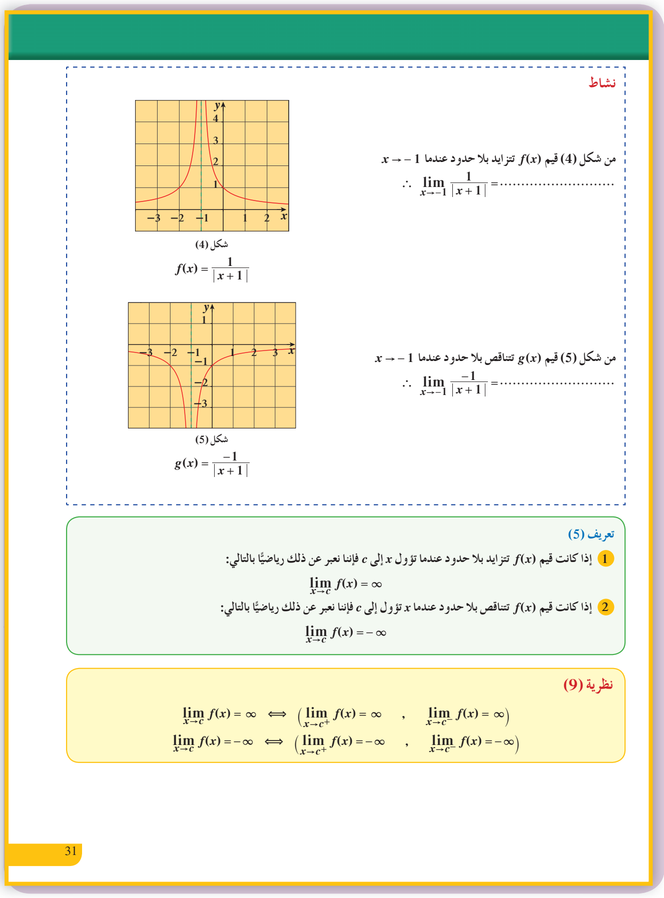
أوجد الخطوط المقاربة الرأسية والخطوط المقاربة الأفقية (إذا وجدت) لمنحنى الدالة f في كلّ مما يلي:

(a) $f(x) = \dfrac{2x}{x+4}$ $\quad x = -4 \;,\; y = 2$

(b) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{2x^2+1}$ $\quad y = \dfrac{3}{2}$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ $\quad x = 0 \;,\; y = 0$

(d) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ $\quad x = 2 \;,\; y = 0$



نشاط

من شكل (4) قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما $x \to -1$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{|x+1|} = \ldots\ldots\ldots$

من شكل (5) قيم $g(x)$ تتناقص بلا حدود عندما $x \to -1$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-1}{|x+1|} = \ldots\ldots\ldots$

شكل (4)

$f(x) = \dfrac{1}{|x+1|}$

شكل (5)

$g(x) = \dfrac{-1}{|x+1|}$

تعريف (5)

1 إذا كانت قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تؤول x إلى c فإننا نعبر عن ذلك رياضيًّا بالتالي:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

2 إذا كانت قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما x تؤول إلى c فإننا نعبر عن ذلك رياضيًّا بالتالي:

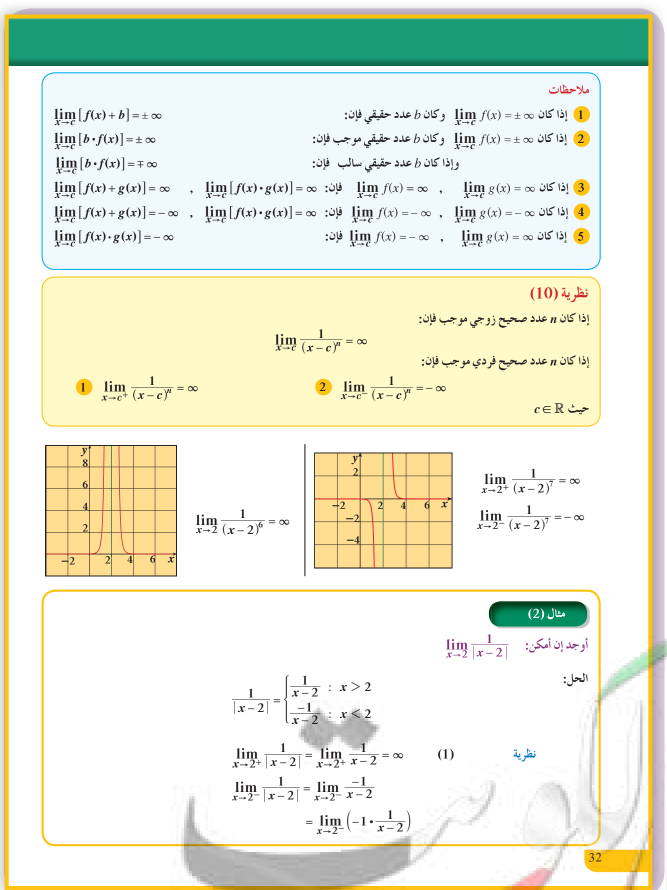
$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

نظرية (9)

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \iff \left(\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty \;,\; \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty\right)$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \iff \left(\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \;,\; \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty\right)$$

31



ملاحظات

1 إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+b] = \pm\infty$

2 إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي موجب فإن: $\lim\limits_{x\to c}[b\cdot f(x)] = \pm\infty$

وإذا كان b عدد حقيقي سالب فإن: $\lim\limits_{x\to c}[b\cdot f(x)] = \mp\infty$

3 إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \infty$, $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \infty$

4 إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \infty$, $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)] = -\infty$

5 إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = -\infty$

نظرية (10)

إذا كان n عدد صحيح زوجي موجب فإن:

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$$

إذا كان n عدد صحيح فردي موجب فإن:

2 $\lim\limits_{x\to c^-} \dfrac{1}{(x-c)^n} = -\infty$ 1 $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{1}{(x-c)^n} = \infty$

حيث $c \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^7} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^7} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^6} = \infty$

مثال (2)

أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{|x-2|}$

الحل:

$$\frac{1}{|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & : x > 2 \\ \dfrac{-1}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty \qquad (1) \qquad$ نظرية

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-1}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \left(-1\cdot\dfrac{1}{x-2}\right)$

32

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

a

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x^2 + 1$
-100	$-\frac{1}{100} = -0.01$	10 001
$-3\,000$	$-\frac{1}{3\,000} = -0.000\overline{3}$	9 000 001
$-60\,000$	$-\frac{1}{60\,000} = -0.0001\overline{6}$	3 600 000 001
100	$\frac{1}{100} = 0.01$	10 001
3 000	$\frac{1}{3\,000} = 0.000\overline{3}$	9 000 001
60 000	$\frac{1}{60\,000} = 0.0001\overline{6}$	3 600 000 001

b $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$

«حاول أن تحل»

1 (a) 0

(b) 0

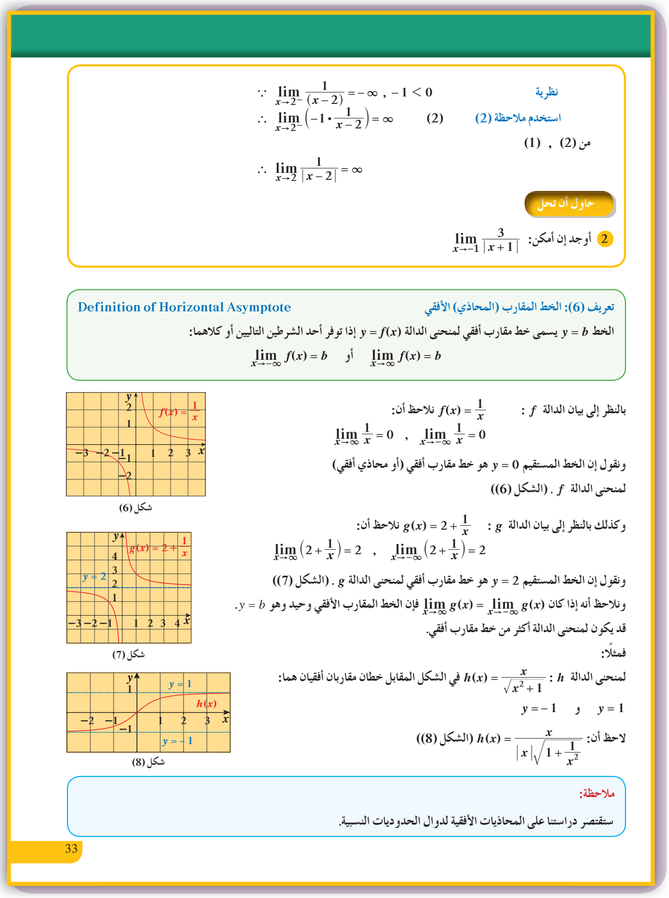
(c) 1

2 ∞

3 (a) $x = -3$, $y = 0$

(b) $x = 0$, $y = 0$

(c) $x = 3$, $y = 2$



نظرية

$\because \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)} = -\infty$, $-1 < 0$

استخدم ملاحظة (2)

$\therefore \lim\limits_{x \to 2^-} \left(-1 \cdot \frac{1}{x-2}\right) = \infty$ (2)

من (2) , (1)

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$

حاول أن تحل

2 أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{3}{|x+1|}$

تعريف (6): الخط المقارب (المحاذي) الأفقي — Definition of Horizontal Asymptote

الخط $y = b$ يسمى خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة $y = f(x)$ إذا توفر أحد الشرطين التاليين أو كلاهما:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

بالنظر إلى بيان الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ نلاحظ أن:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

ونقول إن الخط المستقيم $y = 0$ هو خط مقارب أفقي (أو محاذي أفقي) لمنحنى الدالة f . (الشكل (6))

شكل (6)

وكذلك بالنظر إلى بيان الدالة g : $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$ نلاحظ أن:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$

ونقول إن الخط المستقيم $y = 2$ هو خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة g . (الشكل (7))

ونلاحظ أنه إذا كان $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ فإن الخط المقارب الأفقي وحيد وهو $y = b$.

قد يكون لمنحنى الدالة أكثر من خط مقارب أفقي.

شكل (7)

فمثلاً:

لمنحنى الدالة h : $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ في الشكل المقابل خطان مقاربان أفقيان هما:

$y = 1$ و $y = -1$

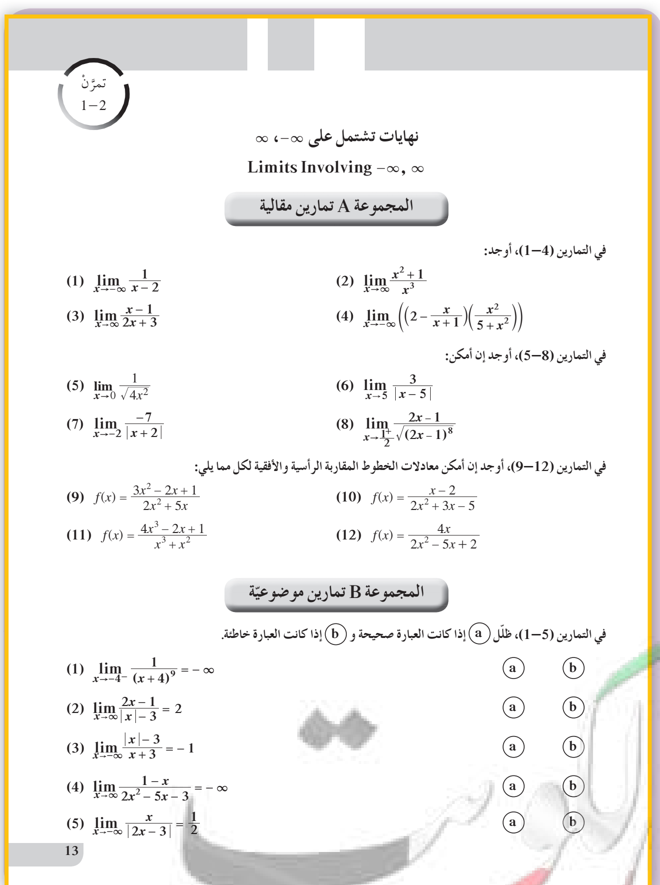
لاحظ أن: $h(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$ (الشكل (8))

شكل (8)

ملاحظة:

ستقتصر دراستنا على المحاذيات الأفقية لدوال الحدوديات النسبية.

33



تمرَّنْ 1–2

نهايات تشتمل على $-\infty$، ∞

Limits Involving $-\infty, \infty$

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، أوجد:

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2}$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-1}{2x+3}$

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\left(2 - \frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{x^2}{5+x^2}\right)\right)$

في التمارين (5–8)، أوجد إن أمكن:

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4x^2}}$

(6) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{3}{|x-5|}$

(7) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{-7}{|x+2|}$

(8) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}}$

في التمارين (9–12)، أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية لكل مما يلي:

(9) $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{2x^2+5x}$

(10) $f(x) = \frac{x-2}{2x^2+3x-5}$

(11) $f(x) = \frac{4x^3-2x+1}{x^3+x^2}$

(12) $f(x) = \frac{4x}{2x^2-5x+2}$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x \to -4^-} \frac{1}{(x+4)^9} = -\infty$ (a) (b)

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$ (a) (b)

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$ (a) (b)

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$ (a) (b)

(5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$ (a) (b)

13

«تدريب»

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}=0$$

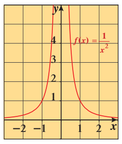
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=0$$

«نشاط»

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{|x+1|}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{-1}{|x+1|}=-\infty$$

مثال (3)



أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والخطوط المقاربة الأفقية لكل مما يلي:

ⓐ $g(x)=\frac{1}{x^2-4}$ ⓑ $h(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$

الحل:

ⓐ $x^2-4=(x-2)(x+2)$

صفرا المقام هما: -2 , 2 وليست أصفارًا للبسط.

∴ المستقيمان $x=-2$, $x=2$ هما المقاربان الرأسيان لمنحنى الدالة g.

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1)-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

∴ المستقيم $y=0$ هو خط مقارب أفقي لمنحنى g.

ⓑ $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$$h(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

نضع $h(x)$ في أبسط صورة $=\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}$

$$=\frac{1}{x-2}\quad,\quad x\neq 1$$

2 صفرًا للمقام وليس من أصفار البسط

∴ المستقيم $x=2$ خط مقارب رأسي لمنحنى h

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=\frac{0}{1-0}=0$$

∴ المستقيم $y=0$ هو خط مقارب أفقي المنحنى h

حاول أن تحل

3 أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية و الخطوط المقاربة الأفقية لمنحنيات الدوال التالية:

ⓐ $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$ ⓑ $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ⓒ $f(x)=\frac{2x}{x-3}$

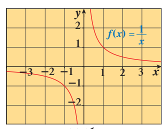
35

تعريف (7): الخط المقارب (المحاذي) الرأسي Definition of Vertical Asymptote

الخط $x=a$ يسمى خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة $y=f(x)$ إذا توفر على الأقل أحد الشروط التالية:

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\infty\ ,\ \lim_{x\to a^+}f(x)=\infty\ ,\ \lim_{x\to a}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to a}f(x)=-\infty$$

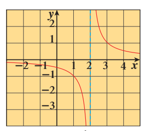


شكل (9)

بالنظر إلى بيان الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\ ,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

ونقول إن الخط المستقيم $x=0$ هو خط مقارب (محاذي) رأسي لمنحنى الدالة f . (الشكل (9))


شكل (10)

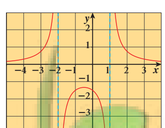
$f(x)=\frac{1}{x-2}$

بالنظر إلى بيان الدالة f: $f(x)=\frac{1}{x-2}$ نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}\right)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}\right)=+\infty$$

ونقول إن الخط المستقيم $x=2$ هو خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة f . (الشكل (10))

نلاحظ أن $x=2$ هو صفر المقام.


شكل (11)

$f(x)=\frac{3}{(x+2)(x-1)}$

بالنظر إلى بيان الدالة f : $f(x)=\frac{3}{(x+2)(x-1)}$

نلاحظ أن: $x=1$, $x=-2$ هما مقاربان (محاذيان) رأسيان لمنحنى الدالة f . (الشكل (11))

ونلاحظ أيضًا أن 1 , -2 هما صفرا للمقام.

ملاحظة:

إذا كانت الدالة $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ حيث h , g كثيرتي حدود وليس بينهما عوامل مشتركة، فإن لكل صفر c لدالة المقام h يكون المستقيم $x=c$ خطًّا مقاربًا رأسيًّا (أو محاذيًا رأسيًّا).

أما في حالة وجود عوامل مشتركة بين h , g فيكون المحاذي الرأسي عند صفر (أصفار) المقام بعد التبسيط.

34

في التمارين (13 — 6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|x|}{|x|+1}=$

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ ∞ ⓓ $\frac{1}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+3}=$

ⓐ ∞ ⓑ $-\infty$ ⓒ 1 ⓓ 0

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=$

ⓐ 0 ⓑ 5 ⓒ 1 ⓓ $-\infty$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-|x+3|}{2x}=$

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ ∞ ⓓ $-\infty$

(10) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{3}{x-2}\right)^5=$

ⓐ 0 ⓑ 2 ⓒ ∞ ⓓ $-\infty$

(11) $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{2}{(x-4)^3}=$

ⓐ ∞ ⓑ 2 ⓒ $-\infty$ ⓓ 0

(12) المقارب الأفقي والمقارب الرأسي لمنحنى الدالة f: $f(x)=\frac{2x-3}{2x+1}$ هما:

ⓐ $y=2$, $x=\frac{1}{2}$ ⓑ $y=2$, $x=-\frac{1}{2}$

ⓒ $y=1$, $x=-\frac{1}{2}$ ⓓ $y=1$, $x=\frac{1}{2}$

(13) المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية لمنحنى الدالة f: $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-9}$ هي:

ⓐ $y=3$, $x=3$, $x=-3$ ⓑ $y=3$, $x=9$, $x=-9$

ⓒ $y=-3$, $x=3$, $x=-3$ ⓓ $y=0$, $x=3$, $x=-3$

14

3–1: صيغ غير معينة

1 الأهداف

- يتعرف على صيغ غير معينة:

$$\frac{\infty}{\infty} \ ، \ \frac{-\infty}{\infty} \ ، \ \frac{\infty}{-\infty} \ ، \ \frac{-\infty}{-\infty} \ ، \ \infty - \infty$$

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

صيغة غير معينة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

أوجد نهاية كل من الدوال التالية عندما $x \to \infty$:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 4x - 5}$

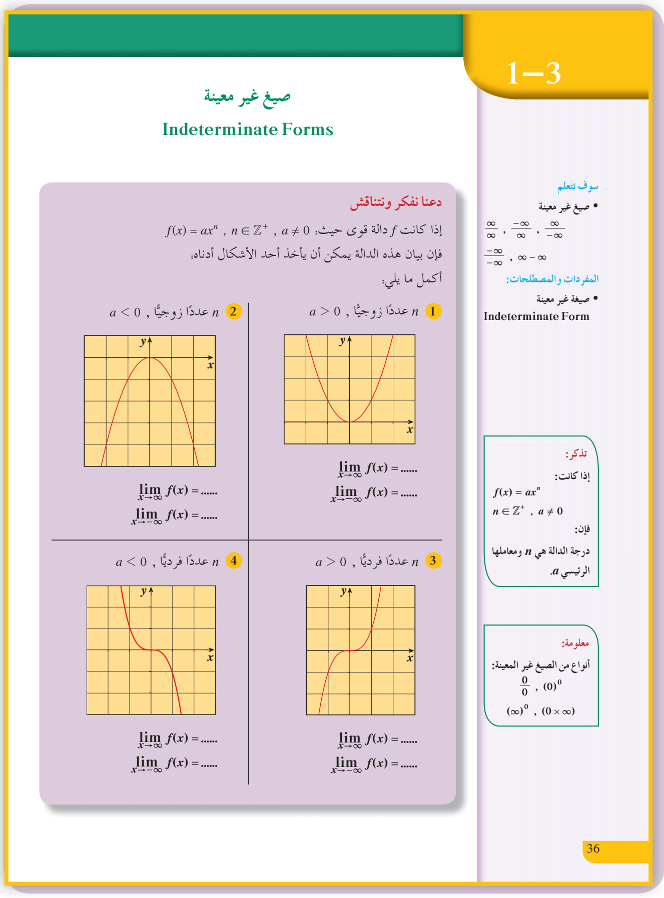
(b) $l(x) = \dfrac{-x^2 + 5}{x^3 - 4}$

5 التدريس

يمكن أن نبدأ الدرس بفقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاستنتاج الحالات المختلفة التي تأخذها الدوال عندما يؤول المتغير x إلى ∞ أو $-\infty$.

ويجب التشديد على إشارة المعامل a وماهية الأس n إذا كان زوجي أو فردي وذلك عندما يؤول المتغير x إلى $-\infty$.

وهنا يجب أن ننبه الطالب إلى إمكانية التخلص من الصيغ غير المعينة وذلك باستخدام عدة طرق مختلفة منها نظرية (11) أو إخراج العامل المشترك في حالة الجذور التربيعية لكثيرات الحدود.


1–3

صيغ غير معينة

Indeterminate Forms

سوف تتعلم

- صيغ غير معينة

$\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{-\infty}{\infty}$ ، $\frac{\infty}{-\infty}$

$\frac{-\infty}{-\infty}$ ، $\infty - \infty$

المفردات والمصطلحات:

- صيغة غير معينة

Indeterminate Form

دعنا نفكر ونتناقش

إذا كانت f دالة قوى حيث: $f(x) = ax^n \ , \ n \in \mathbb{Z}^+ \ , \ a \neq 0$

فإن بيان هذه الدالة يمكن أن يأخذ أحد الأشكال أدناه:

أكمل ما يلي:

1 n عددًا زوجيًا ، $a > 0$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ...$

2 n عددًا زوجيًا ، $a < 0$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ...$

3 n عددًا فرديًا ، $a > 0$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ...$

4 n عددًا فرديًا ، $a < 0$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ...$

تذكر:

إذا كانت:

$f(x) = ax^n$

$n \in \mathbb{Z}^+ \ , \ a \neq 0$

فإن:

درجة الدالة هي n ومعاملها الرئيسي a.

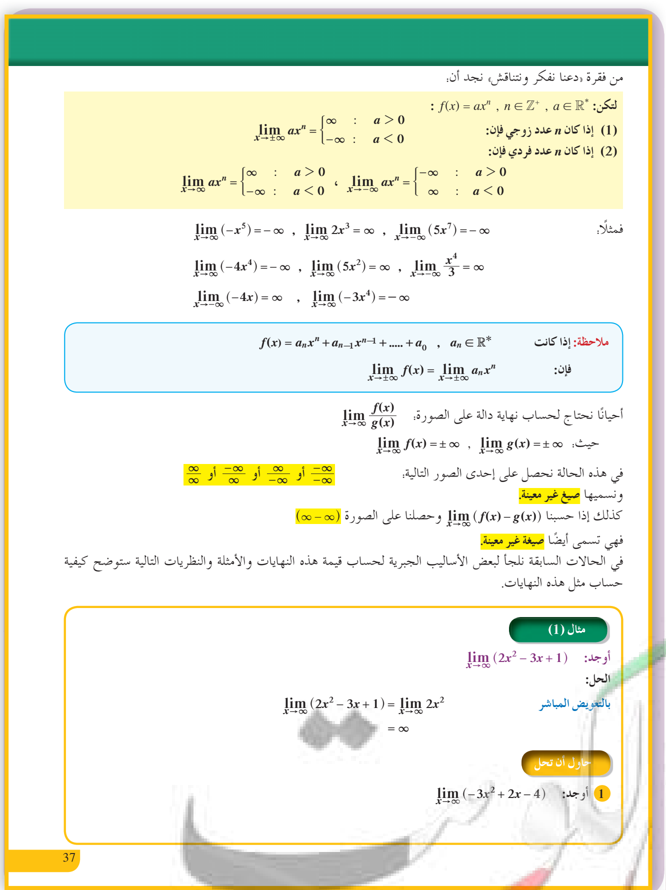
معلومة:

أنواع من الصيغ غير المعينة:

$\frac{0}{0}$ ، $(0)^0$

$(\infty)^0$ ، $(0 \times \infty)$

36


من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن:

لتكن: $f(x) = ax^n \ , \ n \in \mathbb{Z}^+ \ , \ a \in \mathbb{R}^*$:

(1) إذا كان n عدد زوجي فإن:

$$\lim_{x \to \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \ a > 0 \\ -\infty & : \ a < 0 \end{cases}$$

(2) إذا كان n عدد فردي فإن:

$$\lim_{x \to \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \ a > 0 \\ -\infty & : \ a < 0 \end{cases} \ ، \ \lim_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : \ a > 0 \\ \infty & : \ a < 0 \end{cases}$$

فمثلًا:

$$\lim_{x \to \infty} (-x^5) = -\infty \ , \ \lim_{x \to \infty} 2x^3 = \infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} (5x^7) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (-4x^4) = -\infty \ , \ \lim_{x \to \infty} (5x^2) = \infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{3} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-4x) = \infty \ , \ \lim_{x \to \infty} (-3x^4) = -\infty$$

ملاحظة: إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \ , \ a_n \in \mathbb{R}^*$

فإن: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

أحيانًا نحتاج لحساب نهاية دالة على الصورة: $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

حيث: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty \ , \ \lim_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$

في هذه الحالة نحصل على إحدى الصور التالية: $\frac{-\infty}{-\infty}$ أو $\frac{\infty}{-\infty}$ أو $\frac{-\infty}{\infty}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

ونسميها **صيغ غير معينة**.

كذلك إذا حسبنا $\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$ وحصلنا على الصورة $(\infty - \infty)$

فهي تسمى أيضًا **صيغة غير معينة**.

في الحالات السابقة نلجأ لبعض الأساليب الجبرية لحساب قيمة هذه النهايات والأمثلة والنظريات التالية ستوضح كيفية حساب مثل هذه النهايات.

مثال (1)

أوجد: $\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 3x + 1)$

الحل:

بالتعويض المباشر $\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \to \infty} 2x^2$

$= \infty$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\lim_{x \to \infty} (-3x^2 + 2x - 4)$

37

في المثال (1)

يتم إيجاد النهاية باستخدام الملاحظة السابقة للمثال.

في المثال (2)

يتم تطبيق نظرية (11) مباشرة لإيجاد النهاية.

في المثال (3)

يتم توظيف نظرية (11) لايجاد قيمة الثابتين a, b.

في المثال (4)

استخدام إخراج العامل المشترك للتخلص من الصيغ غير المعينة وإعادة تعريف المطلق ومراعاة شروط نهاية الجذر التربيعي.

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في التحليل فيكتبون x مع الأس الأصغر كعامل مشترك. شدّد على أن تكون دائمًا x مع الأس الأكبر هي العامل المشترك وذلك لاحتساب النهاية.

كما قد يخطئ الطلاب في إعادة تعريف $|x|$ عندما $x \to -\infty$ ويجب التأكيد على أن نظرية (11) تطبق للدالة الحدودية النسبية فقط.

8 التقييم

تابع الطلاب في عملهم مع تمارين فقرة «حاول أن تحل» لتقف على حسن فهمهم في التخلص من الصيغ غير المعينة.

اختبار سريع

1 (a) أوجد: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-5x+1}{4x^2+x-3}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-5x+1}{4x^2+x-3} = \frac{3}{4}$$

(b) أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{5x^2-4x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{5x^2-4x} = 0$$

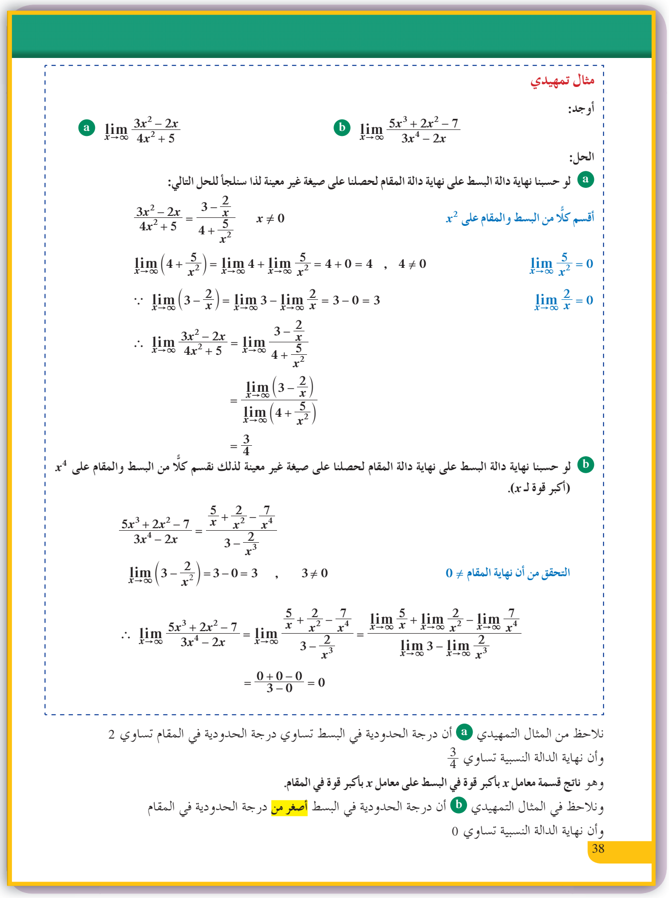
2 إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx-4}{3x-2} = 2$

فأوجد قيم: $a\ ,\ b$

درجة الحدودية في البسط يجب أن تساوي

درجة الحدودية في المقام لذا $a = 0$ ثم $\frac{b}{3} = 2$

ومنه $b = 6$



مثال تمهيدي

أوجد:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x}{4x^2+5}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x}$

الحل:

(a) لو حسبنا نهاية دالة البسط على نهاية دالة المقام لحصلنا على صيغة غير معينة لذا سنلجأ للحل التالي:

أقسم كلًّا من البسط والمقام على x^2

$$\frac{3x^2-2x}{4x^2+5} = \frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{5}{x^2}} \qquad x \neq 0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} = 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 4 + \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} = 4+0=4 \quad , \quad 4 \neq 0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 3-0=3$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x}{4x^2+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{5}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{3}{4}$$

(b) لو حسبنا نهاية دالة البسط على نهاية دالة المقام لحصلنا على صيغة غير معينة لذلك نقسم كلًّا من البسط والمقام على x^4 (أكبر قوة لـ x).

$$\frac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x} = \frac{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{3-\frac{2}{x^3}}$$

التحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x^2}\right) = 3-0=3 \quad , \quad 3 \neq 0$$

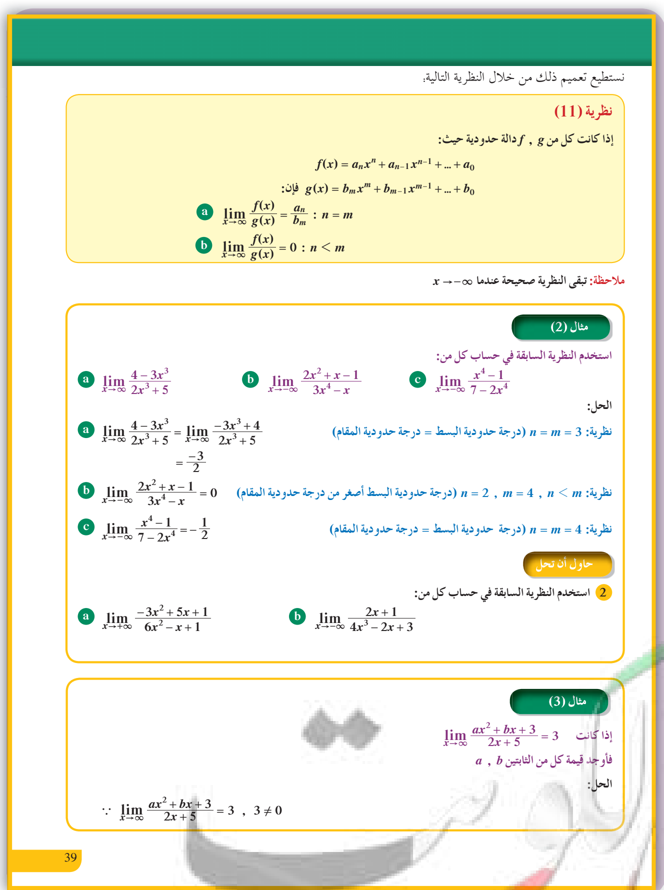
$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{3-\frac{2}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}} = \frac{0+0-0}{3-0} = 0$$

نلاحظ من المثال التمهيدي (a) أن درجة الحدودية في البسط تساوي درجة الحدودية في المقام تساوي 2 وأن نهاية الدالة النسبية تساوي $\frac{3}{4}$

وهو ناتج قسمة معامل x بأكبر قوة في البسط على معامل x بأكبر قوة في المقام.

ونلاحظ في المثال التمهيدي (b) أن درجة الحدودية في البسط أصغر من درجة الحدودية في المقام وأن نهاية الدالة النسبية تساوي 0

38



نستطيع تعميم ذلك من خلال النظرية التالية:

نظرية (11)

إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$$ فإن:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_n}{b_m} : n = m$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 : n < m$

ملاحظة: تبقى النظرية صحيحة عندما $x \to -\infty$

مثال (2)

استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x^3}{2x^3+5}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^4-x}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-1}{7-2x^4}$

الحل:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x^3}{2x^3+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+4}{2x^3+5} = \dfrac{-3}{2}$ نظرية: $n = m = 3$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^4-x} = 0$ نظرية: $n = 2\ ,\ m = 4\ ,\ n < m$ (درجة حدودية البسط أصغر من درجة حدودية المقام)

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-1}{7-2x^4} = -\dfrac{1}{2}$ نظرية: $n = m = 4$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

حاول أن تحل

2 استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{4x^3-2x+3}$

مثال (3)

إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$

فأوجد قيمة كل من الثابتين $a\ ,\ b$

الحل:

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3 \ ,\ 3 \neq 0$$

39

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

2 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

3 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x}$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - x}}{x + 1}$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 9}}$

41

∴ درجة الحدودية في البسط يجب أن تكون مساوية لدرجة الحدودية في المقام أي أن الحدودية في البسط يجب أن تكون من الدرجة الأولى.

$$ax^2 = 0 \implies a = 0$$

ومنه

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{bx + 3}{2x + 5}$$

$$= \frac{b}{2}$$

نظرية 1 $m = n = 1$

$$\because \frac{b}{2} = 3 \implies b = 6$$

حاول أن تحل

3 أوجد قيمة كل من الثابتين b , a إذا كانت $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - 2}{ax^2 + bx - 3} = -1$

مثال (4)

أوجد: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x - 4}}$

الحل:

$$f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x - 4}} = \frac{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

عندما $x > 0$ يكون: $|x| = x$

$$= \frac{\cancel{x}^{1}\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}^{1}\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

بشرط $x \neq 0$

$$= \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

$$\because \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2}$$

$$= 1 + 0 - 0 = 1 \quad , \quad 1 > 0$$

40

تمرَّنْ 1-3

صيغ غير معينة
Indeterminate Forms

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–10)، أوجد كلًّا مما يلي:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty}(3x^2 - 5x + 4)$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty}(-4x^2 + x - 1)$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty}(2x^3 - 3x + 7)$

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty}(-4x^3 + 2x + 5)$

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 3x - 1}$

(6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 + 7x - 1}{-5x^3 + x + 2}$

(7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{2x^3 + x - 1}$

(8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^2 - 2x + 3}$

(9) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}$

(10) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 3}{\sqrt{4x^2 + 5x + 6}}$

(11) إذا كانت: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^3 + bx^2 + 4}{3x^2 - 2x + 1} = -1$ فأوجد قيم b , a.

(12) إذا كانت: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 2x - 5}{ax^3 + bx^2 + 3} = -1$ فأوجد قيم b , a.

(13) إذا كانت: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x - 5}{\sqrt{ax^2 + 7x - 2}} = 2$ فأوجد قيمة a.

15

«حاول أن تحل»

1 $-\infty$

2 **(a)** $\frac{-1}{2}$ **(b)** 0

3 $a = 0 \;;\; b = -1$

4 **(a)** $\sqrt{2}$ **(b)** -3

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+7x-8)=\infty$ (a) (b)

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3-2x+1)=-\infty$ (a) (b)

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)=-\infty$ (a) (b)

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x+4}{3x^2-5x+1}=0$ (a) (b)

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^3+7x^2-1}{2x^3-4}=2$ (a) (b)

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}}=\frac{3}{2}$ (a) (b)

في التمارين (7–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2}=$

(a) ∞ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $-\infty$

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}=$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 3 (d) -3

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}}=$

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $-\frac{5}{9}$

(10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}$

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(11) إذا كان: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{mx^2+nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}}=-2$ فإن قيم m , n هي:

(a) $m=0\ ,\ n=-2$ (b) $m=0\ ,\ n=2$ (c) $m=1\ ,\ n=-1$ (d) $m=1\ ,\ n=1$

(12) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{mx^2+nx-4}=1$ فإن قيم m , n هي:

(a) $m=0\ ,\ n=-2$ (b) $m=0\ ,\ n=2$ (c) $m=0\ ,\ n=4$ (d) $m=0\ ,\ n=-4$

16

1–4: نهايات بعض الدوال المثلثية

1 الأهداف

- يحسب النهايات لبعض الدوال المثلثية.
- يستخدم نظرية الإحاطة لإيجاد النهاية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

نهاية دالة مثلثية – نظرية الإحاطة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

أوجد ما يلي باستخدام التمثيل البياني لكل دالة:

$$\lim_{x\to 0}\sin x \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\cos x$$

5 التدريس

يتبيّن لنا من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ حيث x بالراديان. وتعتبر هذه النهاية أساسية في نهايات الدوال المثلثية إذ تمكننا من إيجاد النهايات:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

ذكّر الطلاب بأنهم يعوضون عن sinx بـ x في مادة الفيزياء عندما تأخذ x قيمًا قريبة جدًّا من الصفر (بالراديان).

أشر إلى أن النهاية لا تتغير إذا استبدلنا x بـ $\frac{x}{2}$ أو $3x$ ...

ونرمز لذلك بـ : $\lim\limits_{*\to 0}\frac{\sin *}{*}=1$

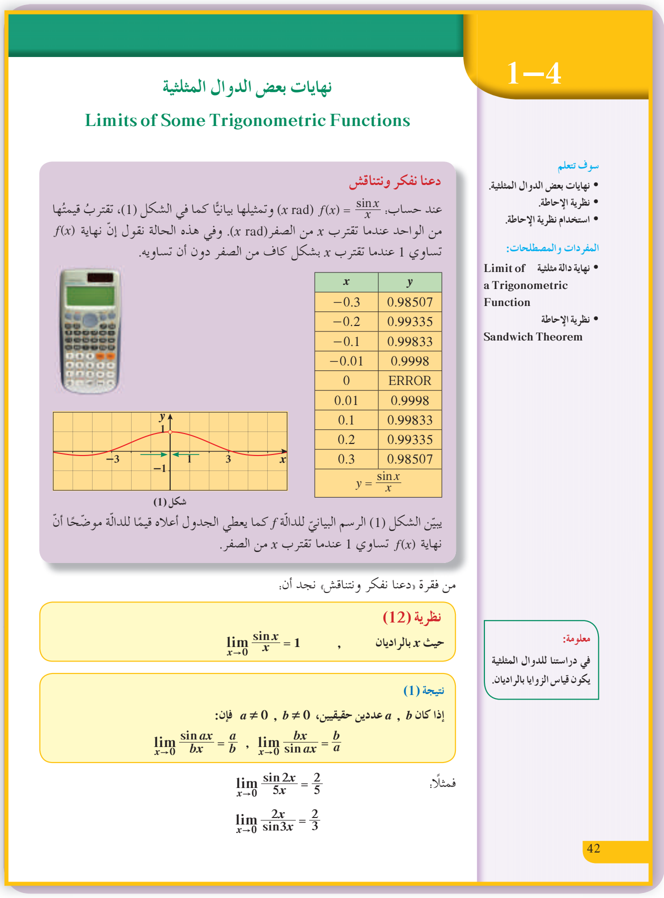
شدّد على أهمية نظرية الإحاطة في الحالات حيث لا نستطيع إيجاد النهاية مباشرة فنحاول إحاطة f بدالتين يسهل إيجاد نهايتيهما عندما تقترب x من c ونستنتج من ذلك نهاية f عندما تقترب x من c.

في الأمثلة (1), (2), (3)

نستخدم نتيجة $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ لإيجاد نهايات بعض الدوال التي يمكن أن تظهر فيها: $\frac{\sin x}{x}$ أو $\frac{\sin ax}{ax}$

نستخدم أيضًا خواص النهايات والتحليل أو الضرب للوصول إلى الصورة $\frac{\sin x}{x}$ وبالمثل

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1 \;,\; \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$



1–4

نهايات بعض الدوال المثلثية

Limits of Some Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- نهايات بعض الدوال المثلثية.
- نظرية الإحاطة.
- استخدام نظرية الإحاطة.

المفردات والمصطلحات:

- نهاية دالة مثلثية Limit of a Trigonometric Function
- نظرية الإحاطة Sandwich Theorem

دعنا نفكر ونتناقش

عند حساب: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $(x \text{ rad})$ وتمثيلها بيانيًّا كما في الشكل (1)، تقتربُ قيمتُها من الواحد عندما تقترب x من الصفر $(x \text{ rad})$. وفي هذه الحالة نقول إنّ نهاية $f(x)$ تساوي 1 عندما تقترب x بشكل كاف من الصفر دون أن تساويه.

x	y
−0.3	0.98507
−0.2	0.99335
−0.1	0.99833
−0.01	0.9998
0	ERROR
0.01	0.9998
0.1	0.99833
0.2	0.99335
0.3	0.98507
$y=\frac{\sin x}{x}$	

شكل (1)

يبيّن الشكل (1) الرسم البيانيّ للدالّة f كما يعطي الجدول أعلاه قيمًا للدالّة موضّحًا أنّ نهاية $f(x)$ تساوي 1 عندما تقترب x من الصفر.

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن:

نظرية (12)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ، حيث x بالراديان

نتيجة (1)

إذا كان b , a عددين حقيقيين، $b\neq 0$, $a\neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b} \;,\; \lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$$

فمثلًا:

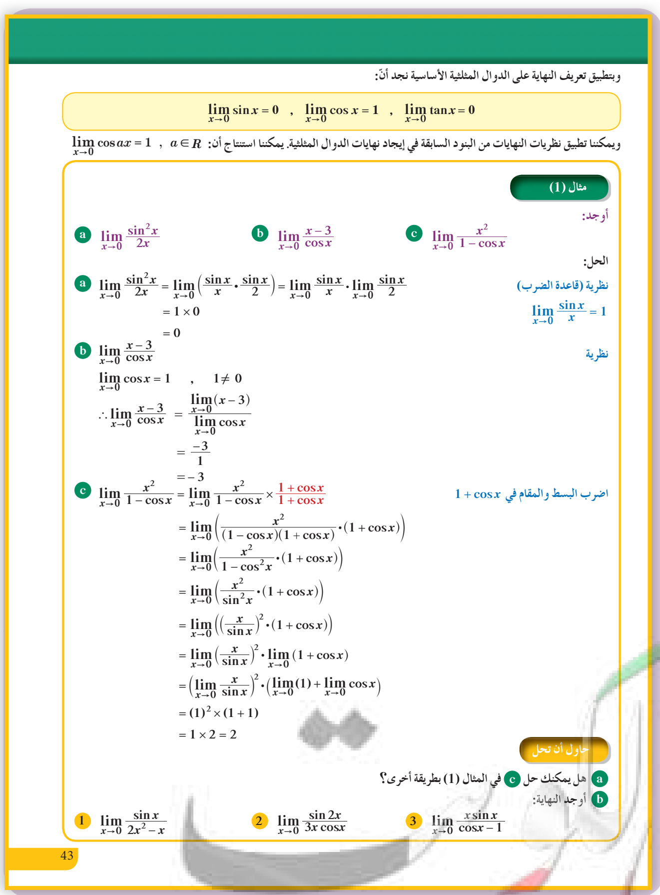
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$$

معلومة:

في دراستنا للدوال المثلثية يكون قياس الزوايا بالراديان.

42



وبتطبيق تعريف النهاية على الدوال المثلثية الأساسية نجد أنّ:

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0 \;,\; \lim_{x\to 0}\cos x=1 \;,\; \lim_{x\to 0}\tan x=0$$

ويمكننا تطبيق نظريات النهايات من البنود السابقة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية. يمكننا استنتاج أن: $\lim\limits_{x\to 0}\cos ax=1$, $a\in R$

مثال (1)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}$ b $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x}$ c $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$

الحل:

a نظرية (قاعدة الضرب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}$$
$$=1\times 0$$
$$=0$$

b نظرية

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $1\neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{-3}{1}=-3$$

c اضرب البسط والمقام في $1+\cos x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\cdot(1+\cos x)\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos^2 x}\cdot(1+\cos x)\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot(1+\cos x)\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$
$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to 0}(1)+\lim_{x\to 0}\cos x\right)$$
$$=(1)^2\times(1+1)$$
$$=1\times 2=2$$

حاول أن تحل

a هل يمكنك حل c في المثال (1) بطريقة أخرى؟

b أوجد النهاية:

1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}$ 2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x\cos x}$ 3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$

43

في المثالين $(4), (5)$

نستخدم نظرية الإحاطة لإيجاد نهاية بعض الدوال المثلثية عند $x \to 0$ أو $x \to \pm\infty$.

6 الربط

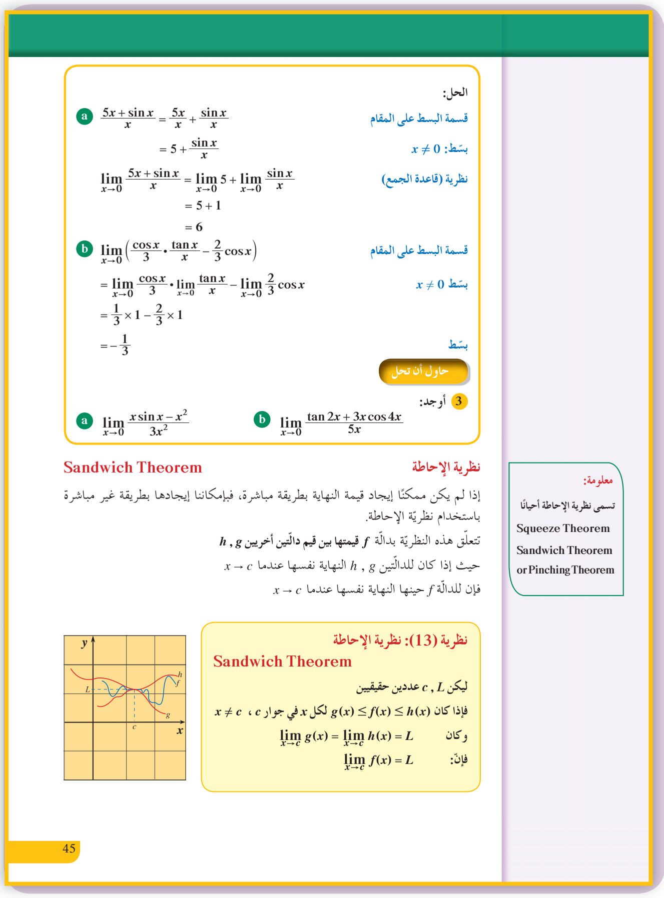
لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

يمكن ارتكاب الأخطاء في عدم معرفة تحويل بعض الدوال إلى $\frac{\sin ax}{ax}$ وذلك بعدم الضرب والقسمة بمعامل يسهل تلك العملية. وكذلك تطبيق نظرية الإحاطة بشكل خاطئ، مثال على ذلك كإحاطة $\tan x$ بـ $-1 \le \tan x \le 1$

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من مدى إدراكهم لمفاهيم هذا الدرس ونظرياته.



الحل:

قسمة البسط على المقام — ⓐ $\frac{5x+\sin x}{x} = \frac{5x}{x} + \frac{\sin x}{x}$

بسّط: $x \neq 0$ — $= 5 + \frac{\sin x}{x}$

نظرية (قاعدة الجمع) — $\lim_{x\to 0} \frac{5x+\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} 5 + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$= 5 + 1$

$= 6$

قسمة البسط على المقام — ⓑ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{3} \cdot \frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3}\cos x\right)$

بسّط $x \neq 0$ — $= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}\cos x$

$= \frac{1}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 1$

بسّط — $= -\frac{1}{3}$

حاول أن تحل

3 أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - x^2}{3x^2}$ ⓑ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}$

نظرية الإحاطة **Sandwich Theorem**

إذا لم يكن ممكنًا إيجاد قيمة النهاية بطريقة مباشرة، فبإمكاننا إيجادها بطريقة غير مباشرة باستخدام نظريّة الإحاطة.

تتعلّق هذه النظريّة بدالّة f قيمتها بين قيم دالّتين أخريين h, g

حيث إذا كان للدالّتين h, g النهاية نفسها عندما $x \to c$

فإن للدالّة f حينها النهاية نفسها عندما $x \to c$

معلومة:

تسمى نظرية الإحاطة أحيانًا

Squeeze Theorem

Sandwich Theorem

or Pinching Theorem

نظرية (13): نظرية الإحاطة

Sandwich Theorem

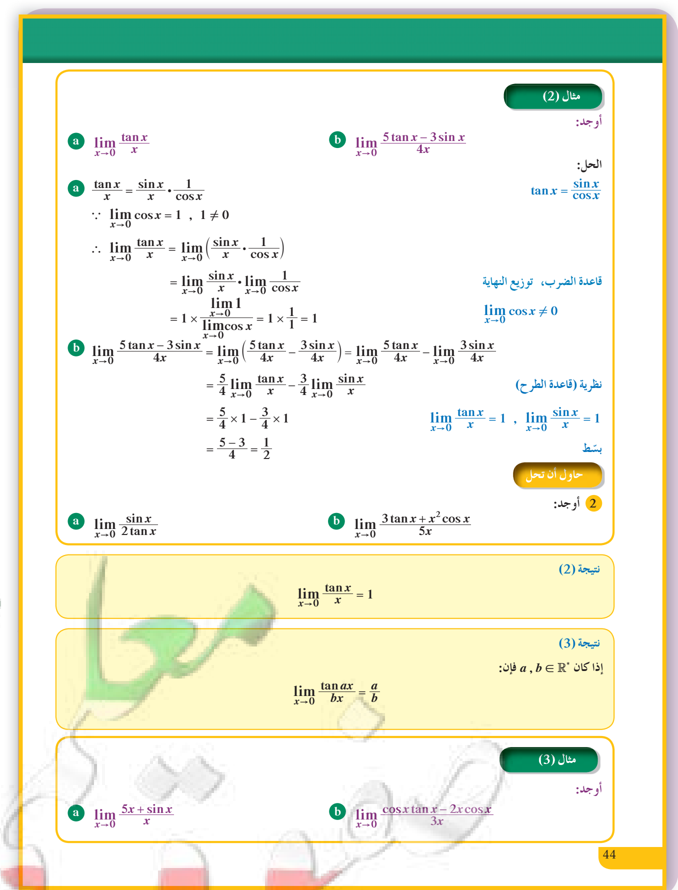
ليكن c, L عددين حقيقيين

فإذا كان $g(x) \le f(x) \le h(x)$ لكل x في جوار c، $x \neq c$

وكان $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$

فإنّ: $\lim_{x\to c} f(x) = L$

45



مثال (2)

أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ ⓑ $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

الحل:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ — ⓐ $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

$\because \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \ , \ 1 \neq 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right)$

قاعدة الضرب، توزيع النهاية — $= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$

$\lim_{x\to 0} \cos x \neq 0$ — $= 1 \times \frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} \cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$

ⓑ $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5\tan x}{4x} - \frac{3\sin x}{4x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{5\tan x}{4x} - \lim_{x\to 0} \frac{3\sin x}{4x}$

نظرية (قاعدة الطرح) — $= \frac{5}{4}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} - \frac{3}{4}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \ , \ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ — $= \frac{5}{4} \times 1 - \frac{3}{4} \times 1$

بسّط — $= \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

حاول أن تحل

2 أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\tan x}$ ⓑ $\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x + x^2\cos x}{5x}$

نتيجة (2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3)

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}^*$ فإن:

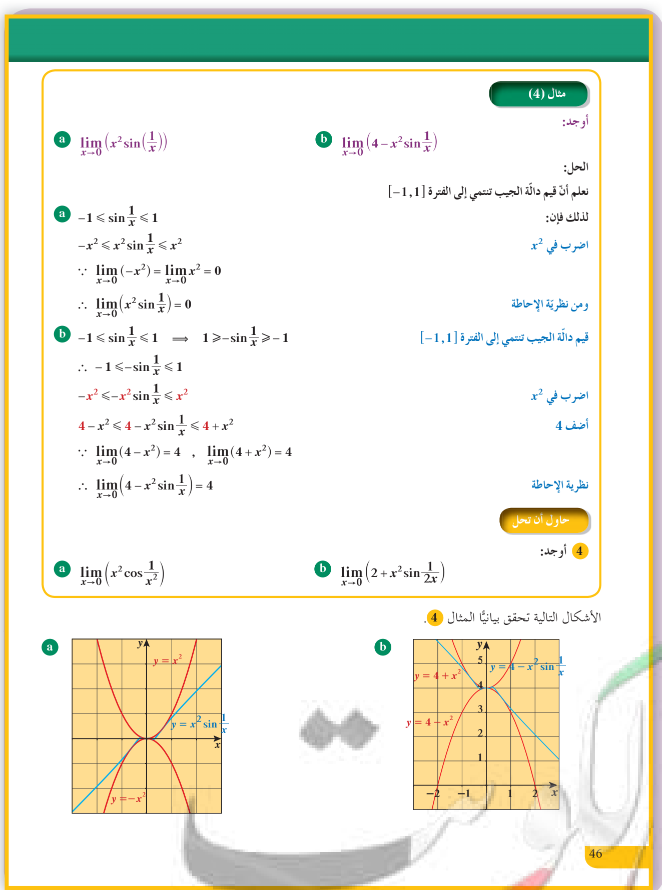
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

مثال (3)

أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to 0} \frac{5x + \sin x}{x}$ ⓑ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \tan x - 2x\cos x}{3x}$

44



مثال (4)

أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to 0}\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ⓑ $\lim_{x\to 0}\left(4 - x^2\sin\frac{1}{x}\right)$

الحل:

نعلم أنّ قيم دالّة الجيب تنتمي إلى الفترة $[-1, 1]$

لذلك فإن:

ⓐ $-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1$

اضرب في x^2 — $-x^2 \leqslant x^2\sin\frac{1}{x} \leqslant x^2$

$\because \lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

ومن نظريّة الإحاطة — $\therefore \lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right) = 0$

قيم دالّة الجيب تنتمي إلى الفترة $[-1, 1]$ — ⓑ $-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1 \implies 1 \geqslant -\sin\frac{1}{x} \geqslant -1$

$\therefore -1 \leqslant -\sin\frac{1}{x} \leqslant 1$

اضرب في x^2 — $-x^2 \leqslant -x^2\sin\frac{1}{x} \leqslant x^2$

أضف 4 — $4 - x^2 \leqslant 4 - x^2\sin\frac{1}{x} \leqslant 4 + x^2$

$\because \lim_{x\to 0}(4 - x^2) = 4 \ , \ \lim_{x\to 0}(4 + x^2) = 4$

نظرية الإحاطة — $\therefore \lim_{x\to 0}\left(4 - x^2\sin\frac{1}{x}\right) = 4$

حاول أن تحل

4 أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)$ ⓑ $\lim_{x\to 0}\left(2 + x^2\sin\frac{1}{2x}\right)$

الأشكال التالية تحقق بيانيًا المثال 4.

46

اختبار سريع

أوجد نهاية كلّ من الدوال التالية:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x^2+2x\sin x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3x^2+2x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}x\sin x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}(-3)+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-3+2=-1$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2\sin^2 x-3x^2\cos^2 x+4x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2\sin^2 x-3x^2\cos^2 x}{x^2}+\frac{4x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2}{x^2}(\sin^2 x+\cos^2 x)+\frac{4}{x}\right)$$

$$=-3\times 1+0=-3$$

كذلك يمكننا استخدام نظرية الإحاطة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية عندما $x\to\pm\infty$.

مثال (5)

أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

الحل:

نعلم أن: $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$

$\forall x>0\ ,\ \dfrac{-1}{x}\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq\dfrac{1}{x}$

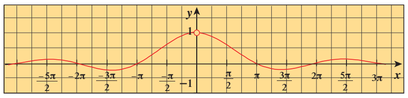
$\because\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

نظرية الإحاطة $\quad\therefore\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x+1}$

ويمكننا التأكد من صحة حل المثال السابق بيانيًا كالتالي:



x (rad)	$y=\frac{\sin x}{x}$
$\frac{7\pi}{2}$	−0.091
$\frac{37\pi}{7}$	0.0224
150	−0.00477
240	0.00394
300	−0.00333
600	0.000074

الرسم البياني للدالة $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ يتذبذب حول محور السينات، وسعة التذبذب تتناقص للصفر عندما $x\to\pm\infty$.

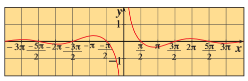
يبيّن جدول قيم الدالة f أن $f(x)\to 0$ عندما $x\to\infty$.

ويمكن استنتاج $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

كذلك يمكن استنتاج

الرسم البياني للدالة f : $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ يتذبذب حول محور السينات وسعة التذبذب تتناقص للصفر عندما $x\to\pm\infty$ ويمكن استنتاج أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$

x (rad)	$y=\frac{\cos x}{x}$
3π	−0.106
4π	0.0795
100	−0.00862
200	0.002435
300	−0.0000736
450	0.00162256



47

تمرَّنْ 1−4

نهايات بعض الدوال المثلثية
Limits of Some Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−9)، أوجد النهاية في كلٍّ مما يلي:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1+\cos x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$ (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x+3\sin x}{2x}$

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-\sin 3x}{x^2}$ (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

في التمارين (10−12)، أوجد النهاية في كلٍ مما يلي (إرشاد: اقسم كلًّا من البسط والمقام على x إذا لزم):

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 7x}$ (11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\tan 2x}$ (12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}$

في التمارين (13−15)، أوجد النهاية في كلٍ مما يلي:

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3+x^2\cos\dfrac{1}{x^2}\right)$ (14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x\cos x}{2x^2}$ (15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x}$

17

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 **(a)** يمكن كتابة $1-\cos x$ على الصورة $2\sin^2\frac{x}{2}$
فنحصل على:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{4}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{4}{2}=1$$

(b) **(1)** -1 **(2)** $\frac{2}{3}$ **(3)** -2

2 **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{3}{5}$

3 **(a)** 0 **(b)** 1

4 **(a)** 0 **(b)** 2

5 0

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{2x}=\frac{3}{2}$ (a) (b)

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos 2x}{4x}=\frac{1}{2}$ (a) (b)

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=0$ (a) (b)

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}$ (a) (b)

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2\sin x+5x^3}{4x^3}=2$ (a) (b)

في التمارين (10—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin x}=$

(a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) ∞

(7) $\lim_{x\to 0}\left(3+x^2\sin\frac{1}{x}\right)=$

(a) 0 (b) 4 (c) 3 (d) ∞

(8) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x\cos x}{2x^2}$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) -2 (d) 2

(9) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+5\sin^2 x}{3x^2}=$

(a) 3 (b) 9 (c) 0 (d) ∞

(10) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\cos x}{|2x|}=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) ∞

18

1–5: الاتّصال

1 الأهداف

- يتعرف الاتصال عند نقطة.
- يتعرف شروط اتصال دالة عند نقطة
- يتعرف أنواع الانفصال.
- يتعرف الانفصال عند نقطة.
- يتخلص من الانفصال.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الاتصال – اتصال من الجهتين – اتصال من جهة اليمين – اتصال من جهة اليسار – الاتصال عند نقطة – انفصال – انفصال يمكن التخلص منه – انفصال نتيجة قفزة – انفصال لا نهائي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show) – مصورات.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب رسم الدالة $f(x) = 2x - 3$، ثم اطلب إليهم رسم الدالة g المعرفة كما يلي:

$$g(x) = \begin{cases} -x+3 & : \ x \leqslant 2 \\ x+1 & : \ x > 2 \end{cases}$$

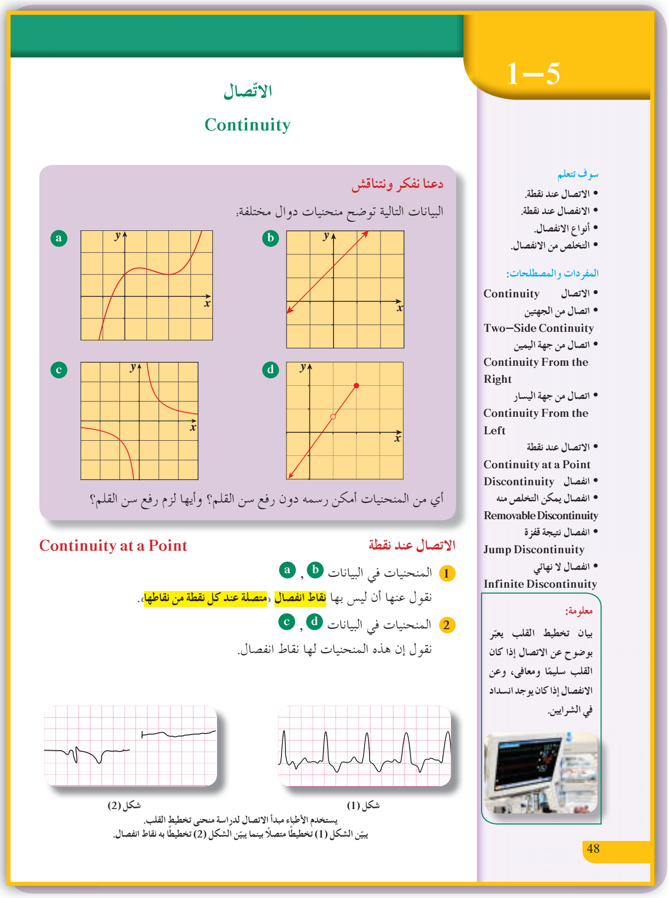
أسألهم: هل منحنى الدالة f متصل؟

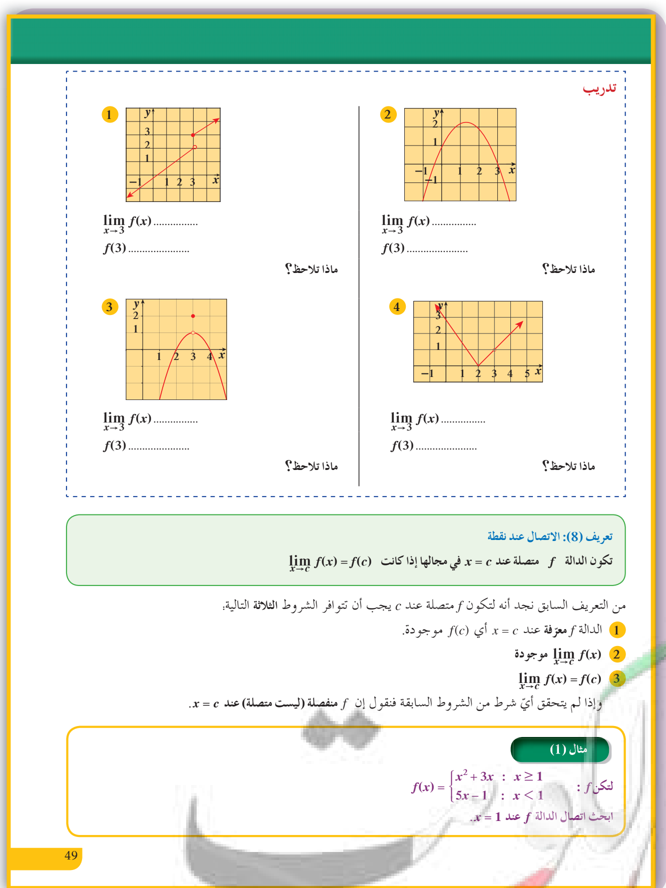
هل منحنى الدالة g متصل؟

5 التدريس

يمكن أن تبدأ الدرس باستخدام قلم رصاص لتتبع الرسم البياني لدالة متصلة على أي فترة من دون رفع القلم عن الورقة.

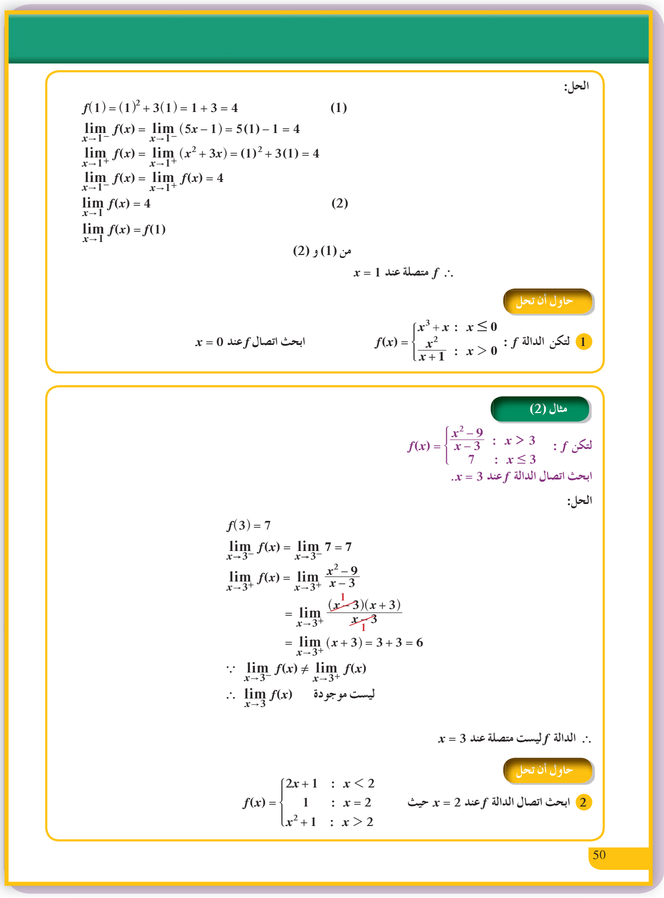
ينبغي أن يكون تعريف الاتصال مفهومًا بوضوح لدى الطلاب، كن واعيًا لتميز جيدًا بين الاتصال عند c حيث $c \in (a,b)$ والاتصال عند أطراف $[a,b]$.





تجري مناقشة أنواع مختلفة من عدم الاتصال في هذا الدرس. سوف يكون من المفيد توضيح كل نوع من عدم الاتصال باستخدام آلة حاسبة علمية بيانة أو بشكل تقريبي على السبورة. ينبغي أن تستخدم مسميات الأنواع المختلفة من عدم الاتصال خلال هذا المقرر.

اطلب إليهم تحديد حالات الانفصال الذي يمكن التخلص منه.



الحل:

$f(1) = (1)^2 + 3(1) = 1 + 3 = 4$ (1)

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (5x-1) = 5(1) - 1 = 4$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+3x) = (1)^2 + 3(1) = 4$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ (2)

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

من (1) و (2)

$\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

حاول أن تحل

1 لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$ ابحث اتصال f عند $x = 0$

مثال (2)

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : x > 3 \\ 7 & : x \le 3 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$.

الحل:

$f(3) = 7$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} 7 = 7$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

$= \lim_{x\to 3^+} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$

$= \lim_{x\to 3^+} (x+3) = 3 + 3 = 6$

$\because \lim_{x\to 3^-} f(x) \ne \lim_{x\to 3^+} f(x)$

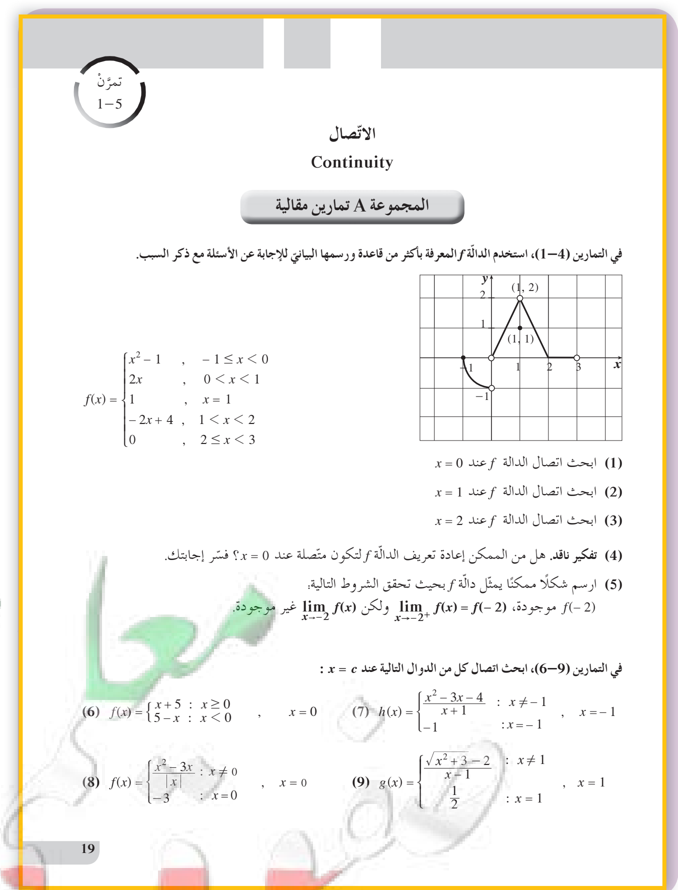
$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)$ ليست موجودة

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 3$

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \\ x^2+1 & : x > 2 \end{cases}$

50



تمرَّنْ 1–5

الاتّصال

Continuity

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، استخدم الدالّة f المعرفة بأكثر من قاعدة ورسمها البيانيّ للإجابة عن الأسئلة مع ذكر السبب.

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , -1 \le x < 0 \\ 2x & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ -2x + 4 & , 1 < x < 2 \\ 0 & , 2 \le x < 3 \end{cases}$

(1) ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

(2) ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

(3) ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

(4) **تفكير ناقد.** هل من الممكن إعادة تعريف الدالّة f لتكون متّصلة عند $x = 0$؟ فسّر إجابتك.

(5) ارسم شكلًا ممكنًا يمثّل دالّة f بحيث تحقق الشروط التالية:

$f(-2)$ موجودة، $\lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$ ولكن $\lim_{x\to -2} f(x)$ غير موجودة.

في التمارين (6–9)، ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

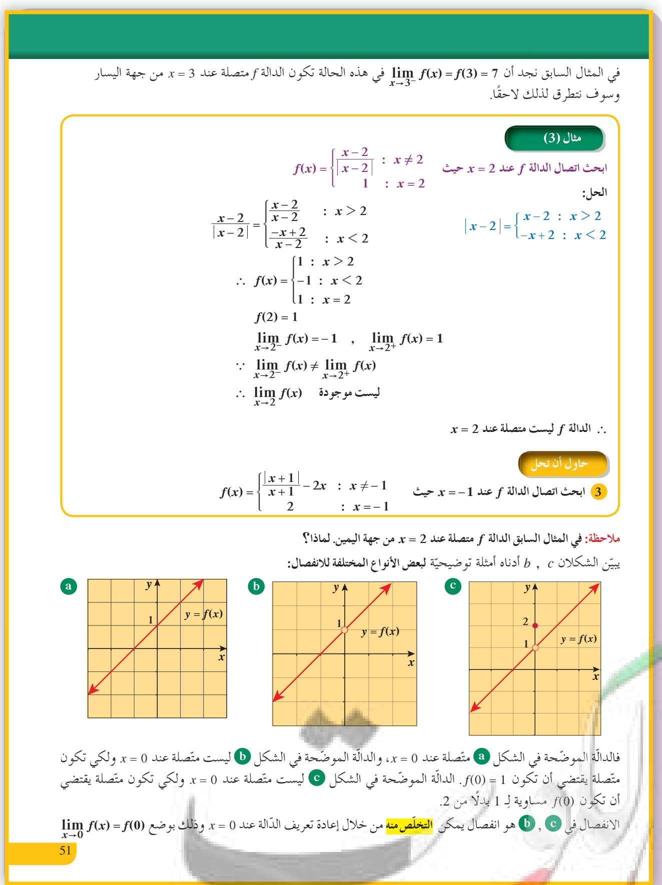
(6) $f(x) = \begin{cases} x+5 & : x \ge 0 \\ 5-x & : x < 0 \end{cases}$, $x = 0$

(7) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x-4}{x+1} & : x \ne -1 \\ -1 & : x = -1 \end{cases}$, $x = -1$

(8) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{|x|} & : x \ne 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$, $x = 0$

(9) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x \ne 1 \\ \dfrac{1}{2} & : x = 1 \end{cases}$, $x = 1$

19



في المثال السابق نجد أن $\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = 7$ في هذه الحالة تكون الدالة f متصلة عند $x = 3$ من جهة اليسار وسوف نتطرق لذلك لاحقًا.

مثال (3)

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & : x \ne 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$

الحل:

$|x-2| = \begin{cases} x-2 & : x > 2 \\ -x+2 & : x < 2 \end{cases}$

$\dfrac{x-2}{|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2} & : x > 2 \\ \dfrac{x-2}{-x+2} & : x < 2 \end{cases}$

$\therefore f(x) = \begin{cases} 1 & : x > 2 \\ -1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$

$f(2) = 1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1 \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$

$\because \lim_{x\to 2^-} f(x) \ne \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ ليست موجودة

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 2$

حاول أن تحل

3 ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$ حيث $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} - 2x & : x \ne -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$

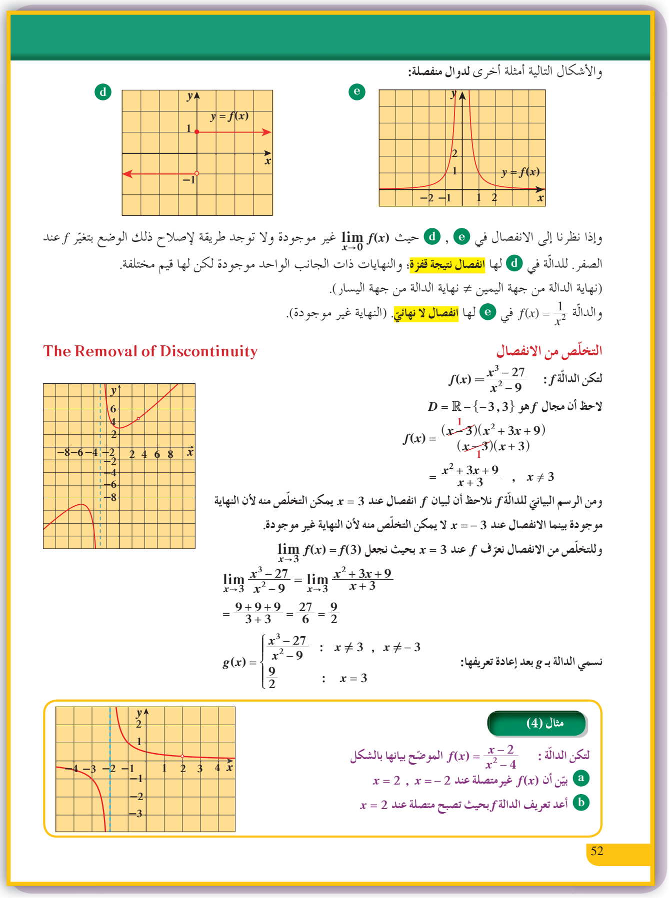
ملاحظة: في المثال السابق الدالة f متصلة عند $x = 2$ من جهة اليمين. لماذا؟

يبيّن الشكلان c , b أدناه أمثلة توضيحيّة لبعض الأنواع المختلفة للانفصال:

فالدالّة الموضّحة في الشكل a متّصلة عند $x = 0$، والدالّة الموضّحة في الشكل b ليست متّصلة عند $x = 0$ ولكي تكون متّصلة يقتضي أن تكون $f(0) = 1$. الدالّة الموضّحة في الشكل c ليست متّصلة عند $x = 0$ ولكي تكون متّصلة يقتضي أن تكون $f(0)$ مساوية لِـ 1 بدلًا من 2.

الانفصال في c , b هو انفصال يمكن **التخلّص منه** من خلال إعادة تعريف الدّالة عند $x = 0$ وذلك بوضع $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

51



والأشكال التالية أمثلة أخرى **لدوال منفصلة:**

وإذا نظرنا إلى الانفصال في e , d حيث $\lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة ولا توجد طريقة لإصلاح ذلك الوضع بتغيّر f عند الصفر. للدالّة في d لها **انفصال نتيجة قفزة**؛ والنهايات ذات الجانب الواحد موجودة لكن لها قيم مختلفة.

(نهاية الدالة من جهة اليمين ≠ نهاية الدالة من جهة اليسار).

والدالّة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في e لها **انفصال لا نهائيّ**. (النهاية غير موجودة).

التخلّص من الانفصال **The Removal of Discontinuity**

لتكن الدالّة f: $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

لاحظ أن مجال f هو $D = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$$

$$= \frac{x^2+3x+9}{x+3} \quad , \quad x \neq 3$$

ومن الرسم البيانيّ للدالّة f نلاحظ أن لبيان f انفصال عند $x = 3$ يمكن التخلّص منه لأن النهاية موجودة بينما الانفصال عند $x = -3$ لا يمكن التخلّص منه لأن النهاية غير موجودة.

وللتخلّص من الانفصال نعرّف f عند $x = 3$ بحيث نجعل $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3}$$

$$= \frac{9+9+9}{3+3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

نسمي الدالة بـ g بعد إعادة تعريفها:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x^2-9} & : x \neq 3 \ , \ x \neq -3 \\ \frac{9}{2} & : x = 3 \end{cases}$$

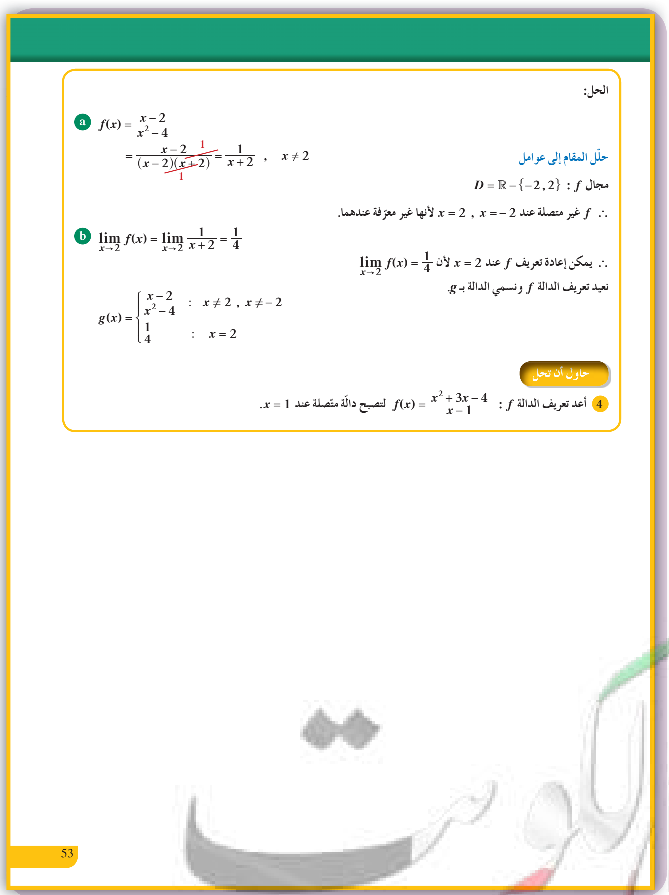
مثال (4)

لتكن الدالّة : $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ الموضّح بيانها بالشكل

a بيّن أن $f(x)$ غير متصلة عند $x = -2$, $x = 2$

b أعد تعريف الدالة f بحيث تصبح متصلة عند $x = 2$

52



الحل:

حلّل المقام إلى عوامل

a $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

$$= \frac{x-2}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{1}{x+2} \quad , \quad x \neq 2$$

مجال f : $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

∴ f غير متصلة عند $x = -2$, $x = 2$ لأنها غير معرّفة عندهما.

b $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

∴ يمكن إعادة تعريف f عند $x = 2$ لأن $\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{4}$

نعيد تعريف الدالة f ونسمي الدالة بـ g.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & : x \neq 2 \ , \ x \neq -2 \\ \frac{1}{4} & : x = 2 \end{cases}$$

حاول أن تحل

4 أعد تعريف الدالة f : $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x-1}$ لتصبح دالّة متّصلة عند $x = 1$.

53

في الأمثلة (3) ,(2) ,(1)

توفر هذه الأمثلة مقدمة حول كيفية معرفة إمكانية الاتصال عند نقطة محددة من خلال حساب النهايات من جهتي النقطة وعند حساب صورة النقطة، إذا تساوت جميعها يكون هناك اتصال.

في المثال (4)

يوضّح هذا المثال فكرة التخلص من الانفصال عند نقطة غير معرفة في الدالة، بحيث يتم إعادة تعريف الدالة عند تلك النقطة وتكون الدالة متصلة عندها.

6 الربط

اطلب إلى الطلاب إحضار رسم بياني لتخطيط قلب سليم، وناقش معهم كيفية اتصال جميع النقاط، إضافة إلى رسم بياني لتخطيط قلب مريض وناقش معهم أيضًا نقاط عدم الاتصال أو اطلب إليهم مشاهدة تخطيط قلب تمّ أخذه في غرفة العمليات.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

(1) عدم إيجاد صورة العدد المطلوب بحيث الاتصال عنده.

(2) قد يجد بعض الطلاب صعوبة في إدراك الفرق بين الاتصال عند c : $c \in (a,b)$ والاتصال عند نقطة طرفية. شدّد على معنى النقطة الطرفية مدعمًا كلامك برسم بياني.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» وتحقق من مدى إدراكهم لمفاهيم هذا الدرس ونظرياته.

اختبار سريع

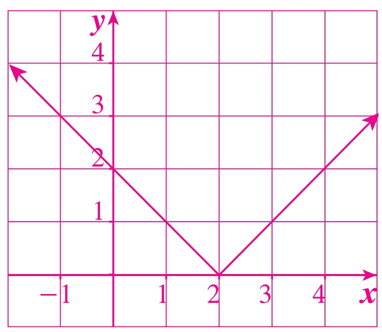
1 (a) ابحث اتصال الدالة: $f(x) = \begin{cases} 2 - x : & x < 2 \\ x - 2 : & x \geqslant 2 \end{cases}$

عند $x = 2$

$f(2) = 0$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$

(b) دعّم إجابتك برسم بيان الدالة f.



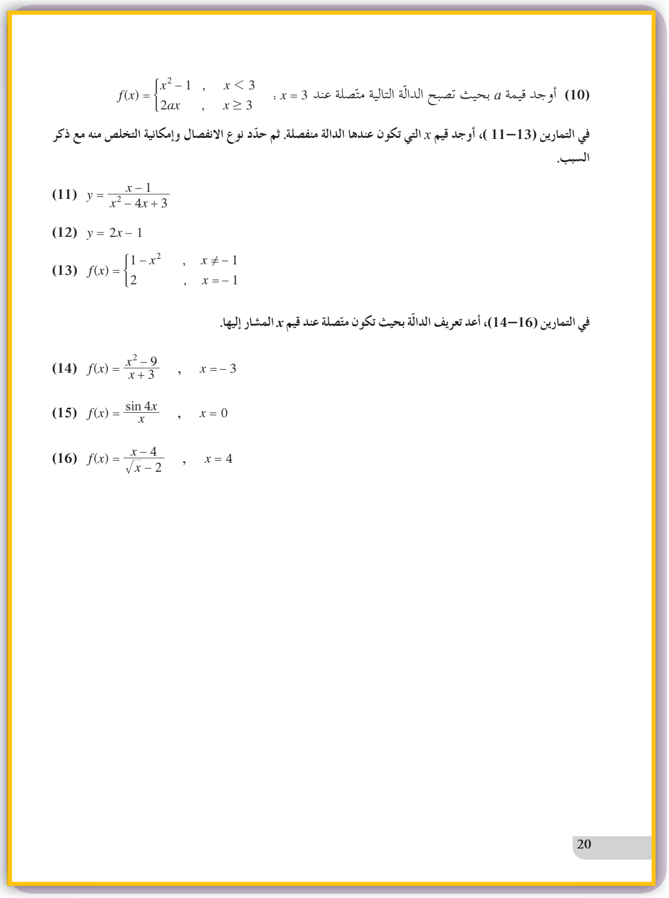
2 إذا كانت: $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ ، $x \neq 2$

فما القيمة التي تعطى لِـ $f(2)$ لتصبح f متصلة عند $x = 2$؟ 3

3 إذا كانت: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x > 2 \\ x + a & , \ x \leqslant 2 \end{cases}$ ،

فما قيمة a التي تجعل الدالة f متصلة لكل قيمة x؟

$a = 2$



(10) أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالّة التالية متّصلة عند $x = 3$: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \ x < 3 \\ 2ax & , \ x \geq 3 \end{cases}$

في التمارين (11–13)، أوجد قيم x التي تكون عندها الدالة منفصلة. ثم حدّد نوع الانفصال وإمكانية التخلص منه مع ذكر السبب.

(11) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$

(12) $y = 2x - 1$

(13) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \ x \neq -1 \\ 2 & , \ x = -1 \end{cases}$

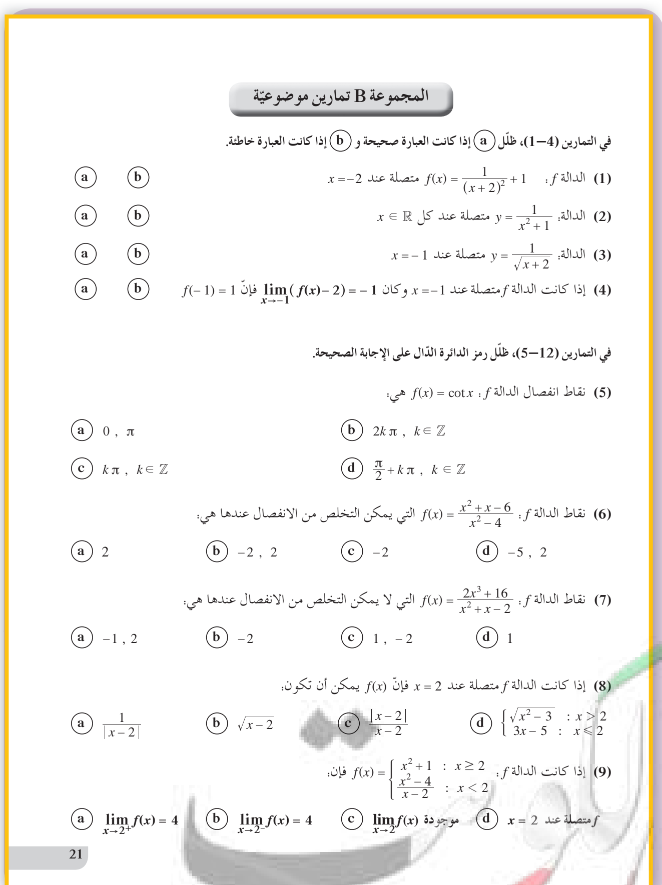
في التمارين (14–16)، أعد تعريف الدالّة بحيث تكون متّصلة عند قيم x المشار إليها.

(14) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x = -3$

(15) $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{x}$, $x = 0$

(16) $f(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$, $x = 4$

20



المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} + 1$ متصلة عند $x = -2$ — (a) (b)

(2) الدالة: $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ — (a) (b)

(3) الدالة: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$ متصلة عند $x = -1$ — (a) (b)

(4) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = -1$ وكان $\lim\limits_{x \to -1} (f(x) - 2) = -1$ فإنّ $f(-1) = 1$ — (a) (b)

في التمارين (5–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) نقاط انفصال الدالة f : $f(x) = \cot x$ هي:

(a) $0 \ , \ \pi$ (b) $2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

(c) $k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ (d) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

(6) نقاط الدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) 2 (b) $-2 \ , \ 2$ (c) -2 (d) $-5 \ , \ 2$

(7) نقاط الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x^3 + 16}{x^2 + x - 2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) $-1 \ , \ 2$ (b) -2 (c) $1 \ , \ -2$ (d) 1

(8) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = 2$ فإنّ $f(x)$ يمكن أن تكون:

(a) $\dfrac{1}{|x - 2|}$ (b) $\sqrt{x - 2}$ (c) $\dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ (d) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & : x > 2 \\ 3x - 5 & : x \leqslant 2 \end{cases}$

(9) إذا كانت الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x \geq 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & : x < 2 \end{cases}$ فإن:

(a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$ (b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$ (c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ موجودة (d) f متصلة عند $x = 2$

21

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a)، (b) يمكن رسمهما دون رفع سن القلم.

(c)، (d) يلزم رفع سن القلم لرسمهما.

«حاول أن تحل»

1. $f(0) = 0 \ ; \ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \ ; \ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 0$

2. $f(2) = 1 \ ; \ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5 \ ; \ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$

$\therefore$ الدالة f غير متصلة عند $x = 2$

3. $f(-1) = 2 \ ; \ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = 1 \ ; \ \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = 3$

$\therefore$ الدالة f غير متصلة عند $x = -1$

4. $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x+4$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x-4}{x-1} & ; \ x \neq 1 \\ 5 & ; \ x = 1 \end{cases}$$

«تدريب»

1. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2 \ ; \ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة

$= \ f(3) = 3$

النهاية جهة اليمين $\neq$ النهاية لجهة اليسار

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 3$

2. 0، $f(3) = 0$، f متصلة عند $x = 3$

3. 1، $f(3) = 2$، f غير متصلة عند $x = 3$

4. 1، f غير معرّفة عند $x = 3$، f غير متصلة عند $x = 3$

(10) لتصبح الدالة f: $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ متصلة عند $x = 1$، يجب إعادة تعريفها على الشكل التالي:

(a) $\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^3-1} & , \ x \neq 1, \ x \neq -1 \\ \dfrac{3}{2} & , \ x = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & , \ x > 1 \\ \dfrac{3}{2} & , \ x = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & , \ x \neq 1, \ x \neq -1 \\ \dfrac{1}{2} & , \ x = 1 \end{cases}$

(d) لا يمكن إعادة تعريفها

(11) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = -2$ وكانت $\lim\limits_{x\to -2} (x^2 + f(x)) = 7$ فإن $f(-2)$ تساوي:

(a) 3 (b) 5

(c) 9 (d) 11

(12) إذا كانت الدالة g متصلة عند $x = 1$ وكانت النقطة $(1\ ,\ -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim\limits_{x\to 1} (g(x))^2$ تساوي:

(a) -6 (b) -3

(c) 1 (d) 9

في التمارين (13–15)، توجد قائمتان. اختر لكل سؤال من القائمة (1) ما يناسبه من القائمة (2) لتحصل على عبارة صحيحة:

إذا كانت g دالة متصلة عند $x = a$ ، $a \in \mathbb{Z}$ وكانت:

القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $g(x) = \begin{cases} x+1 & : \ x > a \\ 3-x & : \ x \leq a \end{cases} \Rightarrow a =$	(a) -1 (b) 2
(14) $g(x) = \begin{cases} 2ax-2 & : \ x \neq a \\ 3a & : \ x = a \end{cases} \Rightarrow a =$	(c) 0 (d) 1
(15) $g(x) = \begin{cases} 3x^2 & : \ x > a \\ 2x & : \ x \leq a \end{cases} \Rightarrow a =$	(e) $\frac{2}{3}$

22

1–6: نظريات الاتصال

1 الأهداف

- يتعرف نظريات الاتصال.
- يتعرف الدوال المتصلة.
- يتعرف الدوال المركبة.
- يدرس اتصال الدوال المركبة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

دالة متصلة – دالة مركبة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب –جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

(1) ابحث اتصال الدوال التالية عند $x = 1$ حيث:

$$f(x) = 3x^2 \quad ; \quad g(x) = 4x \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{x^2}$$

(2) ابحث اتصال الدالة v عند $x = 1$:

$$v(x) = 3x^2 + 4x + \frac{1}{x^2}$$

(3) في الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x+1}{5}$ عوّض عن x بـ $3h - 2$

ما قيمة $f(h)$؟

5 التدريس

(1) سوف نتعلم في هذا الدرس خصائص الدوال المتصلة ونتعرف على أهمها مثل دالة كثيرة الحدود ودالة الحدودية النسبية وغيرها. ونرى أيضًا تطورًا في دراسة مفهوم الاتصال من الاتصال عند نقطة للوصول إلى الدوال المتصلة.

(2) أشر إلى أن $f(x) = \sin x$ ودالة المطلق $f(x) = |x|$ هما دالتان متصلتان عند كل c في مجالها اطلب إلى أحد الطلاب رسم كل من بياني الدالتين على السبورة للتحقق من الاتصال.

(3) وضح للطلاب نظرية (15) التي تتعلق بالدالة الجذرية وأهمية دليل الجذر وسنكتفي بالجزء (b) بدراسة الاتصال لدالة جذرية $\sqrt{g(x)}$ عند $x = c$ حيث $g(c) > 0$

1–6

نظريات الاتصال

Continuous Theorems

سوف تتعلم

- نظريات الاتصال.
- دوال متصلة.
- الدوال المركبة.
- اتصال الدوال المركبة.

المفردات والمصطلحات:

- دالة متصلة Continuous Function
- دالة مركبة Composite Function

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

والدالة g: $g(x) = |x - 2|$

والدالة q: $q(x) = x^2 - 5$

1 ابحث اتصال كل من f, g عند $x = 2$

2 ابحث اتصال كل من $f \cdot q$, $f + q$ عند $x = 2$

3 لتكن h: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

a اكتب h دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b هل الدالة h متصلة عند $x = 2$؟ ولماذا؟

نظرية (14): خواصّ الدوالّ المتّصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت f, g دالتين متّصلتين عند $x = c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x = c$

الجمع:		1 $f + g$
الطرح:		2 $f - g$
الضرب في ثابت:	$k \in \mathbb{R}$	3 $k \cdot f$,
الضرب:		4 $f \cdot g$
القسمة:	$g(c) \neq 0$	5 $\dfrac{f}{g}$,

معلومة: تمثّل الأفعوانيّة خطًّا متّصلًا لمسار العربة.

دوال متّصلة Continuous Functions

1 الدالة f: $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.

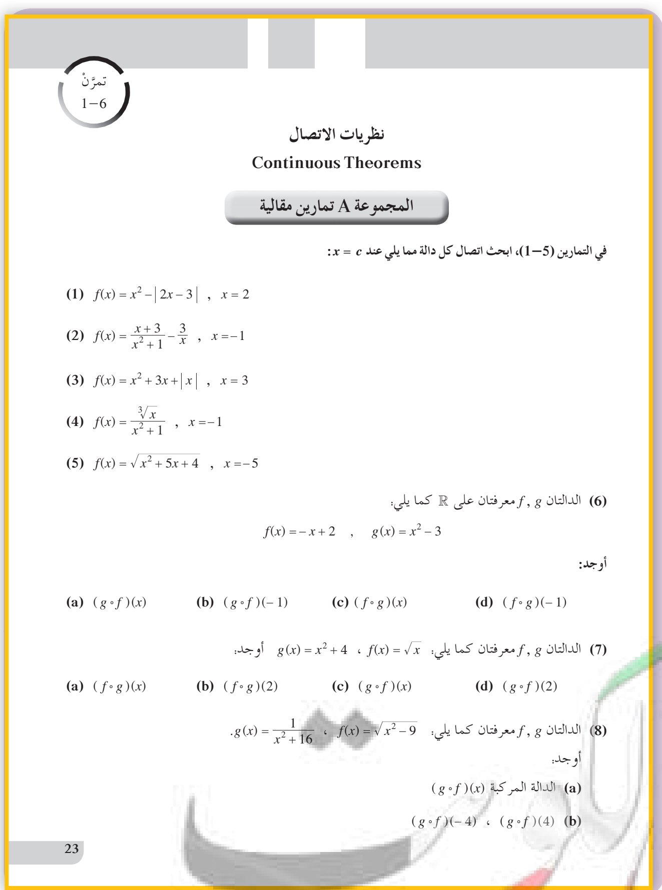
2 الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.

3 الدالة الحدودية النسبية $\dfrac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

4 الدالة f: $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.

5 الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

54



تمرَّنْ 1–6

نظريات الاتصال

Continuous Theorems

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–5)، ابحث اتصال كل دالة مما يلي عند $x = c$:

(1) $f(x) = x^2 - |2x - 3|$, $x = 2$

(2) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1} - \dfrac{3}{x}$, $x = -1$

(3) $f(x) = x^2 + 3x + |x|$, $x = 3$

(4) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$, $x = -1$

(5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$, $x = -5$

(6) الدالتان f, g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = -x + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 3$$

أوجد:

(a) $(g \circ f)(x)$ (b) $(g \circ f)(-1)$ (c) $(f \circ g)(x)$ (d) $(f \circ g)(-1)$

(7) الدالتان f, g معرفتان كما يلي: $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x^2 + 4$ أوجد:

(a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(f \circ g)(2)$ (c) $(g \circ f)(x)$ (d) $(g \circ f)(2)$

(8) الدالتان f, g معرفتان كما يلي: $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ ، $g(x) = \dfrac{1}{x^2+16}$.

أوجد:

(a) الدالة المركبة $(g \circ f)(x)$

(b) $(g \circ f)(4)$ ، $(g \circ f)(-4)$

23

(4) وضح للطلاب مفهوم تركيب دالتين والشرط الواجب توافره للتركيب واقتصر في دراسة الدوال القابلة للتركيب.

(5) طبّق نظرية (16) وشروطها ولاحظ أن الشروط كافية وليست لازمة. مثال للمعلم

$$f(x) = x^2 \ , \ g(x) = \sqrt{x}$$

الدالة $(g \circ f)$ لا تحقق شروط النظرية (16) ولكنها متصلة عند $x = 0$

في المثالين (1), (2)

تطبيق لخواص الدوال المتصلة (الجمع والطرح) والدوال النسبية لدراسة الاتصال عند نقطة.

في المثال (3)

مثال تطبيقي لدراسة اتصال الدوال الجذرية عند نقطة.

في المثالين (4), (5)

إيجاد الدالة المركبة لدوال قابلة للتركيب. أشر إلى أن دراستنا اقتصرت على الدوال القابلة للتركيب. وأكد أن $(g \circ f)$ ليست بالضرورة تساوي $(f \circ g)$

في المثالين (6), (7)

دراسة اتصال دالة مركبة عند نقطة.

في المثال (7)، أشر إلى أن الدالة g (دالة القيمة المطلقة) هي دالة متصلة.

6 الربط

تمثل الأفعوانيّة خطًّا متصلًا لمسار العربة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

- قد يحاول بعض الطلاب دراسة اتصال دالة عند نقطة لا تنتمي إلى مجال الدالة خاصة في حالة الدوال الجذرية. شدّد على أن انتماء النقطة إلى مجال الدالة أساسي ومبدئي لأنه إذا لم يكن بالإمكان حساب $f(a)$ فلسنا بحاجة إلى دراسة النهايات، ونؤكد مباشرة أن الدالة غير متصلة عند هذه النقطة.
- قد يخطئ الطلاب في تطبيق نظرية (16).

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من دقة تعاملهم مع الخصائص وصحة تطبيقهم للنظريات.

مثال (1)

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

a) $f(x) = x^2 + |x| \quad , \quad c = -1$

b) $f(x) = \sin x - \cos x \quad , \quad c = \frac{\pi}{2}$

الحل:

a) لتكن الدالة g : $g(x) = x^2$

الدالة h : $h(x) = |x|$

الدالة g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -1$

الدالة h دالة مطلق x متصلة عند $x = -1$

$\therefore$ دالة الجمع f حيث $f(x) = g(x) + h(x)$ هي دالة متصلة عند $x = -1$ (نظرية)

b) لتكن الدالة g : $g(x) = \sin x$

الدالة h : $h(x) = \cos x$

الدالة g دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

الدالة h دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ الدالة f حيث $f(x) = g(x) - h(x)$ متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$ (نظرية)

حاول أن تحل

1 ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x| \quad , \quad c = 3$

b) $f(x) = \frac{\tan x}{x+1} \quad , \quad c = \frac{\pi}{4}$

مثال (2)

ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$

الحل:

لتكن الدالة g: $g(x) = \frac{x-2}{x^2+9}$

الدالة h: $h(x) = \frac{1}{x}$

الدالة g دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = 3$ (لأن المقام لا يساوي الصفر عند $x = 3$).

الدالة h دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = 3$ (لأن المقام لا يساوي الصفر عند $x = 3$).

$\therefore$ دالة الطرح f حيث $f(x) = g(x) - h(x)$ هي دالة متصلة عند $x = 3$ (نظرية)

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x-2}$ عند $x = 1$

55

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

a) الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،
ومتصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b) إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $g(c) > 0$
فإن الدالة: $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

مثال (3)

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1} \quad , \quad x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x+3} \quad , \quad x = -1$

الحل:

a) لتكن الدالة g: $g(x) = \sqrt[3]{x}$

الدالة h: $h(x) = x^2 + 1$

g دالة جذرية حيث $n = 3$ (عدد صحيح فردي) متصلة عند $x = 1$ (نظرية)

h دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = 1$

وحيث إن $h(1) = 2 \ , \ 2 \neq 0$

$\therefore$ الدالة f حيث $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ متصلة عند $x = 1$

b) نفرض أن g: $g(x) = x + 3$ حيث $x \geqslant -3$

g دالة متصلة عند $x = -1$

وحيث إن $g(-1) = 2 \ , \ 2 > 0$

$\therefore$ الدالة f حيث $f(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+3}$ متصلة عند $x = -1$ (نظرية)

حاول أن تحل

3 ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند $x = -2$

a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

الدالة المركبة **Composite Function**

إذا كانت كل من g , f دالة حقيقية فإننا سنرى من خلال بعض الأمثلة أننا نستطيع تعيين دالة جديدة تنتج من تركيب الدالتين g , f إذا توفرت بعض الشروط.

لنأخذ على سبيل المثال الدالتين الحقيقيتين:

$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$

حيث: $f(x) = x - 1$

$g : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$

$g(x) = 3x + 1$

56

اختبار سريع

❶ ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + x + 3} - \dfrac{4}{x^2}$ عند $x = 1$

$h(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + x + 3}$; $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$

h دالة حدودية نسبية مجالها $(-\infty , \infty)$

$\therefore$ h متصلة عند $x = 1$ كذلك g متصلة عند $x = 1$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

❷ ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ عند $x = 6$

$g(x) = x^2 - 7x + 10$ متصلة عند $x = 6$ مع $g(6) = 4 > 0$

$\therefore$ $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = 6$

❸ $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$

(a) أوجد: $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$

$\dfrac{x^2 - 1}{2}$, $\dfrac{x^2 + 6x - 7}{4}$

(b) ابحث اتصال $(g \circ f)$ عند $x = 1$

f دالة متصلة عند $x = 1$, $f(1) = -3$

g دالة متصلة عند $x = -3$, $g(-3) = 0$

$\therefore$ $(g \circ f)$ دالة متصلة عند $x = 1$

ملاحظة: يمكن بحث الاتصال للدالة $(g \circ f)$ مباشرة كدالة حدودية.

❾ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

❶ الدالة f كثيرة الحدود $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$ ، $f(2) = 0$

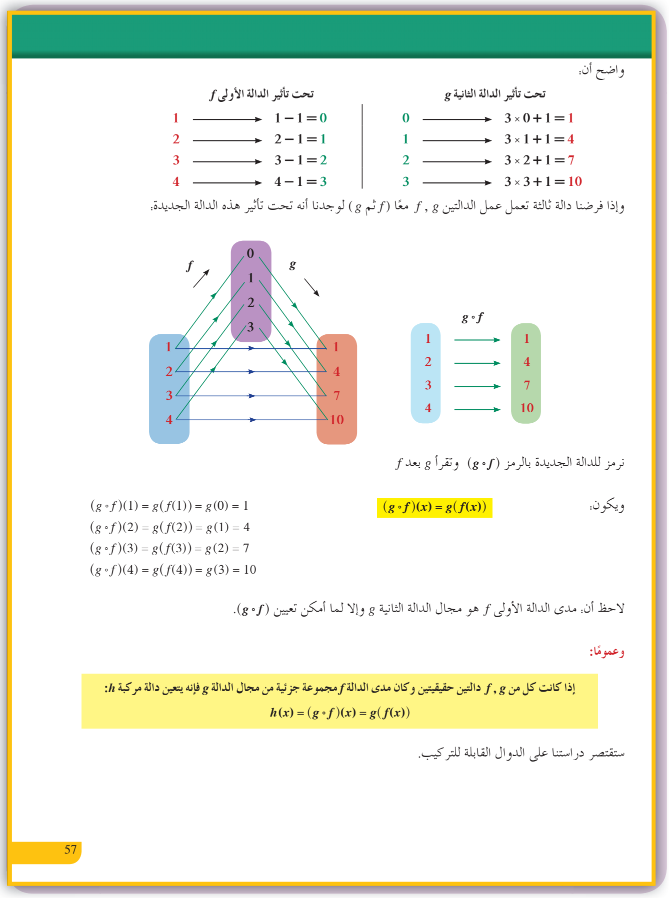
$\therefore$ f متصلة عند $x = 2$

$g(2) = |0| = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-x + 2) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 2) = 0$

$\therefore$ g دالة متصلة عند $x = 2$


واضح أن:

تحت تأثير الدالة الثانية g

$0 \longrightarrow 3 \times 0 + 1 = 1$
$1 \longrightarrow 3 \times 1 + 1 = 4$
$2 \longrightarrow 3 \times 2 + 1 = 7$
$3 \longrightarrow 3 \times 3 + 1 = 10$

تحت تأثير الدالة الأولى f

$1 \longrightarrow 1 - 1 = 0$
$2 \longrightarrow 2 - 1 = 1$
$3 \longrightarrow 3 - 1 = 2$
$4 \longrightarrow 4 - 1 = 3$

وإذا فرضنا دالة ثالثة تعمل عمل الدالتين g , f معًا (f ثم g) لوجدنا أنه تحت تأثير هذه الدالة الجديدة:

نرمز للدالة الجديدة بالرمز $(g \circ f)$ وتقرأ g بعد f

ويكون: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 4$
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(2) = 7$
$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(3) = 10$

لاحظ أن: مدى الدالة الأولى f هو مجال الدالة الثانية g وإلا لما أمكن تعيين $(g \circ f)$.

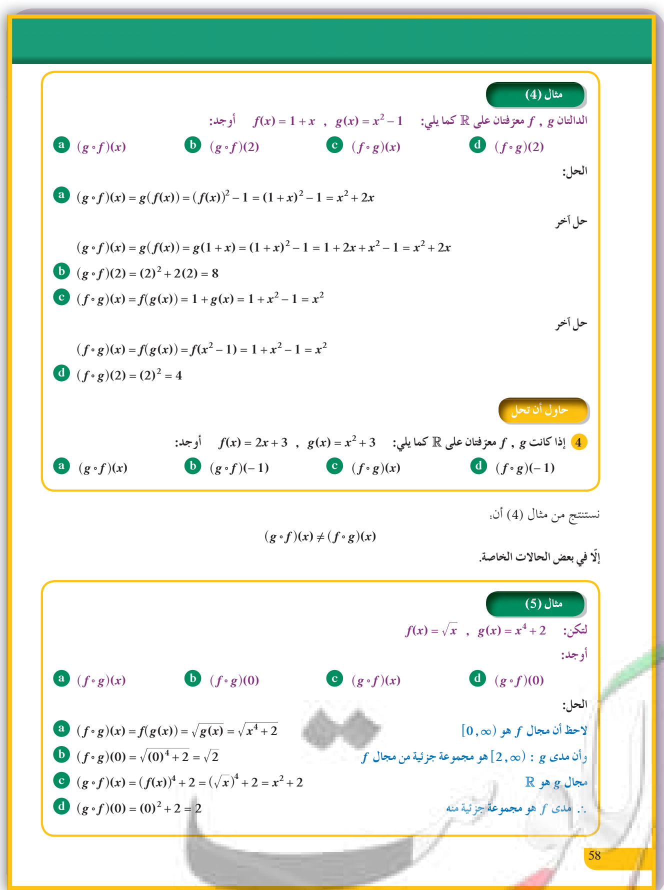
وعمومًا:

إذا كانت كل من g , f دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب.

57


مثال (4)

الدالتان g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 1 + x$ أوجد:

ⓐ $(g \circ f)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(2)$ ⓒ $(f \circ g)(x)$ ⓓ $(f \circ g)(2)$

الحل:

ⓐ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (1 + x)^2 - 1 = x^2 + 2x$

حل آخر

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 + x) = (1 + x)^2 - 1 = 1 + 2x + x^2 - 1 = x^2 + 2x$

ⓑ $(g \circ f)(2) = (2)^2 + 2(2) = 8$

ⓒ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + g(x) = 1 + x^2 - 1 = x^2$

حل آخر

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 1 + x^2 - 1 = x^2$

ⓓ $(f \circ g)(2) = (2)^2 = 4$

حاول أن تحل

4 إذا كانت g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

ⓐ $(g \circ f)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(-1)$ ⓒ $(f \circ g)(x)$ ⓓ $(f \circ g)(-1)$

نستنتج من مثال (4) أن:

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

إلّا في بعض الحالات الخاصة.

مثال (5)

لتكن: $g(x) = x^4 + 2$, $f(x) = \sqrt{x}$

أوجد:

ⓐ $(f \circ g)(x)$ ⓑ $(f \circ g)(0)$ ⓒ $(g \circ f)(x)$ ⓓ $(g \circ f)(0)$

الحل:

لاحظ أن مجال f هو $[0 , \infty)$

وأن مدى g : $[2 , \infty)$ هو مجموعة جزئية من مجال f

مجال g هو $\mathbb{R}$

$\therefore$ مدى f هو مجموعة جزئية منه

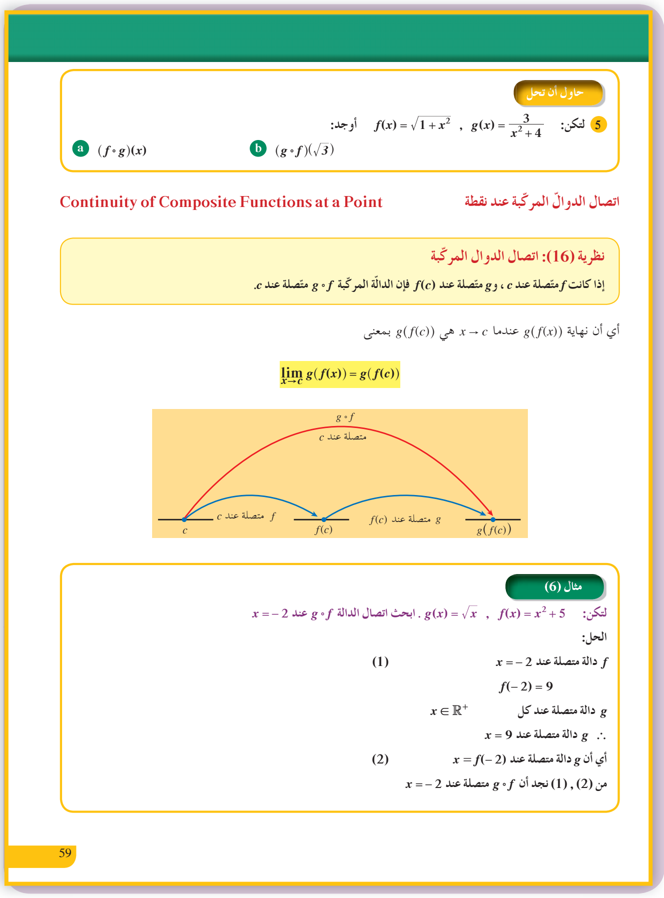
ⓐ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^4 + 2}$

ⓑ $(f \circ g)(0) = \sqrt{(0)^4 + 2} = \sqrt{2}$

ⓒ $(g \circ f)(x) = (f(x))^4 + 2 = (\sqrt{x})^4 + 2 = x^2 + 2$

ⓓ $(g \circ f)(0) = (0)^2 + 2 = 2$

58



حاول أن تحل

5 لتكن: $g(x)=\frac{3}{x^2+4}$, $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ أوجد:

a $(f\circ g)(x)$ b $(g\circ f)(\sqrt{3})$

اتصال الدوالّ المركّبة عند نقطة Continuity of Composite Functions at a Point

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متّصلة عند c، و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g\circ f$ متّصلة عند c.

أي أن نهاية $g(f(x))$ عندما $x\to c$ هي $g(f(c))$ بمعنى

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(f(c))$$

مثال (6)

لتكن: $f(x)=x^2+5$, $g(x)=\sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=-2$

الحل:

f دالة متصلة عند $x=-2$ (1)

$f(-2)=9$

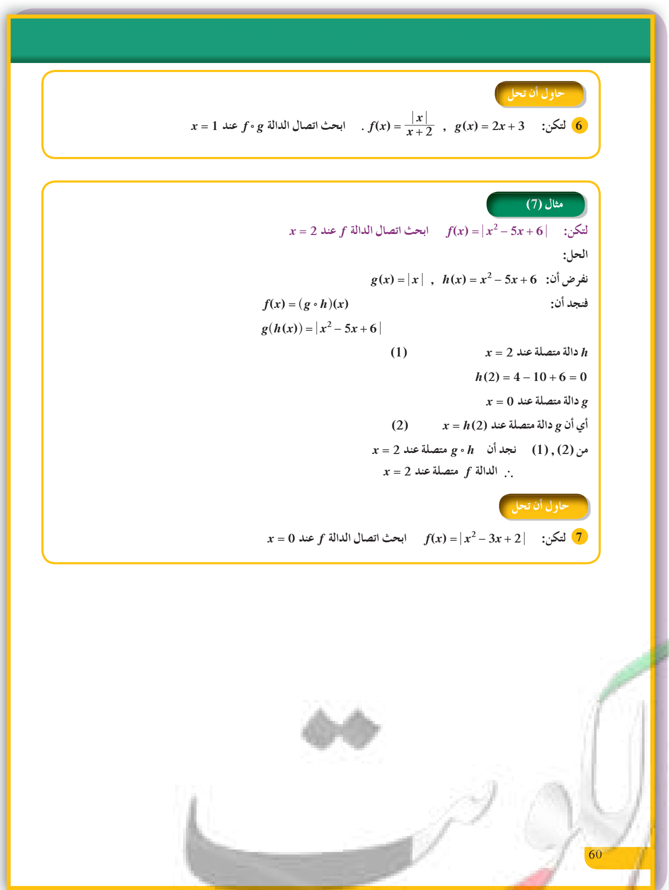
g دالة متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}^+$

$\therefore$ g دالة متصلة عند $x=9$

أي أن g دالة متصلة عند $x=f(-2)$ (2)

من (2) , (1) نجد أن $g\circ f$ متصلة عند $x=-2$

59



حاول أن تحل

6 لتكن: $g(x)=2x+3$, $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f\circ g$ عند $x=1$

مثال (7)

لتكن: $f(x)=|x^2-5x+6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

الحل:

نفرض أن: $h(x)=x^2-5x+6$, $g(x)=|x|$

فنجد أن: $f(x)=(g\circ h)(x)$

$g(h(x))=|x^2-5x+6|$

h دالة متصلة عند $x=2$ (1)

$h(2)=4-10+6=0$

g دالة متصلة عند $x=0$

أي أن g دالة متصلة عند $x=h(2)$ (2)

من (2) , (1) نجد أن $g\circ h$ متصلة عند $x=2$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=2$

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x)=|x^2-3x+2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

60

2 $(f+q)(x)=x^3-2x^2+2x-5$

$(f+q)(2)=-1$

$$\lim_{x\to 2}(f+q)(x)=\lim_{x\to 2}(x^3-2x^2+2x-5)=-1$$

$\therefore$ الدالة $f+q$ متصلة عند $x=2$

$(f\cdot q)(x)=x^5-3x^4-3x^3+15x^2-10x$

$(f\cdot q)(2)=0$

$$\lim_{x\to 2}(f\cdot q)(x)=\lim_{x\to 2}(x^5-3x^4-3x^3+15x^2-10x)=0$$

$\therefore$ الدالة $f\cdot q$ متصلة عند $x=2$

3 (a) $h(x)=\begin{cases} x(x-1) & : \quad x>2 \\ -x(x-1) & : \quad x<2 \end{cases}$

(b) h غير معرّفة عند $x=2$

$\therefore$ h غير متصلة عند $x=2$

«حاول أن تحل»

1 (a) $h(x)=-x^2-4x+3$ متصلة عند $x=3$

$g(x)=|x|$ متصلة عند $x=3$

$\therefore$ دالة الجمع f متصلة عند $x=3$

(b) $g(x)=\tan x$ متصلة عند $x=\frac{\pi}{4}$

$h(x)=x+1$ متصلة عند $x=\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ الدالة $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ متصلة عند $x=\frac{\pi}{4}$

2 كل من الدالتين $h(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $g(x)=\frac{2x}{x-2}$ متصلة عند $x=1$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=1$

3 (a) الدالة حدودية نسبية، دالة البسط ودالة المقام متصلتان عند $x=-2$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=-2$

(b) $g(x)=x^2-4x+3$ متصلة عند $x=-2$ مع

$f(-2)=\sqrt{15}>0$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=-2$

4 **(a)** $4x^2+12x+12$ **(b)** 4

(c) $2x^2+9$ **(d)** 11

5 **(a)** $\dfrac{\sqrt{x^4+8x^2+25}}{x^2+4}$ **(b)** $\dfrac{3}{8}$

6 g دالة متصلة عند $x=1$ (1)

$g(1)=5$

f دالة متصلة على $(-\infty,-2)$ و $(-2,\infty)$

$\therefore$ f دالة متصلة عند $x=5$

أي أن f دالة متصلة عند $x=g(1)$ (2)

من (1) و(2) نجد أن $(f\circ g)$ متصلة عند $x=1$

7 $h(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=|x|$

h دالة متصلة عند $x=0$, $h(0)=2$

g دالة متصلة عند $x=2$

$\therefore$ f دالة متصلة عند $x=0$

(9) لتكن: $f(x)=2x^2-3$ ، $g(x)=\sqrt{x+4}$. ابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=-2$

(10) ابحث اتصال الدالة f: $f(x)=\left|\sqrt{x}-3\right|$ عند $x=4$

(11) ابحث اتصال الدالة g: $g(x)=\sqrt{x^2+1}-|x-3|$ عند $x=3$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x)=x^2+|x-1|$ متصلة عند $x=3$ (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{2}{x}$ متصلة عند $x=0$ (a) (b)

(3) الدالة f: $f(x)=\dfrac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x=0$ (a) (b)

(4) الدالة f: $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x=3$ (a) (b)

(5) الدالة f: $f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$ متصلة عند $x=2$ (a) (b)

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) نقاط انفصال الدالة f: $f(x)=\dfrac{-x+2}{x^2+9}$ عند:

(a) $x=3$ (b) $x=-3$

(c) $x=2$ (d) لا يوجد نقاط انفصال

(7) نقاط انفصال الدالة f: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ عند x تساوي:

(a) $1\ ,\ -1$ (b) $2\ ,\ -2$ (c) $1\ ,\ 2$ (d) $-1\ ,\ -2$

(8) لتكن الدالة f: $f(x)=x^2+3, x\neq 0$ ، الدالة g: $g(x)=\dfrac{x}{x-3}$ ، فإن: $(g\circ f)(x)$ تساوي:

(a) $\dfrac{4x^2-18x+27}{(x-3)^2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2-3}$ (c) $\dfrac{x^2+3}{x^2}$ (d) $\dfrac{x^2}{x^2+3}$

(9) لتكن الدالة f: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة g: $g(x)=x^2+3, x\neq 0$ ، فإن: $(f\circ g)(x)$ تساوي:

(a) $\dfrac{x^2}{x-3}+3$ (b) $\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}+3$ (c) $\dfrac{-(x^2+3)}{x}$ (d) $\dfrac{x^2+3}{|x|}$

24

(10) لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، g: $g(x)=x^2-3$ فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي:

(a) 4 (b) -4

(c) 1 (d) -1

(11) إذا كانت g دالة متصلة عند $x=2$ فإن الدالة المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\sqrt{g(x)}$ (b) $\dfrac{1}{g(x)}$

(c) $\dfrac{g(x)}{x-2}$ (d) $|g(x)|$

(12) إذا كانت الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ متصلة عند $x=3$ فإن a يمكن أن تساوي:

(a) 4 (b) 9

(c) 16 (d) 25

25

1-7: الاتّصال على فترة

1 الأهداف

- يتعرف الاتصال على فترة.
- يدرس اتصال دالة الجذر على فترة.
- يدرس اتصال ناتج تركيب دالتين متصلتين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الاتصال على فترة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

أوجد اتصال كلّ من الدوال التالية عند النقطة المعينة:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 1}\ ,\quad x = 2$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}\ ,\quad x = 0$$

$$h(x) = x + 3 + |x^2 - 4|\ ,\quad x = 2$$

5 التدريس

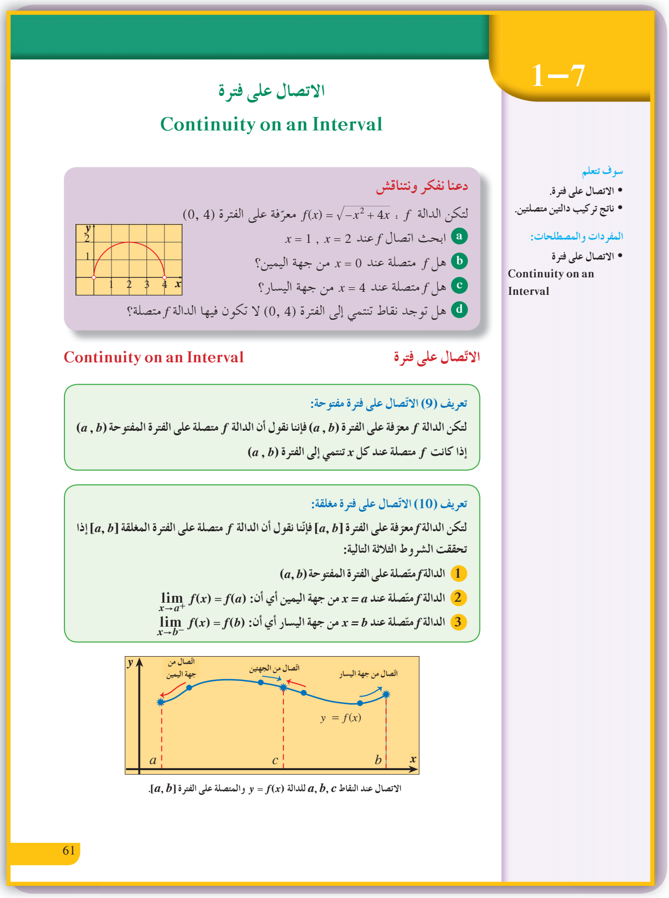
(1) أسأل الطلاب: هل يمكن دراسة اتصال دالة عند كل نقطة على فترة ما؟ ثم أسأل: متى تكون دالة متصلة على فترة مغلقة $[a\ ,\ b]$؟

هل يمكن دراسة الاتصال عند $x = a$ لجهة اليسار وعند b لجهة اليمين؟ أشر إلى أن الدالة تكون متصلة على فترة مغلقة $[a\ ,\ b]$ إذا كانت متصلة عند كل $x \in (a\ ,b)$ ومتصلة عند a لجهة اليمين وعند b لجهة اليسار.

ومن هنا يمكن التعميم والتكلم عن اتصال دالة على كل فترة من مجالها.

(2) ذكر الطلاب بشروط اتصال دالة الجذر التربيعي عند نقطة ومنها الاتصال على فترة.

(3) ذكر الطلاب بشروط اتصال تركيب دالتين عند نقطة ثم لاحظ أن ناتج تركيب دالتين كل منهما متصل على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.



1-7

سوف تتعلم

- الاتصال على فترة.
- ناتج تركيب دالتين متصلتين.

المفردات والمصطلحات:

- الاتصال على فترة Continuity on an Interval

الاتصال على فترة

Continuity on an Interval

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$ معرّفة على الفترة $(0, 4)$

a ابحث اتصال f عند $x = 1\ ,\ x = 2$

b هل f متصلة عند $x = 0$ من جهة اليمين؟

c هل f متصلة عند $x = 4$ من جهة اليسار؟

d هل توجد نقاط تنتمي إلى الفترة $(0, 4)$ لا تكون فيها الدالة f متصلة؟

الاتّصال على فترة Continuity on an Interval

تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $(a\ ,\ b)$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\ ,\ b)$ إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّنا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

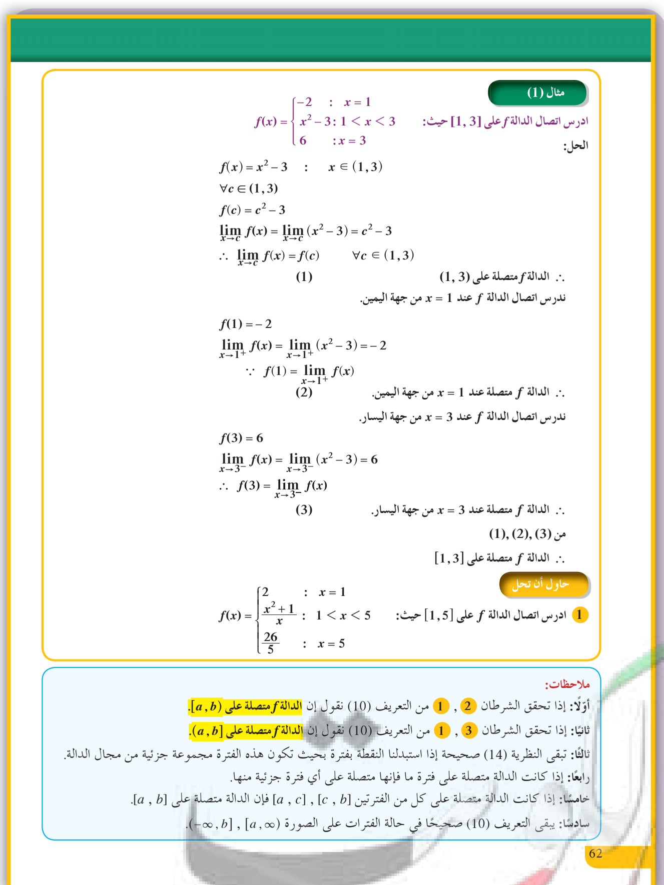
1 الدالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)

2 الدالة f متّصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

3 الدالة f متّصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

الاتصال عند النقاط a, b, c للدالة $y = f(x)$ والمتصلة على الفترة $[a, b]$.

61



مثال (1)

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث: $f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$

الحل:

$f(x) = x^2 - 3 \quad : \quad x \in (1,3)$

$\forall c \in (1,3)$

$f(c) = c^2 - 3$

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} (x^2 - 3) = c^2 - 3$

$\therefore \lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c) \qquad \forall c \in (1,3)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(1, 3)$ (1)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 1$ من جهة اليمين.

$f(1) = -2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 3) = -2$

$\because f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 1$ من جهة اليمين. (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 3$ من جهة اليسار.

$f(3) = 6$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2 - 3) = 6$

$\therefore f(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 3$ من جهة اليسار. (3)

من (1), (2), (3)

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[1,3]$

حاول أن تحل

1 ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث: $f(x) = \begin{cases} 2 & : x = 1 \\ \frac{x^2+1}{x} & : 1 < x < 5 \\ \frac{26}{5} & : x = 5 \end{cases}$

ملاحظات:

أوّلًا: إذا تحقق الشرطان 2 , 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $[a\ ,b)$**.

ثانيًا: إذا تحقق الشرطان 3 , 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $(a\ ,b]$**.

ثالثًا: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعًا: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامسًا: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[a\ ,\ c]\ ,\ [c\ ,\ b]$ فإن الدالة متصلة على $[a\ ,\ b]$.

سادسًا: يبقى التعريف (10) صحيحًا في حالة الفترات على الصورة $[a\ ,\infty)\ ,\ (-\infty\ ,b]$.

62

في المثالين (3) ,(1)

دراسة اتصال دالة على فترة أو على مجالها، حيث الدالة معرّفة على عدّة فترات ويجب دراسة النهايات من الجهتين عند النقاط المفصلية.

في المثال (2)

دراسة اتصال عدة دوال كل منها على فترة مبيّنة، وتطبيق مباشر يسمح بتركيز المفهوم عند الطلاب.

في المثال (4)

المطلوب إيجاد قيمة كل من الثابتين a , b لدالة متصلة. يعتبر المثال حالة متطورة من مفهوم الاتصال.

في المثالين (6) ,(5)

دراسة اتصال دوال جذرية. ينبغي أولًا تحديد مجال الدالة قبل الشروع في دراسة الاتصال وذلك عندما يكون دليل الجذر عددًا زوجيًّا كما يجب الانتباه إلى المقام في حال كان المجذور دالة حدودية نسبية.

في المثال (7)

توظيف ملاحظة تركيب دالتين ص 66 لدراسة الاتصال.

6 الربط

لا يوجد.

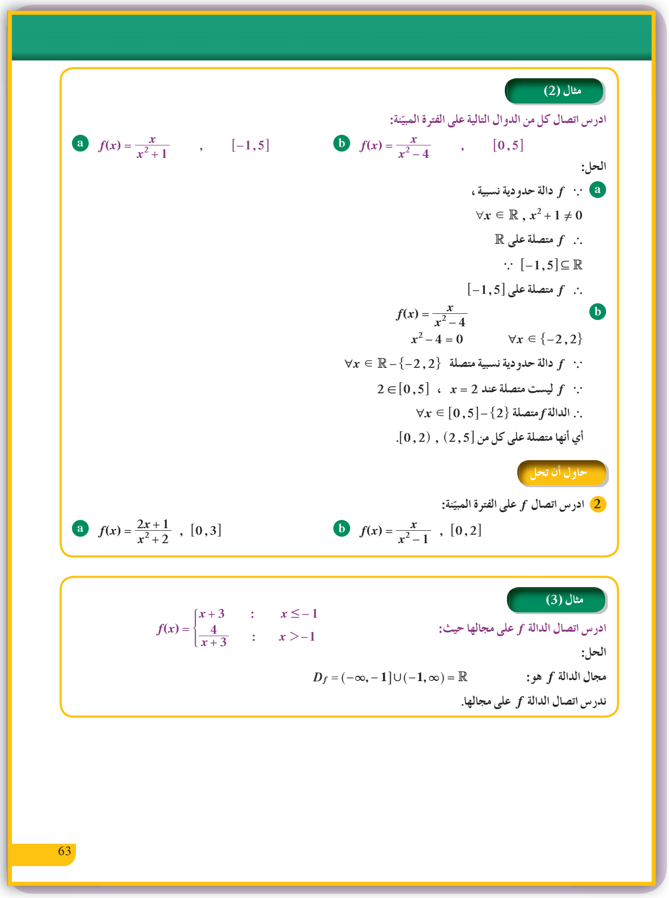
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يحاول بعض الطلاب دراسة اتصال دالة على مجالها. أشر إلى أنه يمكن دراسة اتصال دالة على كل فترة من مجالها. فمثلًا إذا كان مجال دالة f : $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$ فيمكن دراسة اتصال f على كل من الفترتين $(-\infty, a)$, (a, ∞) بمفردها وليس على المجال.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من مدى إدراكهم للمفاهيم ودقة عملهم على حل المسائل.

وأكّد على ترتيب خطوات الحل لدراسة الاتصال على فترة.



مثال (2)

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبيّنة:

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $[-1, 5]$ (b) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$, $[0, 5]$

الحل:

(a) $\because$ f دالة حدودية نسبية ،

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 \neq 0$

$\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}$

$\because [-1, 5] \subseteq \mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة على $[-1, 5]$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

$x^2 - 4 = 0 \qquad \forall x \in \{-2, 2\}$

$\because$ f دالة حدودية نسبية متصلة $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$\because$ f ليست متصلة عند $x = 2$ ، $2 \in [0, 5]$

$\therefore$ الدالة f متصلة $\forall x \in [0, 5] - \{2\}$

أي أنها متصلة على كل من $[0, 2)$, $(2, 5]$.

حاول أن تحل

2 ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

(a) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$, $[0, 3]$ (b) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $[0, 2]$

مثال (3)

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

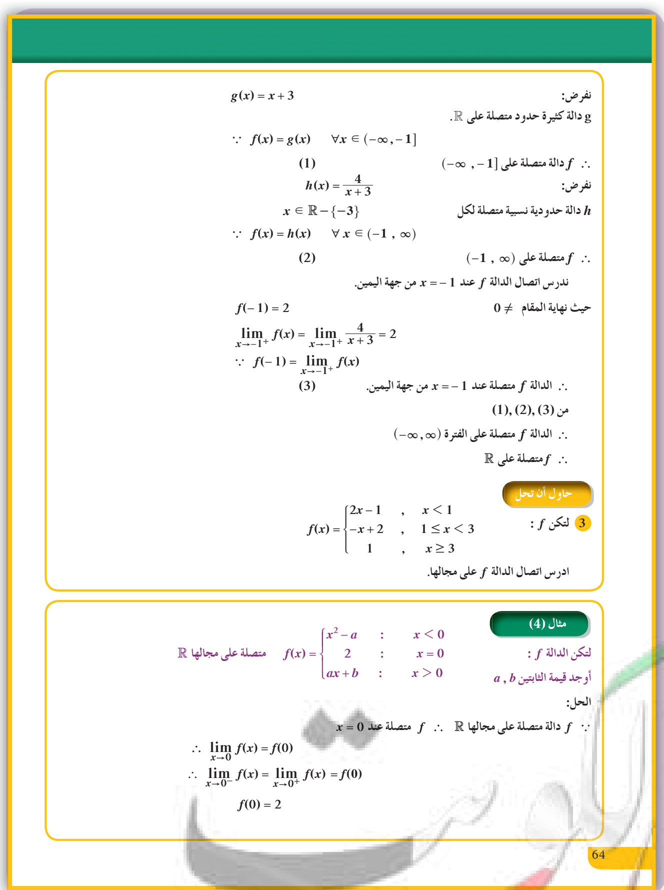
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & : \quad x \leq -1 \\ \frac{4}{x+3} & : \quad x > -1 \end{cases}$$

الحل:

مجال الدالة f هو: $D_f = (-\infty, -1] \cup (-1, \infty) = \mathbb{R}$

ندرس اتصال الدالة f على مجالها.

63



نفرض: $g(x) = x + 3$

g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$.

$\because f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-\infty, -1]$

$\therefore$ f دالة متصلة على $(-\infty, -1]$ (1)

نفرض: $h(x) = \frac{4}{x+3}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$\because f(x) = h(x) \quad \forall x \in (-1, \infty)$

$\therefore$ f متصلة على $(-1, \infty)$ (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = -1$ من جهة اليمين.

حيث نهاية المقام $\neq 0$ $\qquad f(-1) = 2$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{4}{x+3} = 2$$

$$\because f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -1$ من جهة اليمين. (3)

من (1), (2), (3)

$\therefore$ الدالة f متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$

$\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}$

حاول أن تحل

3 لتكن f :

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \quad x < 1 \\ -x+2 & , \quad 1 \leq x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها.

مثال (4)

لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : \quad x < 0 \\ 2 & : \quad x = 0 \\ ax + b & : \quad x > 0 \end{cases}$$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين a , b

الحل:

$\because$ f دالة متصلة على مجالها $\mathbb{R}$ $\therefore$ f متصلة عند $x = 0$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$f(0) = 2$

64

اختبار سريع

❶ ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \dfrac{x+1}{9-x^2}$

(a) على الفترة $[-1,2]$

f دالة حدودية نسبية متصلة بشرط:

$x \neq 3 \ , \ x \neq -3$

$\therefore$ f متصلة على $[-1,2]$

(b) على الفترة $[0,4]$

غير متصلة على الفترة $[0,4]$ لأن $x = 3$ هي نقطة انفصال للدالة f على الفترة $[0,4]$

❷ لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$

ابحث اتصال الدالة f على $[0,2]$

$D_f = (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$

الدالة g: $g(x) = x^2 - 7x + 12$ متصلة على $[0,2]$

$g(x) \geqslant 0 \ , \ \forall x \in [0,2]$

$\therefore$ f متصلة على $[0,2]$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) الدالة g: $g(x) = -x^2 + 4x$ متصلة عند $x = 1$، $x = 2$

$g(1) = 3 > 0 \ , \ g(2) = 4 > 0$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند كل من $x = 1 \ , \ x = 2$

(b) f غير معرّفة عند $x = 0$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 0$ من جهة اليمين.

(c) f غير معرّفة عند $x = 4$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 4$ من جهة اليسار.

(d) لا.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 - a) = -a$

$\therefore \ -a = 2 \implies a = -2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (ax + b) = b$

$\therefore \ b = 2$

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 5 & : \ x = 1 \\ ax + b & : \ 1 < x < 4 \\ b + 8 & : \ x = 4 \end{cases}$

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين a , b

تعلمنا دراسة اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ عند $x = c$ وكذلك يمكننا دراسة اتصال الدالة f على فترة ما باستخدام التعميم التالي:

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

مثال (5)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5,0]$.

الحل: نفرض أن $g(x) = x^2 - 2x$، $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$\therefore \ D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$

$x^2 - 2x \geq 0$

المعادلة المناظرة: $x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0 \ , \ x = 2$

مثل إشارة معامل x^2 | عكس إشارة معامل x^2 | مثل إشارة معامل x^2

$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad 2 \quad$ $+$

$\therefore$ مجال الدالة f هو $\mathbb{R} - (0,2)$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-5,0]$ حيث $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

$g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - (0,2)$

$\because [-5,0]$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R} - (0,2)$

$\therefore \ g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [-5,0] \qquad (1)$

معلومة:

إشارة الحدودية $f(x)$ تكون ثابتة لا تتغير في الفترة (a,b) إذا كانت هذه الفترة لا تحتوي على صفر من أصفار الحدودية $f(x)$. ولتعيين إشارة الحدودية في هذه الفترة نعوّض عن x بأي قيمة $c \in (a,b)$.

65

$\because$ الدالة g: $g(x) = x^2 - 2x$ دالة متصلة على $[-5,0]$ $\qquad (2)$

من $(1) , (2)$

$\therefore$ f متصلة على $[-5,0]$

حاول أن تحل

5 لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6,10]$.

مثال (6)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[-3,3]$.

الحل: نفرض أن $g(x) = 9 - x^2$، $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$D_f = \{x : g(x) \geqslant 0\}$

$9 - x^2 \geqslant 0$

المعادلة المناظرة: $9 - x^2 = 0$

$(3-x)(3+x) = 0$

$x = 3 \ , \ x = -3$

$-$ $\quad -3 \quad$ $+$ $\quad 3 \quad$ $-$

$\therefore$ مجال الدالة f هو $[-3,3]$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-3,3]$ حيث $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [-3,3] \qquad (1)$

الدالة g: $g(x) = 9 - x^2$ متصلة على $[-3,3]$ $\qquad (2)$

من (1) و (2)

$\therefore$ f متصلة على $[-3,3]$

حاول أن تحل

6 لتكن f: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$.

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

66

«حاول أن تحل»

1 الدالة f دالة نسبية متصلة على $(1,5)$

$f(1)=2 \;;\; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$

$\therefore$ الدالة f متصلة لجهة اليمين عند $x=1$

$f(5)=\dfrac{26}{5} \;;\; \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\dfrac{26}{5}$

$\therefore$ الدالة f متصلة لجهة اليسار عند $x=5$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[1,5]$

2 (a) الدالة f دالة نسبية متصلة على مجالها $(-\infty,\infty)$.

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[0,3]$

(b) الدالة f غير معرّفة عند $x=1$

ولكنها متصلة على كل من $[0,1)$ و $(1,2]$

يوجد انفصال عند $x=1$

3 على كل فترة من الفترات $(-\infty,1)$, $(1,3)$, $(3,\infty)$

f متصلة.

$f(1)=1 \;;\; \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1 \;,\; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=1$

$f(3)=1 \;;\; \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-1 \;,\; \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=1$

$\therefore$ الدالة f متصلة لجهة اليمين عند $x=3$

$\therefore$ الدالة ليست متصلة على مجالها ولكنها متصلة

على كل من الفترات $(-\infty,1]$ ، $[3,1)$ ، $[3,\infty)$

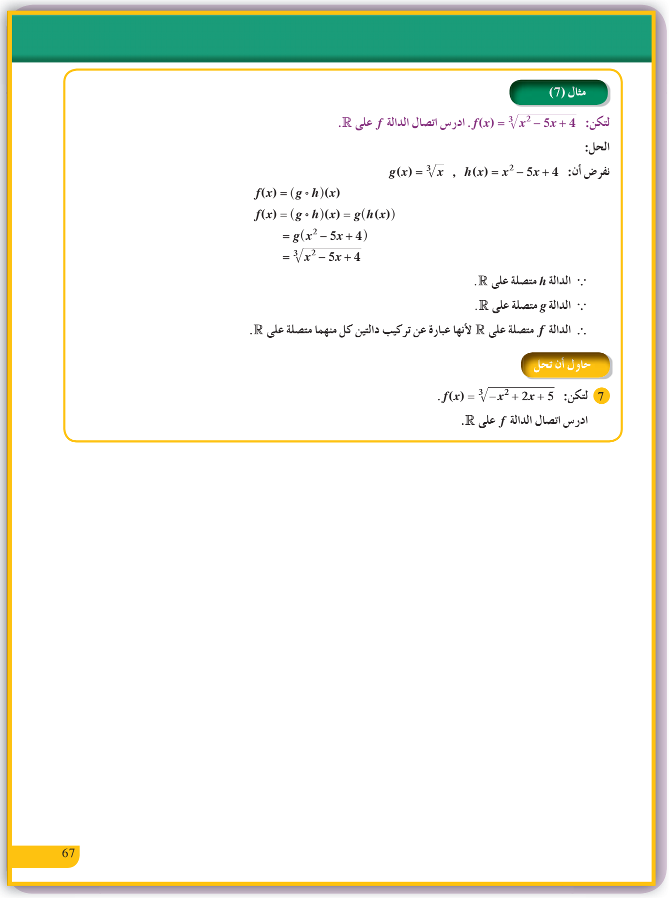
4 $f(1)=5 \;;\; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+b$

$\therefore\; a+b=5 \qquad (1)$

$f(4)=b+8 \;;\; \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=4a+b$

$\therefore\; 4a+b=b+8 \qquad (2)$

من (1)، (2) نستنتج أن: $a=2$ ، $b=3$



مثال (7)

لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل:

نفرض أن: $h(x)=x^2-5x+4$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$

$$f(x)=(g\circ h)(x)$$
$$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))$$
$$=g(x^2-5x+4)$$
$$=\sqrt[3]{x^2-5x+4}$$

$\because$ الدالة h متصلة على $\mathbb{R}$.

$\because$ الدالة g متصلة على $\mathbb{R}$.

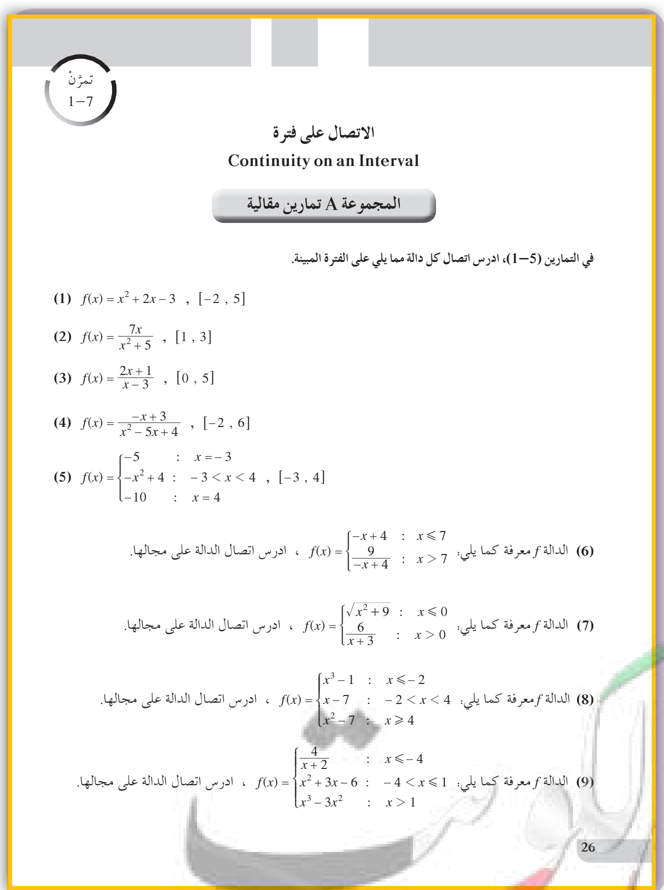
$\therefore$ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$.

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

67



تمرَّنْ 1−7

الاتصال على فترة

Continuity on an Interval

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−5)، ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبينة.

(1) $f(x)=x^2+2x-3$, $[-2,5]$

(2) $f(x)=\dfrac{7x}{x^2+5}$, $[1,3]$

(3) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$, $[0,5]$

(4) $f(x)=\dfrac{-x+3}{x^2-5x+4}$, $[-2,6]$

(5) $f(x)=\begin{cases}-5 & : x=-3\\ -x^2+4 & : -3<x<4\\ -10 & : x=4\end{cases}$, $[-3,4]$

(6) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}-x+4 & : x\leqslant 7\\ \dfrac{9}{-x+4} & : x>7\end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(7) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+9} & : x\leqslant 0\\ \dfrac{6}{x+3} & : x>0\end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(8) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}x^3-1 & : x\leqslant -2\\ x-7 & : -2<x<4\\ x^2-7 & : x\geqslant 4\end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(9) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x+2} & : x\leqslant -4\\ x^2+3x-6 & : -4<x\leqslant 1\\ x^3-3x^2 & : x>1\end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

26

5 $D_f = (-\infty , 2] \cup [5 , \infty)$

على الفترة $[6,10]$ ، $g(x) = x^2 - 7x + 10$ ،

$g(x) \geqslant 0$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[6,10]$

6 $D_f = [1,3]$

على $[1,3]$ ، $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ متصلة

و $g(x) \geqslant 0$

$\therefore$ $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $[1,3]$

7 الدالة h: $h(x) = -x^2 + 2x + 5$ متصلة على $\mathbb{R}$.

الدالة g: $g(x) = \sqrt[3]{x}$ متصلة على $\mathbb{R}$.

(دليل الجذر عدد فردي).

$\therefore$ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$. لأنها ناتج تركيب دالتين كل منهما متصل على $\mathbb{R}$.

في التمرينين (11–10)، أوجد قيم a , b بحيث تكون كل دالة متصلة على مجال تعريفها.

(10) $f(x) = \begin{cases} x^2 - \sqrt{x} & : x < 1 \\ 3x + a & : x > 1 \\ b & : x = 1 \end{cases}$

(11) $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < -2 \\ \dfrac{x^2 - a}{x - b} & : -2 \le x < 1 \\ x & : x \ge 1 \end{cases}$

(12) لتكن الدالة f: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$ ، أوجد D_f ثم ادرس اتصالها على $[0 , 4]$

في التمرينين (14–13)، ادرس اتصال كل من الدوال التالية على مجالها:

(13) $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ **(14)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

في التمرينين (16–15)، ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$.

(15) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}$ **(16)** $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على كل من $[1 , 3)$, $[3 , 5]$ فإن f متصلة على $[1 , 5]$ (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x) = x^2 - |x|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$ (a) (b)

(3) الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ متصلة على $[-2 , 2]$ (a) (b)

(4) الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$ متصلة على $(-\infty , 0)$ (a) (b)

(5) الدالة f: $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ متصلة على $(-\infty , 2)$ فقط   (a) (b)

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن الدالة f: $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 4}$ فإن الدالة f:

(a) لها نقطتي انفصال عند كل من $x = 4$, $x = -1$ (b) متصلة على $(-\infty , 4]$

(c) متصلة على كلٍ من $(-\infty, 4)$, $(4, \infty)$ (d) ليس أي مما سبق

27

(7) إذا كانت f دالة متصلة على $[-2 , 3]$ فإن:

(a) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = f(3)$

(c) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$ (d) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = f(-2)$

(8) الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 25}}$ متصلة على:

(a) $\left(-\infty , \frac{1}{2}\right]$ (b) $(5 , \infty)$

(c) $\mathbb{R}$ (d) $(-5 , 5)$

(9) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} & : x \leqslant -3 \\ \dfrac{\sqrt{x^2 + 16}}{2} & : -3 < x < 0 \\ \dfrac{4 - x^2}{x - 2} & : x \geqslant 0 , x \neq 2 \end{cases}$ ، فإن f دالة متصلة على:

(a) $(-\infty , \infty)$ (b) $(-\infty , 2)$

(c) $(-\infty , 0]$ (d) $(-\infty , -3]$

(10) الدالة f: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + m}{x - 2} & : x < 1 \\ x + n & : x > 1 \\ 2m & : x = 1 \end{cases}$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذا كان:

(a) $m = -1$, $n = 3$ (b) $m = 1$, $n = -3$

(c) $m = -1$, $n = -3$ (d) $m = 1$, $n = 3$

(11) الدالة g: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & : x > 1 \\ 3x & : x \le 1 \end{cases}$ متصلة على:

(a) $(-\infty , 1]$, $(1 , \infty)$ (b) $(-\infty , 1)$, $[1 , \infty)$

(c) $(-\infty , \infty)$ (d) $(-\infty , 3]$

28

المرشد لحل المسائل

حل «مسألة إضافية»

(a) $D=(-\infty,-2)\cup(-2,5)\cup(5,\infty)$

(b) $k=-7$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-7x^3-15x^2+2x-8}{x^2-3x-10} & , \quad x\neq -2 \\ & \quad\;\; x\neq 5 \\ \dfrac{54}{7} & , \quad x=-2\end{cases}$$

المرشد لحل المسائل

لتكن الدالّة: $f(x)=\dfrac{x^3+kx^2+3x-2}{x^2-x-2}$ حيث k عدد صحيح.

a أوجد مجال الدالّة f

b أوجد قيمة k التي تجعل من الممكن إعادة تعريف الدالّة f لتصبح متّصلة عند $x=2$، ثم أعد تعريف الدالّة.

الحل:

a المقام لا يساوي صفر $\quad x^2-x-2\neq 0$

تحليل المقام $\quad (x+1)(x-2)\neq 0$

$x\neq -1\ ,\ x\neq 2$

$\therefore$ مجال الدالّة: $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$

b كي نعرف الدالّة وتصبح متّصلة عند $x=2$، يجب أن يكون 2 صفرًا للبسط أي:

أعداد حقيقية a,b,c $\quad x^3+kx^2+3x-2=(x-2)(ax^2+bx+c)$

نتوسّع $\quad x^3+kx^2+3x-2=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

بمقارنة المعاملات نجد أن: $a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=1$

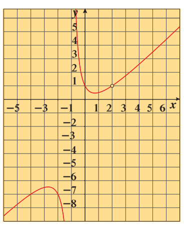
فنستنتج أن: $k=b-2a=-1-2(1)=-3$

تصبح معادلة الدالة: $f(x)=\dfrac{\cancel{(x-2)}^{1}(x^2-x+1)}{\cancel{(x-2)}_{1}(x+1)}$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x+1}=\frac{3}{3}=1$$

عندها يمكن إعادة تعريف الدالة وتسميتها بـ g

$$\therefore\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+3x-2}{x^2-x-2} & , \ x\neq 2\ ,\ x\neq -1 \\ 1 & , \ x=2\end{cases}$$



مسألة إضافية

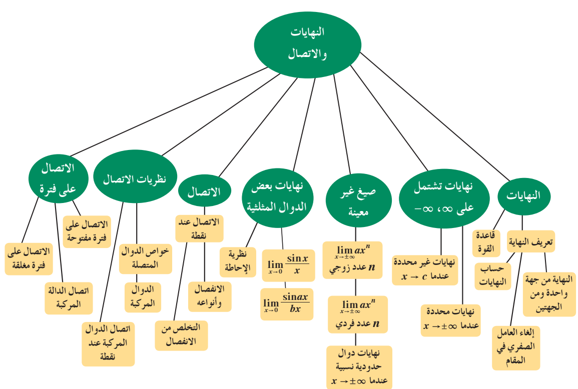
لتكن الدالّة $f(x)=\dfrac{x^4+kx^3-15x^2+2x-8}{x^2-3x-10}$ حيث k عدد صحيح.

a أوجد مجال الدالّة f

b أعد تعريف الدالة f بحيث تكون منفصلة عند $x=-2$ فقط.

68

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



ملخص

- لتكن x كمية متغيرة، c عددًا حقيقيًّا، نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.
- ليكن $c\ ,\ L$ عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرّفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c نكتب: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x\neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L.
- بفرض أن $c\ ,\ L$ عددين حقيقيين يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار ويعبر عن ذلك: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L \iff \lim\limits_{x\to c^+} f(x)=L=\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$
- إذا كانت f: $f(x)=k$ وكان $c\ ,\ k$ أعدادًا حقيقيّة، k ثابت فإن: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} k=k$
- إذا كانت $f(x)=x$ حيث c عددًا حقيقيًّا، فإن: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} x=c$
- إذا كانت k, c, M, L أعدادًا حقيقية، $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to c} g(x)=M$ فإن:

a قاعدة الجمع: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x))=L+M$

b قاعدة الطرح: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))=L-M$

69

- Ⓒ قاعدة الضرب: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$
- Ⓓ قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$
- Ⓔ قاعدة القسمة: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}\ ,\ M\neq 0$

- إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عدد حقيقيّ، فإنّ:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \dots + a_0$$

- إذا كانت $f(x)\ ,\ g(x)$ كثيرتي حدود، c عدد حقيقيّ، فإنّ: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}\ ,\ g(c)\neq 0$
- إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا وكانت $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة فإن:

Ⓐ $\lim_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n$ Ⓑ $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن يكون $c>0$)

Ⓒ $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن تكون $\lim_{x\to c} f(x) > 0$)

- لتكن f دالة معرّفة في الفترة (a,∞) فإن: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞.
- لتكن f دالة معرّفة في الفترة $(-\infty, a)$ فإن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$. يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.
- لتكن: $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$
- لتكن: $f(x) = \frac{k}{x^n}\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+\ ,\ k\in\mathbb{R}$ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{k}{x^n} = 0$
- إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي فإن: $\lim_{x\to a}[f(x)\pm b] = \pm\infty$
- إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي موجب فإن: $\lim_{x\to a}[b\cdot f(x)] = \pm\infty$

وإذا كان b عدد حقيقي سالب $\lim_{x\to a}[b\cdot f(x)] = \mp\infty$

- إذا كان n عدد صحيح موجب وزوجي فإن: $\lim_{x\to c}\frac{1}{(x-c)^n} = \infty$
- إذا كان n عدد صحيح موجب وفردي فإن:

① $\lim_{x\to c^+}\frac{1}{(x-c)^n} = \infty$ ② $\lim_{x\to c^-}\frac{1}{(x-c)^n} = -\infty$

- إذا كانت قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تؤول x إلى c فإننا نعبّر عن ذلك رياضيًّا بالتالي: $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$
- إذا كانت $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما x تؤول إلى c فإننا نعبّر عن ذلك رياضيًّا بالتالي: $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ **إذا وفقط إذا** ($\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$)
- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ **إذا وفقط إذا** ($\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$)
- الخط $y=b$ يسمى خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة $y=f(x)$ إذا توفر أحد الشرطين التاليين أو كلاهما:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

- الخط $x=a$ يسمى خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة $y=f(x)$ إذا توافر على الأقل أحد الشروط التالية:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty\ ,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty\ ,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

- لتكن: $f(x) = ax^n\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+\ ,\ a\in\mathbb{R}^*$:

① إذا كان n عدد زوجي فإن: $\lim_{x\to\pm\infty} ax^n = \begin{cases}\infty & : a>0\\ -\infty & : a<0\end{cases}$

② إذا كان n عدد فردي فإن: $\lim_{x\to-\infty} ax^n = \begin{cases}-\infty & : a>0\\ \infty & : a<0\end{cases}$ ، $\lim_{x\to\infty} ax^n = \begin{cases}\infty & : a>0\\ -\infty & : a<0\end{cases}$

- إذا كانت كل من $f\ ,\ g$ دالة حدودية حيث: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0\ ,\ g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$

فإن: Ⓑ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 : n<m$ Ⓐ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} : n=m$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ حيث x بالراديان. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$
- إذا كان $a\ ,\ b$ عددين حقيقيين، $a\neq 0\ ,\ b\neq 0$ فإن: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
- ليكن $L\ ,\ c$ عددين حقيقيين، إذا كان $g(x)\le f(x)\le h(x)$ لكل $x\neq c$ في جوار c، وكان $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$

فإنّ: $\lim_{x\to c} f(x) = L$

- تكون الدالة $y=f(x)$ متصلة عند نقطة c في مجالها إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$
- لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط الثلاثة التالية:

① الدالة معرّفة عند $x=c$ أي $f(c)$ موجودة.

② $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة

③ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f ليست متصلة (منفصلة) عند c.

- إذا كانت $f\ ,\ g$ دالتين متّصلتين عند $x=c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x=c$

① $f+g$ ② $f-g$

③ $k\cdot f$ حيث k أيّ عدد حقيقي ثابت. ④ $f\cdot g$

⑤ $\frac{f}{g}\ ,\ g(c)\neq 0$

- الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c\ ;\ c\in\mathbb{R}^+$ حيث n عدد صحيح زوجي موجب، ومتصلة عند كل $x=c\ ;\ c\in\mathbb{R}$ حيث n عدد صحيح فردي أكبر من 1.
- إذا كانت g دالة متصلة عند $x=c$ وكانت $g(c)>0$ فإن الدالة: $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x=c$
- إذا كانت كل من f, g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعيّن دالة مركبة h: $h(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x))$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "(g\circ f)(x)"'] & f(x) \arrow[d, "g"] \\ & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

- إذا كانت f متّصلة عند c و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g\circ f$ متّصلة عند c.
- إذا كانت الدالّة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّ:

① الدّالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)، إذا كانت f متّصلة عند كل x في الفترة (a, b)

② الدّالة f متّصلة عند a من جهة اليمين إذا كان: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

③ الدّالة f متّصلة عند b من جهة اليسار إذا كان: $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

وإذا تحقّقت الشروط الثلاثة، فإنّ الدالّة تكون متّصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$

- إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x)\geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

اختبار الوحدة الأولى

في التمارين (1–11)، أوجد النهايات.

(1) $\lim_{x\to -2}(x^3 - 2x^2 + 1)$ (2) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{3x^2-2x+5}\right)$ (3) $\lim_{x\to -4}\sqrt{1-2x}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$ (5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{4x}$ (6) $\lim_{x\to 0}\frac{x\csc x+1}{x\csc x}$

(7) $\lim_{x\to 1}|x-2|+2x$ (8) $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{9-x}-2}{x-5}$ (9) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$

(10) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$ (11) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

(12) لتكن الدالة f: $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

(a) بيّن أن $f(x)$ غير متصلة عند $x=-2\ ,\ x=2$

(b) أعد تعريف الدالة f بحيث تصبح متصلة عند $x=2$

في التمرينين (13, 14)، أوجد المقاربات الرأسية لمنحنى الدالة f.

(13) $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ (14) $f(x) = \frac{x-1}{x^2(x+2)}$

(15) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x\le -1\\ -x & , \quad -1<x<0\\ 1 & , \quad x=0\\ -x & , \quad 0<x<1\\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$

(a) أوجد إن أمكن: $\lim_{x\to 1} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 0} f(x)\ ,\ \lim_{x\to -1} f(x)$

(b) هل f متّصلة عند كل من $x=-1$ ، $x=0$ ، $x=1$؟ فسّر إجابتك.

في التمرينين (16, 17)، أوجد جميع نقاط عدم الاتصال للدالّة إن وجدت:

(16) $f(x)=\dfrac{x+1}{4-x^2}$

(17) $g(x)=\sqrt[3]{3x+2}$

في التمرينين (18, 19)، أوجد المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية.

(18) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-2x+1}$

(19) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-1}{x^2+2x}$

في التمرينين (20, 21)، أوجد قيمة k التي تجعل الدالة f متصلة.

(20) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3} & , \ x\neq 3\\ k & , \ x=3\end{cases}$

(21) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{2x} & , \ x\neq 0\\ k & , \ x=0\end{cases}$

(22) لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ ، g : $g(x)=x^2-5$ أوجد:

(a) $(g\circ f)(x)$

(b) $(g\circ f)(0)$

(c) $(f\circ g)(x)$

(d) $(f\circ g)(0)$

(23) لتكن f: $f(x)=\begin{cases}1 & : \ x\leqslant 2\\ \dfrac{\sqrt{x^2+21}}{5} & : \ 2<x<15\\ \dfrac{225-x^2}{x-15} & : \ x>15\end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

30

تمارين إثرائية

(1) لتكن f: $f(x)=\sqrt{3x-2}$

بيّن أن: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=2$

(2) في كلٍّ مما يلي أوجد: $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} g(x)$, $\lim\limits_{x\to b}(f\cdot g)(x)$

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$, $b=0$

(b) $f(x)=-\dfrac{2}{x^3}$, $g(x)=4x^3$, $b=0$

(c) $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$, $g(x)=(x-2)^3$, $b=2$

(d) $f(x)=\dfrac{5}{(3-x)^4}$, $g(x)=(x-3)^3$, $b=3$

(3) لتكن f دالة متصلة ولا تساوي الصفر على الفترة $[a\ ,\ b]$.

بيّن أن دائمًا $f(x)>0$ لكل $x\in[a\ ,\ b]$ أو $f(x)<0$ لكل $x\in[a\ ,\ b]$

(4) بيّن أنه إذا كانت الدالة f متصلة على فترة ما فإن الدالة $|f|$ هي كذلك أيضًا.

(5) لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}|x^3-4x| & , \ x<1\\ x^2-2x-2 & , \ x\geq 1\end{cases}$

(a) أوجد النهاية لجهة اليمين والنهاية لجهة اليسار لـ f عند $x=1$

(b) هل f لها نهاية عندما $x\to 1$؟ إذا كان كذلك فما هي تلك النهاية؟ وإذا لم يكن كذلك فبيّن السبب.

(c) هل f متصلة عند $x=1$؟

(6) لنأخذ الدالتين f ، g حيث إن: $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ، $g(x)=3x-4$

(a) حدّد مجال: $f\circ g$ ، $g\circ f$

(b) أوجد: $(f\circ g)(x)$ ، $(g\circ f)(x)$

(c) أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty}(f\circ g)(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(g\circ f)(x)$

(7) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax^2+bx-5}{\sqrt{4x^2-5x+8}}=-1$ فأوجد قيم a , b.

31

(8) لتكن f ، g دالتين: $f(x)=\sqrt{x^2-3}$ ، $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

أوجد نقاط انفصال الدالة $g\circ f$. هل يمكن التخلص من هذا الانفصال؟ اشرح.

(9) لتكن f , g دالتين: $f(x)=x^2+1$ معرفة على $\mathbb{R}$،

$g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}$ معرفة لكل $x\in(-\infty\ ,\ -2)\cup(2\ ,\ \infty)$

(a) أوجد نقاط انفصال: $f\circ g$

(b) أوجد المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية لمنحنى الدالة $f\circ g$

(10) لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}5 & : \ x\leqslant 4\\ \dfrac{x^2+9}{5} & : \ 4<x\leqslant 18\\ \dfrac{324-x^2}{x-18} & : \ x>18\end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

في التمارين (11—16) أوجد النهاية:

(11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

(12) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

(13) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(14) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{14x^3-5x+27}{x^4+10}$

(16) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4+12x^2+5}{7x^2+6}$

(17) لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}x & , \ x>0\\ x+1 & , \ x\leq 0\end{cases}$

(a) ارسم منحنى الدالة f.

(b) أوجد: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(18) بيّن في كل دالة مما يلي نقاط الانفصال وابحث إذا كان بالإمكان التخلص منه.

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+10}{x+2}$

(b) $f(x)=\begin{cases}-x+4 & , \ x>3\\ x-2 & , \ 0<x<3\\ x-1 & , \ x\leq 0\end{cases}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

(d) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

32

الوحدة الثانية: الاشتقاق The Derivatives

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

2–1: معدّلات التغيّر وخطوط المماس

جزء **1:** السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.

جزء **2:** متوسط معدل التغيّر وميل المماس.

2–2: المشتقة

جزء **1:** تعريف المشتقة.

جزء **2:** المشتقة من جهة واحدة.

جزء **3:** متى تكون $f'(a)$ غير موجودة.

جزء **4:** الاشتقاق والاتصال.

2–3: قواعد الاشتقاق

جزء **1:** قواعد اشتقاق.

جزء **2:** كتابة معادلة المماس ومعادلة الناظم.

جزء **3:** قوى x الصحيحة السالبة (الأسس الصحيحة السالبة).

2–4: مشتقات الدوال المثلثية

جزء **1:** مشتقات الدوال الجيبية.

جزء **2:** مشتقات الدوال المثلثية الأخرى.

2–5: قاعدة السلسلة

جزء **1:** قاعدة السلسلة.

جزء **2:** قاعدة سلسلة القوى.

2–6: المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

جزء **1:** المشتقات ذات الرتب العليا.

جزء **2:** الاشتقاق الضمني.

جزء **3:** إثبات متطابقات.

مقدمة الوحدة

يتعرف الطلاب في هذه الوحدة مشتقة الدالة من الرتبة الأولى والمشتقات ذات الرتب العليا، كما أنهم يتعرفون مشتقات الدوال المثلثية وقاعدة السلسلة والمشتقة من جهة واحدة أو من الجهتين والاشتقاق الضمني.

تبدأ الوحدة بدراسة متوسط التغير والسرعة المتوسطة والسرعة اللحظية، ثم يوجد الطلاب ميل مستقيم ومنه يستنتجون ميل خط المماس وهو نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$.

تُعرّف مشتقة دالة عند نقطة إحداثيها السيني a على أنها $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ في حال وجودها.

ومن مشتقة دالة عند نقطة تعمم الفكرة للوصول إلى دالة المشتقة التي يرمز إليها بـ f'.

يدرس الطلاب قابلية الاشتقاق والحالات الأربع التي لا تكون فيها النهاية موجودة، ثم يتعرفون العلاقة بين الاشتقاق والاتصال، ويتعرفون أيضًا قواعد الاشتقاق التي تعد من المواضيع المهمة في الوحدة نظرًا لكثرة استخدامها لاحقًا في الدروس التطبيقية وفي حل المسائل، ونشير هنا إلى دراسة مشتقات الدوال المثلثية والتي يحتاج إليها الطالب في الدراسات الجامعية وفي بقية الفروع العلمية (الفيزياء مثلًا).

في نهاية الوحدة يطبّق الطالب قاعدة السلسلة التي تسمح بإيجاد مشتقات دوال مركبة.

اهتم اليونانيون القدماء (الإغريق) بإيجاد مماسات الدوال واقترح أرخيمدس (Archmides) $(-287,\ -212)$ طريقة لإنشاء مماس في نقطة على منحنى لولبي.

بقي الأمر هكذا حتى القرن السابع عشر فتمّ وضع طرق علمية لإنشاء المماسات.

وقد طور كل من لايبنتز (Leinmiz) ونيوتن (Newton) هذه الطرق وصولًا إلى حساب التفاضل.


الوحدة الثانية

الاشتقاق

The Derivatives

مشروع الوحدة: تأثير الضغط على الغطّاس

1 مقدمة المشروع: يساعد جهاز التنفّس الذي يستخدم في الغطس، علماء البحار على استكشاف أعماق المياه إلى أبعد حدود ممكنة، بالإضافة إلى كون الغطس أيضًا رياضة شعبيّة. ولكن، للغطس بأمان، يتوجّب على الغطّاسين فهم ضغط الماء في الأعماق لأنّه يصبح خطيرًا إذا تخطّى 12 m.

تسمح أجهزة التنفس الحديثة للغطّاسين بالبقاء لأوقات طويلة تحت الماء. ولكن عمق الغطس ومدّته يبقيان محدودين ويتأثّران في الضغط الذي يسمح جسم الإنسان بتحمّله. سوف تستخدم الرياضيّات لاكتشاف الأمان في كيفيّة استخدام أجهزة التنفّس للغطس ثمّ سوف تصمّم ملصقًا عن هذا الجهاز.

2 الهدف: إيجاد العلاقة بين معدّل الهواء الذي يستخدمه الغطّاس وعدّة عوامل مثل: العمق، سعة رئتيه، عمر الغطّاس...

3 اللوازم: ورق رسم بياني — آلة حاسبة — حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

تعطيك أجهزة التنفّس للغطس كمّيّة الضغط تحت الماء. عند سطح الماء يكون ضغط الهواء واحدًا (ضغط جوّيّ) $(P = 1\,\text{atm})$. يتزايد الضغط كلّما غطسنا أكثر تحت الماء.

وحدة قياس الضغط $P(\text{atm})$ تتغيّر مع العمق d (بالمتر) بحسب المعادلة: $P = \frac{d}{13} + 1$. ومن المعروف، بحسب قانون بويل، أنّ حجم الهواء V يتغيّر عكسيًّا مع الضغط P أي أنّ $V = \frac{12}{P}$ حيث V تقاس بالكوارت (qt).

a أوجد الضغط على سطح الماء.

b أوجد الضغط على عمق 5 m، من ثمّ أوجد حجم الهواء في رئتيه.

c ارسم جدولًا تبيّن فيه تغيّر الضغط وحجم الهواء نسبة للضغط $(d < 20\,\text{m})$.

d اصنع رسمًا بيانيًّا تبيّن فيه تغيّر حجم الرئة نسبة إلى العمق.

5 التقرير: أجر بحثًا عن متوسط حجم الرئة لعدة أعمار، من ثمّ اكتب تقريرًا مفصّلًا تبيّن فيه متوسط العمق الذي يستطيع النزول إليه كل غطاس بحسب عمره.

دروس الوحدة

معدلات التغير وخطوط المماس	المشتقة	قواعد الاشتقاق	مشتقات الدوال المثلثية	قاعدة السلسلة	المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني
2–1	2–2	2–3	2–4	2–5	2–6

72

في القرن الثامن عشر، طرح دالمبير (D'Alembert) التحديد العلمي لمشتقة دالة عند نقطة على أنها نهاية متوسط معدل التغيّر.

وقد تطوّر هذا المفهوم وتركز في أواسط القرن التاسع عشر، وكان لاغرانج (Lagrange) أول من استخدم الرمز $f'(x)$ للدلالة على مشتقة دالة عند نقطة.

مشروع الوحدة

اسأل الطلاب إذا كانت لديهم معلومات عن الغطس والأدوات المستخدمة في الغطس. اشرح لهم أن حجم الهواء في الرئتين يتزايد عندما يصعد الغطاس إلى سطح الماء. إذا صعد الغطاس بسرعة كبيرة فإن الفقاقيع الغازية حول الجسم تحدث تصلبًا في العضلات.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) $P = 1$

(b) $P = 1.385$ atm

(c)

العمق d(m)	الضغط P(atm)	الحجم V(qt)
1	1.077	11.142
4	1.308	9.174
7	1.539	7.797
10	1.77	6.780
13	2	6
16	2.231	5.379
19	2.642	4.542

(d)


الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نهاية دالة عند نقطة معينة.
- تعلمت اللانهاية لدالة.
- تعلمت الاتصال لدالة عند نقطة وعلى فترة.
- تعرفت نقاط عدم الاتصال (الانفصال) لدالة.
- تعلمت كيفية التخلص من نقاط الانفصال إذا أمكن ذلك.

ماذا سوف تتعلم؟

- إدراك مفهوم التغيّر في الدالة، ومتوسّط معدّل التغيّر، و معدّل التغيّر.
- حساب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- إيجاد معادلات خط المماس والخط العمودي على المماس عند نقطة معطاة على منحنى الدالة.
- إيجاد الميل والمشتقات باستخدام تعريف المشتقّة.
- إيجاد المشتقة من جهة واحدة.
- التعرف على العلاقة بين الاتصال عند نقطة وقابلية الاشتقاق.
- التمييز بين الركن والناب والمماس الرأسي وعدم الاتصال.
- التعرف على العلاقة بين الاشتقاق والاتصال.
- إيجاد مشتقات الدوال ومن ضمنها مشتقات الرتب العليا.
- استخدام قواعد الاشتقاق للدوال المثلثيّة.
- إيجاد مشتقة دالة الدالة باستخدام قاعدة السلسلة.
- إيجاد الاشتقاق الضمني وتطبيقه.

المصطلحات الأساسية

مشتقة دالة – رمز المشتقة f'، $\frac{dy}{dx}$ – $\frac{d}{dx}(f(x))$ – معدل التغيّر – متوسط معدل التغير – السرعة المتوسطة – السرعة اللحظية – ميل المماس – معادلة المماس – معادلة الخط العمودي (الناظم) – رسم بياني – قابلية الاشتقاق– الاشتقاق – ركن – ناب – مماس رأسي – قواعد الاشتقاق – قاعدة السلسلة – اشتقاق الدوال المثلثية – اشتقاق من رتب عليا – اشتقاق ضمني.

أضف إلى معلوماتك

يعتبر التفاضل Differentiation أحد الفروع المهمة في الرياضيات حيث هو مفاضلة دالة عند نقطة معينة أي مقياس لمقدار تغير متغير بالنسبة إلى متغير آخر. من المتعارف عليه أن اكتشاف علم التفاضل يعود إلى نيوتن Newton (1642–1727) ولايبنتز Leibniz (1646–1716) حيث أصدرا بشكل منفصل حوالى سنة 1685 منشورات مفصلة عن هذا العلم.

اسحق نيوتن Isaac Newton (1642–1727)
ساهم نيوتن في دراسة متسلسلات القوى ونظرية ذات الحدين ووضع طريقة نيوتن لتقريب جذور الدوال إضافة إلى تأسيسه لحساب التفاضل والتكامل.

لايبنتز Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)
ينسب إليه رمز التفاضل ∂x ورمز التكامل $\int_{t=x_0}^{x} f(t).\partial t$

73

التقرير

راجع مع رفاقك الملصق الذي وضعته. واسألهم عن مقترحاتهم. تحقق من أن بياناتك وأمثلتك ورسومك البيانية دقيقة وواضحة. قارن عملك مع عمل المجموعات الأخرى.

سلّم التقييم

4	الحسابات كلها صحيحة – الرسوم البيانية واضحة ودقيقة وتبيّن العلاقة بين المتغيرات – الشروحات واضحة وكاملة – الملصق واضح ودقيق.
3	الحسابات في معظمها صحيحة – الرسوم البيانية في معظمها واضحة ودقيقة مع بعض الأخطاء الخفيفة – الشروحات غير كاملة – الملصق ينقصه بعض الدقة.
2	الحسابات تحتوي على أخطاء متعدّدة – الرسوم البيانية غير دقيقة – الملصق غير واضح أو ينقصه معلومات.
1	معظم عناصر هذا المشروع غير كاملة أو ناقصة.

1–2: معدلات التغير وخطوط المماس

1 الأهداف

- يدرك مفهوم التغيّر في الدالة ومعدل التغيّر ومتوسط معدل التغيّر.
- يحسب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- يوجد ميل مماس منحنى الدالة عند نقطة.
- يوجد معدل التغيّر للدالة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

متوسط معدل التغير – معدل التغيّر – السرعة المتوسطة – السرعة اللحظية – ميل المماس – العمودي (الناظم).

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – منقلة – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلّاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) على افتراض أن سيارة تسير على الطريق السريع بسرعة متوسطها 110 km/h ، ما المسافة التي تجتازها في ساعتين ونصف الساعة؟

(b) **(1)** أوجد ميل المستقيم d المار بالنقطتين: $A(2,-3); B(4,1)$ اكتب معادلة المستقيم d.

(2) أوجد ميل المستقيم d' المار بالنقطة A وعمودي على المستقيم d . اكتب معادلة المستقيم d'.

5 التدريس

بيان دالة خطية f : $f(x) = ax + b$ هو المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$، يمثل الميل $m = a$ المعدل الذي تتغير فيه y وفق تغير x . هذا المعدل ثابت. ولكن للدوال غير الخطية متوسط معدل التغير يختلف بين نقطة وأخرى على منحنى الدالة. لإيجاد متوسط معدل التغير اللحظي نستخدم النهايات التي سبق دراستها. تسمح دراسة متوسط معدل التغير ونهايته بإيجاد السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية لجسم متحرك في فترة زمنية ما.

2–1

معدلات التغير وخطوط المماس

Rates of Change and Tangent Lines

سوف تتعلم

- إدراك مفهوم التغيّر في الدالة ومعدل التغير ومتوسط معدل التغيّر.
- حساب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- إيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند نقطة.
- إيجاد معدل التغير للدالة.

المفردات والمصطلحات:

- معدل التغيير Rate of Change
- السرعة المتوسطة Average Velocity
- السرعة اللحظية Instantaneous Velocity
- الميل Slope
- المماس Tangent
- العمودي Normal

دعنا نفكر ونتناقش

أظهرت التجارب أن المسافة التي يقطعها جسيم سقط سقوطًا حرًّا من السكون نحو سطح الأرض تعطى بالعلاقة: $d(t) = 4.9t^2$ حيث d المسافة بالمتر (m)، t الزمن بالثواني (s) (قانون جاليليو).

فإذا سقط جسيمًا سقوطًا حرًّا من مرتفع، أوجد بعد مرور ثانيتين من السقوط:

a التغير في الزمن.

b التغير في المسافة.

c السرعة المتوسطة $\overline{v}$: $\overline{v} = \dfrac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}}$

السرعة المتوسّطة والسرعة اللحظية Average and Instantaneous Velocity

نوجد **السرعة المتوسطة** $\overline{v}$ لجسم متحرّك، في فترة زمنيّة ما، بقسمة التغير في المسافة (Δd) على التغير في الزمن (Δt).

وعليه تكون وحدة السرعة المتوسّطة عبارة عن وحدة المسافة مقسومة على وحدة الزمن؛ أي كيلومتر/ساعة (km/h) أو متر/ثانية (m/s) أو أيّ وحدات أخرى موجودة في المسألة قيد الدراسة.

وفي حالات كثيرة سواء أكان في مجال العلوم أم في الحياة اليوميّة لا تمدّنا السرعة المتوسطة لجسم متحرّك بالمعلومات ذات الأهمية القصوى فمثلًا: إذا ارتطمت سيّارة بحائط خرسانيّ فإنّ ما سيحدّد الآثار المترتبة على الحادث ليس مقدار السرعة المتوسطة التي تقاد بها السيّارة من نقطة بدء الحركة حتّى نقطة الارتطام بل مقدار السرعة عند لحظة الارتطام: **السرعة اللحظيّة**. وكذلك بالنسبة إلى «الرادار» فإن السرعة التي تُضبط بها السيّارة هي السرعة اللحظيّة للسيّارة.

معلومة:

$\Delta t = t_2 - t_1$

أي أن $t_2 = t_1 + \Delta t$

بوضع $\Delta t = h$

$\therefore\ t_2 = t_1 + h$

وعليه:

$f(t_2) - f(t_1)$

$= f(t_1 + h) - f(t_1)$

مثال توضيحي

تسقط كرة من علو 50 m، وفق المعادلة $d(t) = 4.9t^2$، حيث d المسافة التي تقطعها الكرة بالأمتار (m)، t الزمن بالثواني (s).

a **ما السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية من الثانية الأولى إلى الثانية الثالثة؟**

b **أوجد سرعة الكرة عند اللحظة $t = 3$**

74

الحل:

a $\because\ d(t) = 4.9t^2$

في الثانية الأولى، المسافة التي قطعتها الكرة هي: $d_1 = d(1) = 4.9(1)^2 = 4.9$

في الثانية الثالثة، المسافة التي قطعتها الكرة هي: $d_2 = d(3) = 4.9(3)^2 = 44.1$

السرعة المتوسطة بين الثانية الأولى والثالثة هي: $\overline{v} = \dfrac{\Delta d}{\Delta t} = \dfrac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$

$\overline{v} = \dfrac{44.1 - 4.9}{3 - 1} = \dfrac{39.2}{2} = 19.6$

السرعة المتوسطة لسقوط الكرة هي: 19.6 m/s

b يمكننا حساب السرعة المتوسّطة للجسم على الفترة الزمنية من اللحظة $t_1 = 3$ إلى اللحظة $t_2 = 3 + h$، حيث $\Delta t = h$ هو الفارق الزمني بين اللحظتين

تمثل السرعة المتوسطة على الفترة الزمنية $[3, 3+h]$ التي مدتها $\Delta t = h$

ولا نستطيع استخدام تلك القاعدة لحساب السرعة بالضبط عند اللحظة $t = 3$ أي $h = 0$ لأنه لا يمكن القسمة على صفر.

وعلى ذلك فإنّه يمكننا أخذ فكرة جيّدة لما يحدث عند $t = 3$ وذلك بحساب قيمة الصيغة التي حصلنا عليها بجعل h تقترب من الصفر، وإذا فعلنا ذلك فإنّنا نجد نمطًا واضحًا كما في الجدول، يظهر هذا النمط أنّ السرعة المتوسّطة تقترب من القيمة 29.4 m/s عندما تقترب h من الصفر، مما يسمح بالقول إن السرعة اللحظية للكرة عند $t = 3$ تساوي 29.4 m/s

السرعة المتوسطة على الفترة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ (m/s)	مدّة الفترة الزمنيّة h بالثانية
34.3	1
29.89	0.1
29.449	0.01
29.4049	0.001
29.40049	0.0001

أكّد جبريًّا: $\dfrac{\Delta d}{\Delta t} = \dfrac{4.9(3+h)^2 - 4.9(3)^2}{h}$

نفك البسط في المعادلة ونبسّط: $= \dfrac{4.9(9 + 6h + h^2) - 44.1}{h}$

$= \dfrac{29.4h + 4.9h^2}{h} = \dfrac{h(29.4 + 4.9h)}{h}$

$= 29.4 + 4.9h \quad , \quad h \neq 0$

لقيم h الموجبة الصغيرة جدًّا السرعة المتوسّطة تساوي $29.4 + 4.9h$ (m/s) وتكون $4.9h$ صغيرة جدًّا أي قريبة من الصفر.

ونعبّر عن ذلك كالتالي:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} (29.4 + 4.9h)$$
$$= 29.4$$

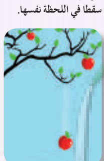
ملاحظة:

$\dfrac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$

الربط بالحياة:

السقوط الحر

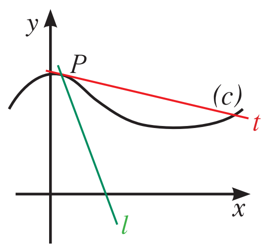
عندما تسقط الأجسام سقوطًا حرًّا في مكان ما، على افتراض أنه فارغ من الهواء، فإنها تصل جميعها إلى سطح الأرض في فترة زمنية مشتركة وإن اختلفت كتلها. من ناحية ثانية إذا سقطت هذه الأجسام في مكان ما يملؤه الهواء فالوضع يختلف تمامًا إذ نجد أن حجرًا صغيرًا يصل إلى سطح الأرض في زمن أقل من ورقة علمًا أنهما سقطا في اللحظة نفسها.



75

يعود أصل كلمة مماس (tangent) إلى اللاتينية وتعني ملامس. إذًا المماس لمنحنى دالة هو مستقيم يلامس المنحنى ويكون لهذا المستقيم الاتجاه نفسه مثل منحنى الدالة عند نقطة التماس.

مماس الدائرة هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط. لكن هذا التحديد لا ينطبق على غالبية المنحنيات الأخرى.



في الشكل المقابل يمثل المنحنى (c) بيان دالة ويمر المستقيمان t و l بالنقطة P من هذا المنحنى. يقطع المستقيم l المنحنى في نقطة واحدة ولكن لا يمكن اعتباره مماسًا له. في المقابل، المستقيم t مماس للمنحنى (c) عند النقطة P، لكنه يقطع هذا المنحنى في نقطة ثانية.

في المثال التوضيحي

يعطي فكرة واضحة عن السرعة المتوسطة $\bar{v}$ في فترة زمنية ويرتبط مباشرة بالسقوط الحر في الفيزياء. كما يعطي فكرة واضحة عن تطور معدل السرعة عندما $h \to 0$ ويقرّب مفهوم الاشتقاق للطلاب تمهيدًا للدرس التالي.

في المثال (1)

إيجاد متوسط معدل التغير للوصول إلى ميل المماس لقطع مكافئ عند نقطة على المنحنى.

6 الربط

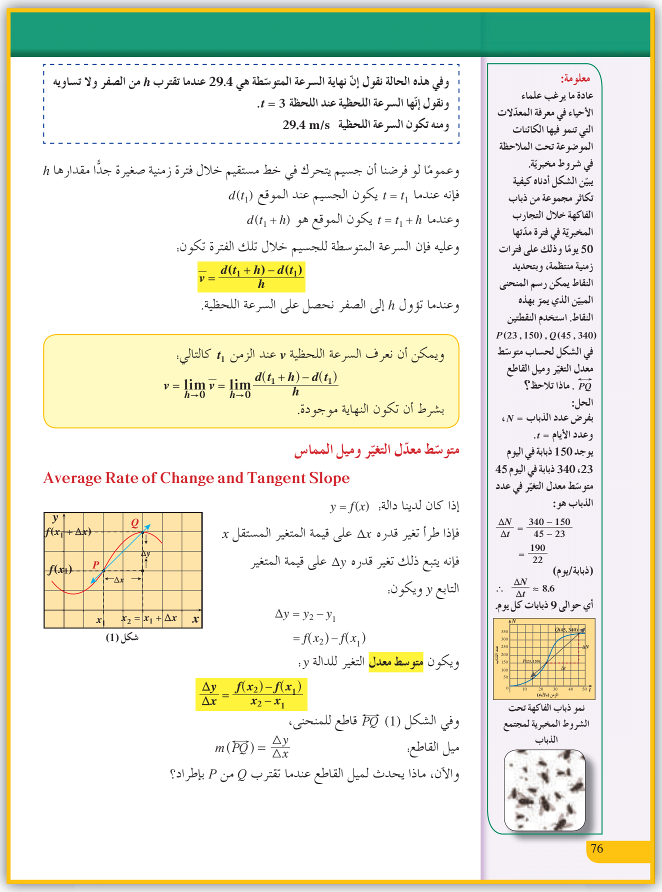
بفرض أن معادلة السقوط الحر لأي جسم على المريخ هي: $s = 1.86\,t^2$، حيث s تقاس بالمتر (m) و t بالثواني (s).

ولنفترض أن صخرة سقطت من ارتفاع 200 m على أرض المريخ. أوجد سرعة الصخرة عند $t = 1\,\text{s}$.

$$V(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(1+h) - s(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1.86(1+h)^2 - 1.86(1)^2}{h} = 3.72$$

فتكون سرعة الصخرة: 3.72 m/s



وفي هذه الحالة نقول إنّ نهاية السرعة المتوسّطة هي 29.4 عندما تقترب h من الصفر ولا تساويه ونقول إنّها السرعة اللحظية عند اللحظة $t = 3$.
ومنه تكون السرعة اللحظية 29.4 m/s

وعمومًا لو فرضنا أن جسيم يتحرك في خط مستقيم خلال فترة زمنية صغيرة جدًّا مقدارها h فإنه عندما $t = t_1$ يكون الجسيم عند الموقع $d(t_1)$
وعندما $t = t_1 + h$ يكون الموقع هو $d(t_1 + h)$
وعليه فإن السرعة المتوسطة للجسيم خلال تلك الفترة تكون:

$$\bar{v} = \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

وعندما تؤول h إلى الصفر نحصل على السرعة اللحظية.

ويمكن أن نعرف السرعة اللحظية v عند الزمن t_1 كالتالي:

$$v = \lim_{h \to 0} \bar{v} = \lim_{h \to 0} \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

متوسّط معدّل التغيّر وميل المماس

Average Rate of Change and Tangent Slope

إذا كان لدينا دالة: $y = f(x)$
فإذا طرأ تغير قدره Δx على قيمة المتغير المستقل x فإنه يتبع ذلك تغير قدره Δy على قيمة المتغير التابع y ويكون:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$= f(x_2) - f(x_1)$$

شكل (1)

ويكون متوسط معدل التغير للدالة y:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

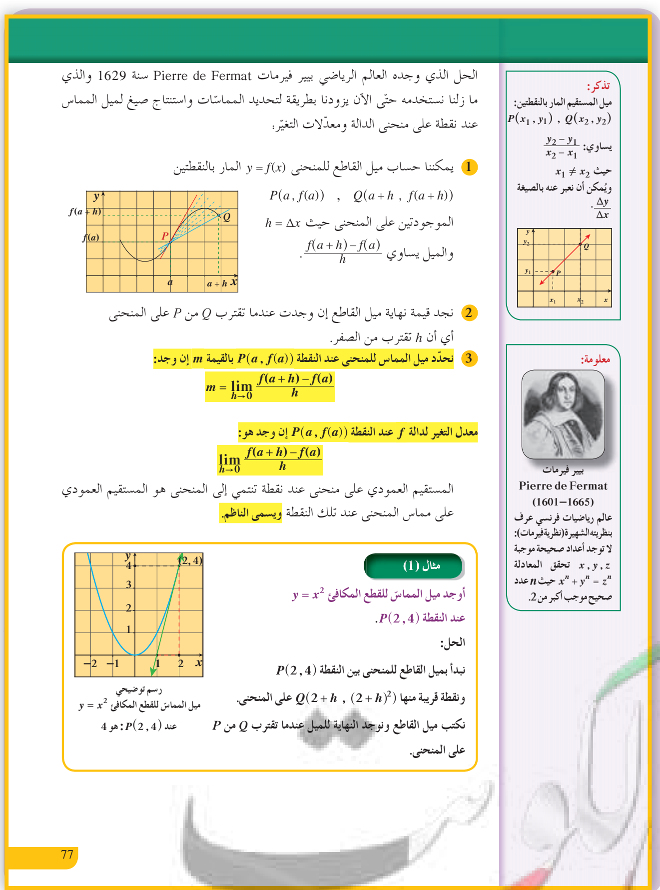
وفي الشكل (1) $\overleftrightarrow{PQ}$ قاطع للمنحنى،
ميل القاطع: $m(\overleftrightarrow{PQ}) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
والآن، ماذا يحدث لميل القاطع عندما تقترب Q من P بإطراد؟

معلومة:
عادة ما يرغب علماء الأحياء في معرفة المعدّلات التي تنمو فيها الكائنات الموضوعة تحت الملاحظة في شروط مخبريّة.
يبيّن الشكل أدناه كيفية تكاثر مجموعة من ذباب الفاكهة خلال التجارب المخبريّة في فترة مدّتها 50 يومًا وذلك على فترات زمنية منتظمة، وبتحديد النقاط يمكن رسم المنحنى المبيّن الذي يمرّ بهذه النقاط. استخدم النقطتين $P(23, 150)$, $Q(45, 340)$ في الشكل لحساب متوسّط معدل التغيّر وميل القاطع $\overleftrightarrow{PQ}$. ماذا تلاحظ؟
الحل:
بفرض عدد الذباب $= N$،
وعدد الأيام $= t$.
يوجد 150 ذبابة في اليوم 23، 340 ذبابة في اليوم 45
متوسّط معدل التغيّر في عدد الذباب هو:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23} = \frac{190}{22}$$
(ذبابة/يوم)
$$\therefore \frac{\Delta N}{\Delta t} \approx 8.6$$
أي حوالى 9 ذبابات كل يوم.

نمو ذباب الفاكهة تحت الشروط المخبرية لمجتمع الذباب

76



الحل الذي وجده العالم الرياضي بيير فيرمات Pierre de Fermat سنة 1629 والذي ما زلنا نستخدمه حتّى الآن يزودنا بطريقة لتحديد المماسّات واستنتاج صيغ لميل المماس عند نقطة على منحنى الدالة ومعدّلات التغيّر:

1 يمكننا حساب ميل القاطع للمنحنى $y = f(x)$ المار بالنقطتين $P(a, f(a))$, $Q(a+h, f(a+h))$ الموجودتين على المنحنى حيث $h = \Delta x$ والميل يساوي $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

2 نجد قيمة نهاية ميل القاطع إن وجدت عندما تقترب Q من P على المنحنى أي أن h تقترب من الصفر.

3 نحدّد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a, f(a))$ بالقيمة m إن وجد:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a, f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

المستقيم العمودي على منحنى عند نقطة تنتمي إلى المنحنى هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ويسمى الناظم.

مثال (1)
أوجد ميل المماسّ للقطع المكافئ $y = x^2$ عند النقطة $P(2, 4)$.
الحل:
نبدأ بميل القاطع للمنحنى بين النقطة $P(2, 4)$ ونقطة قريبة منها $Q(2+h, (2+h)^2)$ على المنحنى.
نكتب ميل القاطع ونوجد النهاية للميل عندما تقترب Q من P على المنحنى.

رسم توضيحي
ميل المماسّ للقطع المكافئ $y = x^2$ عند $P(2, 4)$: هو 4

تذكر:
ميل المستقيم المار بالنقطتين: $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ يساوي: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ حيث $x_1 \neq x_2$ ويُمكن أن نعبر عنه بالصيغة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

معلومة:
بيير فيرمات
Pierre de Fermat
(1601–1665)
عالم رياضيات فرنسي عرف بنظريته الشهيرة (نظرية فيرمات): لا توجد أعداد صحيحة موجبة x, y, z تحقق المعادلة $x^n + y^n = z^n$ حيث n عدد صحيح موجب أكبر من 2.

77

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

كثير من الطلاب معرّضون لارتكاب الأخطاء عند إيجاد ميل المماس على منحنى. أكّد لهم أن استخدام قاعدة الميل هي لنقطة موجودة على المنحنى وليس لأي نقطة غير موجودة على المنحنى.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل». تأكّد من أنهم قد فهموا جيّدًا معدل التغيّر وتمكنوا من إيجاد ميل المماس على أنه نهاية لمعدل التغير عندما $h \to 0$.

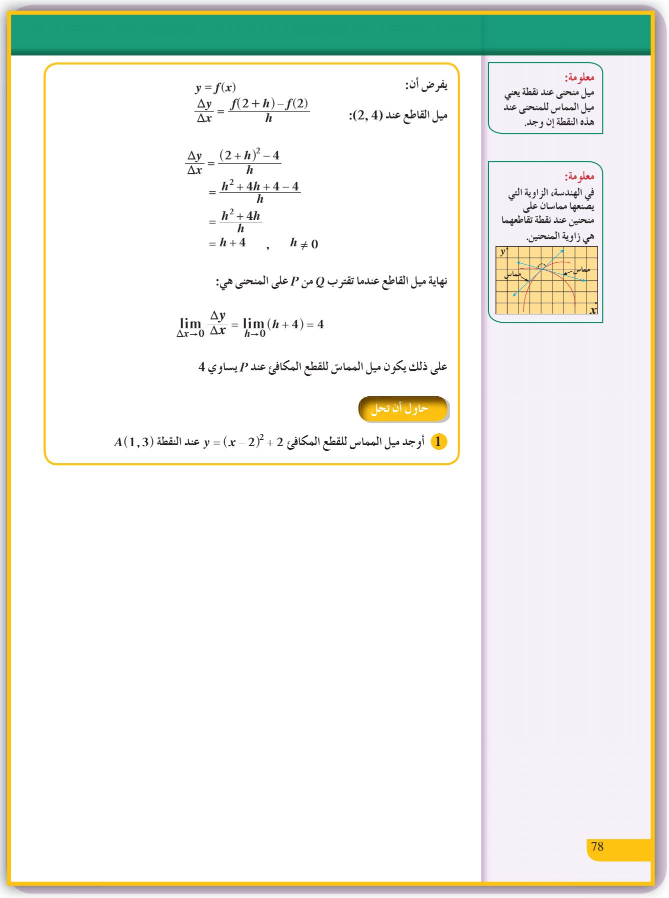
اختبار سريع

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^2 - x$ عند النقطة $(1, 0)$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1-h-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (1+h) = 1$$



معلومة:
ميل منحنى عند نقطة يعني ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة إن وجد.

معلومة:
في الهندسة، الزاوية التي يصنعها مماسان على منحنين عند نقطة تقاطعهما هي زاوية المنحنين.

يفرض أن: $y = f(x)$

ميل القاطع عند $(2, 4)$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2-4}{h}$$
$$= \frac{h^2+4h+4-4}{h}$$
$$= \frac{h^2+4h}{h}$$
$$= h+4 \quad , \quad h \neq 0$$

نهاية ميل القاطع عندما تقترب Q من P على المنحنى هي:

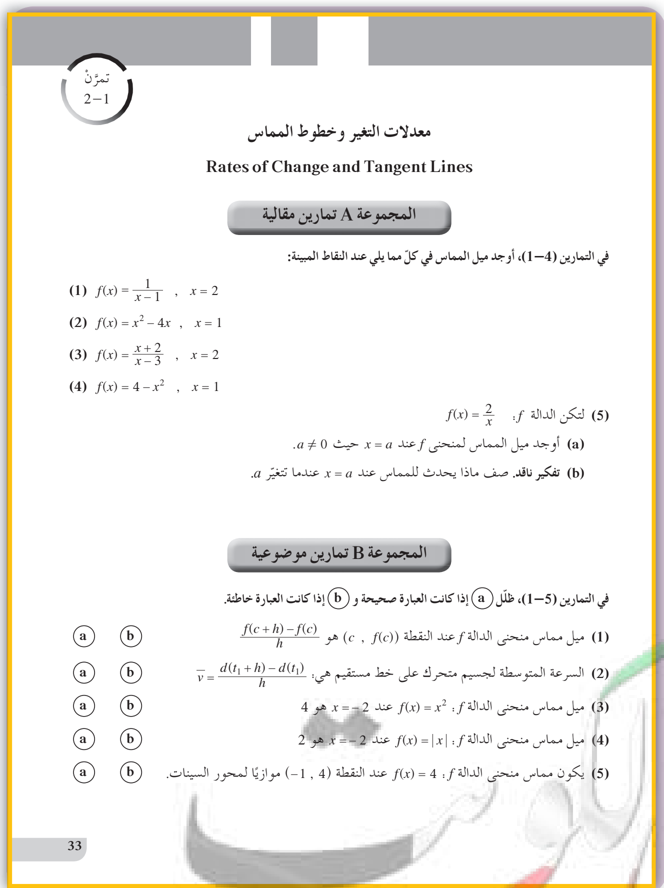
$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

على ذلك يكون ميل المماسّ للقطع المكافئ عند P يساوي 4

حاول أن تحل

1 أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1, 3)$

78



تمرّنْ 2-1

معدلات التغير وخطوط المماس

Rates of Change and Tangent Lines

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، أوجد ميل المماس في كلّ مما يلي عند النقاط المبينة:

(1) $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad , \quad x = 2$

(2) $f(x) = x^2 - 4x \quad , \quad x = 1$

(3) $f(x) = \frac{x+2}{x-3} \quad , \quad x = 2$

(4) $f(x) = 4 - x^2 \quad , \quad x = 1$

(5) لتكن الدالة f: $f(x) = \frac{2}{x}$

(a) أوجد ميل المماس لمنحنى f عند $x = a$ حيث $a \neq 0$.

(b) **تفكير ناقد.** صف ماذا يحدث للمماس عند $x = a$ عندما تتغيّر a.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) ميل مماس منحنى الدالة f عند النقطة $(c, f(c))$ هو $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ — a b

(2) السرعة المتوسطة لجسيم متحرك على خط مستقيم هي: $\bar{v} = \frac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}$ — a b

(3) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = x^2$ عند $x = -2$ هو 4 — a b

(4) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = |x|$ عند $x = -2$ هو 2 — a b

(5) يكون مماس منحنى الدالة f: $f(x) = 4$ عند النقطة $(-1, 4)$ موازيًا لمحور السينات. — a b

33

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) التغير في الزمن: $2 - 0 = 2$

(b) التغير في المسافة: $4.9(2)^2 - 0 = 19.6$

(c) السرعة المتوسطة: $\overline{v} = \dfrac{19.6}{2} = 9.8 \text{ m/s}$

«حاول أن تحل»

1 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = h - 2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (h - 2) = -2$$

في التمرينين (7–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x) = 9 - x^2$ عند $x = 2$ هو:

ⓐ -5 ⓑ -4 ⓒ 4 ⓓ 5

(7) ليكن منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ فإن النقطة التي يكون مماس المنحنى عندها أفقيًّا هي:

ⓐ $(3 , 0)$ ⓑ $(1 , 0)$ ⓒ $(2 , -1)$ ⓓ $(-1 , 2)$

34

2–2: المشتقة

2–2

المشتقة

The Derivative

سوف تتعلم
- إيجاد الميل والمشتقات باستخدام تعريف المشتقة.
- إيجاد مشتقة الدالة عند نقطة.
- إيجاد المشتقة من جهة واحدة.
- العلاقة بين الاتصال عند نقطة أو على فترة وقابلية الاشتقاق.
- تحديد حالات عدم وجود المشتقة عند نقطة.

المفردات والمصطلحات:
- المشتقة عند نقطة Derivative at a Point
- مشتقة دالة Derivative of a Function
- مشتقة من جهة واحدة One–Sided Derivative
- التفاضل Differentiability
- نقطة ركن Corner Point
- نقطة ناب Cusp Point
- مماس رأسي Vertical Tangent
- عدم اتصال Discontinuity

دعنا نفكّر ونتناقش

تعلمت فيما سبق أنه إذا كان ℓ مستقيمًا يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم: $m = \tan\theta$

الشكل (1) يمثّل بيان الدالة f.

ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 مماسات لمنحنى f عند النقاط P_1 , P_2 , P_3 على الترتيب.

شكل (1)

1. ميل المستقيم ℓ_1 (المماس لمنحنى الدالة f عند P_1) أكبر من الصفر. لماذا؟
2. ميل المماس ℓ_2 لمنحنى f عند P_2 يساوي صفرًا. لماذا؟
3. ميل المماس ℓ_3 لمنحنى f عند P_3 أصغر من الصفر. لماذا؟
4. إذا أمكن رسم مماسات عند نقاط مختلفة على المنحنى، فهل ميل المنحنى عند كل نقطة من هذه النقاط يكون قيمة ثابتة أم متغيرة؟

تعريف المشتقّة Definition of Derivative

تعلّمت أنّ ميل منحنى الدالة f عند نقطة إحداثيها السينيّ $x = a$ هو:

$$m = \lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

في حال وجود هذه النهاية فإنّها تسمّى **مشتقّة الدّالة f عند a**

تعريف: المشتقّة عند نقطة Derivative at a Point

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

من التعريف السابق يمكننا القول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ إذا كانت النهاية موجودة ويرمز لذلك بالرمز:

$f'(a)$ أو $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة عند $x = a$ نقول إن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$ ($f'(a)$ غير موجودة)

79

1 الأهداف

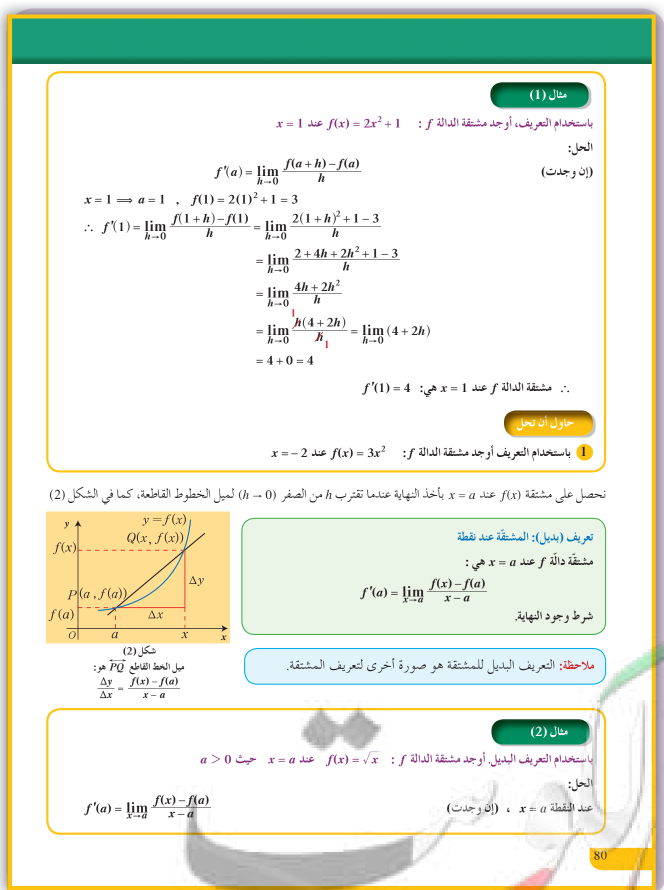
- يوجد مشتقة الدالة عند نقطة باستخدام تعريف المشتقة.
- يوجد المشتقة من جهة واحدة.
- يتعرف على حالات عدم وجود المشتقة عند نقطة.
- يميّز بين الأركان والأنياب والمماس الرأسي.
- يتعرف العلاقة بين الاتصال عند نقطة وقابلية الاشتقاق.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المشتقة عند نقطة – مشتقة دالة – مشتقة من جهة واحدة – التفاضل – نقطة ركن – نقطة ناب – مماس رأسي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).



مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

الحل:

(إن وجدت) $f'(a) = \lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$x = 1 \Longrightarrow a = 1 \quad , \quad f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$

$$\therefore\ f'(1) = \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{2(1+h)^2+1-3}{h}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{2+4h+2h^2+1-3}{h}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{4h+2h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(4+2h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to0}(4+2h)$$
$$= 4 + 0 = 4$$

$\therefore$ مشتقة الدالة f عند $x = 1$ هي: $f'(1) = 4$

حاول أن تحل

1. باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

نحصل على مشتقة $f(x)$ عند $x = a$ بأخذ النهاية عندما تقترب h من الصفر $(h \to 0)$ لميل الخطوط القاطعة، كما في الشكل (2)

شكل (2)

ميل الخط القاطع $\overleftrightarrow{PQ}$ هو: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالّة f عند $x = a$ هي:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

شرط وجود النهاية.

ملاحظة: التعريف البديل للمشتقة هو صورة أخرى لتعريف المشتقة.

مثال (2)

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

الحل:

عند النقطة $x = a$ ، (إن وجدت) $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

80

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب إيجاد:

(a) $\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ (b) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

(c) اطلب إلى الطلّاب رسم الخطوط المستقيمة $f(x) = x + 2$ و $f(x) = -x + 3$ ، ثم اسألهم عن قياس الزاوية التي يصنعها كل مستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور السيني، ثم اطلب إليهم إيجاد ظل كل زاوية (tan) ومقارنة ظل كل زاوية مع معامل x .

5 التدريس

إن إحدى الطرائق المستخدمة للبدء في هذا الدرس هي تقديم الرسم البياني لدالة، وبيان كيف أن ميل خطوط القاطع يقترب من نهاية تقابل ميل خط المماس.

ينبغي أن يتعلم الطلاب كيف يُوجِدون المشتقات باستخدام التعريف. ويمكن عمل هذا على مرحلتين:

(1) إيجاد المشتقة عند نقطة معينة $x = a$.

(2) تعميم العملية لإيجاد المشتقة عند نقطة عامة x . ينبغي أن تناقش الطرائق المختلفة لكتابة المشتقات. يمكن إنهاء الدرس بمناقشة المشتقات من جهة واحدة. عند مناقشة مشتقات من جهة واحدة لدالة معرفة بأكثر من قاعدة مثل الدالة في مثال (4)، أكّد أنك توجد قيمة المشتقات من جهة اليسار ومن جهة اليمين لدالة واحدة (وليس لدالتين).

في المثال (1)

استخدام التعريف: $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$،
لإيجاد مشتقة الدالة f.

في المثال (2)

يوجد قيمة مشتقة الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ باستخدام التعريف البديل. يتطلب الاشتقاق ضرب البسط والمقام بمرافق البسط ثم إيجاد النهاية.

في المثال (3)

المشتقة من جهة اليسار لا تساوي المشتقة من جهة اليمين إذًا $f'(0)$ غير موجودة، وبالتالي فالدالة ليس لها مشتقة عند $x = 0$ بالرغم من وجود مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار.

في المثال (4)

تطبيق لكيفية إيجاد المشتقة من كل جهة. لاحظ أن بيان الدالة (لا يمثّل ناب أو ركن) عند $x = 1$ وأن المشتقة لجهة اليمين تساوي المشتقة لجهة اليسار.

وأشر أيضًا إلى أنه ليس من الضروري أن تكون المشتقة من جهة اليسار مساوية للمشتقة من جهة اليمين.

في المثال (5)

تطبيق مباشر لكيفية إيجاد دالة المشتقة باستخدام التعريف على دالة حدودية بسيطة.

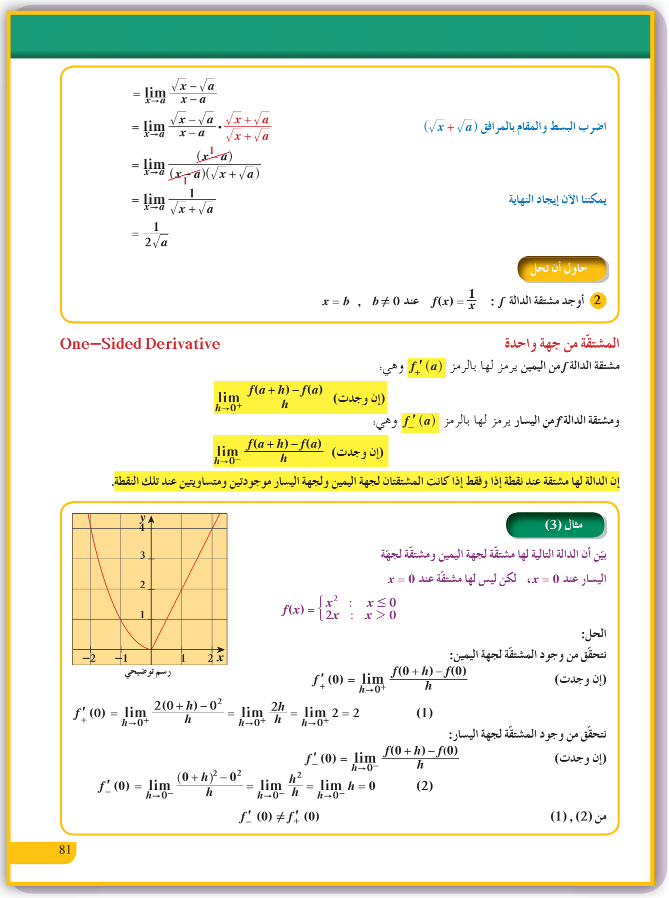
في المثال (6)

يبيّن هذا المثال أنّه إذا كانت الدالة غير متصلة عند نقطة فإنّها تكون غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

أشر إلى أنه في هذه الحالة لا يقوم الطالب بدراسة الاشتقاق عند هذه النقطة.

في المثال (7)

يختلف هذا المثال عن المثال (6) بحيث إن الدالة متصلة عند النقطة $\left(2\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة: $f'_-\left(\frac{1}{2}\right) \neq f'_+\left(\frac{1}{2}\right)$.



$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

اضرب البسط والمقام بالمرافق $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

يمكننا الآن إيجاد النهاية

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $b \neq 0$ ، $x = b$

المشتقّة من جهة واحدة **One–Sided Derivative**

مشتقة الدالة f من اليمين يرمز لها بالرمز $f'_+(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

ومشتقة الدالة f من اليسار يرمز لها بالرمز $f'_-(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

مثال (3)

بيّن أن الدالة التالية لها مشتقّة لجهة اليمين ومشتقّة لجهة اليسار عند $x = 0$، لكن ليس لها مشتقّة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \le 0 \\ 2x & : x > 0 \end{cases}$$

رسم توضيحي

الحل:

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليمين:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(0+h)-0^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2 \quad (1)$$

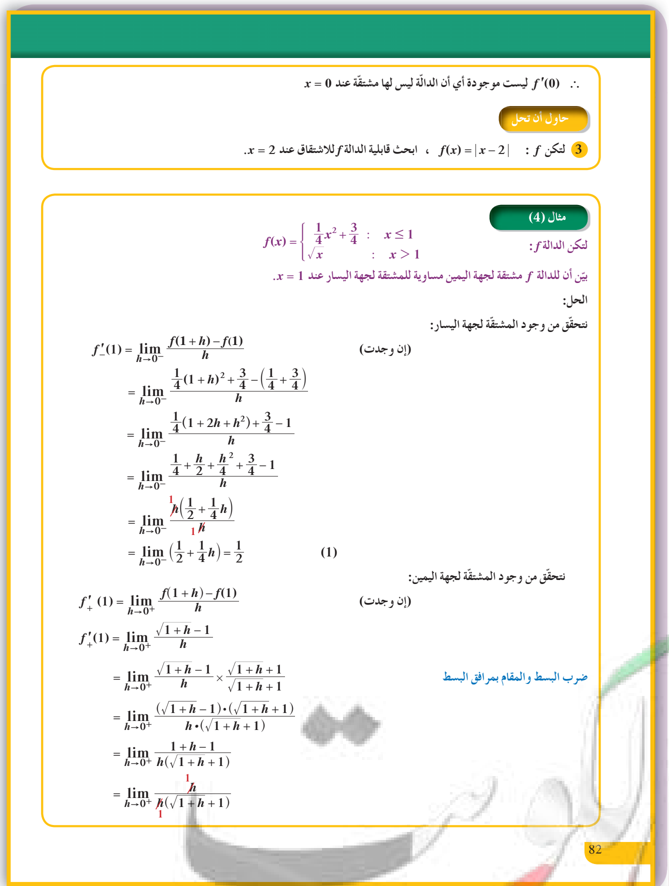
نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليسار:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(0+h)^2-0^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0 \quad (2)$$

من (1) , (2) $f'_-(0) \neq f'_+(0)$

81



$\therefore$ $f'(0)$ ليست موجودة أي أن الدالّة ليس لها مشتقّة عند $x = 0$

حاول أن تحل

3 لتكن f : $f(x) = |x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

مثال (4)

لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} & : x \le 1 \\ \sqrt{x} & : x > 1 \end{cases}$$

بيّن أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$.

الحل:

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليسار:

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{4}(1+h)^2 + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{4}(1+2h+h^2) + \frac{3}{4} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{4} + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \frac{3}{4} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{h}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}h\right)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}h\right) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليمين:

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$

ضرب البسط والمقام بمرافق البسط

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \times \frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(\sqrt{1+h}-1)\cdot(\sqrt{1+h}+1)}{h\cdot(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{1+h}+1)}$$

82

في المثالين (9) ,(8)

إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فليس من الضروري أن تكون قابلة للاشتقاق عندها وعلى الطلاب دراسة الاشتقاق من الجهتين لاتخاذ القرار خاصة أن كل دالة معرفة بأكثر من قاعدة.

6 الربط

يستخدم علماء الفضاء الاشتقاق في دراسة سرعة دوران الأقمار الاصطناعية على مجالها.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

عند إيجاد مشتقات باستخدام التعريف، غالبًا ما يقع الطلاب في أخطاء عند تحليل البسط إلى عوامل.

عندما تكون f كثيرة حدود أو دالة نسبية، فإن (h) تكون دائمًا عاملًا للبسط.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، تأكد من استيعابهم لمفهوم الاشتقاق.

اختبار سريع

1 لتكن الدالة f: $f(x) = x^3 - x + 2$،

أوجد $f'(0)$. $\quad f'(0) = -1$

2 ادرس اشتقاق الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 , & x \le 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + 3 , & x > 2 \end{cases}$

عند $x = 2$. $\quad f'(2) = 2$ من الجهتين

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 لأن قياس الزاوية θ التي يصنعها ℓ_1 مع محور السينات أكبر من صفر وأصغر من $90°$، $\tan\theta > 0$

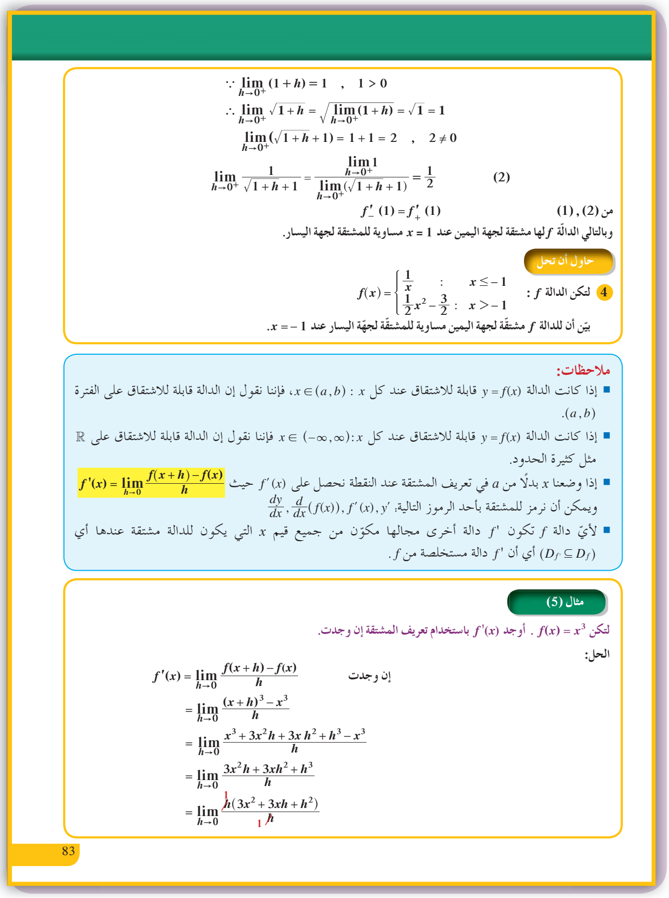
∴ ميل المستقيم موجب.

2 قياس الزاوية = صفر

3 قياس الزاوية بين $90°$ و $180°$

∴ $\tan\theta < 0$

4 عند نقطة معينة الميل ثابت لكنه يتغير مع تغير النقطة.



$$\because \lim_{h\to 0^+}(1+h) = 1 \quad , \quad 1 > 0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0^+}\sqrt{1+h} = \sqrt{\lim_{h\to 0^+}(1+h)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^+}(\sqrt{1+h}+1) = 1+1 = 2 \quad , \quad 2 \ne 0$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{\lim_{h\to 0^+} 1}{\lim_{h\to 0^+}(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

من $(1) , (2)$ $\quad f'_-(1) = f'_+(1)$

وبالتالي الدالّة f لها مشتقة لجهة اليمين عند $x = 1$ مساوية للمشتقة لجهة اليسار.

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & : \quad x \le -1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} & : \quad x > -1 \end{cases}$

بيّن أن للدالة f مشتقّة لجهة اليمين مساوية للمشتقّة لجهّة اليسار عند $x = -1$.

ملاحظات:

- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in (a , b)$، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b).
- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x: $x \in (-\infty , \infty)$ فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مثل كثيرة الحدود.
- إذا وضعنا x بدلًا من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية: $\frac{dy}{dx} , \frac{d}{dx}(f(x)) , f'(x) , y'$
- لأيّ دالة f تكون f' دالة أخرى مجالها مكوّن من جميع قيم x التي يكون للدالة مشتقة عندها أي $(D_{f'} \subseteq D_f)$ أي أن f' دالة مستخلصة من f.

مثال (5)

لتكن $f(x) = x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{إن وجدت}$$

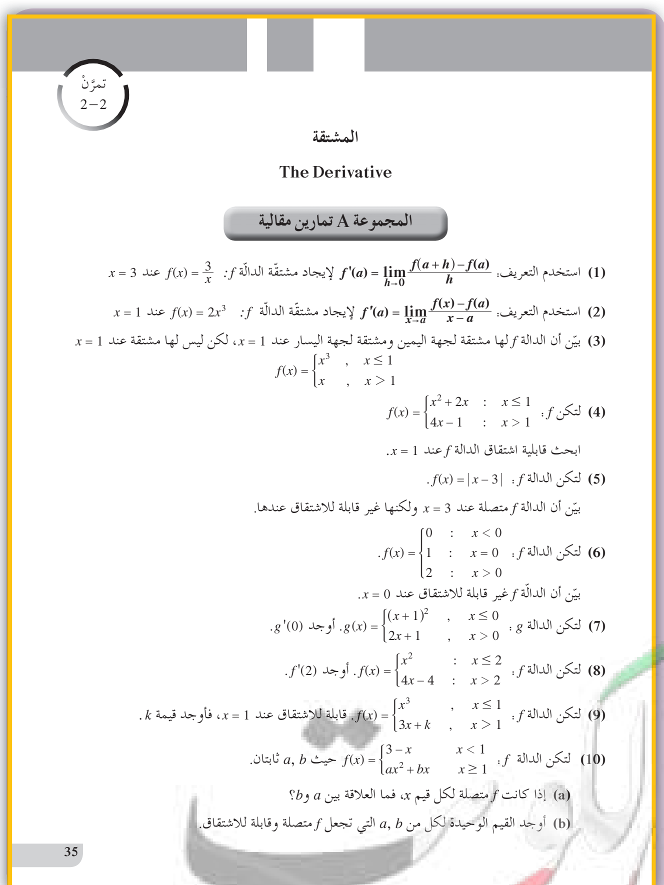
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}}$$

83



تمرَّنْ 2–2

المشتقة

The Derivative

المجموعة A تمارين مقالية

(1) استخدم التعريف: $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x) = \frac{3}{x}$ عند $x = 3$

(2) استخدم التعريف: $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x) = 2x^3$ عند $x = 1$

(3) بيّن أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$، لكن ليس لها مشتقة عند $x = 1$
$f(x) = \begin{cases} x^3 , & x \le 1 \\ x , & x > 1 \end{cases}$

(4) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : \quad x \le 1 \\ 4x - 1 & : \quad x > 1 \end{cases}$
ابحث قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 1$.

(5) لتكن الدالة f: $f(x) = |x - 3|$.
بيّن أن الدالة f متصلة عند $x = 3$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

(6) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 1 & : \quad x = 0 \\ 2 & : \quad x > 0 \end{cases}$.
بيّن أن الدالّة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

(7) لتكن الدالة g: $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 , & x \le 0 \\ 2x + 1 , & x > 0 \end{cases}$. أوجد $g'(0)$.

(8) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x \le 2 \\ 4x - 4 & : \quad x > 2 \end{cases}$. أوجد $f'(2)$.

(9) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^3 , & x \le 1 \\ 3x + k , & x > 1 \end{cases}$. قابلة للاشتقاق عند $x = 1$، فأوجد قيمة k.

(10) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 3 - x & x < 1 \\ ax^2 + bx & x \ge 1 \end{cases}$ حيث a, b ثابتان.

(a) إذا كانت f متصلة لكل قيم x، فما العلاقة بين a وb؟

(b) أوجد القيم الوحيدة لكل من a, b التي تجعل f متصلة وقابلة للاشتقاق.

35

«حاول أن تحل»

1 $f'(-2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}(3h-12)=-12\ ;\ f'(-2)=-12$

2 $f'(b)=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{b}}{x-b}$

$=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{b-x}{bx(x-b)}=-\dfrac{1}{b^2}$

3 $f'_-(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-1$

$f'_+(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=1$

$f'_-(2)\neq f'_+(2)$

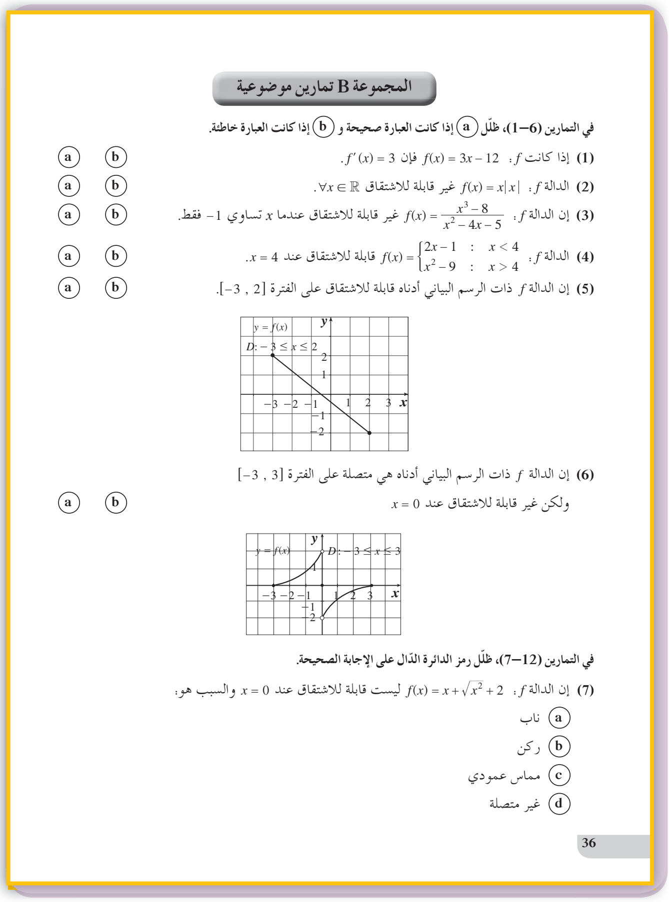
$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$.

4 $f'_-(-1)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\frac{1}{x}+1}{x+1}=-1$

$f'_+(-1)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}+1}{x+1}=-1$

$\therefore\ f'_-(-1)=f'_+(-1)=-1$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق عند $x=-1$


المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $f: f(x)=3x-12$ فإن $f'(x)=3$. (a) (b)

(2) الدالة $f: f(x)=x|x|$ غير قابلة للاشتقاق $\forall x\in\mathbb{R}$. (a) (b)

(3) إن الدالة $f: f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4x-5}$ غير قابلة للاشتقاق عندما x تساوي -1 فقط. (a) (b)

(4) الدالة $f: f(x)=\begin{cases}2x-1 & : x<4\\ x^2-9 & : x>4\end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=4$. (a) (b)

(5) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه قابلة للاشتقاق على الفترة $[-3\ ,\ 2]$. (a) (b)

(6) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه هي متصلة على الفترة $[-3\ ,\ 3]$ ولكن غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$ (a) (b)

في التمارين (7–12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) إن الدالة $f: f(x)=x+\sqrt{x^2}+2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x=0$ والسبب هو:

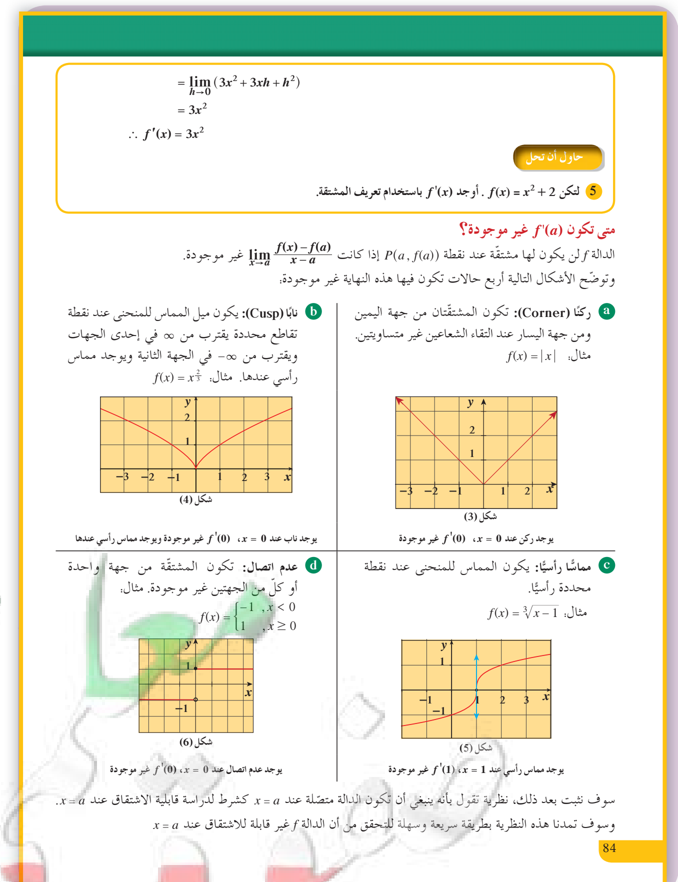
(a) ناب

(b) ركن

(c) مماس عمودي

(d) غير متصلة

36


$=\lim\limits_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)$

$=3x^2$

$\therefore\ f'(x)=3x^2$

حاول أن تحل

5 لتكن $f(x)=x^2+2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

الدالة f لن يكون لها مشتقة عند نقطة $P(a, f(a))$ إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ غير موجودة.
وتوضّح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة.

a ركنًا (Corner): تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين. مثال $f(x)=|x|$

شكل (3)

يوجد ركن عند $x=0$، $f'(0)$ غير موجودة

b نابًا (Cusp): يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$

شكل (4)

يوجد ناب عند $x=0$، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c مماسًا رأسيًا: يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا. مثال: $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x=1$، $f'(1)$ غير موجودة

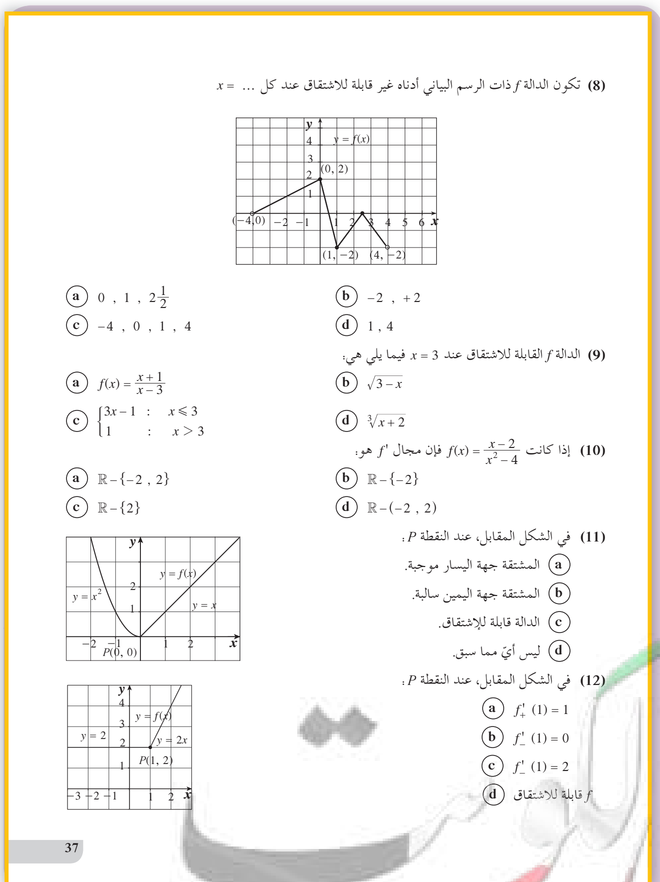
d عدم اتصال: تكون المشتقّة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال: $f(x)=\begin{cases}-1 & , x<0\\ 1 & , x\geq 0\end{cases}$

شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند $x=0$، $f'(0)$ غير موجودة

سوف نثبت بعد ذلك، نظرية تقول بأنه ينبغي أن تكون الدالة متصلة عند $x=a$ كشرط لدراسة قابلية الاشتقاق عند $x=a$.
وسوف تمدنا هذه النظرية بطريقة سريعة وسهلة للتحقق من أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=a$

84


(8) تكون الدالة f ذات الرسم البياني أدناه غير قابلة للاشتقاق عند كل $x=\ldots$

(a) $0\ ,\ 1\ ,\ 2\frac{1}{2}$

(b) $-2\ ,\ +2$

(c) $-4\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 4$

(d) $1\ ,\ 4$

(9) الدالة f القابلة للاشتقاق عند $x=3$ فيما يلي هي:

(a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

(b) $\sqrt{3-x}$

(c) $\begin{cases}3x-1 & : x\leqslant 3\\ 1 & : x>3\end{cases}$

(d) $\sqrt[3]{x+2}$

(10) إذا كانت $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ فإن مجال f' هو:

(a) $\mathbb{R}-\{-2\ ,\ 2\}$

(b) $\mathbb{R}-\{-2\}$

(c) $\mathbb{R}-\{2\}$

(d) $\mathbb{R}-(-2\ ,\ 2)$

(11) في الشكل المقابل عند النقطة P:

(a) المشتقة جهة اليسار موجبة.

(b) المشتقة جهة اليمين سالبة.

(c) الدالة قابلة للاشتقاق.

(d) ليس أيّ مما سبق.

(12) في الشكل المقابل عند النقطة P:

(a) $f'_+(1)=1$

(b) $f'_-(1)=0$

(c) $f'_-(1)=2$

(d) f قابلة للاشتقاق

37

5

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2 - (x^2+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

6 نبحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$$f(2) = 4 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 4) = 4 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x - 2) = 6 - 2 = 4$$

$\because \lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$

$\because \lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة

وبالتالي f ليست متصلة عند $x = 2$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$

7

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{3}\right)^-} f(x) = -\frac{2}{3} \quad ; \quad \lim_{x \to \left(-\frac{1}{3}\right)^+} f(x) = -\frac{2}{3}$$

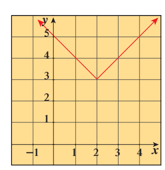
$$f'_-\left(-\frac{1}{3}\right) = 5 \neq f'_+\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = -\frac{1}{3}$

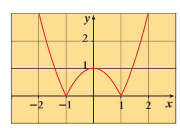
تدريب

أوجد كل النقاط في مجال الدالة حيث تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق في كل مما يلي:

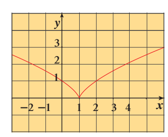
a $f(x) = |x-2| + 3$



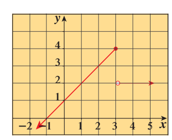
b $f(x) = |x^2 - 1|$



c $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$



d $f(x) = \begin{cases} 2 : x > 3 \\ x+1 : x \leq 3 \end{cases}$



معلومة: $|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 : & x \leq -1 \\ 1 - x^2 : & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 : & x \geq 1 \end{cases}$

الاشتقاق والاتصال Differentiability and Continuity

نبدأ هذا الجزء بإلقاء نظرة على الطرائق العادية التي يمكن أن تفشل في أن تكون فيها للدالة مشتقة عند نقطة.

كأحد الأمثلة، قد أظهرنا بيانيًا أن عدم اتصال الدالة عند نقطة يسبب عدم وجود مشتقة للدالة عند هذه النقطة.

وعليه إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a\ ,\ f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

مثال (6)

لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x < 2 \\ 2x - 1 , & x \geq 2 \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

الحل:

نبحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

85

$f(2) = 2(2) - 1 = 3$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = (2)^2 = 4$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x - 1) = 2(2) - 1 = 3$

$\because \lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$

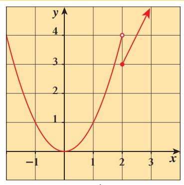
وبالتالي f ليست متصلة عند $x = 2$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$.

حاول أن تحل

6 لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 : & x \leq 2 \\ 3x - 2 : & x > 2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.



شكل (7)

الشكل (7) يمثل بيان الدالة في مثال (6).

وفي الحقيقة أن الاتصال شرط جوهري لإمكانية وجود المشتقة، والنظرية التالية تبين العلاقة بين الاشتقاق والاتصال.

نظرية الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

البرهان:

لتكن النقطة $(a\ ,\ f(a))$ تنتمي لبيان الدالة f

علينا أن نبين أن $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ أو مكافئًا لذلك أن: $\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = 0$

باستخدام قاعدة حاصل ضرب النهايات (وملاحظة أن $x - a \neq 0$)،

نستطيع أن نكتب:

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a}\left[(x-a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]$$

$$= \lim_{x \to a}(x-a) \cdot \lim_{x \to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$= 0 \cdot f'(a)$ حيث $f'(a)$ موجودة

$= 0$

86

معكوس النظرية ليس صحيحًا دائمًا كما رأينا سابقًا:

فالدالة المتصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماس رأسي، ومن ثم لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة.

مثال (7)

لتكن f: $f(x) = \begin{cases} 6x - 1 : & x > \frac{1}{2} \\ 2x + 1 : & x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

بين أن الدالة f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

الحل:

لنبحث اتصال الدالة f عند $x = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} (6x - 1) = 6\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} (2x + 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$

$\because \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$.

نبحث اشتقاق الدالة f عند $x = \frac{1}{2}$

$f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$ إن وجدت

$f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{6x - 1 - 2}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{6\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)}}{\cancel{x - \frac{1}{2}}} = 6$

$f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$ إن وجدت

$f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2x + 1 - 2}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)}}{\cancel{x - \frac{1}{2}}} = 2$

$\therefore f'_-\left(\frac{1}{2}\right) \neq f'_+\left(\frac{1}{2}\right)$

أي أن f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{1}{2}$.

حاول أن تحل

7 لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} -x - 1 : & x > \frac{-1}{3} \\ 5x + 1 : & x \leq \frac{-1}{3} \end{cases}$

بين أن الدالة f متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x = -\frac{1}{3}$

87

8 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 = f(1)$

f دالة متصلة عند $x = 1$

$f'_-(1) = -1 \quad ; \quad f'_+(1) = 2$

$\because \; f'_-(1) \neq f'_+(1)$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 1$ وغير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

9 $f'_-(-1) = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{x^2 + x - 0}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^-} x = -1$

$f'_-(-1) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^2 - x - 2 - 0}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1} = -3$

$\because \; f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$

$\therefore$ $f'_-(-1)$ غير موجودة.

«تدريب»

(a) $x = 2$

(b) $x = -1 \quad ; \quad x = 1$

(c) $x = 1$

(d) $x = 3$

مثال (8)

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & : \; x \leqslant 2 \\ -x^2 + 7x - 10 & : \; x > 2 \end{cases}$

بيّن أن الدالة f متّصلة عند $x = 2$ وادرس قابلية الاشتقاق عندها.

الحل:

لنبحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$f(2) = (2)^2 - (2) - 2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - x - 2) = 4 - 2 - 2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2 + 7x - 10) = -4 + 14 - 10 = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 2$

ندرس قابلية الاشتقاق عند $x = 2$

$f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2}$ (إن وجدت)

$f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - x - 2 - 0}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x+1)\cancel{(x-2)}^{1}}{\cancel{x-2}_{1}}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} (x+1) = 2 + 1 = 3$

$\therefore f'_-(2) = 3$

$f'_+(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2}$ (إن وجدت)

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-x^2 + 7x - 10 - 0}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-\cancel{(x-2)}^{1}(x-5)}{\cancel{x-2}_{1}}$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} -(x-5) = -(2-5) = 3$

$\therefore f'_+(2) = 3$

$f'_+(2) = f'_-(2) = 3$

$\therefore$ الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = 2$ و $f'(2) = 3$.

أي أن f متصلة عند $x = 2$ وقابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

حاول أن تحل

8 ادرس اتصال الدالة f عند $x = 1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2 + 1} & : \; x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & : \; x > 1 \end{cases}$

معلومة:
يستخدم علماء الفضاء الاشتقاق في دراسة سرعة دوران الأقمار الاصطناعية على مجالها.

88

مثال (9)

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x + 5 & : \; x \leqslant 3 \\ x^2 - 1 & : \; x > 3 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

الحل:

$f'_-(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3}$ (إن وجدت)

$f'_-(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x + 5 - 8}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-3}{x-3} = 1$

$\therefore f'_-(3) = 1$

$f'_+(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3}$ (إن وجدت)

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2 - 1 - 8}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2 - 9}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\cancel{(x-3)}^{1}(x+3)}{\cancel{x-3}_{1}}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} (x+3) = 6$

$\therefore f'_+(3) = 6$

$\because \; f'_-(3) \neq f'_+(3)$

$\therefore \; f'(3)$ غير موجودة

حاول أن تحل

9 لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : \; x \leqslant -1 \\ x^2 - x - 2 & : \; x > -1 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

89

3–2: قواعد الاشتقاق

1 الأهداف

- يوجد مشتقات دوال:
  – الثابتة.
  – القوى الصحيحة الموجبة.
  – الضرب في عدد ثابت.
  – الجمع والطرح.
  – الضرب والقسمة.
  – القوى الصحيحة السالبة للمتغيّر x .
- يكتب معادلة المماس ومعادلة الناظم عند نقطة على منحنى الدالة.
- يتعرف قابلية الاشتقاق على فترة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قاعدة – مشتقة ثابت – مشتقة قوى صحيحة موجبة – مشتقة قوى صحيحة سالبة – مشتقة الضرب بعدد ثابت – مشتقة الجمع والطرح – مشتقة الضرب والقسمة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

أوجد مشتقة الدوال التالية بالتعريف.

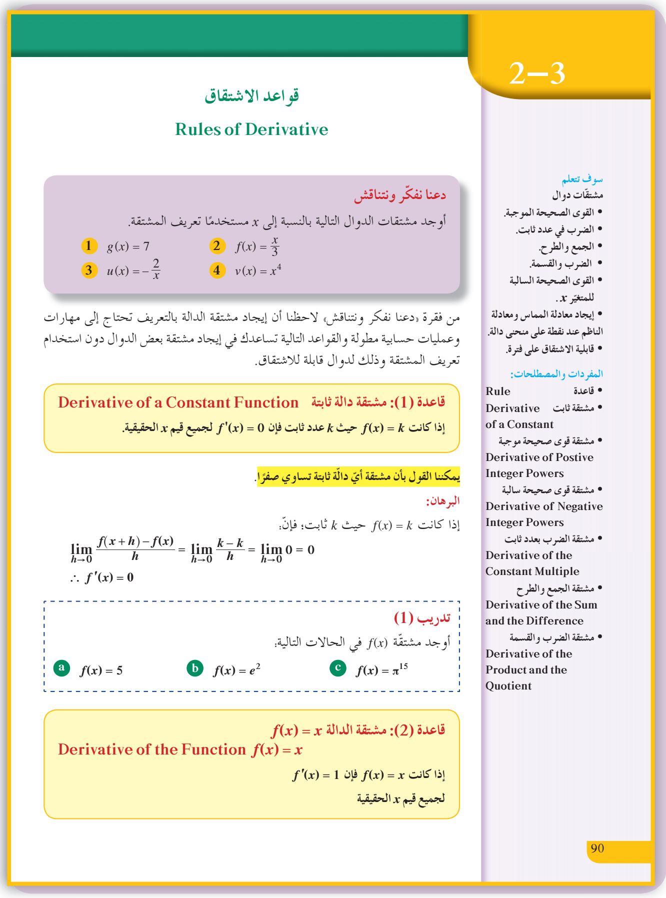
(a) $f(x) = 5$　　**(b)** $f(x) = x$

(c) $f(x) = x^2$

5 التدريس

إحدى الطرائق لبدء هذا الدرس هي مناقشة مشتقات دوال خطّية. ينبغي أن يفهم الطلاب بسهولة هذه المناقشة، والنتائج هي أمثلة جيدة لتبيان أن قاعدة الأسس (القوى) صحيحة. في نهاية هذا الدرس، ينبغي أن يكون الطلاب قادرين على اشتقاق كل الدوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.

إن تعلُّم قواعد الاشتقاق واستخداماتها الصحيحة أمر مهم وأساسي لما يتبع، بما في ذلك عملية تطبيقات المشتقات.



2–3

قواعد الاشتقاق

Rules of Derivative

سوف تتعلم

مشتقّات دوال

- القوى الصحيحة الموجبة.
- الضرب في عدد ثابت.
- الجمع والطرح.
- الضرب والقسمة.
- القوى الصحيحة السالبة للمتغيّر x.
- إيجاد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند نقطة على منحنى دالة.
- قابلية الاشتقاق على فترة.

المفردات والمصطلحات:

- قاعدة Rule
- مشتقة ثابت Derivative of a Constant
- مشتقة قوى صحيحة موجبة Derivative of Postive Integer Powers
- مشتقة قوى صحيحة سالبة Derivative of Negative Integer Powers
- مشتقة الضرب بعدد ثابت Derivative of the Constant Multiple
- مشتقة الجمع والطرح Derivative of the Sum and the Difference
- مشتقة الضرب والقسمة Derivative of the Product and the Quotient

دعنا نفكّر ونتناقش

أوجد مشتقات الدوال التالية بالنسبة إلى x مستخدمًا تعريف المشتقة.

1 $g(x) = 7$　2 $f(x) = \frac{x}{3}$

3 $u(x) = -\frac{2}{x}$　4 $v(x) = x^4$

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن إيجاد مشتقة الدالة بالتعريف تحتاج إلى مهارات وعمليات حسابية مطولة والقواعد التالية تساعدك في إيجاد مشتقة بعض الدوال دون استخدام تعريف المشتقة وذلك لدوال قابلة للاشتقاق.

قاعدة (1): مشتقة دالة ثابتة　Derivative of a Constant Function

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k عدد ثابت فإن $f'(x) = 0$ لجميع قيم x الحقيقية.

يمكننا القول بأن مشتقة أيّ دالّة ثابتة تساوي صفرًا.

البرهان:

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k ثابت؛ فإنّ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\therefore\ f'(x) = 0$$

تدريب (1)

أوجد مشتقّة $f(x)$ في الحالات التالية:

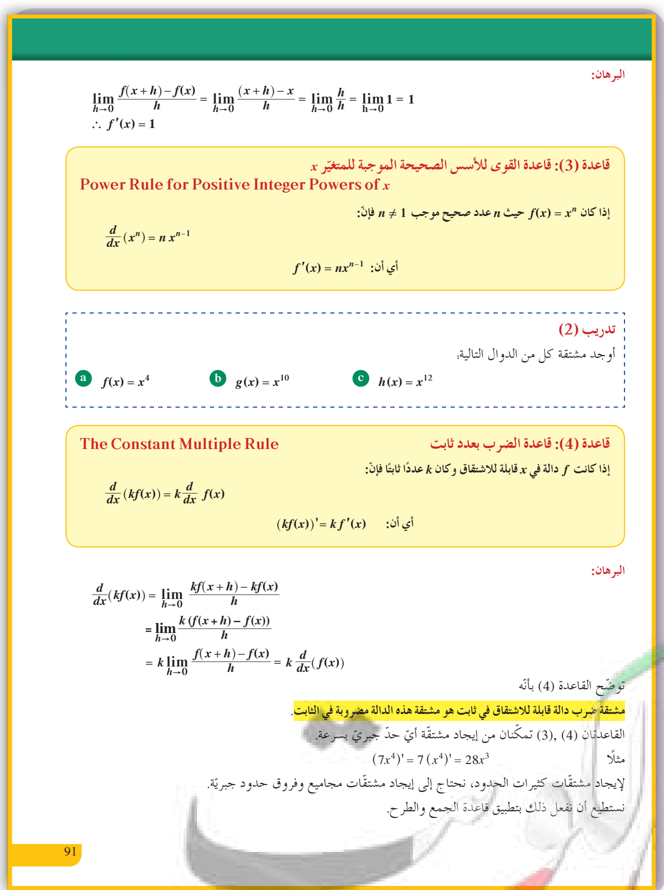
a $f(x) = 5$　b $f(x) = e^2$　c $f(x) = \pi^{15}$

قاعدة (2): مشتقة الدالة $f(x) = x$
Derivative of the Function $f(x) = x$

إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$

لجميع قيم x الحقيقية

90



البرهان:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$$\therefore\ f'(x) = 1$$

قاعدة (3): قاعدة القوى للأسس الصحيحة الموجبة للمتغيّر x
Power Rule for Positive Integer Powers of x

إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب $n \neq 1$ فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$$

أي أن: $f'(x) = nx^{n-1}$

تدريب (2)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = x^4$　b $g(x) = x^{10}$　c $h(x) = x^{12}$

قاعدة (4): قاعدة الضرب بعدد ثابت　The Constant Multiple Rule

إذا كانت f دالة في x قابلة للاشتقاق وكان k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}f(x)$$

أي أن: $(kf(x))' = kf'(x)$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{k(f(x+h)-f(x))}{h}$$
$$= k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\frac{d}{dx}(f(x))$$

توضّح القاعدة (4) بأنّه

مشتقة ضرب دالة قابلة للاشتقاق في ثابت هو مشتقة هذه الدالة مضروبة في الثابت.

القاعدتان (4) ,(3) تمكّنان من إيجاد مشتقّة أيّ حدّ جبريّ بسرعة.

مثلًا　$(7x^4)' = 7(x^4)' = 28x^3$

لإيجاد مشتقّات كثيرات الحدود، نحتاج إلى إيجاد مشتقّات مجاميع وفروق حدود جبريّة.

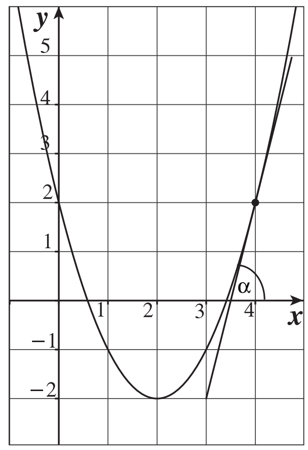
نستطيع أن نفعل ذلك بتطبيق قاعدة الجمع والطرح.

91

قد ترغب في اقتراح تعلم الطلاب القاعدة الآتية كعينة للتذكر:

$$\text{مشتقة} \left(\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}\right) = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

أشر إلى العلاقة بين مشتقة الدالة عند نقطة وميل المماس و $\tan\alpha$، حيث α هو قياس: الزاوية التي يصنعها الاتجاه الموجب لمحور السينات مع خط المماس على منحنى الدالة.



في المثال (1)

تطبيق مباشر على اشتقاق دوال كثيرات الحدود.

في الأمثلة (5) ,(3) ,(2)

تطبيق على اشتقاق الضرب والقسمة.

في المثال (4)

تطبيق مباشر ومهم لإيجاد معادلة المماس عند نقطة لمنحنى دالة، ومنه استنتاج معادلة العمودي (الناظم) على المماس.

في المثال (6)

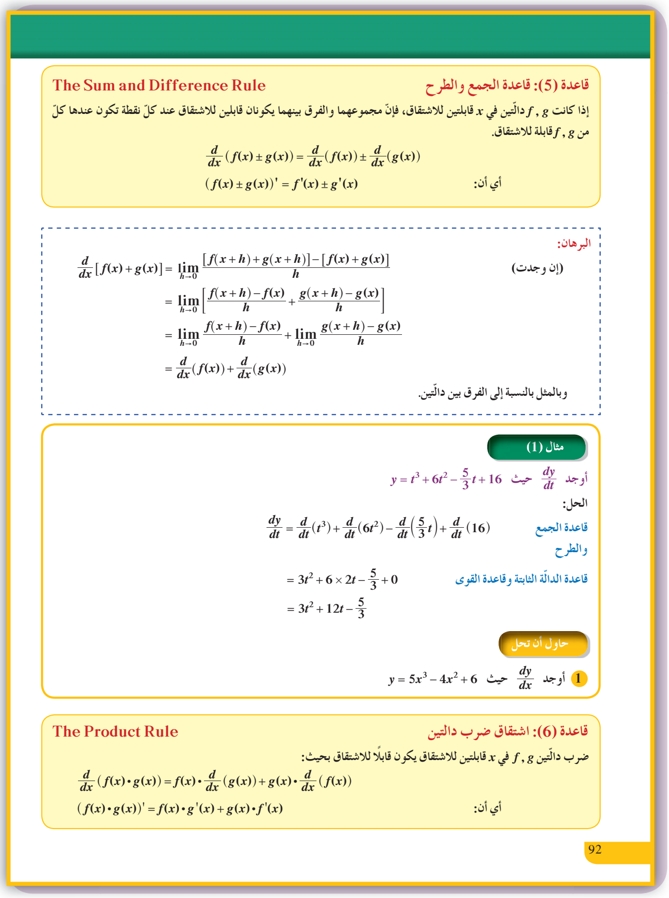
حالة خاصة حيث يمكن استخدام القسمة ثم التبسيط لإيجاد الدالة المشتقة.

في المثال (7)

إيجاد مشتقة دالة f حيث $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ (أس المتغير عدد نسبي).

في المثال (8)

إيجاد مشتقة دالة معرفة بأكثر من قاعدة.



قاعدة (5): قاعدة الجمع والطرح — **The Sum and Difference Rule**

إذا كانت f , g دالّتين في x قابلتين للاشتقاق، فإنّ مجموعهما والفرق بينهما يكونان قابلين للاشتقاق عند كلّ نقطة تكون عندها كلّ من f , g قابلة للاشتقاق.

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$$

أي أن: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= \frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx}(g(x))$$

وبالمثل بالنسبة إلى الفرق بين دالّتين.

مثال (1)

أوجد $\frac{dy}{dt}$ حيث $y = t^3+6t^2-\frac{5}{3}t+16$

الحل:

قاعدة الجمع والطرح: $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3)+\frac{d}{dt}(6t^2)-\frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3}t\right)+\frac{d}{dt}(16)$

قاعدة الدالّة الثابتة وقاعدة القوى: $= 3t^2+6\times 2t-\frac{5}{3}+0$

$= 3t^2+12t-\frac{5}{3}$

حاول أن تحل

1 أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3-4x^2+6$

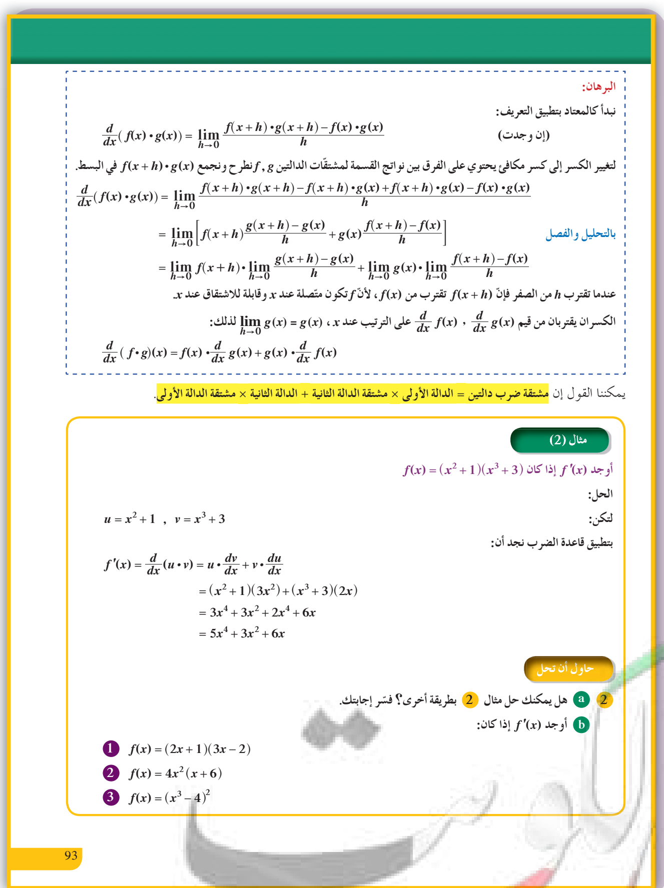
قاعدة (6): اشتقاق ضرب دالتين — **The Product Rule**

ضرب دالّتين f , g في x قابلتين للاشتقاق يكون قابلاً للاشتقاق بحيث:

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f(x)\cdot\frac{d}{dx}(g(x))+g(x)\cdot\frac{d}{dx}(f(x))$$

أي أن: $(f(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$

92



البرهان:

نبدأ كالمعتاد بتطبيق التعريف:

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

لتغيير الكسر إلى كسر مكافئ يحتوي على الفرق بين نواتج القسمة لمشتقّات الدالتين f , g نطرح ونجمع $f(x+h)\cdot g(x)$ في البسط.

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x+h)\cdot g(x)+f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

بالتحليل والفصل: $= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$

$$= \lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

عندما تقترب h من الصفر فإنّ $f(x+h)$ تقترب من $f(x)$، لأنّ f تكون متّصلة عند x وقابلة للاشتقاق عند x.

الكسران يقتربان من قيم $\frac{d}{dx}g(x)$ ، $\frac{d}{dx}f(x)$ على الترتيب عند x، $\lim_{h\to 0}g(x) = g(x)$ لذلك:

$$\frac{d}{dx}(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$

يمكننا القول إن **مشتقة ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى.**

مثال (2)

أوجد $f'(x)$ إذا كان $f(x) = (x^2+1)(x^3+3)$

الحل:

لتكن: $u = x^2+1 \ , \ v = x^3+3$

بتطبيق قاعدة الضرب نجد أن:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(u\cdot v) = u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$
$$= (x^2+1)(3x^2)+(x^3+3)(2x)$$
$$= 3x^4+3x^2+2x^4+6x$$
$$= 5x^4+3x^2+6x$$

حاول أن تحل

2 a هل يمكنك حل مثال 2 بطريقة أخرى؟ فسّر إجابتك.

b أوجد $f'(x)$ إذا كان:

1 $f(x) = (2x+1)(3x-2)$

2 $f(x) = 4x^2(x+6)$

3 $f(x) = (x^3-4)^2$

93

6 الربط

بفرض أن ردة فعل جسم الإنسان على جرعة من الدواء غالبًا ما يعطى بالمعادلة:

$R = M^2\left(\frac{c}{2} - \frac{M}{3}\right)$، حيث $c > 0$ كمية ثابتة وM كمية الدواء الممتصة في الدم. إذا كانت ردة الفعل تغيّرًا في ضغط الدم، فإن R تقاس بالملليمتر زئبق.

أما إذا كانت ردة الفعل تغيّرًا في درجة الحرارة، فإن R تقاس بالدرجات.

وعندما نجد التفاضل $\frac{dR}{dM}$ نكون قد عرفنا حساسية الجسم على دواء معين.

7 أخطاء متوقعة و معالجتها

يرتكب الطلاب الكثير من الأخطاء عندما يستخدمون قواعد الاشتقاق في تطبيق القواعد وفي تبسيط الإجابات وخاصة قواعد الضرب والقسمة. ألفت انتباه الطلاب إلى تطبيق هذه القواعد بشكل صحيح.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، تحقق من طريقة تطبيقهم للقواعد دون أخطاء.

اختبار سريع

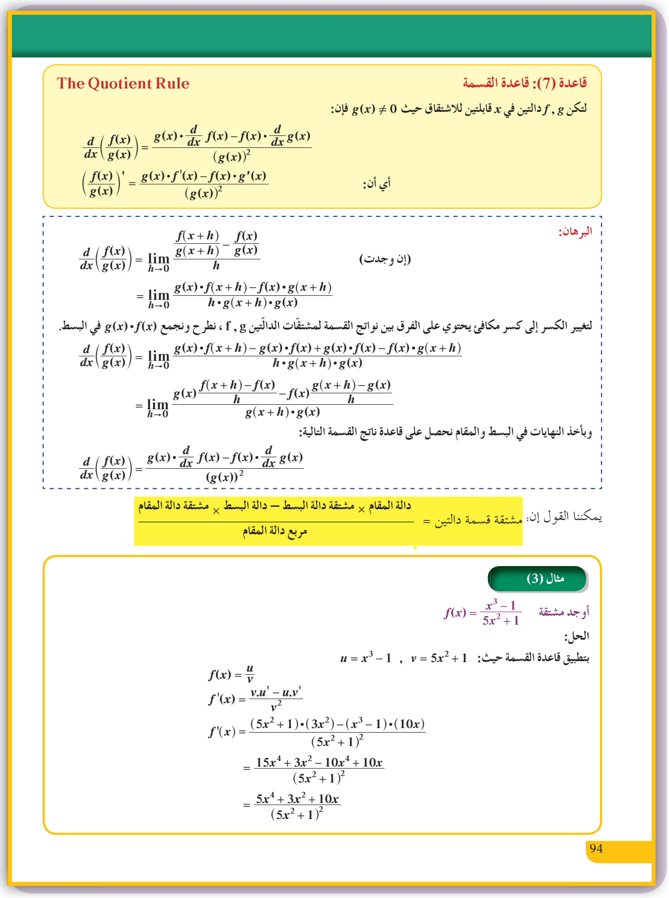
1 لتكن: $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

هل لمنحنى الدالة مماسات أفقية؟ إذا كان كذلك، فأين؟ نعم، $x = -2$

2 $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$

(a) أوجد $f'(x)$. $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$

(b) أوجد $f'(1)$. $f'(1) = \frac{-1}{8}$



قاعدة (7): قاعدة القسمة The Quotient Rule

لتكن f, g دالتين في x قابلتين للاشتقاق حيث $g(x) \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

أي أن:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+h) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

لتغيير الكسر إلى كسر مكافئ يحتوي على الفرق بين نواتج القسمة لمشتقّات الدالّتين f , g ، نطرح ونجمع $g(x)\cdot f(x)$ في البسط.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+h) - g(x)\cdot f(x) + g(x)\cdot f(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

وبأخذ النهايات في البسط والمقام نحصل على قاعدة ناتج القسمة التالية:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

يمكننا القول إن: مشتقة قسمة دالتين = (دالة المقام × مشتقة دالة البسط — دالة البسط × مشتقة دالة المقام) ÷ مربع دالة المقام

مثال (3)

أوجد مشتقة $f(x) = \frac{x^3-1}{5x^2+1}$

الحل:

بتطبيق قاعدة القسمة حيث: $u = x^3 - 1 \ , \ v = 5x^2 + 1$

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

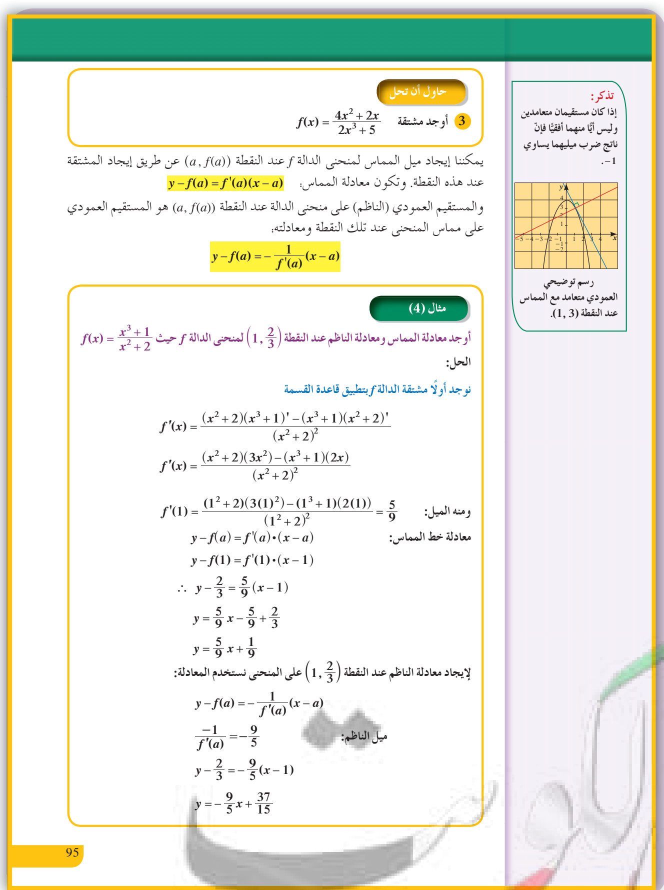
$$f'(x) = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(5x^2+1)\cdot(3x^2) - (x^3-1)\cdot(10x)}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{15x^4 + 3x^2 - 10x^4 + 10x}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{5x^4 + 3x^2 + 10x}{(5x^2+1)^2}$$

94



حاول أن تحل

3 أوجد مشتقة $f(x) = \frac{4x^2+2x}{2x^3+5}$

يمكننا إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a, f(a))$ عن طريق إيجاد المشتقة عند هذه النقطة. وتكون معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

والمستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة $(a, f(a))$ هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ومعادلته:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

مثال (4)

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$

الحل:

نوجد أولًا مشتقة الدالة f بتطبيق قاعدة القسمة

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)(x^3+1)' - (x^3+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)(3x^2) - (x^3+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

ومنه الميل: $f'(1) = \frac{(1^2+2)(3(1)^2) - (1^3+1)(2(1))}{(1^2+2)^2} = \frac{5}{9}$

معادلة خط المماس: $y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$

$$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$$

$$\therefore\ y - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}(x-1)$$

$$y = \frac{5}{9}x - \frac{5}{9} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{9}$$

لإيجاد معادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ على المنحنى نستخدم المعادلة:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

ميل الناظم: $\frac{-1}{f'(a)} = -\frac{9}{5}$

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{9}{5}(x-1)$$

$$y = -\frac{9}{5}x + \frac{37}{15}$$

95

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1. $g'(x) = 0$
2. $f'(x) = \frac{1}{3}$
3. $u'(x) = \frac{2}{x^2}$
4. $v'(x) = 4x^3$

«تدريب (1)»

(a) $f'(x) = 0$

(b) $f'(x) = 0$

(c) $f'(x) = 0$

«تدريب (2)»

(a) $f'(x) = 4x^3$

(b) $g'(x) = 10x^9$

(c) $h'(x) = 12x^{11}$

«حاول أن تحل»

1. $\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 8x$
2. **(a)** نحوّل f إلى دالة كثيرة الحدود على الصورة:

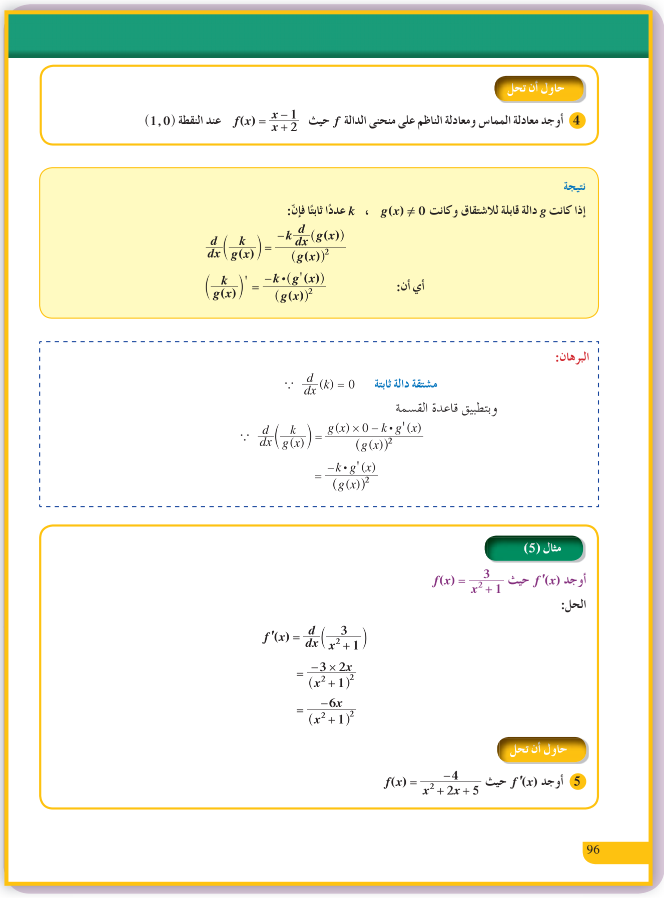
   $f(x) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3$ ثم نوجد $f'(x)$

   (b) **(1)** $f'(x) = 12x - 1$

   (2) $f'(x) = 12x^2 + 48x$

   (3) $f'(x) = 6x^2(x^3 - 4)$
3. $f'(x) = \frac{-8x^4 - 8x^3 + 40x + 10}{(2x^3 + 5)^2}$
4. معادلة المماس $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$،

   معادلة الناظم $y = -3x + 3$
5. $f'(x) = \frac{8(x+1)}{(x^2 + 2x + 5)^2}$
6. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = \frac{7}{4}$
7. $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$



حاول أن تحل

4 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1, 0)$

نتيجة

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق وكانت $g(x) \neq 0$ ، k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right) = \frac{-k\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

أي أن: $\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-k \cdot (g'(x))}{(g(x))^2}$

البرهان:

مشتقة دالة ثابتة $\because \frac{d}{dx}(k) = 0$

وبتطبيق قاعدة القسمة

$$\because \frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \times 0 - k \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{-k \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال (5)

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

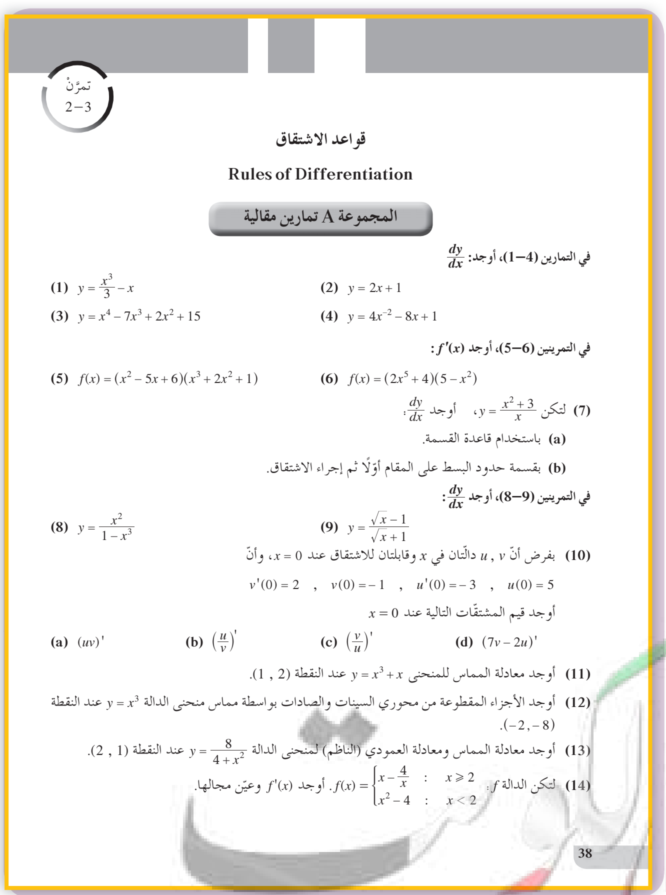
الحل:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2+1}\right) = \frac{-3 \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

حاول أن تحل

5 أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x + 5}$

96



تمرَّنْ 2–3

قواعد الاشتقاق

Rules of Differentiation

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$

(1) $y = \frac{x^3}{3} - x$ (2) $y = 2x + 1$

(3) $y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 15$ (4) $y = 4x^{-2} - 8x + 1$

في التمرينين (5–6)، أوجد $f'(x)$:

(5) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^3 + 2x^2 + 1)$ (6) $f(x) = (2x^5 + 4)(5 - x^2)$

(7) لتكن $y = \frac{x^2+3}{x}$، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

(a) باستخدام قاعدة القسمة.

(b) بقسمة حدود البسط على المقام أوّلًا ثم إجراء الاشتقاق.

في التمرينين (8–9)، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

(8) $y = \frac{x^2}{1 - x^3}$ (9) $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

(10) بفرض أنّ u , v دالّتان في x وقابلتان للاشتقاق عند $x = 0$، وأنّ

$u(0) = 5$, $u'(0) = -3$, $v(0) = -1$, $v'(0) = 2$

أوجد قيم المشتقّات التالية عند $x = 0$

(a) $(uv)'$ (b) $\left(\frac{u}{v}\right)'$ (c) $\left(\frac{v}{u}\right)'$ (d) $(7v - 2u)'$

(11) أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 + x$ عند النقطة $(1, 2)$.

(12) أوجد الأجزاء المقطوعة من محوري السينات والصادات بواسطة مماس منحنى الدالة $y = x^3$ عند النقطة $(-2, -8)$.

(13) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4 + x^2}$ عند النقطة $(2, 1)$.

(14) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x - \frac{4}{x} & : x \geqslant 2 \\ x^2 - 4 & : x < 2 \end{cases}$. أوجد $f'(x)$ وعيّن مجالها.

38

8 **(a)** مجال الدالة f : $(-\infty,2]\cup(2,\infty)$

f دالة متصلة عند $x=2$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & : \ x\in(-\infty,2)\\ \text{تبحث} & : \ x=2\\ 4 & : \ x\in(2,\infty)\end{cases}$$

$$f'_{+}(2)=\lim_{x\to 2^{+}}\frac{4x-3-5}{x-2}=4$$

$$f'_{-}(2)=\lim_{x\to 2^{-}}\frac{x^{2}+1-5}{x-2}=4$$

$$f'_{-}(2)=f'_{+}(2)=4$$

$$f'(2)=4$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}2x & : \ x\in(-\infty,2]\\ 4 & : \ x\in(2,\infty)\end{cases}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y=-x^2+3$ فإن $\frac{dy}{dx}=-2$ — (a) (b)

(2) إذا كانت $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{3}+x$ فإن $\frac{dy}{dx}=x^2+\frac{2}{3}x+1$ — (a) (b)

(3) إذا كانت $y=\frac{2x+5}{3x-2}$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{12x+11}{(3x-2)^2}$ — (a) (b)

(4) إذا كانت $y=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x^4}$ — (a) (b)

في التمارين (5—16)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y=1-x+x^2-x^3$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-1+2x-3x^2$ (b) $2-3x$ (c) $-6x+2$ (d) $1-x$

(6) إذا كانت $f(x)=5x^3-3x^5$ فإن $f'(x)$ تساوي:

(a) $20x+60x^3$ (b) $15x^2-15x^4$ (c) $30x-30x^4$ (d) $30x-60x^3$

(7) إذا كانت $y=\frac{x^2+5x-1}{x^2}$ فإن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ تساوي:

(a) $\frac{-7}{2}$ (b) -3 (c) 3 (d) $\frac{7}{2}$

(8) ميل مماس منحنى $y=x^2+5x$ عند $x=3$ يساوي:

(a) 24 **(b)** $-\frac{5}{2}$ **(c)** 11 **(d)** 8

(9) ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{2}{x}$ عند $x=-2$ هو:

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(10) ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{-1}{x-1}$ عند $x=0$ هو:

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

(11) للدالة f : $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته:

(a) $x=0$ (b) $y=0$ (c) $x=1$ (d) $y=1$

39

قوى x الصحيحة السالبة (الأسس الصحيحة السالبة) Negative Integer Powers of x

قاعدة اشتقاق قوى x الصحيحة السالبة هي قاعدة الاشتقاق نفسها في حالة القوى الصحيحة الموجبة كما في القاعدة (3).
لذلك نستطيع الآن أن نوسّع قاعدة القوى لتشمل القوى الصحيحة السالبة باستخدام قاعدة القسمة.

قاعدة (8): قاعدة القوى للأسس الصحيحة السالبة للمتغيّر x
Power Rule for Negative Integer Powers of x

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، $x\neq 0$ فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n})=-n\,x^{-n-1}$$

أي أن $(x^{-n})'=-nx^{-n-1}$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n})=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

$$=\frac{-1\times\frac{d}{dx}(x^n)}{(x^n)^2}$$ نتيجة

$$=\frac{-1\times(n\,x^{n-1})}{(x^n)^2}$$ قاعدة (3)

$$=\frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$=-n\,x^{n-1-2n}$$

$$=-n\,x^{-n-1}$$

مثال (6)

لتكن: $y=\frac{x^2+3}{2x}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=1$

الحل:

يمكن أن نوجد المشتقّة بقاعدة القسمة، لكن من الأيسر أن نبسّط أولًا كمجموع قوّتين للمتغيّر x:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2x}+\frac{3}{2x}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x^{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x^{-2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x^{-2}\right]_{x=1}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$$

97

(12) ميل الناظم لمنحنى الدالة $y=x^3-3x+1$ عند النقطة $(2\ ,\ 3)$ هي:

(a) 9 (b) 3 (c) $-\frac{1}{3}$ (d) $\frac{-1}{9}$

(13) النقاط على منحنى الدالة $y=2x^3-3x^2-12x+20$ التي يكون المماس عندها موازيًا لمحور السينات هي:

(a) $(-1\ ,\ 27)$ (b) $(2\ ,\ 0)$
(c) $(2,0)\ ,\ (-1,27)$ (d) $(-1,27)\ ,\ (0,20)$

(14) لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & : \ x\geqslant 1\\ 4x-1 & : \ x<1\end{cases}$ فإن مجال f' هو:

(a) $\{1\}$ (b) $\mathbb{R}-\{1\}$
(c) $[1\ ,\ \infty)$ (d) $\mathbb{R}$

(15) إن معادلة المماس لمنحنى الدالة f : $f(x)=2x^2-13x+2$ عند $x=3$ هي:

(a) $y=x-16$ (b) $y=-x+16$
(c) $y=-x-13$ (d) $y=-x-16$

(16) إذا كانت $f(2)=3$ ، $f'(2)=5$ عند النقطة P على منحنى الدالة f فإن:

(a) معادلة خط المماس: $y=5x+7$
(b) معادلة الخط العمودي (الناظم): $y=-\frac{1}{5}x+7$
(c) معادلة الخط العمودي (الناظم): $y=-\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$
(d) معادلة خط المماس: $y=5x+3$

40

(b) مجال الدالة f: $(-\infty,1)\cup[1,\infty)$

f دالة متصلة عند $x=1$

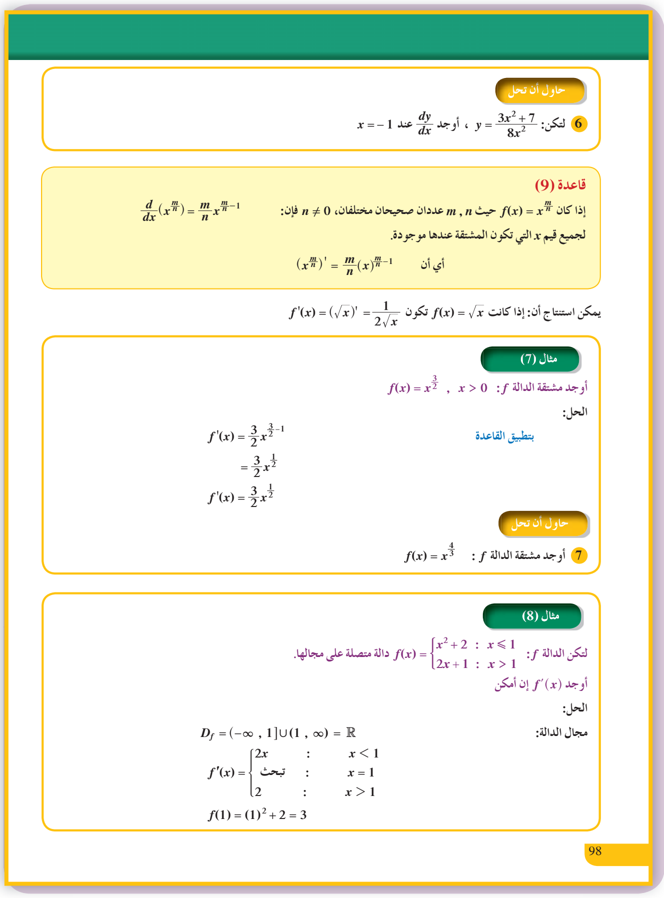
$$f'(x)=\begin{cases}2x & : x\in(-\infty,1)\\ \text{تبحث} & : x=1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & : x>1\end{cases}$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}=1$$

$$f'_-(1)\neq f'_+(1)$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}2x & : x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & : x\in(1,\infty)\end{cases}$$



حاول أن تحل

6 لتكن: $y=\dfrac{3x^2+7}{8x^2}$ ، أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ عند $x=-1$

قاعدة (9)

إذا كان $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ حيث n , m عددان صحيحان مختلفان، $n\neq0$ فإن: $\dfrac{d}{dx}(x^{\frac{m}{n}})=\dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

لجميع قيم x التي تكون المشتقة عندها موجودة.

أي أن $(x^{\frac{m}{n}})'=\dfrac{m}{n}(x)^{\frac{m}{n}-1}$

يمكن استنتاج أن: إذا كانت $f(x)=\sqrt{x}$ تكون $f'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال (7)

أوجد مشتقة الدالة f: $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, $x>0$

الحل:

بتطبيق القاعدة

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$$
$$=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

حاول أن تحل

7 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$

مثال (8)

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & : x\leqslant1\\ 2x+1 & : x>1\end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

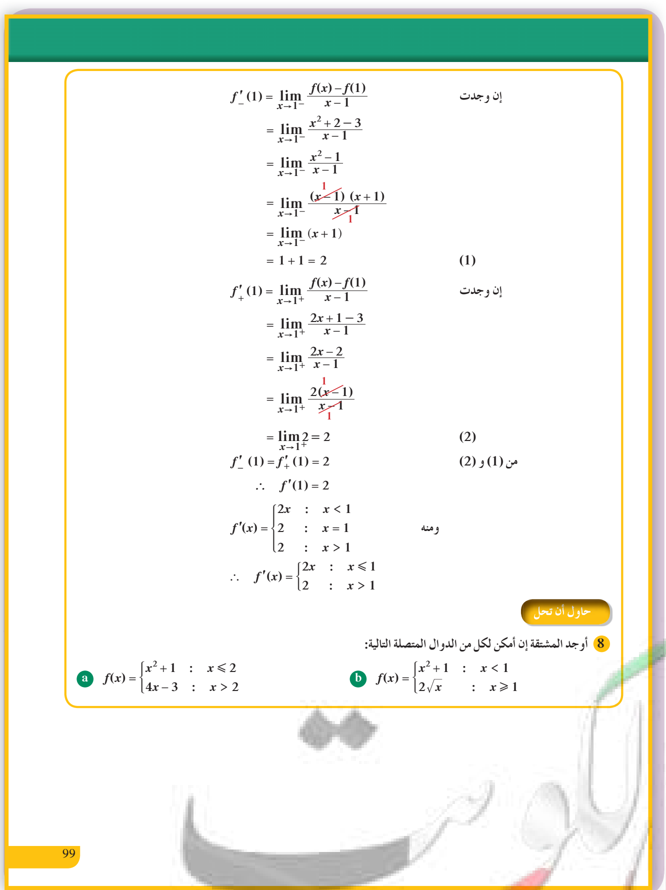
الحل:

مجال الدالة: $D_f=(-\infty\ ,\ 1]\cup(1\ ,\ \infty)=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & : & x<1\\ \text{تبحث} & : & x=1\\ 2 & : & x>1\end{cases}$$

$$f(1)=(1)^2+2=3$$

98



إن وجدت $f'_-(1)=\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+2-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}\,(x+1)}{\cancel{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to1^-}(x+1)$$

(1) $=1+1=2$

إن وجدت $f'_+(1)=\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+1-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

(2) $=\displaystyle\lim_{x\to1^+}2=2$

من (1) و (2) $f'_-(1)=f'_+(1)=2$

$$\therefore\ f'(1)=2$$

ومنه $f'(x)=\begin{cases}2x & : x<1\\ 2 & : x=1\\ 2 & : x>1\end{cases}$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}2x & : x\leqslant1\\ 2 & : x>1\end{cases}$$

حاول أن تحل

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

b $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & : x<1\\ 2\sqrt{x} & : x\geqslant1\end{cases}$

a $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & : x\leqslant2\\ 4x-3 & : x>2\end{cases}$

99

4–2: مشتقات الدوال المثلثية

1 الأهداف

- يوجد مشتقة دالة الجيب.
- يوجد مشتقة دالة جيب التمام.
- يوجد مشتقات الدوال المثلثية الأخرى.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مشتقة دالة الجيب – مشتقة دالة جيب التمام – مشتقة دالة الظل – مشتقة دالة ظل التمام – مشتقة دالة القاطع – مشتقة دالة قاطع التمام.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

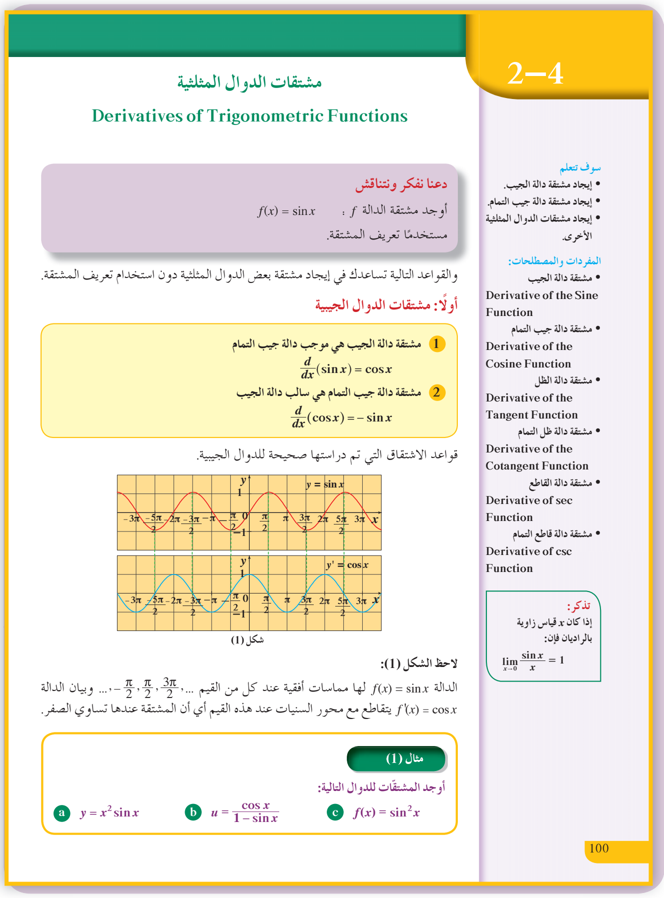
4 التمهيد

أوجد: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h}$

5 التدريس

يمكنك أن تبدأ هذا الدرس بالطلب إلى الطلاب أن يبحثوا ضمن مجموعات عن مشتقة f : $f(x) = \sin x$ من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، ثم أن يوجدوا بالطريقة نفسها $\dfrac{d}{dx}\cos x$

ارتباطًا بهذا الشرح، قد ترغب في أن يعطي الطلاب قيمًا صغيرة لـ h مثل $h = 0.001$، وقيمًا أخرى أصغر، وأن يرسموا الرسم البياني لناتج قسمة الفرق: $\dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب



2–4

مشتقات الدوال المثلثية

Derivatives of Trigonometric Functions

سوف تتعلم
- إيجاد مشتقة دالة الجيب.
- إيجاد مشتقة دالة جيب التمام.
- إيجاد مشتقات الدوال المثلثية الأخرى.

المفردات والمصطلحات:
- مشتقة دالة الجيب Derivative of the Sine Function
- مشتقة دالة جيب التمام Derivative of the Cosine Function
- مشتقة دالة الظل Derivative of the Tangent Function
- مشتقة دالة ظل التمام Derivative of the Cotangent Function
- مشتقة دالة القاطع Derivative of sec Function
- مشتقة دالة قاطع التمام Derivative of csc Function

دعنا نفكر ونتناقش

أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sin x$ مستخدمًا تعريف المشتقة.

والقواعد التالية تساعدك في إيجاد مشتقة بعض الدوال المثلثية دون استخدام تعريف المشتقة.

أولًا: مشتقات الدوال الجيبية

1 مشتقة دالة الجيب هي موجب دالة جيب التمام

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

2 مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

قواعد الاشتقاق التي تم دراستها صحيحة للدوال الجيبية.

$y = \sin x$

$y' = \cos x$

شكل (1)

تذكر: إذا كان x قياس زاوية بالراديان فإن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

لاحظ الشكل (1):

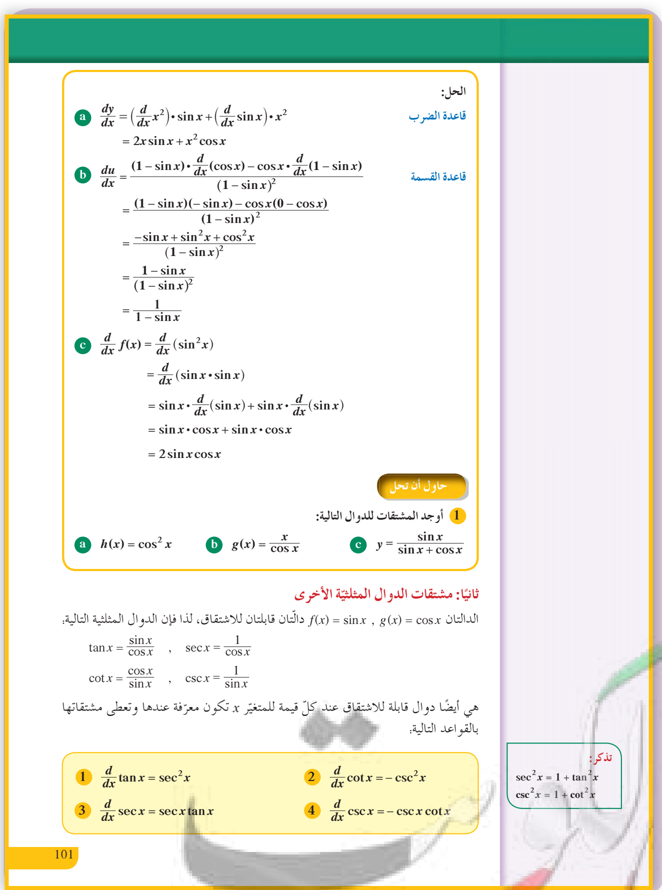
الدالة $f(x) = \sin x$ لها مماسات أفقية عند كل من القيم $\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ وبيان الدالة $f'(x) = \cos x$ يتقاطع مع محور السينات عند هذه القيم أي أن المشتقة عندها تساوي الصفر.

مثال (1)

أوجد المشتقّات للدوال التالية:

a $y = x^2 \sin x$ b $u = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ c $f(x) = \sin^2 x$

100



الحل:

a (قاعدة الضرب)

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dx}x^2\right)\cdot \sin x + \left(\frac{d}{dx}\sin x\right)\cdot x^2 = 2x\sin x + x^2\cos x$$

b (قاعدة القسمة)

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1-\sin x)\cdot\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\cdot\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - \cos x(0-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$$

c

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(\sin^2 x) = \frac{d}{dx}(\sin x\cdot\sin x) = \sin x\cdot\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\cdot\frac{d}{dx}(\sin x) = \sin x\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

حاول أن تحل

1 أوجد المشتقات للدوال التالية:

a $h(x) = \cos^2 x$ b $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$ c $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

ثانيًا: مشتقات الدوال المثلثيّة الأخرى

الدالتان $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ دالّتان قابلتان للاشتقاق، لذا فإن الدوال المثلثية التالية:

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

هي أيضًا دوال قابلة للاشتقاق عند كلّ قيمة للمتغيّر x تكون معرّفة عندها وتعطى مشتقاتها بالقواعد التالية:

1 $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ 2 $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

3 $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$ 4 $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x$

تذكر: $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ، $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

101

ينبغي أن يعرف الطلاب منحنى $y = \cos x$ ، $y = \sin x$.

يتم برهنة قاعدة اشتقاق $\sin x$ من تعريف المشتقة مباشرة، باستخدام نهايتين أساسيتين هما:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \text{ ، } \lim_{h\to 0}\frac{(\cos h)-1}{h} = 0$$

يمكن الحصول على قاعدة اشتقاق $\cos x$ بطريقة مماثلة.

قد ترغب في أن تبرز الدور المهم لقوانين مجموع زاويتين في حالتي $\sin(a+b)$ و $\cos(a+b)$ في هذه الاشتقاقات.

يمكن أن تعرض قواعد اشتقاق الدوال المثلثية الأربع الأساسية الأخرى بسهولة باستخدام المتطابقات وقواعد اشتقاق دوال الجيب وجيب التمام.

يمكنك أن تلخص الدرس بتقديم جدول يعرض مشتقات الدوال المثلثية الأساسية.

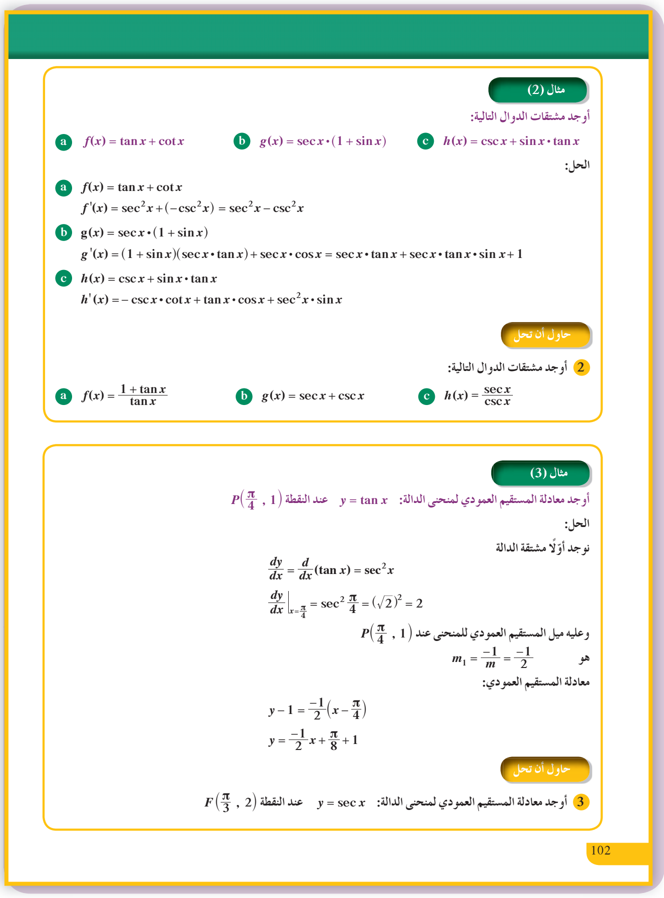
اطلب إلى الطلاب أن يناقشوا طرائق مختلفة لتذكر هذه المشتقات.

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة و معالجتها

ينسى الطلاب أحيانًا أو يطبقون خطأ المتطابقات المثلثية الأساسية وقد ترغب في مراجعة متطابقات فيثاغورث، مجموع الزوايا، نصف الزاوية. عند استخدام حاسبة بيانية أو حاسوب، قد ينسى الطلاب أحيانًا استخدام مقياس الراديان أو إدخال تعبيرات مثل $\cos x^2$ بصورة $(\cos x)^2$.



مثال (2)

أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \tan x + \cot x$ b $g(x) = \sec x \cdot (1+\sin x)$ c $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

الحل:

a $f(x) = \tan x + \cot x$

$f'(x) = \sec^2 x + (-\csc^2 x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

b $g(x) = \sec x \cdot (1+\sin x)$

$g'(x) = (1+\sin x)(\sec x \cdot \tan x) + \sec x \cdot \cos x = \sec x \cdot \tan x + \sec x \cdot \tan x \cdot \sin x + 1$

c $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

$h'(x) = -\csc x \cdot \cot x + \tan x \cdot \cos x + \sec^2 x \cdot \sin x$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \dfrac{1+\tan x}{\tan x}$ b $g(x) = \sec x + \csc x$ c $h(x) = \dfrac{\sec x}{\csc x}$

مثال (3)

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

الحل:

نوجد أوّلًا مشتقة الدالة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sec^2\frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

وعليه ميل المستقيم العمودي للمنحنى عند $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

هو $m_1 = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$

معادلة المستقيم العمودي:

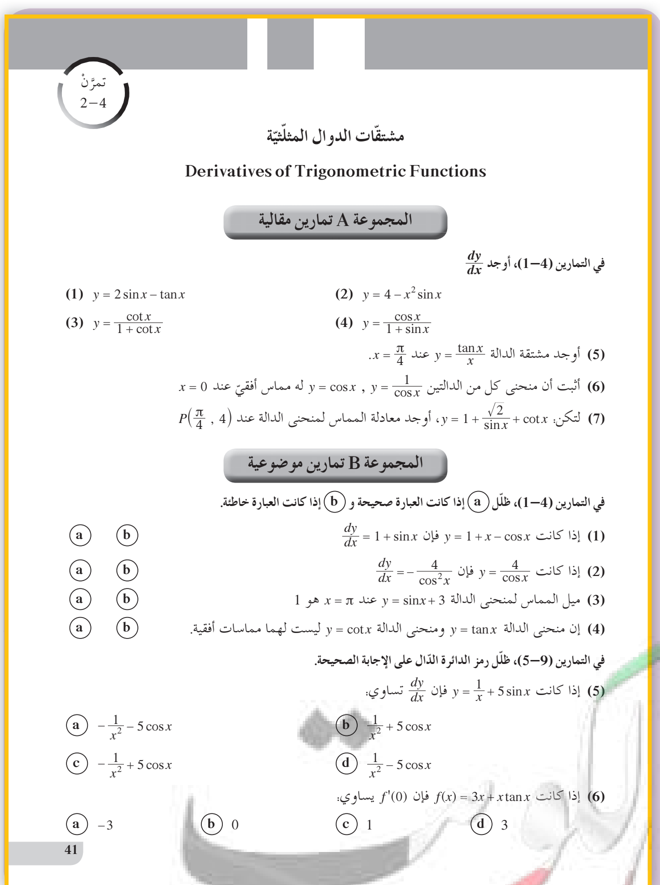
$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

102



تمرَّنْ 2−4

مشتقّات الدوال المثلّثيّة

Derivatives of Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−4)، أوجد $\frac{dy}{dx}$

(1) $y = 2\sin x - \tan x$ (2) $y = 4 - x^2 \sin x$

(3) $y = \dfrac{\cot x}{1+\cot x}$ (4) $y = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

(5) أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{\tan x}{x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$.

(6) أثبت أن منحنى كل من الدالتين $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = \cos x$ له مماس أفقيّ عند $x = 0$

(7) لتكن: $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$، أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $P\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1−4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = 1 + x - \cos x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1 + \sin x$ (a) (b)

(2) إذا كانت $y = \frac{4}{\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{\cos^2 x}$ (a) (b)

(3) ميل المماس لمنحنى الدالة $y = \sin x + 3$ عند $x = \pi$ هو 1   (a) (b)

(4) إن منحنى الدالة $y = \tan x$ ومنحنى الدالة $y = \cot x$ ليست لهما مماسات أفقية.   (a) (b)

في التمارين (5−9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = \frac{1}{x} + 5\sin x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{1}{x^2} - 5\cos x$ (b) $\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

(c) $-\frac{1}{x^2} + 5\cos x$ (d) $\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

(6) إذا كانت $f(x) = 3x + x\tan x$ فإن $f'(0)$ يساوي:

(a) -3 (b) 0 (c) 1 (d) 3

41

8 التقييم

تابع عمل الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» للتحقق من مدى استيعابهم وفهمهم لما ورد في هذا الدرس.

اختبار سريع

أوجد مشتقة كلّ من الدوال التالية:

1. $f_1(x) = \sin x + x\cos x$

   $f_1'(x) = 2\cos x - x\sin x$

2. $f_2(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

   $f_2'(x) = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$

3. $f_3(x) = \dfrac{\tan x}{1 + x}$

   $f_3'(x) = \dfrac{(1+x)\sec^2 x - \tan x}{(1+x)^2}$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0}\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

$$= 1\cdot\cos x = \cos x$$

حل آخر:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos h + \cos x \sin h - \sin(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h - \sin x + \cos x\sin h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\sin x \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x$$

(7) إذا كانت $y = \dfrac{x}{1+\cos x}$ فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي:

ⓐ $-\dfrac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}$ ⓑ $\dfrac{1+\cos x - x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

ⓒ $\dfrac{1+\cos x - x\sin x}{1+\cos^2 x}$ ⓓ $\dfrac{1+\cos x + x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(8) معادلة المستقيم العمودي على المماس لبيان الدالة $y = 2\cos x$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ هي:

ⓐ $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$ ⓑ $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$

ⓒ $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ ⓓ $y = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$

(9) إذا كانت $y = \dfrac{1}{\sin x}$ فإن y' تساوي:

ⓐ $\cot x \cdot \csc x$ ⓑ $\cos x$

ⓒ $-\cot x \cdot \csc x$ ⓓ $-\cos x$

42

«حاول أن تحل»

1. (a) $h'(x) = -2\cos x\sin x$

   (b) $g'(x) = \dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$

   (c) $y'(x) = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

2. (a) $f'(x) = \dfrac{-\sec^2 x}{\tan^2 x}$

   (b) $g'(x) = \sec x \tan x - \csc x \cot x$

   (c) $h'(x) = 1 + \tan^2 x$

3. $y = \dfrac{-\sqrt{3}}{6}x + 2 + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$

5–2: قاعدة السلسلة

1 الأهداف

- يوجد مشتقة تركيب دالتين باستخدام قاعدة السلسلة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قاعدة السلسلة – دالة مركبة – قاعدة سلسلة القوى.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

أوجد مشتقات الدوال التالية:

(a) $f(x) = 2x^3 - 5x$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$

(c) $f(x) = (2x-1)(3x+4)$

(d) $f(x) = x + \sin x$

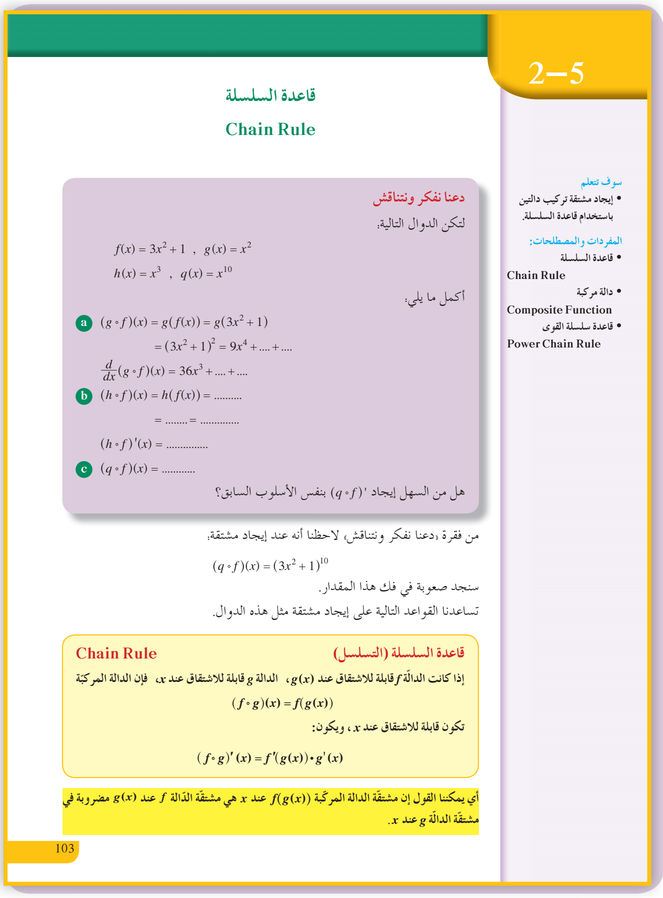
5 التدريس

يمكن أن توفر فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» مقدمة لقاعدة السلسلة. ولأن هذين المثالين يسهل فهمهما، فإنهما يساعدان على جعل قاعدة السلسلة تبدو معقولة.

يستخدم الكتاب مدخلًا تقليديًّا لتعليم الاستخدام الصحيح لقاعدة السلسلة:

أوّلًا: يتعلّم الطلاب إيجاد مشتقة $y = f(g(x))$ بوضع $g(x)$، وحساب المشتقتين $f'(g(x))g'(x)$، ثم تطبيق قاعدة السلسلة للحصول على:

$$y' = f'(u)\ g'(x) = f'(g(x))\ g'(x)$$


2–5

قاعدة السلسلة

Chain Rule

سوف تتعلم
- إيجاد مشتقة تركيب دالتين باستخدام قاعدة السلسلة

المفردات والمصطلحات:
- قاعدة السلسلة Chain Rule
- دالة مركبة Composite Function
- قاعدة سلسلة القوى Power Chain Rule

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدوال التالية:

$f(x) = 3x^2 + 1\ ,\ g(x) = x^2$

$h(x) = x^3\ ,\ q(x) = x^{10}$

أكمل ما يلي:

ⓐ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2+1)$

$= (3x^2+1)^2 = 9x^4 + ... + ...$

$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = 36x^3 + ... + ...$

ⓑ $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = ...$

$= .... = ...$

$(h \circ f)'(x) = ...$

ⓒ $(q \circ f)(x) = ...$

هل من السهل إيجاد $(q \circ f)'$ بنفس الأسلوب السابق؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أنه عند إيجاد مشتقة:

$(q \circ f)(x) = (3x^2+1)^{10}$

سنجد صعوبة في فك هذا المقدار.

تساعدنا القواعد التالية على إيجاد مشتقة مثل هذه الدوال.

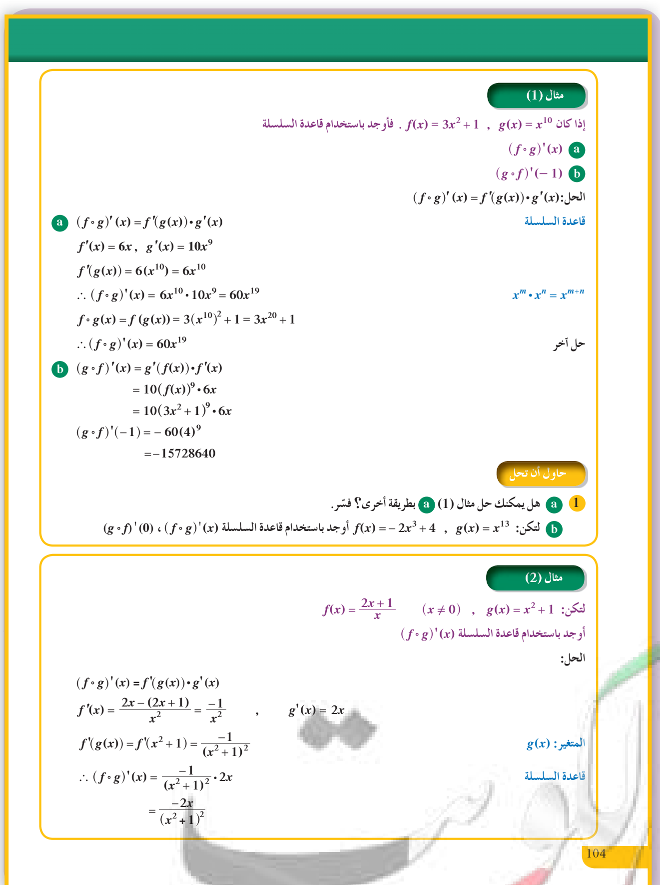
قاعدة السلسلة (التسلسل) Chain Rule

إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركبة $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تكون قابلة للاشتقاق عند x، ويكون:

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

أي يمكننا القول إن مشتقة الدالة المركبة $f(g(x))$ عند x هي مشتقة الدالة f عند $g(x)$ مضروبة في مشتقة الدالة g عند x.

103


مثال (1)

إذا كان $g(x) = x^{10}\ ,\ f(x) = 3x^2 + 1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

ⓐ $(f \circ g)'(x)$

ⓑ $(g \circ f)'(-1)$

الحل: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ قاعدة السلسلة

ⓐ $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = 6x\ ,\ g'(x) = 10x^9$

$f'(g(x)) = 6(x^{10}) = 6x^{10}$

$\therefore (f \circ g)'(x) = 6x^{10} \cdot 10x^9 = 60x^{19}$ $\quad x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

حل آخر

$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(x^{10})^2 + 1 = 3x^{20} + 1$

$\therefore (f \circ g)'(x) = 60x^{19}$

ⓑ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$= 10(f(x))^9 \cdot 6x$

$= 10(3x^2+1)^9 \cdot 6x$

$(g \circ f)'(-1) = -60(4)^9$

$= -15728640$

حاول أن تحل

1 ⓐ هل يمكنك حل مثال (1) بطريقة أخرى؟ فسّر.

ⓑ لتكن: $g(x) = x^{13}\ ,\ f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$، $(g \circ f)'(0)$

مثال (2)

لتكن: $g(x) = x^2 + 1\ ,\ (x \neq 0)\quad f(x) = \frac{2x+1}{x}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

الحل:

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ قاعدة السلسلة

$f'(x) = \frac{2x - (2x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}\ ,\quad g'(x) = 2x$

$f'(g(x)) = f'(x^2+1) = \frac{-1}{(x^2+1)^2}$ المتغير: $g(x)$

$\therefore (f \circ g)'(x) = \frac{-1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x$

$= \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

104

عندئذ تختصر العملية بالتعويض عن u والإشارة إلى $g(x)$ على أنها الدالة الداخلية.

ينبغي أن يقوم الطلاب بكثير من التدريبات على قاعدة السلسلة حتى يتمكنوا من استخدامها بصورة متقنة.

عند تقديم صيغة لايبنتز لقاعدة السلسلة، $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ أكِّد أن $\frac{dy}{du}$ تحسب قيمتها عند $u = g(x)$، $\frac{du}{dx}$ تحسب قيمتها عند x .

في المثالين (1), (2)

تطبيق مباشر لقاعدة السلسلة.

في المثالين (3), (5)

تطبيق لقاعدة السلسلة (الصورة الأخرى).

اسأل الطلاب: هل يمكن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ بطريقة أخرى؟

ناقش مع الطلاب الوقت والجهد اللازمين في حالة التعويض عن u في y، ثم التبسيط وإيجاد المشتقة.

في المثال (4)

استخدام مشتقة دالة لإيجاد السرعة اللحظية لجسيم يتحرك على خط مستقيم.

في المثالين (6), (7)

يبيّنان كيفية استخدام قاعدة سلسلة القوى. تأكّد من تمكّن الطلاب من المثالين، يمكنك إعطاءهم أمثلة إضافية.

6 الربط

يشكّل المثال (4) ترابطاً مع الفيزياء وحركة الأجسام.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

في تطبيق قاعدة السلسلة الأولى لإيجاد مشتقة $f = (g(x))$، يحدث خطأ شائع بإغفال العامل $g'(x)$ في الإجابة. ساعد الطلاب من خلال أمثلة متعددة على تخطي هذا الخطأ.

حثّ الطلاب على القيام بالكثير من التدريبات على تمارين شبيهة بالمثال (3).

حاول أن تحل

2 لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(1)$

وضع عالم الرياضيات لايبنتز (Leibniz) صورة أخرى لقاعدة السلسلة.

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $u = g(x)$, $y = f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

مثال (3)

إذا كانت: $u = 5x^2 + 2$, $y = u^3 - 3u + 1$

فأوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

الحل:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

مشتقة بدلالة u — $\frac{dy}{du} = 3u^2 - 3$

مشتقة بدلالة x — $\frac{du}{dx} = 10x$

قاعدة التسلسل — $\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 3) \times (10x)$

تعويض — $\frac{dy}{dx} = \left(3(5x^2+2)^2 - 3\right) \times (10x)$

$= 750x^5 + 600x^3 + 90x$

حاول أن تحل

3 لتكن: $u = 2x^3 + x$, $y = u^2 + 4u - 3$

أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

105

الربط بالفيزياء

إذا كانت $s(t)$ دالة موقع جسم بعد t ثانية من حركته فإن سرعته اللحظية v هي:

$v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$

ملاحظة:

$v = \frac{ds}{dt}$ تسمى أيضًا السرعة المتجهة ويمكن أن تكون موجبة أو سالبة أو صفر.

تذكر:

اقتصرت دراستنا على دوال قابلة للتركيب

مثال (4)

يتحرّك جسيم على محور السينات بحيث إن موضعه عند أيّ لحظة $t \geq 0$ يعطى بالدالّة: $S = \cos(t^2+1)$. أوجد السرعة اللحظية للجسيم كدالة في t.

الحل:

نعلم أن: $v = \frac{dS}{dt}$ (v هي السرعة اللحظية)

في هذه الحالة S دالّة مركّبة، حيث: $u = t^2 + 1$, $S = \cos(u)$

لدينا:

$S = \cos(u)$ — $\frac{dS}{du} = -\sin(u)$

$u = t^2 + 1$ — $\frac{du}{dt} = 2t$

باستخدام قاعدة السلسلة:

$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{du} \cdot \frac{du}{dt}$

$= (-\sin(u)) \cdot 2t$

$= (-\sin(t^2+1)) \cdot 2t$

$= -2t \sin(t^2+1)$

حاول أن تحل

4 أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغيّر x .

من مثال (4) يمكن إيجاد المشتقة باستخدام القاعدة التالية:

$\frac{d}{dx}(\cos f(x)) = (-\sin f(x)) \cdot f'(x)$ ويمكن تعميمها على الدوال المثلثية الأخرى.

مثال (5)

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة.

الحل:

نفرض أن: $g(x) = \sin x$, $h(x) = x^3$

$\therefore\ f(x) = (h \circ g)(x)$

$f'(x) = (h \circ g)'(x)$

$= h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= 3(g(x))^2 \cdot \cos x$

$= 3\sin^2 x \cos x$

حاول أن تحل

5 أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \cos^5 x$ باستخدام قاعدة السلسلة .

106

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرة «حاول أن تحل».
تحقق من عمل الطلاب وتأكد من فهمهم لاستخدام قاعدة السلسلة.

اختبار سريع

1 أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

$-2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

2 $f(x) = 2x + 1 \ , \ g(x) = x^2$

أوجد: $(f \circ g)'(x)$

$(f \circ g)'(x) = 4x$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $(g \circ f)(x) = 9x^4 + 6x^2 + 1$

$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = 36x^3 + 12x + 0$

(b) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(3x^2 + 1) = (3x^2 + 1)^3$

$(h \circ f)'(x) = 18x(3x^2 + 1)^2$

(c) $(q \circ f)(x) = q(3x^2 + 1) = (3x^2 + 1)^{10}$

كلا.

«حاول أن تحل»

طريقة أخرى:

1 **(a)** $(f \circ g)(x) = 3(x^{10})^2 + 1 = 3x^{20} + 1$

$(f \circ g)'(x) = 60x^{19}$

(b) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

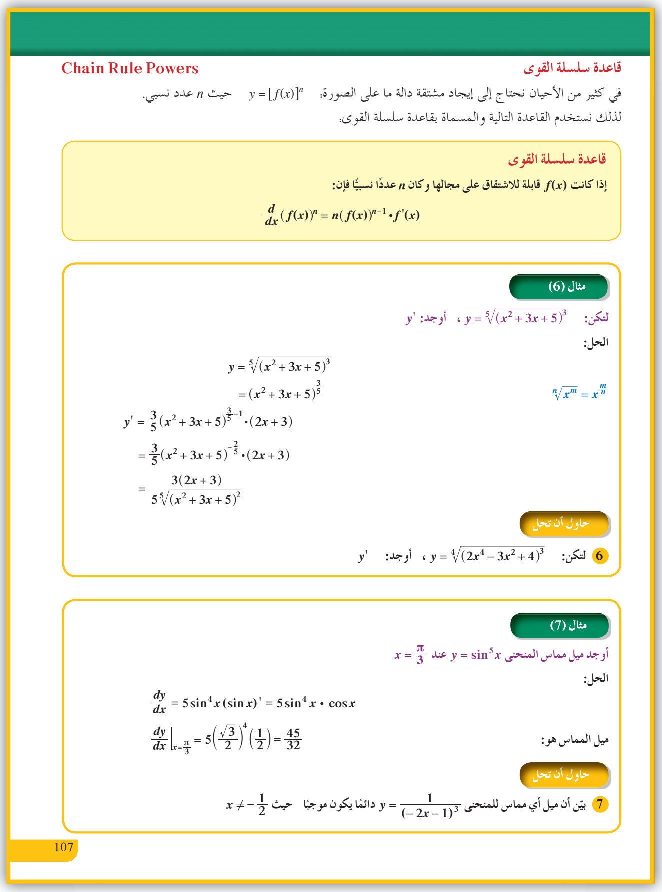
$f'(x) = -6x^2 \ , \ g'(x) = 13x^{12} \ ,$

$f'(g(x)) = -6(x^{13})^2$

$(f \circ g)'(x) = -6(x^{13})^2 \cdot 13x^{12} = -78x^{38}$

$(g \circ f)'(x) = -78x^2(-2x^3 + 4)^{12}$

$(g \circ f)'(0) = 0$



قاعدة سلسلة القوى Chain Rule Powers

في كثير من الأحيان نحتاج إلى إيجاد مشتقة دالة ما على الصورة: $y = [f(x)]^n$ حيث n عدد نسبي.
لذلك نستخدم القاعدة التالية والمسماة بقاعدة سلسلة القوى:

قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددًا نسبيًا فإن:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

مثال (6)

لتكن: $y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$ ، أوجد: y'

الحل:

$$y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$$
$$= (x^2 + 3x + 5)^{\frac{3}{5}}$$
$$y' = \frac{3}{5}(x^2 + 3x + 5)^{\frac{3}{5} - 1} \cdot (2x + 3)$$
$$= \frac{3}{5}(x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{5}} \cdot (2x + 3)$$
$$= \frac{3(2x + 3)}{5\sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^2}}$$

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

حاول أن تحل

6 لتكن: $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$ ، أوجد: y'

مثال (7)

أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 5\sin^4 x\,(\sin x)' = 5\sin^4 x \cdot \cos x$$

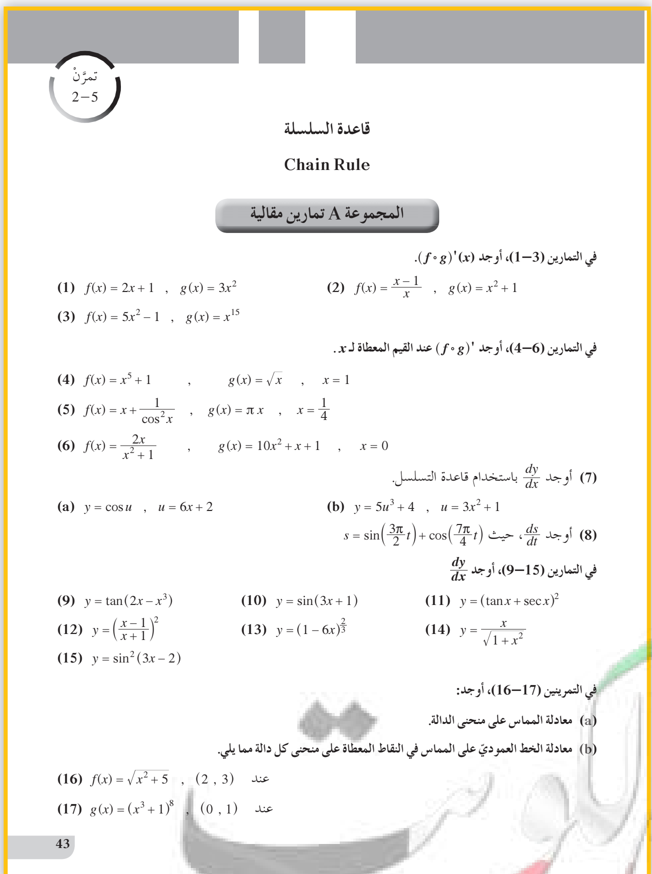
ميل المماس هو:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}$$

حاول أن تحل

7 بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائمًا يكون موجبًا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

107



تمرَّنْ 2-5

قاعدة السلسلة Chain Rule

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–3)، أوجد $(f \circ g)'(x)$.

(1) $f(x) = 2x + 1 \ , \ g(x) = 3x^2$

(2) $f(x) = \frac{x-1}{x} \ , \ g(x) = x^2 + 1$

(3) $f(x) = 5x^2 - 1 \ , \ g(x) = x^{15}$

في التمارين (4–6)، أوجد $(f \circ g)'$ عند القيم المعطاة لـ x.

(4) $f(x) = x^5 + 1 \ , \ g(x) = \sqrt{x} \ , \ x = 1$

(5) $f(x) = x + \frac{1}{\cos^2 x} \ , \ g(x) = \pi x \ , \ x = \frac{1}{4}$

(6) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \ , \ g(x) = 10x^2 + x + 1 \ , \ x = 0$

(7) أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

(a) $y = \cos u \ , \ u = 6x + 2$

(b) $y = 5u^3 + 4 \ , \ u = 3x^2 + 1$

(8) أوجد $\frac{ds}{dt}$، حيث $s = \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$

في التمارين (9–15)، أوجد $\frac{dy}{dx}$

(9) $y = \tan(2x - x^3)$

(10) $y = \sin(3x + 1)$

(11) $y = (\tan x + \sec x)^2$

(12) $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

(13) $y = (1 - 6x)^{\frac{2}{3}}$

(14) $y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

(15) $y = \sin^2(3x - 2)$

في التمرينين (16–17)، أوجد:

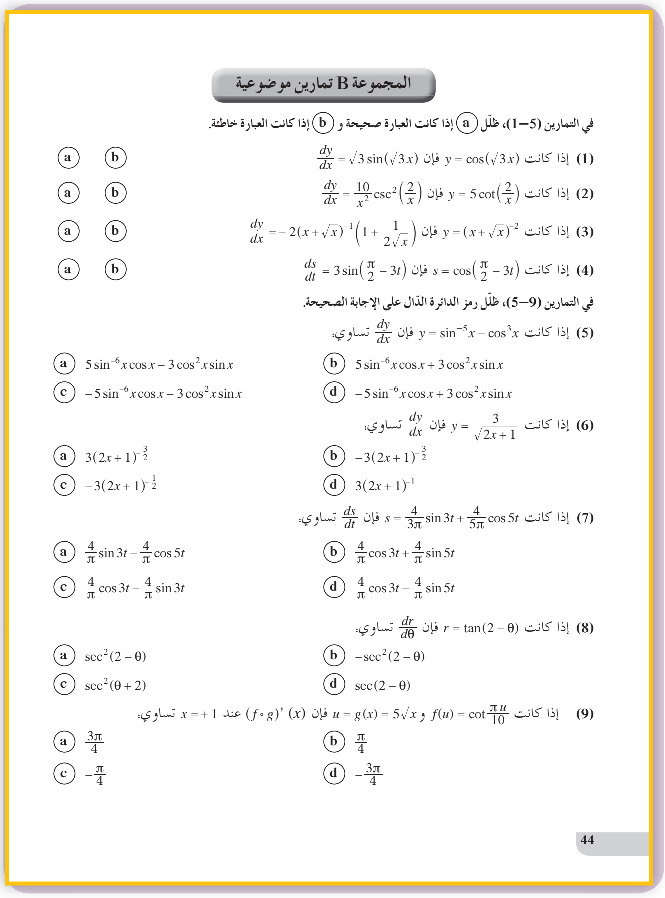
(a) معادلة المماس على منحنى الدالة.

(b) معادلة الخط العموديّ على المماس في النقاط المعطاة على منحنى كل دالة مما يلي.

(16) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, عند $(2, 3)$

(17) $g(x) = (x^3 + 1)^8$, عند $(0, 1)$

43



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = \cos(\sqrt{3}x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$ — (a) (b)

(2) إذا كانت $y = 5\cot\left(\frac{2}{x}\right)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2}\csc^2\left(\frac{2}{x}\right)$ — (a) (b)

(3) إذا كانت $y = (x+\sqrt{x})^{-2}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2(x+\sqrt{x})^{-1}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ — (a) (b)

(4) إذا كانت $s = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right)$ فإن $\frac{ds}{dt} = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right)$ — (a) (b)

في التمارين (9—5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = \sin^{-5}x - \cos^3 x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $5\sin^{-6}x\cos x - 3\cos^2 x\sin x$
(b) $5\sin^{-6}x\cos x + 3\cos^2 x\sin x$
(c) $-5\sin^{-6}x\cos x - 3\cos^2 x\sin x$
(d) $-5\sin^{-6}x\cos x + 3\cos^2 x\sin x$

(6) إذا كانت $y = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$
(b) $-3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$
(c) $-3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$
(d) $3(2x+1)^{-1}$

(7) إذا كانت $s = \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$ فإن $\frac{ds}{dt}$ تساوي:

(a) $\frac{4}{\pi}\sin 3t - \frac{4}{\pi}\cos 5t$
(b) $\frac{4}{\pi}\cos 3t + \frac{4}{\pi}\sin 5t$
(c) $\frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 3t$
(d) $\frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 5t$

(8) إذا كانت $r = \tan(2-\theta)$ فإن $\frac{dr}{d\theta}$ تساوي:

(a) $\sec^2(2-\theta)$
(b) $-\sec^2(2-\theta)$
(c) $\sec^2(\theta+2)$
(d) $\sec(2-\theta)$

(9) إذا كانت $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}$ و $u = g(x) = 5\sqrt{x}$ فإن $(f \circ g)'(x)$ عند $x = +1$ تساوي:

(a) $\frac{3\pi}{4}$
(b) $\frac{\pi}{4}$
(c) $-\frac{\pi}{4}$
(d) $-\frac{3\pi}{4}$

44

2 $f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(f \circ g)'(x) = \frac{16\sqrt{x}}{(x+4)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{8}{(x+4)^2}$$

$$(f \circ g)'(1) = \frac{8}{25}$$

3 $\frac{dy}{du} = 2u + 4$; $\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2(2x^3 + x) + 4) \cdot (6x^2 + 1)$$

$$= 24x^5 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$$

4 $\frac{dy}{dx} = (2x+1) \cdot \cos(x^2 + x)$

5 $f'(x) = -5\cos^4 x \sin x$

6 $y' = \frac{3(4x^3 - 3x)}{2\sqrt[4]{2x^4 - 3x^2 + 4}}$

7 $y' = \frac{6}{(-2x-1)^4}$; $y' > 0$

2–6: المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

1 الأهداف

- يوجد المشتقات من الرتب العليا.
- يوجد مشتقة بطريقة الاشتقاق الضمني.
- يثبت صحة متطابقات.

2 المفردات والمفاهيم

مشتقة ذات رتبة عليا – اشتقاق ضمني.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

إذا كانت: $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $f(x) = x^4 - 5x^2 + 1$

فأوجد: $u(x) = g'(x)$ ، $h(x) = f'(x)$

ثم أوجد: $v(x) = u'(x)$ ، $l(x) = h'(x)$

5 التدريس

نحتاج أحيانًا في الفيزياء وغيرها إلى إيجاد مشتقة الدالة المشتقة أي المشتقة من الرتبة الثانية والتي نرمز إليها بـ $f''(x)$ وقد نحتاج أيضًا إلى إيجاد المشتقة من الرتبة الثالثة $f'''(x)$ والمشتقة من الرتبة الرابعة $f^{(4)}(x)$.

أشر إلى الفرق بين $f^4(x)$ و $f^{(4)}(x)$.

خاص للمعلم: لإيجاد $g'(x)$ و $g''(x)$، $g'''(x)$ و $g^{(4)}(x)$ حيث $g(x) = \frac{1}{x}$.

يمكن الاستنتاج أن $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

اسأل الطلاب: إذا كان لدينا المعادلة: $x^2 + y^2 = 1$ (معادلة دائرة)، فكيف يمكننا إيجاد ميل المماس عند نقطة على هذه الدائرة؟

طرق الاشتقاق التي تعرف عليها الطلاب لا تسمح بإيجاد المشتقة في هذه الحالة ثم ميل المماس. لحل هذه الإشكالية نعرض الاشتقاق الضمني.


2–6

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

Higher Order Derivatives and Implicit Differentiation

سوف تتعلم
- المشتقات العليا.
- الاشتقاق الضمني.

المفردات والمصطلحات:
- مشتقة ذات رتبة عليا Higher Order Derivative
- اشتقاق ضمني Implicit Derivative

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

أكمل:

1 $f'(x) = \ldots = g(x)$

2 $g'(x) = \ldots$

هل $g'(x) = (f'(x))'$؟

أولًا: المشتقات ذات الرتب العليا Higher Order Derivatives

رمزنا سابقًا لمشتقة دالة على مجالها بالرمز $y' = \frac{dy}{dx}$ والآن سوف تسمى y' المشتقة من الرتبة الأولى للدالة y بدلالة المتغير x.

والمشتقة الأولى نفسها (y') يمكن أن تكون دالة قابلة للاشتقاق على مجالها بدلالة المتغير x وبالتالي يمكن كتابتها:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

وهذه تسمى المشتقة من الرتبة الثانية للدالة y بدلالة x.

والمشتقة الثانية نفسها يمكن أن تكون دالة قابلة للاشتقاق على مجالها بدلالة المتغير x وبالتالي يمكن كتابة:

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

وهذه تسمى المشتقة من الرتبة الثالثة للدالة y بدلالة المتغير x.

وبصورة عامة إذا كان n عددًا صحيحًا حيث $n > 1$ فإن مشتقة الدالة y من الرتبة n بدلالة x هي على الشكل التالي:

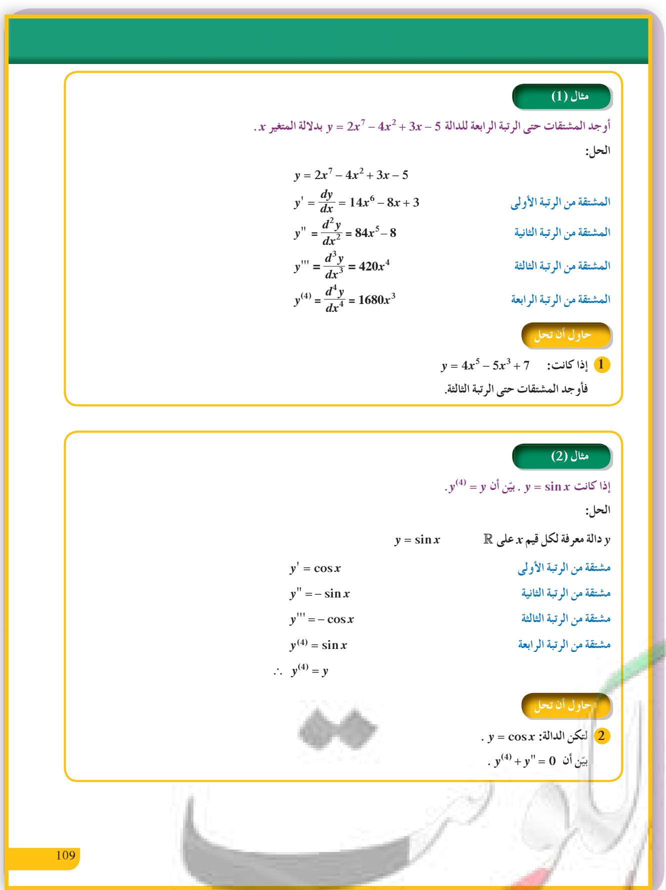
$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}(y^{(n-1)}) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

تذكر:
(a) $y = f(x)$
(b) $\frac{dy}{dx} = y'$

ملاحظة: أحيانًا نستخدم قاعدة السلسلة مرتين أو أكثر لإيجاد مشتقة.

ملاحظة: لا يجب الخلط بين رتبة مشتقة الدالة $y^{(n)}$ و y^n من قوى y.

108


مثال (1)

أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x.

الحل:

$y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$

المشتقة من الرتبة الأولى $y' = \frac{dy}{dx} = 14x^6 - 8x + 3$

المشتقة من الرتبة الثانية $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 84x^5 - 8$

المشتقة من الرتبة الثالثة $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 420x^4$

المشتقة من الرتبة الرابعة $y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = 1680x^3$

حاول أن تحل

1 إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

مثال (2)

إذا كانت $y = \sin x$. بيّن أن $y^{(4)} = y$.

الحل:

y دالة معرفة لكل قيم x على $\mathbb{R}$ $y = \sin x$

مشتقة من الرتبة الأولى $y' = \cos x$

مشتقة من الرتبة الثانية $y'' = -\sin x$

مشتقة من الرتبة الثالثة $y''' = -\cos x$

مشتقة من الرتبة الرابعة $y^{(4)} = \sin x$

$\therefore \; y^{(4)} = y$

حاول أن تحل

2 لتكن الدالة: $y = \cos x$.

بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

109

في المثالين (2) ,(1)

تطبيق مباشر لمفهوم المشتقات ذات الرتب العليا. أشر إلى أنه لإيجاد المشتقة من الرتبة الرابعة يجب إيجاد أولًا المشتقة من الرتبة الثالثة والتي تحتاج إلى المشتقة من الدرجة الثانية.

في المثال (3)

إيجاد المشتقة من الرتبة الثانية لِـ $y = \frac{1}{\cos x}$ والتي تكتب أيضًا $y = \sec x$. ولإيجاد y'' نحتاج لاستخدام مشتقة حاصل ضرب دالتين.

في المثال (4)

تطبيق الاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقة. ذكّر الطلاب أن x متغير وبالتالي $x' = 1$ بينما y دالة ومشتقتها y'.

في الأمثلة (7) ,(6) ,(5)

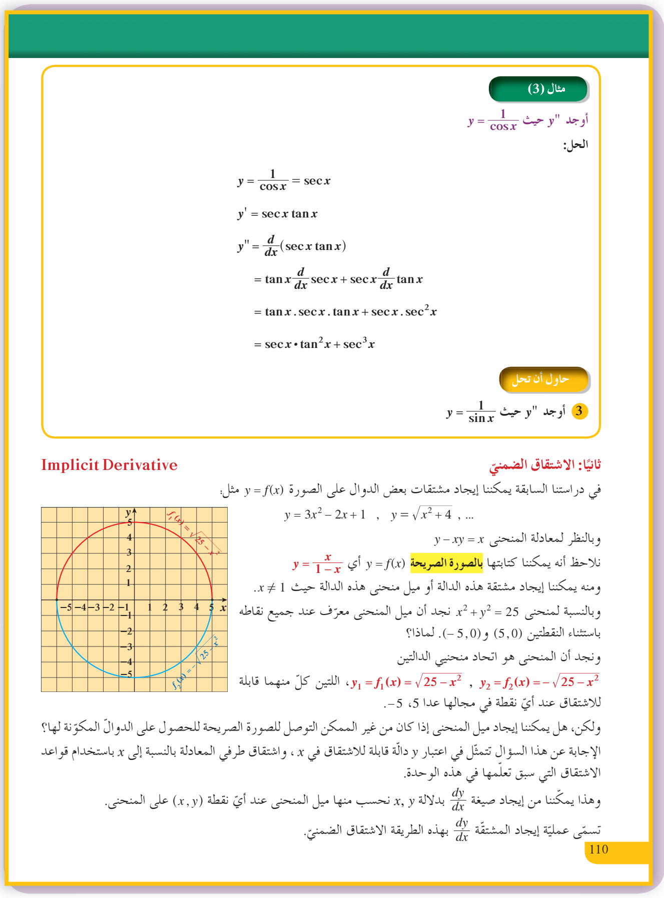
استخدم الاشتقاق الضمني لإيجاد ميل المماس على منحنى، وبالتالي إيجاد معادلة المماس عند نقطة تقع على المنحنى. أعد تذكير الطلاب بأن النقطة يجب أن تنتمي إلى منحنى الدالة.

في المثالين (9) ,(8)

استخدم الاشتقاق الضمني لإثبات علاقات بين $f(x)$ أو y ومشتقاتها من الرتب العليا.

6 الربط

لا يوجد.



مثال (3)

أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\cos x}$

الحل:

$$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$
$$y' = \sec x \tan x$$
$$y'' = \frac{d}{dx}(\sec x \tan x)$$
$$= \tan x \frac{d}{dx}\sec x + \sec x \frac{d}{dx}\tan x$$
$$= \tan x \,.\, \sec x \,.\, \tan x + \sec x \,.\, \sec^2 x$$
$$= \sec x \cdot \tan^2 x + \sec^3 x$$

حاول أن تحل

3 أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$

ثانيًا: الاشتقاق الضمنيّ Implicit Derivative

في دراستنا السابقة يمكننا إيجاد مشتقات بعض الدوال على الصورة $y = f(x)$ مثل:

$$y = 3x^2 - 2x + 1 \quad , \quad y = \sqrt{x^2+4} \; , \; ...$$

وبالنظر لمعادلة المنحنى $y - xy = x$

نلاحظ أنه يمكننا كتابتها **بالصورة الصريحة** $y = f(x)$ أي $y = \frac{x}{1-x}$

ومنه يمكننا إيجاد مشتقة هذه الدالة أو ميل منحنى هذه الدالة حيث $x \neq 1$.

وبالنسبة لمنحنى $x^2 + y^2 = 25$ نجد أن ميل المنحنى معرّف عند جميع نقاطه باستثناء النقطتين $(5,0)$ و $(-5,0)$. لماذا؟

ونجد أن المنحنى هو اتحاد منحنيي الدالتين $y_1 = f_1(x) = \sqrt{25-x^2}$ ، $y_2 = f_2(x) = -\sqrt{25-x^2}$ اللتين كلّ منهما قابلة للاشتقاق عند أيّ نقطة في مجالها عدا 5، -5.

ولكن، هل يمكننا إيجاد ميل المنحنى إذا كان من غير الممكن التوصل للصورة الصريحة للحصول على الدوالّ المكوّنة لها؟

الإجابة عن هذا السؤال تتمثّل في اعتبار y دالّة قابلة للاشتقاق في x ، واشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x باستخدام قواعد الاشتقاق التي سبق تعلّمها في هذه الوحدة.

وهذا يمكّننا من إيجاد صيغة $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x, y نحسب منها ميل المنحنى عند أيّ نقطة (x, y) على المنحنى.

تسمّى عمليّة إيجاد المشتقّة $\frac{dy}{dx}$ بهذه الطريقة الاشتقاق الضمنيّ.

110

مثال توضيحي

أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y^3 + 5y^2 - x^3 = 0$

الحل:

نفرض أن $y = f(x)$ وبالتعويض في المعادلة:

$$(f(x))^3 + 5(f(x))^2 - x^3 = 0$$

وباستخدام قاعدة السلسلة نوجد المشتقة فتكون كالتالي:

$$3(f(x))^2 \cdot f'(x) + 10\, f(x) \cdot f'(x) - 3x^2 = 0$$

أي أن:

$$3y^2 y' + 10yy' - 3x^2 = 0$$

ومنها نحصل على y' :

$$y'(3y^2 + 10y) = 3x^2$$
$$\therefore \; y' = \frac{3x^2}{3y^2 + 10y}$$

باستخدام نفس الخطوات المتبعة في المثال التوضيحي يمكننا التوصل إلى أن:

$$(y^2)' = 2yy'$$
$$(y^3)' = 3y^2 y'$$

مثال (4)

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

a $y^2 + xy = 7x$

b $y = x + x^2 y^5$

الحل:

a نشتقّ طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x باعتبار أن y دالّة في x قابلة للاشتقاق، وتطبيق قاعدة السلسلة هو:

$$\left[\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} f'(x)\right]$$

$$2yy' + 1xy' + y = 7$$
$$y'(2y + x) = 7 - y$$
$$y' = \frac{7-y}{2y+x}$$

b $y = x + x^2 y^5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{d(x^2 y^5)}{dx}$$

111

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في الاشتقاق الضمني عند إيجاد $\frac{d}{dx}x$ و $\frac{dy}{dx}$.

ذكّرهم بأن $\frac{d}{dx}x = 1$، أشر إلى أن بيان $f(x) = x$ مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله 1 وبالتالي $f'(x) = 1$ بينما $\frac{d}{dx}y = y'$

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل». تحقق من عملهم وتأكد من تمكنهم من إيجاد المشتقات من الرتب العليا ودقة تطبيقهم للاشتقاق الضمني.

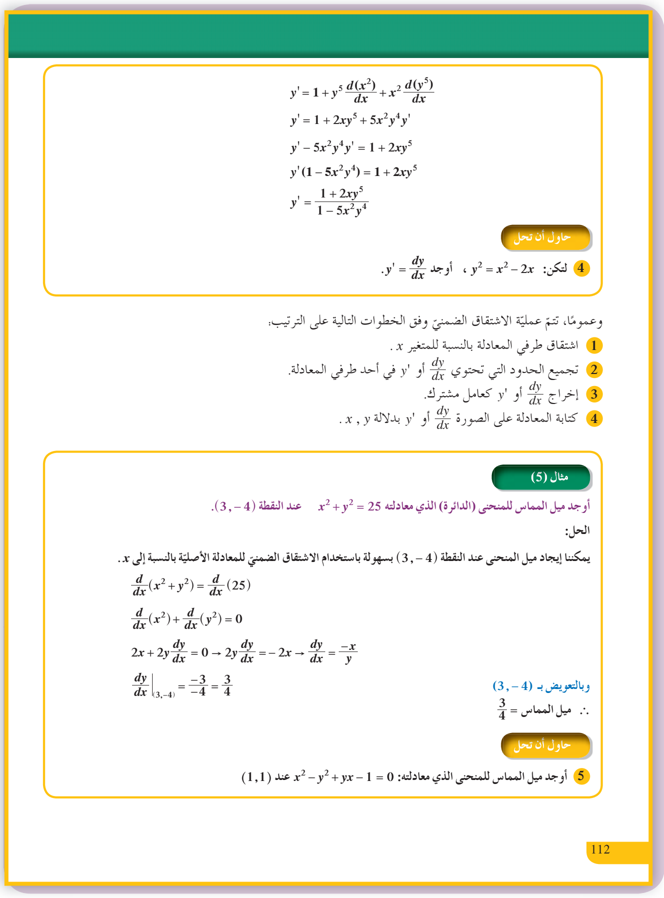
اختبار سريع

1 إذا كانت $f(x) = \frac{x+1}{x}$ فأوجد $f'''(x)$.

$f'''(x) = \frac{-6}{x^4}$

2 أوجد معادلة المماس عند النقطة $(2,1)$ على منحنى المعادلة: $x^2 + 4y^2 = 8$

$y = -\frac{1}{2}x + 2$


$$y' = 1 + y^5\frac{d(x^2)}{dx} + x^2\frac{d(y^5)}{dx}$$
$$y' = 1 + 2xy^5 + 5x^2y^4y'$$
$$y' - 5x^2y^4y' = 1 + 2xy^5$$
$$y'(1 - 5x^2y^4) = 1 + 2xy^5$$
$$y' = \frac{1 + 2xy^5}{1 - 5x^2y^4}$$

حاول أن تحل

4 لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

وعمومًا، تتمّ عمليّة الاشتقاق الضمنيّ وفق الخطوات التالية على الترتيب:

1 اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x .

2 تجميع الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ أو y' في أحد طرفي المعادلة.

3 إخراج $\frac{dy}{dx}$ أو y' كعامل مشترك.

4 كتابة المعادلة على الصورة $\frac{dy}{dx}$ أو y' بدلالة x , y .

مثال (5)

أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3 , -4)$.

الحل:

يمكننا إيجاد ميل المنحنى عند النقطة $(3 , -4)$ بسهولة باستخدام الاشتقاق الضمنيّ للمعادلة الأصليّة بالنسبة إلى x.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$
$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \to 2y\frac{dy}{dx} = -2x \to \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

وبالتعويض بـ $(3 , -4)$

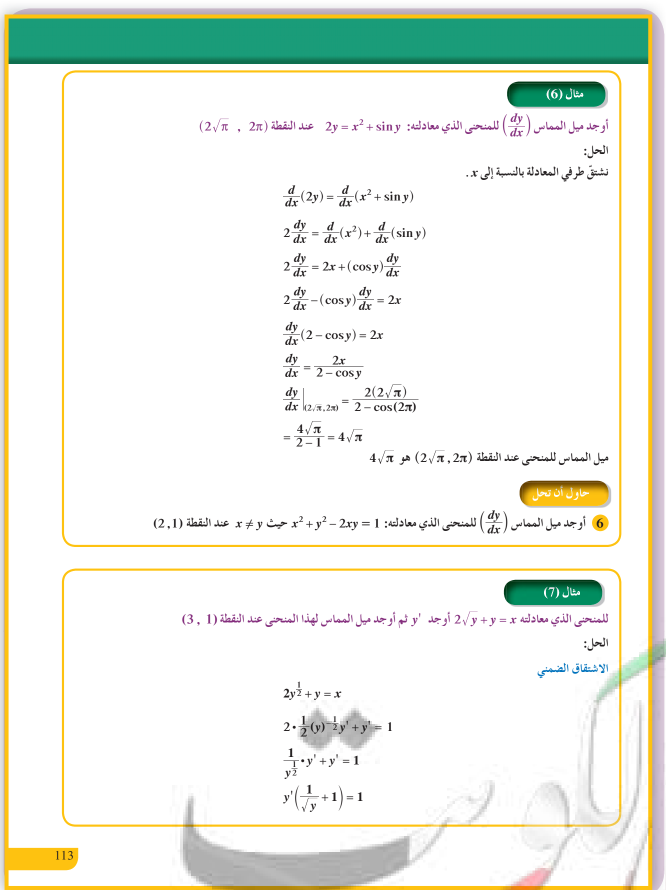
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{3}{4}$

حاول أن تحل

5 أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

112


مثال (6)

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi} \;,\; 2\pi)$

الحل:

نشتقّ طرفي المعادلة بالنسبة إلى x.

$$\frac{d}{dx}(2y) = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y)$$
$$2\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin y)$$
$$2\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos y)\frac{dy}{dx}$$
$$2\frac{dy}{dx} - (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$
$$\frac{dy}{dx}(2 - \cos y) = 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - \cos y}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2\sqrt{\pi}, 2\pi)} = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)}$$
$$= \frac{4\sqrt{\pi}}{2 - 1} = 4\sqrt{\pi}$$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(2\sqrt{\pi} , 2\pi)$ هو $4\sqrt{\pi}$

حاول أن تحل

6 أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2,1)$

مثال (7)

للمنحنى الذي معادلته $2\sqrt{y} + y = x$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3 \;,\; 1)$

الحل:

الاشتقاق الضمني

$$2y^{\frac{1}{2}} + y = x$$
$$2 \cdot \frac{1}{2}(y)^{-\frac{1}{2}}y' + y' = 1$$
$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot y' + y' = 1$$
$$y'\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 1\right) = 1$$

113

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1. $f'(x) = 4x^3 - 6x$
2. $g'(x) = 12x^2 - 6$

$g'(x) = (f'(x))'$

«حاول أن تحل»

1. $y' = 20x^4 - 15x^2$

$y'' = 80x^3 - 30x$

$y''' = 240x^2 - 30$

2. $y' = -\sin x$

$y'' = -\cos x$

$y''' = \sin x$

$y^{(4)} = \cos x$

$y^{(4)} + y'' = \cos x - \cos x = 0$

3. $y = \dfrac{1}{\sin x} = \csc x$

$y' = -\csc x \cdot \cot x$

$y'' = -(-\csc x \cot x) \cdot \cot x - \csc x \cdot (-\csc^2 x)$

$= \csc x \cdot \cot^2 x + \csc^3 x$

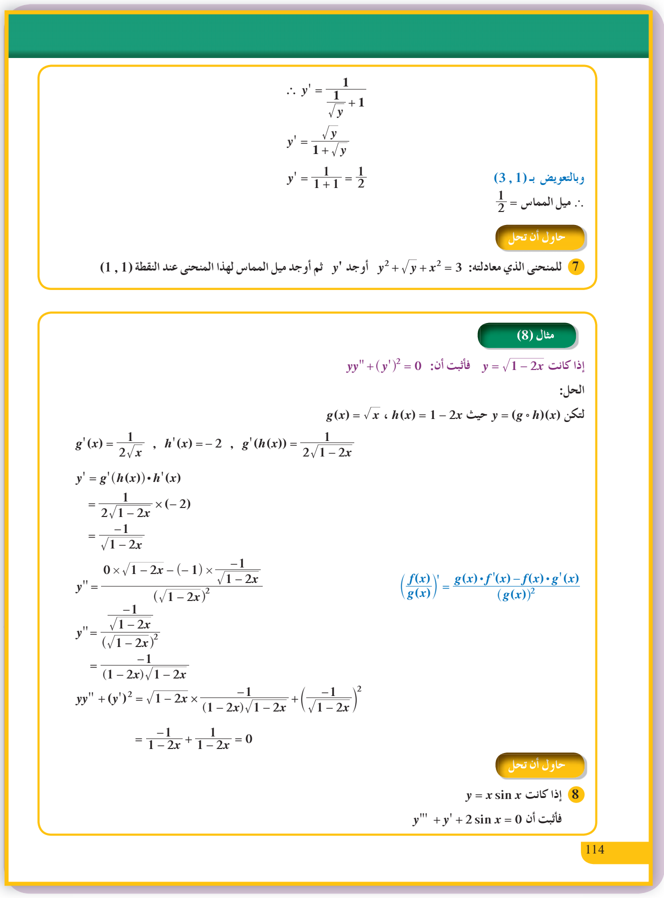
4. $y' = \dfrac{x-1}{y}$

5. $y' = \dfrac{2x+y}{2y-x} \quad ; \quad y'_{(1,1)} = 3$ ميل المماس:

6. الميل ثابت ويساوي 1

$y' = 1$

7. $y' = \dfrac{-2x}{2y + \dfrac{1}{2\sqrt{y}}} \quad ; \quad y'_{(1,1)} = -\dfrac{4}{5}$



$\therefore\ y' = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{y}} + 1}$

$y' = \dfrac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$

وبالتعويض بـ $(3, 1)$

$y' = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ ميل المماس $= \dfrac{1}{2}$

حاول أن تحل

7 للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1, 1)$

مثال (8)

إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

الحل:

لتكن $y = (g \circ h)(x)$ حيث $h(x) = 1 - 2x$ ، $g(x) = \sqrt{x}$

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad h'(x) = -2 \quad , \quad g'(h(x)) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-2x}}$

$y' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{1-2x}} \times (-2)$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

$y'' = \dfrac{0 \times \sqrt{1-2x} - (-1) \times \dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$

$y'' = \dfrac{\dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$

$= \dfrac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$

$yy'' + (y')^2 = \sqrt{1-2x} \times \dfrac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}} + \left(\dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}\right)^2$

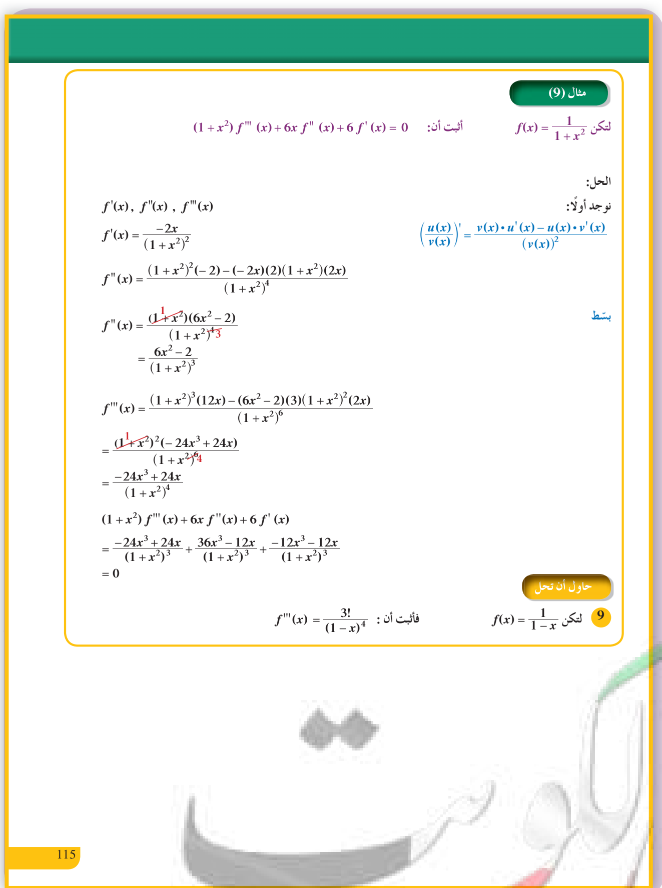
$= \dfrac{-1}{1-2x} + \dfrac{1}{1-2x} = 0$

حاول أن تحل

8 إذا كانت $y = x \sin x$

فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

114



مثال (9)

لتكن $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ أثبت أن: $(1+x^2) f'''(x) + 6x f''(x) + 6 f'(x) = 0$

الحل:

نوجد أولًا: $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$

$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$f''(x) = \dfrac{(1+x^2)^2(-2) - (-2x)(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$

بسّط

$f''(x) = \dfrac{\cancel{(1+x^2)}(6x^2-2)}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}$

$= \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$

$f'''(x) = \dfrac{(1+x^2)^3(12x) - (6x^2-2)(3)(1+x^2)^2(2x)}{(1+x^2)^6}$

$= \dfrac{\cancel{(1+x^2)^2}(-24x^3+24x)}{(1+x^2)^{\cancel{6}\,4}}$

$= \dfrac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4}$

$(1+x^2) f'''(x) + 6x f''(x) + 6 f'(x)$

$= \dfrac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^3} + \dfrac{36x^3-12x}{(1+x^2)^3} + \dfrac{-12x^3-12x}{(1+x^2)^3}$

$= 0$

حاول أن تحل

9 لتكن $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ فأثبت أن : $f'''(x) = \dfrac{3!}{(1-x)^4}$

115

8

$y' = \sin x + x\cos x$

$y'' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$

$y''' = -2\sin x - \sin x - x\cos x = -3\sin x - x\cos x$

$y''' + y' + 2\sin x$

$= -3\sin x - x\cos x + \sin x + x\cos x + 2\sin x = 0$

9

$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$; $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$;

$f''''(x) = \dfrac{6}{(1-x)^4} = \dfrac{3!}{(1-x)^4}$

تمرَّنْ

2−6

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

Higher Order Derivatives And Implicit Differentiation

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—6)، أوجد: $\dfrac{dy}{dx}$ ، $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ، $\dfrac{d^3y}{dx^3}$

(1) $y = 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x$ **(2)** $y = -x^5 + 2x^3 - 4x + 1$

(3) $y = \dfrac{3}{x-2}$ **(4)** $y = \sin 2x$

(5) $y = \cos 4x$ **(6)** $y = \sin^2 x$

في التمارين (7—9)، أوجد: $\dfrac{dy}{dx}$ ، $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

(7) $y^2 = x^2 + 4x + 2$ **(8)** $y^2 - 4y = x - 3$

(9) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$

في التمارين (10—12)، أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العموديّ على المماس على منحنى الدالة عند كل نقطة معطاة على هذا المنحنى.

(10) $x^2 + 2xy - y^2 = 7 \quad , \quad (2\ ,\ 3)$

(11) $6x^2 + 3xy - 2y^3 - 7y - 6 = 0 \quad , \quad (-1\ ,\ 0)$

(12) $2xy + \pi\sin y = 2\pi \quad , \quad \left(1\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$

(13) أوجد $A\ ,\ B$ في: $y = A\sin x + B\cos x$ حيث $y'' - y = \sin x$.

(14) أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ حيث $y = \dfrac{\cos x}{1+\tan x}$ واكتب معادلة المماس على منحنى الدالة عند $A(0\ ,\ 1)$.

(15) إذا كانت $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

فأثبت أن: $4x^2 f''(x) - 3f(x) = 0$

(16) إذا كانت $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

فأثبت أن: $(1-x^2)f'''(x) - 6xf''(x) - 6f'(x) = 0$

45

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان: $y = \dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x$ فإن: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -2x$ (a) (b)

(2) إذا كان: $y = \dfrac{-3x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2} + 4x$ فإن: $\dfrac{d^3y}{dx^3} = -18x$ (a) (b)

(3) معادلة المماس لمنحنى: $x^2 - y^2 - x^2y = 7$ عند النقطة $(2\ ,\ -1)$ هي: $y = 4x - 9$ (a) (b)

في التمارين (4—7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(4) إذا كانت: $f(x) = (1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن: $f''(x)$ تساوي:

(a) $\frac{8}{27}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ (b) $8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(c) $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ (d) $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(5) إذا كانت: $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+2}$ فإن: $f^{(4)}(x)$ تساوي:

(a) $24(3x+2)^{-5}$ (b) $-24(3x+2)^{-5}$

(c) $648(3x+2)^{-5}$ (d) $-648(3x+2)^{-5}$

(6) ميل الخطّ العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3\ ,\ 2)$ على منحنى: $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو:

(a) -5 (b) $-\frac{1}{5}$

(c) $\frac{1}{5}$ (d) 5

(7) ميل المماس عند النقطة $A(1\ ,\ 1)$ على منحنى: $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي:

(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) 2

46

المرشد لحل المسائل

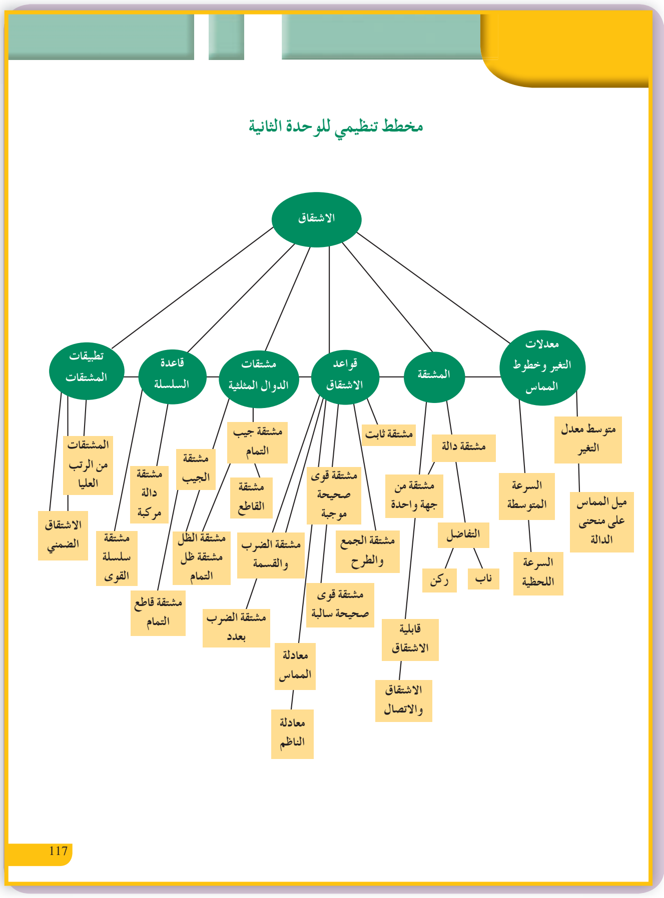
حل «مسألة إضافية»

(a) $s(3) = 225\ \text{m}$

(b) $s'(t) = 27t^2 - 7$

(c) السرعة المتوسطة = $74\ \text{m/s}$

السرعة اللحظية المتجهة: $236\ \text{m/s}$



المرشد لحل المسائل

يتحرّك جسيم ويحدّد موقعه عند اللحظة $t \geq 0$ بالدّالة: $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ حيث s تقاس بالمتر (m) و t بالثواني (s).

a أوجد مسافة انتقال الجسيم في أوّل 5 s

b أوجد السرعة المتوسطة خلال 5 s

c أوجد السرعة اللحظية المتجهة عند اللحظة $t = 5$

الحل:

كيف فكّر أحمد لحل هذه المسألة:

a نوجد $s(5)$

$$s(5) = 0.6(5)^3 - 1.5(5) - 0.9 = 66.6\ \text{m}$$

المسافة التي انتقلها الجسم هي 66.6 m خلال 5 s

b لإيجاد السرعة المتوسطة خلال 5 s:

$$\frac{s(5) - s(0)}{5 - 0} = \frac{66.6 + 0.9}{5} = 13.5\ \text{m/s}$$

c نوجد دالة السرعة وهي مشتقة دالة الحركة:

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = 1.8t^2 - 1.5$$

من ثم نحسب $s'(5)$:

$$s'(5) = 1.8(5)^2 - 1.5 = 43.5\ \text{m/s}$$

مسألة إضافية

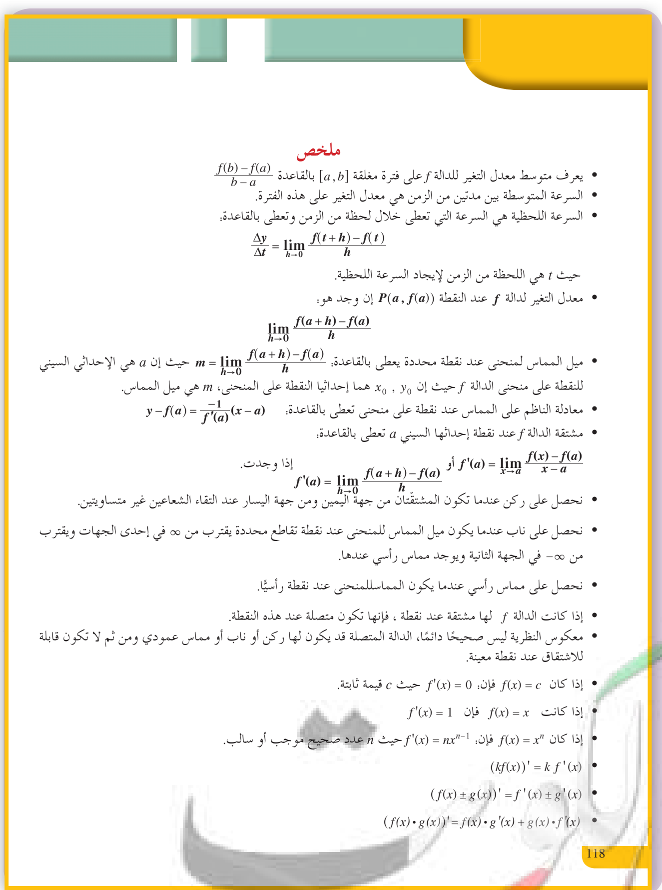
موقع جسم يتحرك مبيّن في الدالة: $s(t) = 9t^3 - 7t + 3$ وذلك بعد t ثانية حيث $t \geq 0$.

a أوجد المسافة التي قطعها الجسم بعد 3 s.

b أوجد الدالة التي تدل على سرعة الجسم بالنسبة إلى الزمن عند اللحظة t.

c أوجد السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية المتجهة عند $t = 3$.

116



ملخص

- يعرف متوسط معدل التغير للدالة f على فترة مغلقة $[a, b]$ بالقاعدة $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- السرعة المتوسطة بين مدتين من الزمن هي معدل التغير على هذه الفترة.
- السرعة اللحظية هي السرعة التي تعطى خلال لحظة من الزمن وتعطى بالقاعدة:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

حيث t هي اللحظة من الزمن لإيجاد السرعة اللحظية.

- معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a, f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- ميل المماس لمنحنى عند نقطة محددة يعطى بالقاعدة: $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ حيث إن a هي الإحداثي السيني للنقطة على منحنى الدالة f حيث إن x_0 ، y_0 هما إحداثيا النقطة على المنحنى، m هي ميل المماس.
- معادلة الناظم على المماس عند نقطة على منحنى تعطى بالقاعدة: $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$
- مشتقة الدالة f عند نقطة إحداثها السيني a تعطى بالقاعدة:

$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ أو $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ إذا وجدت.

- نحصل على ركن عندما تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.
- نحصل على ناب عندما يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها.
- نحصل على مماس رأسي عندما يكون المماسللمنحنى عند نقطة رأسيًا.
- إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة ، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.
- معكوس النظرية ليس صحيحًا دائمًا، الدالة المتصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماس عمودي ومن ثم لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة.
- إذا كان $f(x) = c$ فإن: $f'(x) = 0$ حيث c قيمة ثابتة.
- إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$
- إذا كان $f(x) = x^n$ فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$ حيث n عدد صحيح موجب أو سالب.
- $(kf(x))' = k\,f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

118

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- إذا كان $f(x) = \sin x$ فإن: $f'(x) = \cos x$
- إذا كان $f(x) = \cos x$ فإن: $f'(x) = -\sin x$
- إذا كان $f(x) = \tan x$ فإن: $f'(x) = \sec^2 x$
- إذا كان $f(x) = \cot x$ فإن: $f'(x) = -\csc^2 x$
- إذا كان $f(x) = \sec x$ فإن: $f'(x) = \sec x \cdot \tan x$
- إذا كان $f(x) = \csc x$ فإن: $f'(x) = -\csc x \cdot \cot x$
- إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركبّة $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون: $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$
- إذا $y = f(u)$ حيث إن $g = u(x)$ فإن: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
- $\frac{dy}{dx}$، $\frac{d^2y}{d^2x}$، $\frac{d^3y}{d^3x}$، ...... $\frac{d^ny}{d^nx}$ هي مشتقات الدالة y من الرتب العليا إذا وجدت في مجال تعريفها.
- في الاشتقاق الضمني نوجد مشتقة المتغير المستقل x ومشتقة المتغير التابع y ثم نوجد $\frac{dy}{dx}$.

تمارين إثرائية

(1) أوجد ميل المماس على منحنى الدالة f: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ عند نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات.

(2) يتحرك جسيم على خط مستقيم بمعادلة: $S(t) = t^3 - 3t^2$ حيث t الوقت بالثواني (s) وS بالأمتار (m).
أوجد السرعة المتجهة لهذا الجسيم والعجلة عند $t = 2$.

(3) أوجد $\frac{dy}{dx}$، حيث $y = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$

(4) أوجد ميل المماس على منحنى الدالة: $x = y^2 - 4y$ عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات.

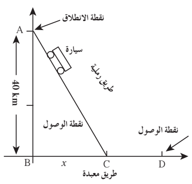
(5) أوجد $\frac{dy}{dx}$، حيث $y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ و $u = \sqrt[3]{x^2 + 2}$.

(6) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العمودي على منحنى الدالة: $x\sin 2y = y\cos 2x$ عند النقطة $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ على هذا المنحنى.

(7) **اكتب للتعلم.** هل هناك قيمة للثابت b تجعل الدالة التالية: $g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$ متصلة وقابلة للاشتقاق عند $x = 0$؟ أعط أسبابًا لإجابتك.

(8) استخدم المتطابقة $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ لإيجاد مشتقّة $\sin 2x$، ثم استخدم المتطابقة $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ للتعبير عن هذه المشتقة بدلالة $\cos 2x$.

(9) يشارك أحد المتبارين في سباق السيارات على الرمال في الصحراء، حيث A هي نقطة الانطلاق وتبعد 40 km عن النقطة B، ونقطة الوصول هي على الطريق المعبدة عند D.



يستطيع هذا المتباري قيادة سيارته بمعدل سرعة 45 km على الرمال وبمعدل سرعة 75 km على الطريق المعبدة (انظر الصورة)، وسوف ينال الجائزة الكبيرة إذا وصل إلى الموقع D الذي يبعد 50 km عن الموقع B في وقت لا يتجاوز 85 دقيقة. المطلوب مساعدة هذا المتباري على تحليل هذه المسألة وإيجاد أقل وقت ممكن لهذه الرحلة.

هل سيربح الجائزة؟

اختبار الوحدة الثانية

في التمارين (1–9)، أوجد مشتقّات الدوالّ.

(1) $y = x^5 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$

(2) $y = 3 - 7x^3 + 3x^7$

(3) $y = 2\sin x \cos x$

(4) $y = \frac{2x + 1}{2x - 1}$

(5) $s = \cos(1 - 2t)$

(6) $s = \cot\frac{2}{t}$

(7) $y = \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(8) $y = x\sqrt{2x + 1}$

(9) $y = \frac{x^2}{\sin(5x)}$

في التمرينين (10–11)، أوجد عند النقطة المبيّنة معادلة:

(a) المماس لمنحنى الدالة.

(b) الخطّ العموديّ على المماس (الناظم).

(10) $y = \sqrt{x^2 - 2x}, \quad x = 3$

(11) $y = 4 + \cot x - \frac{2}{\sin x}, \quad x = \frac{\pi}{2}$

(12) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$
بيّن أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

في التمارين (13–16)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

(13) $y = 3x^4 - 5x^2 + 2x$

(14) $y = \sin 3x$

(15) $y = \cos^2 2x$

(16) $y = (3x - 5)(x^2 - x)$

في التمرينين (17–18)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$

(17) $x^2 - 3y^2 + y = 4$

(18) $x^2 + xy^2 + 2x - 3y = 0$

(19) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العمودي على المماس (الناظم) على منحنى الدالة: $x^2 + 2xy = 3$ عند النقطة $A(1, 1)$ على هذا المنحنى.

(10) استخدم الاشتقاق الضمني لتجد $\frac{dy}{dx}$ من $x^2 + 5xy + y^5 = 8$

(11) استخدم الاشتقاق الضمني لتجد ميل المماس عند النقطة $(1, -4)$ على منحنى: $2xy - 3x - 4y = 5$
واكتب معادلة للخط العمودي على المماس على المنحنى عند النقطة المعطاة.

(12) أثبتت إحدى الدراسات في إحدى الضواحي الصناعية أن متوسط الانبعاث اليومي لأول أكسيد الكربون يمكن نمذجتة بالقانون: $C(P) = \sqrt{0.5p^2 + 17}$ جزء من مليون، حيث p هو عدد السكان بالآلاف، ويقدر عدد السكان انطلاقًا من هذه السنة بدلالة t سنة بالقانون: $p(t) = 0.1t^2 + 3.1$ بآلاف الأشخاص.

(a) ما معدل تغير أول أكسيد الكربون مع الوقت t بعد 3 سنوات بدءًا من الآن؟ فسِّر.

(b) إذا تزايد عدد السكان مع الوقت إلى 8 000، فما معدل تغير أول أكسيد الكربون مع الوقت t في السنوات القادمة بدءًا من الآن؟ فسّر.

(13) **إيجاد المماسات.** أوجد معادلات جميع المماسات لمنحنى الدالة $f(x) = 9 - x^2$ التي تمرّ بالنقطة $(1, 12)$

الوحدة الثالثة: تطبيقات على الاشتقاق

Applications on Differentiation

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

3–1: القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

جزء 1: القيم القصوى.

جزء 2: القيم القصوى المحلية – النقطة الحرجة.

3–2: تزايد وتناقص الدوال

جزء 1: نظرية القيمة المتوسطة.

جزء 2: تزايد وتناقص الدوال.

3–3: ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

جزء 1: اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية.

جزء 2: التقعر ونقاط الانعطاف.

جزء 3: اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية.

3–4: رسم بيان دوال كثيرات الحدود

جزء 1: الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها.

جزء 2: العلاقات بين بيان الدالة f' و f.

3–5: تطبيقات على القيم القصوى

جزء 1: تطبيقات على الهندسة والصناعة.

جزء 2: تطبيقات على الاقتصاد.

مقدمة الوحدة


الوحدة الثالثة

تطبيقات على الاشتقاق

Applications on Differentiation

مشروع الوحدة:

1 **مقدمة المشروع:** فرضًا أنه لا يوجد مكان مخصص في إحدى السيارات لوضع كوب يحتوي على القهوة، وسوف يوضع بجانب مقعد السائق أثناء القيادة. أظهرت التجربة أن الكوب قابل للانسكاب عندما يكون مليئًا بالكامل. ويصبح أكثر ثباتًا كلما تناقصت منه القهوة.

2 **الهدف:** تحديد أقصى ارتفاع لكمية القهوة كي لا تنسكب من الكوب أثناء قيادة السيارة.

3 **اللوازم:** ورق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

يبيّن الرسم المقابل أن جزءًا من الكوب يحتوي على القهوة. سوف نفترض أن الكوب يكون أكثر ثباتًا عندما تكون نقطة الارتكاز المشتركة للكوب وكمية القهوة هي في أدنى ارتفاع. نقطة ارتكاز المجسم الأسطواني هي نقطته المركزية الهندسية حيث إن إحداثها الصادي $\overline{y}$ يمكن أن يعطى بالقاعدة:

$$\overline{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

إذا علمت أن: $m_1 = \pi\delta(R+T)^2 B$ (كتلة قاعدة الكوب) , $y_1 = -\frac{B}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز القاعدة).

$m_2 = \pi\delta(R+T)^2 H - \pi\delta R^2 H$ (كتلة جوانب الكوب) , $y_2 = \frac{H}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز جوانب الكوب).

$m_3 = \pi\delta R^2 y$ (كتلة القهوة في الكوب) , $y_3 = \frac{y}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز القهوة).

a احسب قيم m_1 , m_2 , m_3 بدلالة B و y و H و T و R (إرشاد: $m = \delta V$ حيث δ كثافة مشتركة للقهوة والمادّة المصنوع منها الكوب).

b أوجد $\overline{y}$ بدلالة B و y و H و T و R.

c إذا كان: $H = 8\text{ cm}, R = 3\text{ cm}, T = 0.5\text{ cm}, B = 1\text{ cm}$

أثبت أن: $f(y) = \overline{y} = \frac{21.75 + y^2}{8.5 + 2y}$; $0 \leqslant y \leqslant 8$

d أثبت أنّ مشتقّة $f(y)$ هي: $f'(y) = \frac{2y^2 + 17y - 43.5}{(2y + 8.5)^2}$

y = ارتفاع مستوى القهوة في الكوب (cm)
H = ارتفاع الكوب (cm)
B = سماكة القاعدة (cm)
R = نصف قطر الدائرة الداخلية من الكوب (cm)
T = سماكة الجوانب (cm)
$R + T$ = نصف قطر الدائرة الخارجية من الكوب (cm)

5 ما القيمة المحلية الصغرى؟ فسّر.

6 **التقرير:** اكتب تقريرًا يبيّن نتائج بحثك. أشر إلى كيفية الاستفادة من مفاهيم التفاضل في عملك.

دعّم التقرير بالرسوم البيانية وبعرض على جهاز الإسقاط. طبّق ما توصلت إليه على كوبك المفضل في احتساء القهوة.

دروس الوحدة

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال	تزايد وتناقص الدوال	ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f	رسم بيان دوال كثيرات الحدود	تطبيقات على القيم القصوى
3–1	3–2	3–3	3–4	3–5

120

في هذه الوحدة، سيتعرف الطلاب كيف يستخدمون مشتقة دالة لإيجاد القيم القصوى المحلية الصغرى والعظمى، والنقاط الحرجة، ودراسة سلوك الدالة مما سيسمح لهم بتخطيط بيان الدالة، ثم يعمقون معارفهم ويحددون فترات التقعر ونقاط الانعطاف.

قلّ انتشار الآلة الحاسبة البيانية من أهمية رسم بيان دالة من قبل الطالب وأصبح التركيز حاليًّا على الاستفادة من بيان دالة للإجابة عن أسئلة وطرح حلول.

تسمح الآلات الحاسبة برسم بيانات الدوال بدقة، وباستخدام خاصية التكبير Zoom يمكن الحصول على أي جزء من بيان الدالة. كذلك هناك العديد من برامج الرسم البياني على الحاسوب والتي تمتاز بوجود الكثير من الخيارات مما يسهل عمل الطالب.

أدّى هذا التطوّر التكنولوجي إلى فتح مجالات جديدة مثل دراسة حلول معادلات من الدرجة الثالثة أو معادلات أسية ولوغاريتمية بيانيًّا. ونشير هنا إلى طريقة الإحاطة (Dichotomy) المعتمدة والتي تسمح بإيجاد قيم تقريبيّة دقيقة لحلول معادلات باستخدام دوال مطردة على فترة $[a, b]$ حيث $f(a) \times f(b) < 0$.

لا يمكن حل معظم المعادلات الرياضية التي تتضمّن كثيرات حدود ولوغاريتمات أو أسسًا إلا بطريقة تغير الدالة المناظرة.

على سبيل المثال: لدراسة حلول المعادلة: $e^x + x + 1 = 0$
نأخذ الدالة: $f(x) = e^x + x + 1$، نوجد الدالة المشتقة، ثم ندرس تغيرها مما يسمح لنا بإيجاد حل تقريبي دقيق للمعادلة.

كما سيتعرّف الطلاب في هذه الوحدة كيفية إيجاد قيمة الدالة في فترة ما سواء أكانت مطردة أم غير مطردة على هذه الفترة.

والموضوع الذي يأخذ أهمية قصوى حاليًّا في التطبيقات على المشتقات هو التطبيقات في مواقف حياتية مثل الاقتصاد، والطب، وغير ذلك. نذكر منها الكلفة الدنيا لإنتاج سلعة أو الربح الأقصى ويمكن الحصول على ذلك بنمذجة حالة ما إلى دالة رياضية، ثمّ ندرس تغيّر هذه الدالة للحصول على النتائج المطلوبة.

تجدر الإشارة هنا إلى أن كل المفردات التي تشير إلى قيم قصوى مثل المساحة الأكبر، القيمة الصغرى، ... تعتبر مؤشرًا للطالب لتحويل المسألة الحياتية إلى دالة رياضية ودراسة تغيّرها.

مشروع الوحدة

يهدف هذا المشروع إلى دراسة فكرة الثبات في السيارة (ثبات كوب قهوة) بطريقة علمية، ويعدّ الثبات من المواضيع التي تزداد أهمية في عصرنا الحالي نظرًا إلى أننا نمضي وقتًا أكثر في تنقلنا بالسيارة.

يربط الطالب في مشروعه هذا بين ما تعلمه في الرياضيات وحل مسائل حياتية.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

4 (a) $m_1 = \pi\delta(R+T)^2B$

$m_2 = \pi\delta(R+T)^2H - \pi\delta R^2H$

$m_3 = \pi\delta R^2 y$

(b) $\overline{y} = f(y)$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(R+T)^2B^2 + \frac{1}{2}R^2y^2 + \frac{H}{2}(T^2H + 2RTH)}{B(R+T)^2 + R^2y + T^2H + 2RTH}$$

(c) نعوّض كل رمز بقيمته العددية فنجد بعد الاختزال أن:

$$\overline{y} = f(y) = \frac{y^2 + 21.75}{2y + 8.5}$$

(d) $f'(y) = \dfrac{2y(2y+8.5) - 2(y^2+21.75)}{(2y+8.5)^2}$

$$f'(y) = \frac{2y^2 + 17y - 43.5}{(2y+8.5)^2}$$

5

الفترات	$0 < y < 2.06$	$y > 2.06$
إشارة $f'(y)$	$-$	$+$
سلوك $f(y)$	$\searrow$	$\nearrow$

القيمة المحلية الصغرى تحدث عند $y \approx 2.06$ cm وهي قيمة قريبة جدًّا من $y = 2$ cm

أي أن أقصى ارتفاع لكمية القهوة في الكوب، كي لا تنسكب أثناء قيادة السيارة، يجب أن يكون 2 cm تقريبًا من أصل 8 cm وهو ارتفاع الكوب.

الوحدة الثالثة

أين أنت الآن؟ (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الدالة التربيعية: القيمة الصغرى والقيمة العظمى.
- تعرفت الرسوم البيانية لبعض الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- مثلت النمو الأسيّ والتضاؤل الأسيّ.
- تعرفت الرسوم البيانية للدوال المثلثية.
- تعرفت الاشتقاق وقواعده.

ماذا سوف تتعلم؟

- إيجاد القيم القصوى المطلقة والقيم القصوى المحلية.
- تطبيق نظرية القيمة المتوسطة.
- تحديد تزايد وتناقص الدوال.
- اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية.
- تحديد تقعر منحنى الدالة.
- تحديد نقاط الانعطاف.
- اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية.
- رسم بيان دوال كثيرات الحدود.
- تطبيقات على القيم القصوى.

المصطلحات الأساسية

قيم قصوى مطلقة – قيمة عظمى مطلقة – قيمة صغرى مطلقة – نقطة طرفية – نقطة داخلية – قيمة قصوى محلية – نقطة حرجة – نظرية القيمة المتوسطة – الدوال المتزايدة – الدوال المتناقصة – الدالة المطّردة – اختبار المشتقة الأولى – التقعر – نقاط الانعطاف – اختبار المشتقة الثانية – كثيرات الحدود.

أضف إلى معلوماتك

«إذا كنت أجرؤ القول فإن مسألة تحديد خط المماس هي المسألة الأكثر فائدة وبالعموم هي أكثر ما أود معرفته».

ديكارت (1650 – 1596)

أدت الأبحاث التي قام بها العلماء في القرن السابع عشر في مختلف المجالات: علم الميكانيك والفلك والبصريات، إلى طرح مسائل المماس وحلها. منها: تحديد خط المماس في نقطة معينة، وتحديد النقطة على المنحنى حيث المماس مواز لمستقيم معين.

للشكل أدناه محور تناظر. طوّر ديكارت طريقة تسمح بتحديد النقاط حيث المماس مواز لهذا المحور.

121

سلّم التقييم

4	الشروحات واضحة ومفهومة بكاملها – الحسابات دقيقة ومفصلة – الاستنتاجات عن الرسم البياني معقولة جدًّا مع النتيجة النهائية – التقرير مفصّل وواضح ومفهوم – القوانين المستخدمة كلها صحيحة.
3	الشروحات واضحة ومفهومة – الحسابات في معظمها دقيقة – الاستنتاجات عن الرسم البياني معقولة وقريبة من النتيجة النهائية – التقرير مفصّل ولكن ينقصه بعض الإيضاح – القوانين في معظمها صحيحة.
2	الشروحات ينقصها الوضوح وفي بعض الأحيان غير مفهومة – أخطاء متعددة في الحسابات – بعض القوانين المستخدمة غير مقبولة – لا ترابط بين الرسم البياني والنتيجة النهائية – التقرير غير مفصّل.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة أو تحتوي على الكثير من الأخطاء.

3–1: القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

1 الأهداف

- تحديد القيم القصوى (العظمى/الصغرى) المطلقة والقيم القصوى المحلية.
- إيجاد القيم القصوى.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قيمة قصوى – قيمة قصوى مطلقة – قيمة عظمى مطلقة – قيمة صغرى مطلقة – قيم قصوى محلية – نقطة حرجة – عدد حرج – نقطة طرفية – نقاط داخلية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show)

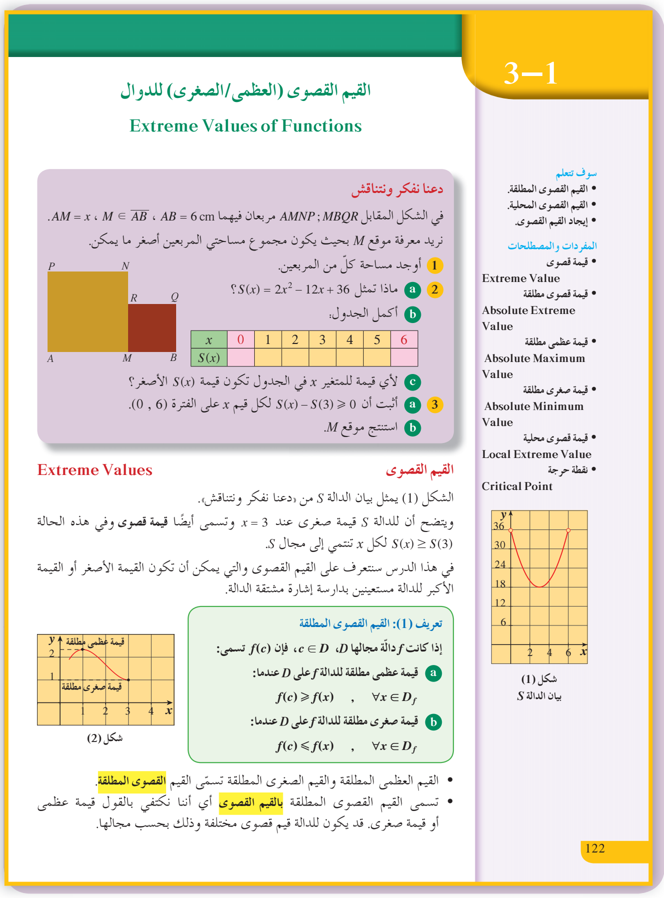
4 التمهيد

ارسم بيان الدالة f : $f(x) = \sin x$

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

(a) أوجد أكبر قيمة للدالة f؟

(b) أوجد أصغر قيمة للدالة f؟



3–1

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

Extreme Values of Functions

سوف تتعلم
- القيم القصوى المطلقة.
- القيم القصوى المحلية.
- إيجاد القيم القصوى.

المفردات والمصطلحات
- قيمة قصوى Extreme Value
- قيمة قصوى مطلقة Absolute Extreme Value
- قيمة عظمى مطلقة Absolute Maximum Value
- قيمة صغرى مطلقة Absolute Minimum Value
- قيمة قصوى محلية Local Extreme Value
- نقطة حرجة Critical Point

دعنا نفكر ونتناقش

في الشكل المقابل $MBQR$; $AMNP$ مربعان فيهما $AB = 6$ cm ، $M \in \overline{AB}$ ، $AM = x$.

نريد معرفة موقع M بحيث يكون مجموع مساحتي المربعين أصغر ما يمكن.

1. أوجد مساحة كلّ من المربعين.
2. (a) ماذا تمثل $S(x) = 2x^2 - 12x + 36$؟ (b) أكمل الجدول:

x	0	1	2	3	4	5	6
$S(x)$							

(c) لأي قيمة للمتغير x في الجدول تكون قيمة $S(x)$ الأصغر؟

3. (a) أثبت أن $S(x) - S(3) \geqslant 0$ لكل قيم x على الفترة $(0\ ,\ 6)$. (b) استنتج موقع M.

القيم القصوى Extreme Values

الشكل (1) يمثل بيان الدالة S من «دعنا نفكر ونتناقش».

ويتضح أن للدالة S قيمة صغرى عند $x = 3$ وتسمى أيضًا **قيمة قصوى** وفي هذه الحالة $S(x) \geq S(3)$ لكل x تنتمي إلى مجال S.

في هذا الدرس سنتعرف على القيم القصوى والتي يمكن أن تكون القيمة الأصغر أو القيمة الأكبر للدالة مستعينين بدراسة إشارة مشتقة الدالة.

شكل (1) بيان الدالة S

تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

إذا كانت f دالّة مجالها D، $c \in D$، فإن $f(c)$ تسمى:

(a) قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \geqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$

(b) قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \leqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$

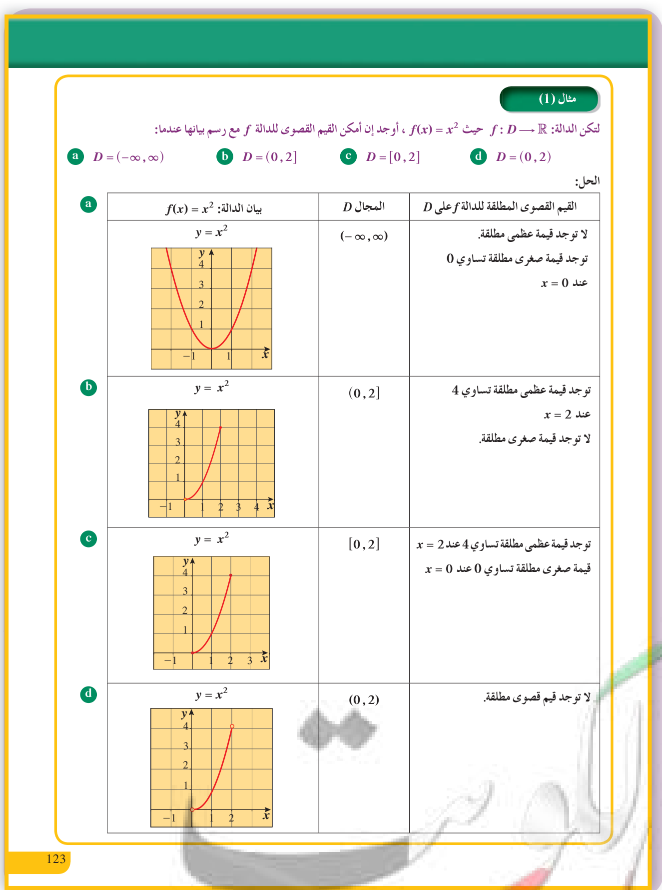
قيمة عظمى مطلقة

قيمة صغرى مطلقة

شكل (2)

- القيم العظمى المطلقة والقيم الصغرى المطلقة تسمّى القيم **القصوى المطلقة**.
- تسمى القيم القصوى المطلقة **بالقيم القصوى** أي أننا نكتفي بالقول قيمة عظمى أو قيمة صغرى. قد يكون للدالة قيم قصوى مختلفة وذلك بحسب مجالها.

122



مثال (1)

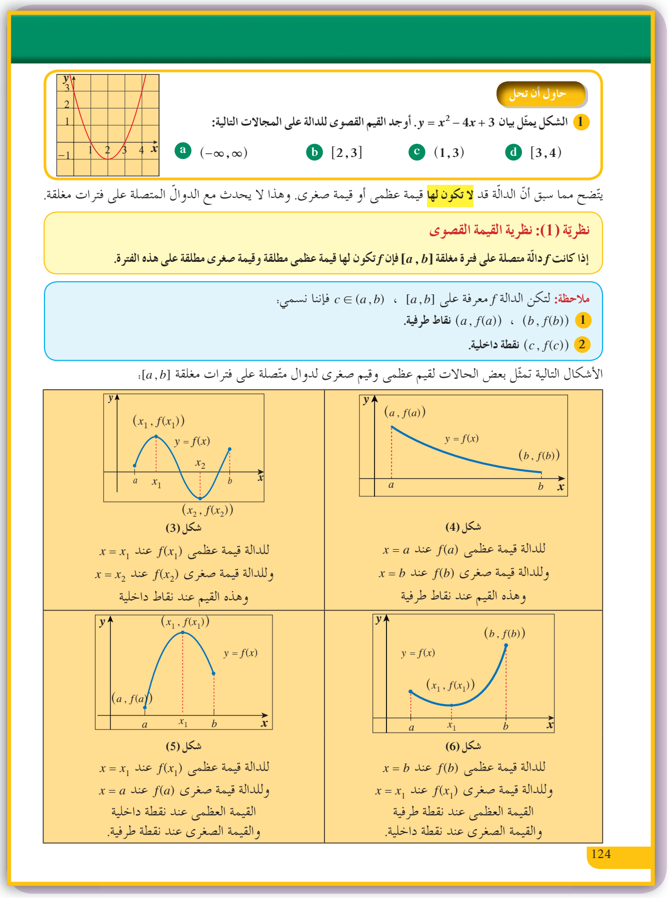
لتكن الدالة: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ ، أوجد إن أمكن القيم القصوى للدالة f مع رسم بيانها عندما:

(a) $D = (-\infty , \infty)$ (b) $D = (0 , 2]$ (c) $D = [0 , 2]$ (d) $D = (0 , 2)$

الحل:

	بيان الدالة: $f(x) = x^2$	المجال D	القيم القصوى المطلقة للدالة f على D
a	$y = x^2$	$(-\infty , \infty)$	لا توجد قيمة عظمى مطلقة. توجد قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$
b	$y = x^2$	$(0 , 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ لا توجد قيمة صغرى مطلقة.
c	$y = x^2$	$[0 , 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$
d	$y = x^2$	$(0 , 2)$	لا توجد قيم قصوى مطلقة.

123



حاول أن تحل

1 الشكل يمثّل بيان $y = x^2 - 4x + 3$. أوجد القيم القصوى للدالة على المجالات التالية:

a $(-\infty , \infty)$ b $[2 , 3]$ c $(1 , 3)$ d $[3 , 4)$

يتّضح مما سبق أنّ الدالّة قد **لا تكون لها** قيمة عظمى أو قيمة صغرى. وهذا لا يحدث مع الدوالّ المتصلة على فترات مغلقة.

نظريّة (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a , b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

ملاحظة: لتكن الدالة f معرفة على $[a , b]$ ، $c \in (a , b)$ فإننا نسمي:

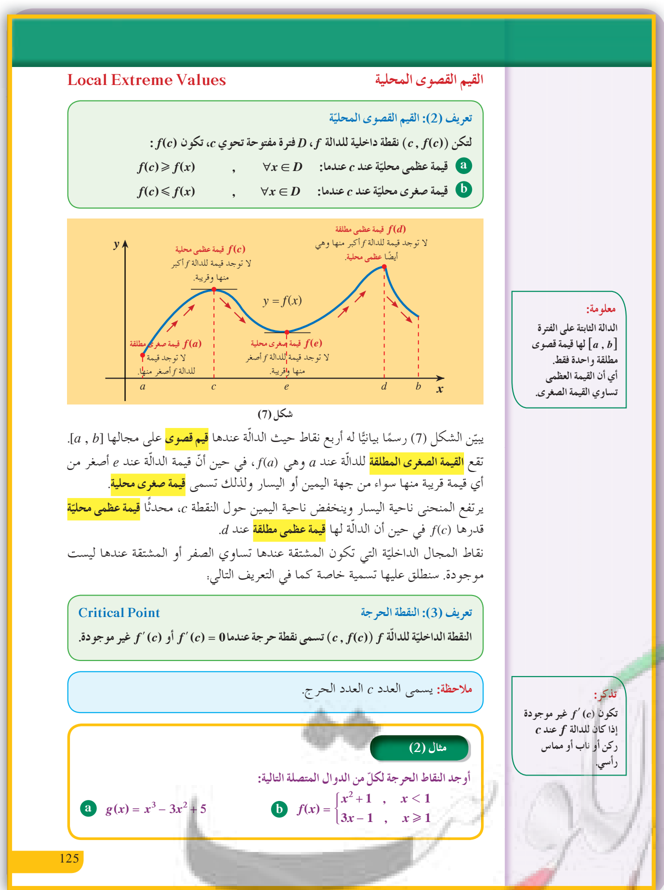
1 $(b , f(b))$ ، $(a , f(a))$ **نقاط طرفية.**

2 $(c , f(c))$ **نقطة داخلية.**

الأشكال التالية تمثّل بعض الحالات لقيم عظمى وقيم صغرى لدوال متّصلة على فترات مغلقة $[a , b]$:

شكل (4) للدالة قيمة عظمى $f(a)$ عند $x = a$ وللدالة قيمة صغرى $f(b)$ عند $x = b$ وهذه القيم عند نقاط طرفية	شكل (3) للدالة قيمة عظمى $f(x_1)$ عند $x = x_1$ وللدالة قيمة صغرى $f(x_2)$ عند $x = x_2$ وهذه القيم عند نقاط داخلية
شكل (6) للدالة قيمة عظمى $f(b)$ عند $x = b$ وللدالة قيمة صغرى $f(x_1)$ عند $x = x_1$ القيمة العظمى عند نقطة طرفية والقيمة الصغرى عند نقطة داخلية.	شكل (5) للدالة قيمة عظمى $f(x_1)$ عند $x = x_1$ وللدالة قيمة صغرى $f(a)$ عند $x = a$ القيمة العظمى عند نقطة داخلية والقيمة الصغرى عند نقطة طرفية.

124



القيم القصوى المحلية **Local Extreme Values**

تعريف (2): القيم القصوى المحليّة

لتكن $(c , f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c، تكون $f(c)$:

a **قيمة عظمى محليّة عند c عندما:** $\forall x \in D$, $f(c) \geqslant f(x)$

b **قيمة صغرى محليّة عند c عندما:** $\forall x \in D$, $f(c) \leqslant f(x)$

شكل (7)

يبيّن الشكل (7) رسمًا بيانيًّا له أربع نقاط حيث الدالّة عندها **قيم قصوى** على مجالها $[a , b]$.
تقع **القيمة الصغرى المطلقة** للدالّة عند a وهي $f(a)$، في حين أنّ قيمة الدالّة عند e أصغر من أي قيمة قريبة منها سواء من جهة اليمين أو اليسار ولذلك تسمى **قيمة صغرى محلية**.
يرتفع المنحنى ناحية اليسار وينخفض ناحية اليمين حول النقطة c، محدثًا **قيمة عظمى محليّة** قدرها $f(c)$ في حين أن الدالّة لها **قيمة عظمى مطلقة** عند d.
نقاط المجال الداخليّة التي تكون المشتقة عندها تساوي الصفر أو المشتقة عندها ليست موجودة. سنطلق عليها تسمية خاصة كما في التعريف التالي:

تعريف (3): النقطة الحرجة **Critical Point**

النقطة الداخليّة للدالّة f $(c , f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

ملاحظة: يسمى العدد c العدد الحرج.

مثال (2)

أوجد النقاط الحرجة لكلّ من الدوال المتصلة التالية:

a $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ b $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x < 1 \\ 3x - 1 & , \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

معلومة: الدالة الثابتة على الفترة $[a , b]$ لها قيمة قصوى مطلقة واحدة فقط. أي أن القيمة العظمى تساوي القيمة الصغرى.

تذكر: تكون $f'(c)$ غير موجودة إذا كان للدالة f عند c ركن أو ناب أو مماس رأسي.

125

5 التدريس

إن إحدى الطرائق للبدء في هذا الدرس هي رسم مخطط لدالة مشابهة للدالة في مثال (1)، ومناقشة القيمة الصغرى والعظمى (المطلقة) المحلية. ويمكن للطلاب أن يفهموا بشكل أفضل تعريفات تلك المفاهيم بالإدراك البصري.

يعد فهم القيم العظمى والقيم الصغرى أمرًا حاكمًا في دراسة تطبيقات المشتقة. يحتاج الطلاب إلى لغة التفاضل، لذا شدّد على مصطلحات هذا الدرس، ولذلك فإنّه من المهم ضم المهارات الجبرية المكتسبة سابقًا إلى دراسة التفاضل. توفر الأشكال في (3–6) توضيحًا لهذا الدرس.

استخدم جهاز العرض (Data Show) لعرض بيانات نظرية (1)، ناقش بدقة وعمق هذه الحالات مع الطلاب.

يبيّن شكل (7) كيف يكون للدالة قيمة قصوى عند نقطة ولا تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

أكّد على أن نظرية (2) وخطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة في فترة مغلقة.

استخدم بياني الدالتين $y = x^3$ ، $y = \sqrt[3]{x}$ في نهاية الدرس لتوضح فكرة أنّ القيم القصوى المحليّة تكون عند نقاط حرجة، ولكن ليس بالضرورة أن تكون قيمة قصوى عند كل نقطة حرجة.

في المثال (1)

يبيّن كيف يمكن أن تتغيّر القيم القصوى لدالة بسيطة من دوال كثيرة الحدود بحسب المجال المختار.

في المثال (2)

يبيّن كيفية إيجاد نقاط حرجة لدوال كثيرة حدود ودوال مفصلية.

في المثال (3)

تطبيق مباشر لإيجاد القيم القصوى المطلقة لدالة. أشر إلى أنه إذا كانت الدالة كثيرة الحدود ومتصلة على فترة مغلقة فيمكن التأكيد على وجود قيم قصوى مطلقة.

في المثال (4)

يبيّن وجود قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ في حين أن المشتقة عند $x = 0$ غير موجودة.

اسأل الطلاب عن وجود قيم قصوى محلية للدالة f على الفترة $[-2\ ,\ 3]$.

في المثال (5)

استخدام العلاقة بين القيم القصوى المحلية (النقاط الحرجة) و $f'(x) = 0$ لإيجاد قيم الثابتين $a\ ,\ b$.

أشر إلى استخدام الآلة الحاسبة في حل المعادلتين الآتيتين وإلّا فمن الضروري تبسيط المعادلة الثانية.

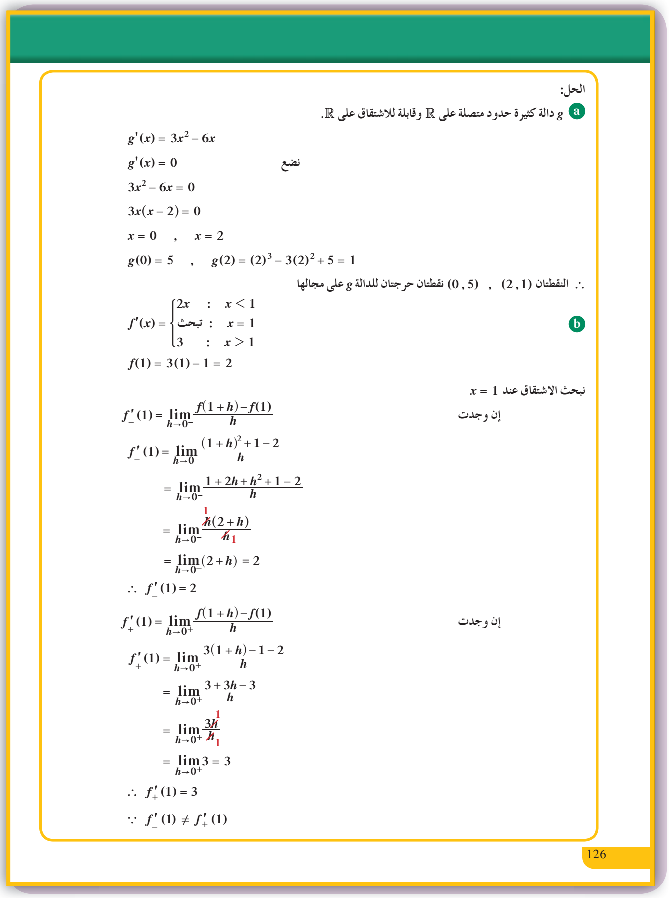
6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

سيفترض بعض الطلاب أن العدد الحرج يناظر دائمًا قيمة قصوى محلية؛ لذلك من الضروري أن يلاحظ الطلاب بعض الأمثلة التي لا تتحقق فيها تلك العلاقة مثل: $f(x) = x^3$.

عند إيجاد النقاط الحرجة لدالة سيتغاضى بعض الطلاب عن إيجاد النقاط حيث تكون المشتقة غير معرفة على عكس الدالة التي تكون عند تلك النقاط مثل: $f(x) = \sqrt[3]{x}$.



الحل:

a g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 - 6x$

نضع $g'(x) = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$x = 0 \quad , \quad x = 2$

$g(0) = 5 \quad , \quad g(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 5 = 1$

∴ النقطتان $(2\ ,1)$, $(0\ ,5)$ نقطتان حرجتان للدالة g على مجالها

b
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : \ x < 1 \\ \text{تبحث} & : \ x = 1 \\ 3 & : \ x > 1 \end{cases}$$

$f(1) = 3(1) - 1 = 2$

نبحث الاشتقاق عند $x = 1$

إن وجدت $f'_-(1) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2+1-2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1+2h+h^2+1-2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}$$
$$= \lim_{h\to 0^-}(2+h) = 2$$

$\therefore\ f'_-(1) = 2$

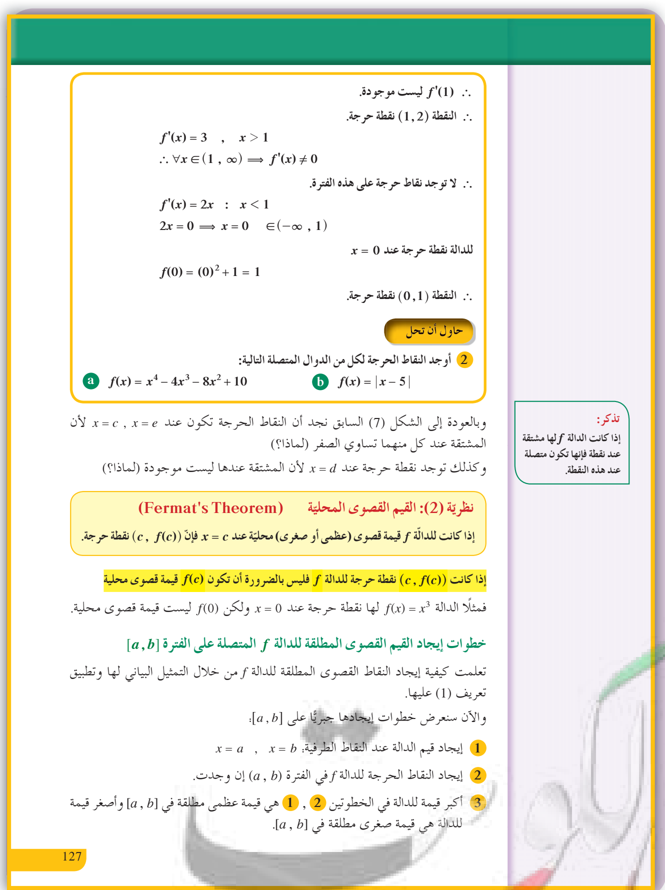
إن وجدت $f'_+(1) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{3(1+h)-1-2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{3+3h-3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} 3 = 3$$

$\therefore\ f'_+(1) = 3$

$\because\ f'_-(1) \neq f'_+(1)$

126



∴ $f'(1)$ ليست موجودة.

∴ النقطة $(1\ ,2)$ نقطة حرجة.

$f'(x) = 3 \quad , \quad x > 1$

$\therefore \forall x \in (1\ ,\ \infty) \Longrightarrow f'(x) \neq 0$

∴ لا توجد نقاط حرجة على هذه الفترة.

$f'(x) = 2x \quad : \quad x < 1$

$2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \in(-\infty\ ,\ 1)$

للدالة نقطة حرجة عند $x = 0$

$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$

∴ النقطة $(0\ ,1)$ نقطة حرجة.

حاول أن تحل

2 أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$ b $f(x) = |x - 5|$

وبالعودة إلى الشكل (7) السابق نجد أن النقاط الحرجة تكون عند $x = e$, $x = c$ لأن المشتقة عند كل منهما تساوي الصفر (لماذا؟)

وكذلك توجد نقطة حرجة عند $x = d$ لأن المشتقة عندها ليست موجودة (لماذا؟)

تذكر:
إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

نظريّة (2): القيم القصوى المحليّة (Fermat's Theorem)

إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x = c$ فإنّ $(c\ ,\ f(c))$ نقطة حرجة.

إذا كانت $(c\ ,f(c))$ نقطة حرجة للدالة f فليس بالضرورة أن تكون $f(c)$ قيمة قصوى محلية

فمثلًا الدالة $f(x) = x^3$ لها نقطة حرجة عند $x = 0$ ولكن $f(0)$ ليست قيمة قصوى محلية.

خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة f المتصلة على الفترة $[a\ ,b]$

تعلمت كيفية إيجاد النقاط القصوى المطلقة للدالة f من خلال التمثيل البياني لها وتطبيق تعريف (1) عليها.

والآن سنعرض خطوات إيجادها جبريًّا على $[a\ ,\ b]$:

1 إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = b \quad , \quad x = a$

2 إيجاد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة $(a\ ,\ b)$ إن وجدت.

3 أكبر قيمة للدالة في الخطوتين 2 , 1 هي قيمة عظمى مطلقة في $[a\ ,\ b]$ وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a\ ,\ b]$.

127

8 التقييم

راقب الطلاب أثناء عملهم على فقرات «حاول أن تحل» وتأكّد من فهمهم لمعنى قيم قصوى محلية وقيم قصوى مطلقة.

اختبار سريع

1. حدّد القيم القصوى للدالة المتصلة f:
$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ على الفترة $[-2 , 2]$
قيمة قصوى $\dfrac{1}{2}$ عند $x = 1$ وقيمة صغرى $-\dfrac{1}{2}$ عند $x = -1$

2. حدد القيم العظمى والصغرى المطلقة لبيان الدالة f: $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة $[0 , 2]$
قيمة قصوى مطلقة $\sqrt{2}$ عند $x = 2$ وقيمة صغرى مطلقة 0 عند $x = 0$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1. $x^2 , (6-x)^2$

2. (a) مجموع مساحتي المربعين.

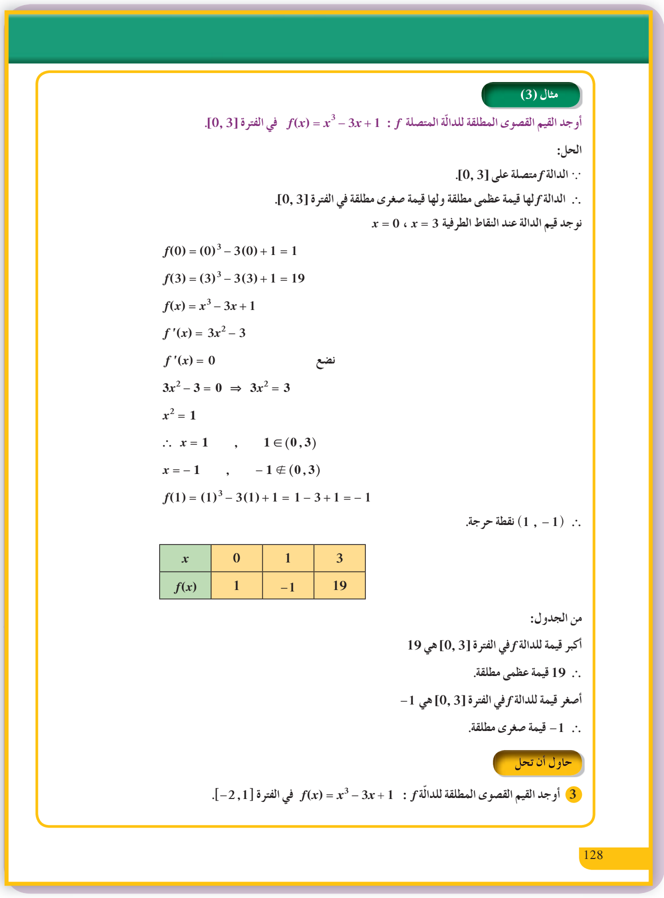
(b)

x	0	1	2	3	4	5	6
$S(x)$	36	26	20	18	20	26	36

(c) $x = 3$

3. (a) $S(x) - S(3) = 2(x-3)^2 \geqslant 0$

(b) M منتصف $\overline{AB}$.


مثال (3)

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.

الحل:

$\because$ الدالة f متصلة على $[0, 3]$.

$\therefore$ الدالة f لها قيمة عظمى مطلقة ولها قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[0, 3]$.

نوجد قيم الدالة عند النقاط الطرفية $x = 3$ ، $x = 0$

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 1 = 1$

$f(3) = (3)^3 - 3(3) + 1 = 19$

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$\therefore x = 1 \quad , \quad 1 \in (0,3)$

$x = -1 \quad , \quad -1 \notin (0,3)$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

$\therefore$ $(1 , -1)$ نقطة حرجة.

x	0	1	3
$f(x)$	1	-1	19

من الجدول:

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[0, 3]$ هي 19

$\therefore$ 19 قيمة عظمى مطلقة.

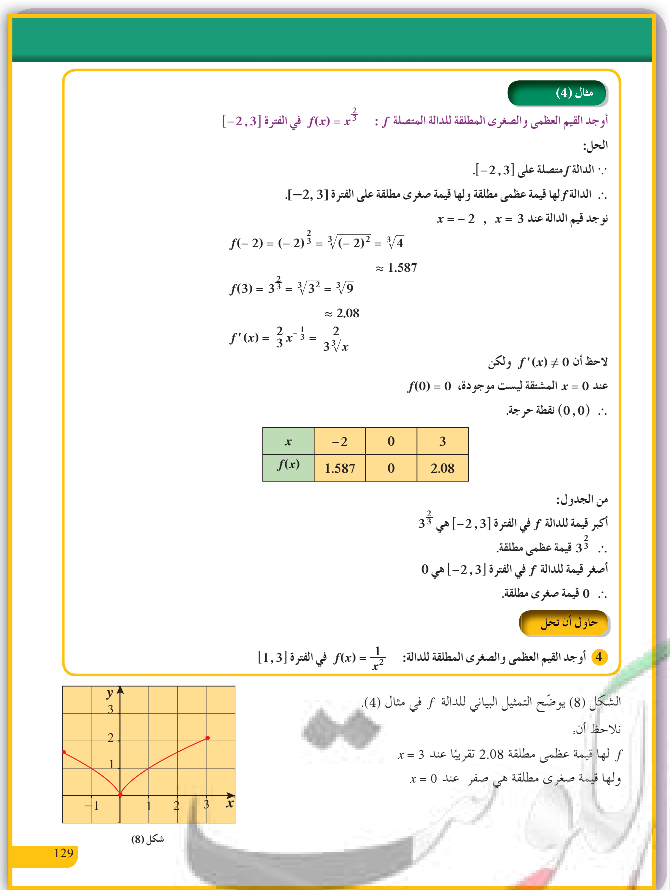
أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[0, 3]$ هي -1

$\therefore$ -1 قيمة صغرى مطلقة.

حاول أن تحل

3. أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$.

128


مثال (4)

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

الحل:

$\because$ الدالة f متصلة على $[-2, 3]$.

$\therefore$ الدالة f لها قيمة عظمى مطلقة ولها قيمة صغرى مطلقة على الفترة $[-2, 3]$.

نوجد قيم الدالة عند $x = 3$, $x = -2$

$f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4}$
≈ 1.587

$f(3) = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$
≈ 2.08

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

لاحظ أن $f'(x) \neq 0$ ولكن

عند $x = 0$ المشتقة ليست موجودة، $f(0) = 0$

$\therefore$ $(0, 0)$ نقطة حرجة.

x	-2	0	3
$f(x)$	1.587	0	2.08

من الجدول:

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[-2, 3]$ هي $3^{\frac{2}{3}}$

$\therefore$ $3^{\frac{2}{3}}$ قيمة عظمى مطلقة.

أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[-2, 3]$ هي 0

$\therefore$ 0 قيمة صغرى مطلقة.

حاول أن تحل

4. أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

الشكل (8) يوضّح التمثيل البياني للدالة f في مثال (4).

نلاحظ أن:

f لها قيمة عظمى مطلقة 2.08 تقريبًا عند $x = 3$

ولها قيمة صغرى مطلقة هي صفر عند $x = 0$

شكل (8)

129

«حاول أن تحل»

1 **(a)** قيمة صغرى مطلقة تساوي -1 عند $x = 2$

(b) قيمة صغرى مطلقة تساوي -1 عند $x = 2$

قيمة عظمى مطلقة تساوي صفر عند $x = 3$

(c) قيمة صغرى مطلقة تساوي -1 عند $x = 2$

(d) قيمة صغرى مطلقة عند $x = 3$ تساوي صفرًا.

تمرَّنْ 3−1

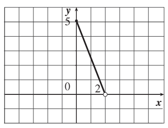
القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

Extreme Values of Functions

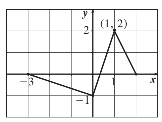
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2—1)، أوجد النقاط التي توجد عندها قيم قصوى.

(1)

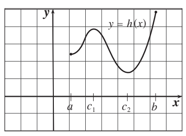


(2)

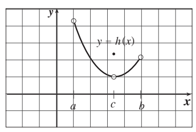


في التمارين (6—3)، حدّد قيمة x التي قد تقع عندها إحدى القيم القصوى المطلقة للدوال الموضح بيانها فيما يلي وأيًّا منها يمكن تطبيق نظريّة القيم القصوى عليها.

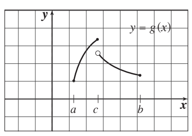
(3)



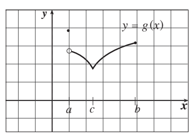
(4)



(5)



(6)



في التمارين (9—7)، حدّد النقاط الحرجة.

(7) $y = x^2(x+2)$

(8) $y = x\sqrt{3-x}$

(9) $y = \begin{cases} 3-x \ , & x < 0 \\ 3+2x-x^2 \ , & x \geq 0 \end{cases}$

50

في التمارين (14—10)، أوجد القيم القصوى المطلقة لكلّ دالّة من الدوال التالية في الفترة المبينة.

(10) $y = 2x^2 - 8x + 9 \quad , \quad [0,4]$

(11) $f(x) = x^{\frac{3}{5}} \quad , \quad [-2,3]$

(12) $y = \dfrac{x}{x^2+1} \quad , \quad [-3,0]$

(13) $y = \sqrt{3+2x-x^2} \quad , \quad [-1,1]$

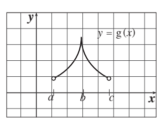
(14) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على $(a \, , \, b)$ فإن f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة. (a) (b)

(2) في الشكل التالي، للدالة g قيمة قصوى محليّة عند $x = c$. (a) (b)



(3) الدالة g : $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ لها قيمة عظمى في مجالها. (a) (b)

(4) الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ لها قيمة عظمى في مجالها. (a) (b)

(5) الدالة h : $h(x) = |3x-5|$ لها قيمة حرجة عند $x = 5$. (a) (b)

في التمارين (9—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن $y = |x|$، فإن الدالة y:

(a) لها قيمة عظمى مطلقة فقط.

(b) لها قيمة صغرى مطلقة فقط.

(c) لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة.

(d) ليس لها قيمة صغرى مطلقة وليس لها قيمة عظمى مطلقة.

(7) عدد النقاط الحرجة للدالة: $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0 \, , \, 2)$ هو:

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

51

مثال (5)

لتكن f : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5 \ , \ a \, , \, b \in \mathbb{R}$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كلّ من: $x = \frac{1}{3} \ , \ x = 1$

أوجد قيمة كل من الثابتين $a \, , \, b$

الحل: $\because$ f دالة كثيرة حدود

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$\because$ للدالة قيم قصوى محلية عند $x = \frac{1}{3} \ , \ x = 1$

$\therefore$ توجد نقاط حرجة للدالة عندهما وبالتالي:

$$f'(1) = 0 \ , \ f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

نحصل على المعادلتين الآنيتين:

$$\begin{cases} 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2a\left(\frac{1}{3}\right) + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ \frac{2}{3}a + b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

استخدم الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد الحل $\quad a = -2 \ , \ b = 1$

حاول أن تحل

5 لتكن f : $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1 \ , \ a, b \in \mathbb{R}$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من: $x = 2 \ , \ x = -1$

أوجد قيمة كل من الثابتين $a \, , \, b$

الربط بالتكنولوجيا:

خطوات الحل المستخدمة لحل معادلتين آنيتين بمتغيرين بالحاسبة.

اضغط المفتاح Mode يظهر على الشاشة 8 خيارات لبرامج مستخدمة، اختر البرنامج: 5:EQN فيظهر على الشاشة 4 صيغ لمعادلات:

اختر الصيغة: $1: a_n x + b_n y = c_n$ فيظهر على الشاشة المصفوفة:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} a\square & b\square & c\square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

اكتب كلًّا من المعادلتين على الشكل التالي: $ax + by = c$

املأ المربعات في السطر الأول بمعامل x يليه = ثم معامل y يليه = ثم قيمة c يليه = .

كرر العملية في السطر الثاني.

اضغط الآن على المفتاح = تظهر قيمة x (المجهول الأول)

اضغط ثانية على المفتاح = تظهر قيمة y (المجهول الثاني)

ملاحظة:

يمكنك كذلك حل المعادلتين الآنيتين باستخدام طريقة الحذف أو طريقة التعويض.

130

2 **(a)** نقاط حرجة: $(0\ ,\ 10), (-1\ ,\ 7), (4\ ,\ -118)$

(b) $f'_-(5) = -1\ ,\ \ f'_+(5) = 1$

$f'(5)$ غير موجودة

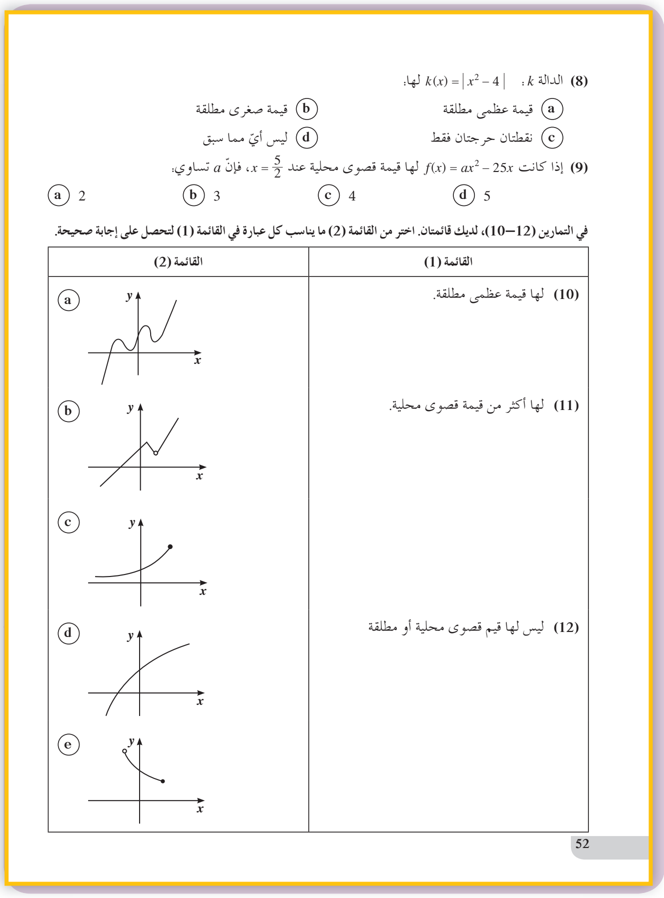
$\therefore$ $(5,\ 0)$ نقطة حرجة

3 قيمة عظمى مطلقة تساوي 3 عند $x = -1$ وقيمة صغرى مطلقة تساوي -1 عند $x = 1$ وعند $x = -2$

4 قيمة صغرى مطلقة تساوي $\frac{1}{9}$ عند $x = 3$

قيمة عظمى مطلقة تساوي 1 عند $x = 1$

5 $a = -3\ ,\ b = -12$



(8) الدالة k : $k(x) = |x^2 - 4|$ لها:

ⓐ قيمة عظمى مطلقة ⓑ قيمة صغرى مطلقة

ⓒ نقطتان حرجتان فقط ⓓ ليس أيّ مما سبق

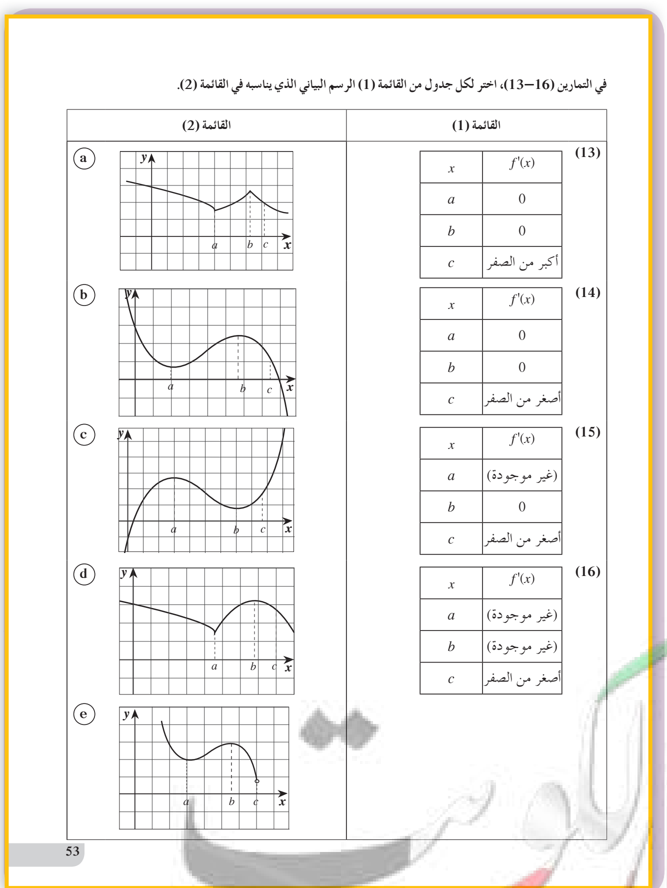
(9) إذا كانت $f(x) = ax^2 - 25x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$، فإنّ a تساوي:

ⓐ 2 ⓑ 3 ⓒ 4 ⓓ 5

في التمارين (10–12)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل عبارة في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(10) لها قيمة عظمى مطلقة.	ⓐ
(11) لها أكثر من قيمة قصوى محلية.	ⓑ
	ⓒ
(12) ليس لها قيم قصوى محلية أو مطلقة	ⓓ
	ⓔ

52



في التمارين (13–16)، اختر لكل جدول من القائمة (1) الرسم البياني الذي يناسبه في القائمة (2).

(13)

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	أكبر من الصفر

(14)

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	أصغر من الصفر

(15)

x	$f'(x)$
a	(غير موجودة)
b	0
c	أصغر من الصفر

(16)

x	$f'(x)$
a	(غير موجودة)
b	(غير موجودة)
c	أصغر من الصفر

القائمة (2): ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ ⓔ

53

2–3: تزايد وتناقص الدوال

1 الأهداف

- تطبيق نظرية القيمة المتوسطة.
- إيجاد الفترات من المجال حيث تكون الدالة متزايدة أو متناقصة.
- تعرف الدوال المطّردة.
- تعرف الدالة الثابتة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

نظرية القيمة المتوسطة – الدوال المتزايدة– الدوال المتناقصة – الدالة المطّردة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) لتكن الدالة f: $f(x)=x^2-4x+3$

أوجد مشتقة الدالة.

(2) حلّ ما يلي:

(a) $f'(x)=0$

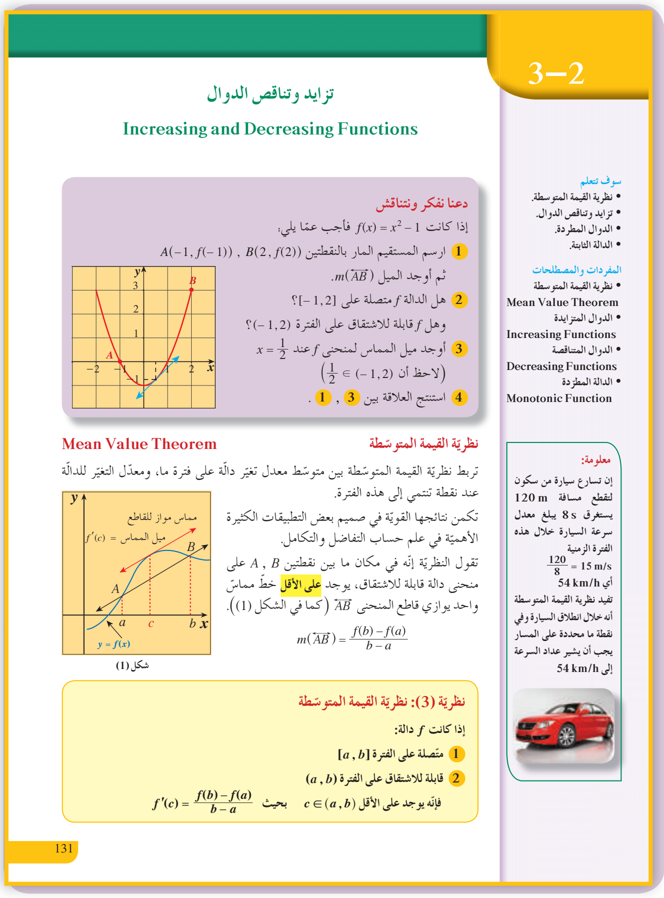
(b) $f'(x)>0$

(c) $f'(x)<0$

(3) **(a)** أكمل الجدول التالي:

x	-1	0	1	2	3	4
$f'(x)$						
$f(x)$						

(b) ماذا تلاحظ بالنسبة إلى إشارة $f'(x)$ وتغير سلوك $f(x)$ لقيم $x<2$ وقيم $x>2$؟



3–2

تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

سوف تتعلم
- نظرية القيمة المتوسطة.
- تزايد وتناقص الدوال.
- الدوال المطردة.
- الدالة الثابتة.

المفردات والمصطلحات
- نظرية القيمة المتوسطة Mean Value Theorem
- الدوال المتزايدة Increasing Functions
- الدوال المتناقصة Decreasing Functions
- الدالة المطردة Monotonic Function

معلومة: إن تسارع سيارة من سكون لقطع مسافة 120 m يستغرق 8 s يبلغ معدل سرعة السيارة خلال هذه الفترة الزمنية $\frac{120}{8}=15$ m/s أي 54 km/h. تفيد نظرية القيمة المتوسطة أنه خلال انطلاق السيارة وفي نقطة ما محددة على المسار يجب أن يشير عداد السرعة إلى 54 km/h.

دعنا نفكر ونتناقش

إذا كانت $f(x)=x^2-1$ فأجب عما يلي:

1 ارسم المستقيم المار بالنقطتين $A(-1,f(-1))$, $B(2,f(2))$ ثم أوجد الميل $m(\overleftrightarrow{AB})$.

2 هل الدالة f متصلة على $[-1,2]$؟ وهل f قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,2)$؟

3 أوجد ميل المماس لمنحنى f عند $x=\frac{1}{2}$ (لاحظ أن $\frac{1}{2}\in(-1,2)$)

4 استنتج العلاقة بين 3 , 1.

نظرية القيمة المتوسطة Mean Value Theorem

تربط نظرية القيمة المتوسطة بين متوسط معدل تغير دالة على فترة ما، ومعدل التغير للدالة عند نقطة تنتمي إلى هذه الفترة.

تكمن نتائجها القوية في صميم بعض التطبيقات الكثيرة الأهمية في علم حساب التفاضل والتكامل.

تقول النظرية إنه في مكان ما بين نقطتين A , B على منحنى دالة قابلة للاشتقاق، يوجد على الأقل خط مماس واحد يوازي قاطع المنحنى $\overleftrightarrow{AB}$ (كما في الشكل (1)).

$m(\overleftrightarrow{AB})=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

شكل (1)

نظرية (3): نظرية القيمة المتوسطة

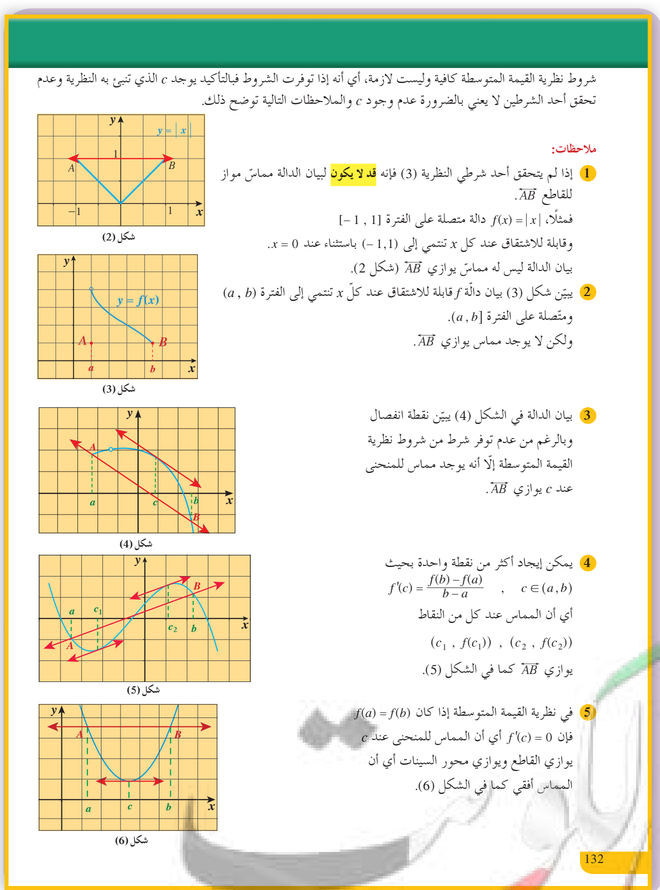
إذا كانت f دالة:

1 متصلة على الفترة $[a,b]$

2 قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b)

فإنه يوجد على الأقل $c\in(a,b)$ بحيث $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

131



شروط نظرية القيمة المتوسطة كافية وليست لازمة، أي أنه إذا توفرت الشروط فبالتأكيد يوجد c الذي تنبئ به النظرية وعدم تحقق أحد الشرطين لا يعني بالضرورة عدم وجود c والملاحظات التالية توضح ذلك.

ملاحظات:

1 إذا لم يتحقق أحد شرطي النظرية (3) فإنه قد لا يكون لبيان الدالة مماس مواز للقاطع $\overleftrightarrow{AB}$.
فمثلاً، $f(x)=|x|$ دالة متصلة على الفترة $[-1,1]$ وقابلة للاشتقاق عند كل x تنتمي إلى $(-1,1)$ باستثناء عند $x=0$. بيان الدالة ليس له مماس يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ (شكل 2).

2 يبين شكل (3) بيان دالة f قابلة للاشتقاق عند كل x تنتمي إلى الفترة (a,b) ومتصلة على الفترة $[a,b]$. ولكن لا يوجد مماس يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.

3 بيان الدالة في الشكل (4) يبين نقطة انفصال وبالرغم من عدم توفر شرط من شروط نظرية القيمة المتوسطة إلا أنه يوجد مماس للمنحنى عند c يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.

4 يمكن إيجاد أكثر من نقطة واحدة بحيث $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $c\in(a,b)$ أي أن المماس عند كل من النقاط $(c_1,f(c_1))$, $(c_2,f(c_2))$ يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ كما في الشكل (5).

5 في نظرية القيمة المتوسطة إذا كان $f(a)=f(b)$ فإن $f'(c)=0$ أي أن المماس للمنحنى عند c يوازي القاطع ويوازي محور السينات أي أن المماس أفقي كما في الشكل (6).

شكل (2) شكل (3) شكل (4) شكل (5) شكل (6)

132

5 التدريس

لتشجيع الطلاب على دراسة نظرية القيمة المتوسطة، قد ترغب في أن تبدأ هذا الدرس بمناقشة تطبيق سهل، مثلاً:
انطلقت سيارة من السكون وقطعت مسافة 100 m خلال 8 s، معدل سرعة السيارة خلال هذه الثواني الثمانية هو 12.5 m/s أي 45 km/h، مما يعني أنه في نقطة ما خلال التسارع بيّن مؤشر السرعة في السيارة 45 km/h

خُذ بعض الوقت في مناقشة كل من فروض ونتائج نظرية القيمة المتوسطة والملاحظات عليها. لاحظ أن الحالة الخاصة منها في الملاحظة رقم (5) تسمّى نظرية رول. أهمية هذه النظرية هي بالسماح لنا باستنتاج خواص دالة من مشتقتها.

استخدم الرسم البياني لتوضيح تزايد وتناقص الدوال ومنها تعريف الدالة المطردة.

في نظرية (4)، لاحظ استخدام فترات مفتوحة في وصف أين تكون الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. على الطلاب أن يدركوا أن العبارة: f متزايدة على الفترة I لا تعني أن $f'(a) > 0$ أو $f'(b) > 0$. في نهاية الدرس اربط بين بيان الدالة f وبيان مشتقتها من خلال النشاط الموضّح.

في المثالين (1), (2)

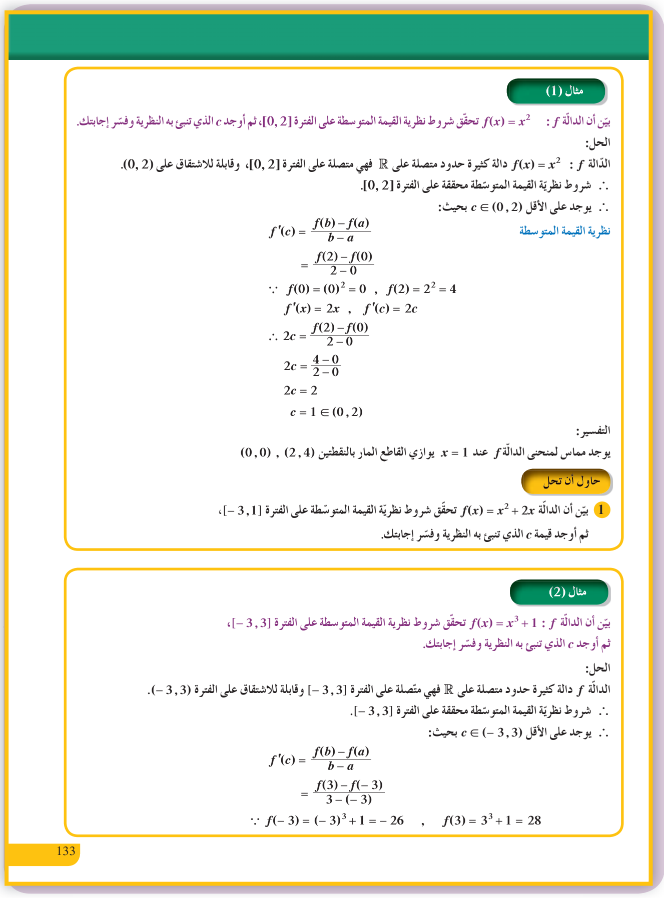
تطبيق مباشر لمفهوم القيمة المتوسطة.

شجّع الطلاب على تطبيق القيمة المتوسطة باستخدام دالة كثيرة الحدود: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ وذلك على فترتين: [1, 2]، [2, 3] كي يستنتجوا قيمة c على كل فترة.

اطلب إليهم إيجاد العلاقة بين قيمة c وميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين صورتي طرفي كل فترة.

في الأمثلة (3), (4), (5)

تطبيق مشتقة الدالة لدراسة تزايدها أو تناقصها على مجال تعريفها وتكوين جدول يوضح فترات التزايد وفترات التناقص.


مثال (1)

بيّن أن الدالّة $f: f(x) = x^2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [0, 2]، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

الدّالة $f: f(x) = x^2$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة [0, 2]، وقابلة للاشتقاق على (0, 2).

∴ شروط نظريّة القيمة المتوسّطة محققة على الفترة [0, 2].

∴ يوجد على الأقل $c \in (0, 2)$ بحيث:

نظرية القيمة المتوسطة

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$\because\ f(0) = (0)^2 = 0 \ ,\ f(2) = 2^2 = 4$$

$$f'(x) = 2x \ ,\ f'(c) = 2c$$

$$\therefore\ 2c = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$2c = \frac{4 - 0}{2 - 0}$$

$$2c = 2$$

$$c = 1 \in (0, 2)$$

التفسير:

يوجد مماس لمنحنى الدالّة f عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(2, 4)$, $(0, 0)$

حاول أن تحل

1 بيّن أن الدالّة $f(x) = x^2 + 2x$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسّطة على الفترة $[-3, 1]$، ثم أوجد قيمة c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

مثال (2)

بيّن أن الدالّة $f: f(x) = x^3 + 1$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 3]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

الدالّة f دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متّصلة على الفترة $[-3, 3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(-3, 3)$.

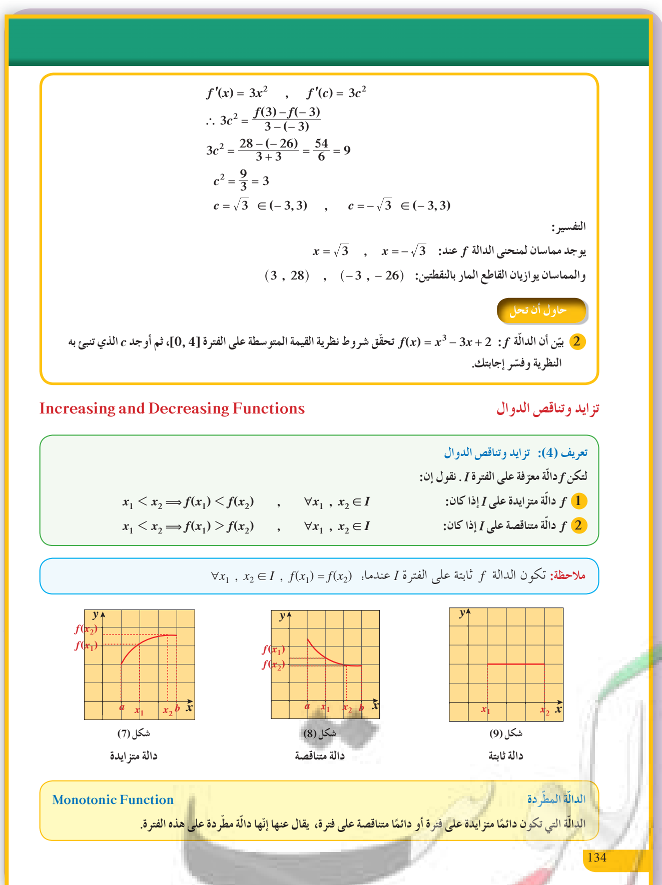
∴ شروط نظريّة القيمة المتوسّطة محققة على الفترة $[-3, 3]$.

∴ يوجد على الأقل $c \in (-3, 3)$ بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$\because\ f(-3) = (-3)^3 + 1 = -26 \quad , \quad f(3) = 3^3 + 1 = 28$$

133


$$f'(x) = 3x^2 \quad , \quad f'(c) = 3c^2$$

$$\therefore\ 3c^2 = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$3c^2 = \frac{28 - (-26)}{3 + 3} = \frac{54}{6} = 9$$

$$c^2 = \frac{9}{3} = 3$$

$$c = \sqrt{3} \in (-3, 3) \quad , \quad c = -\sqrt{3} \in (-3, 3)$$

التفسير:

يوجد مماسان لمنحنى الدالة f عند: $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

والمماسان يوازيان القاطع المار بالنقطتين: $(-3, -26)$, $(3, 28)$

حاول أن تحل

2 بيّن أن الدالّة $f: f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [0, 4]، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

تزايد وتناقص الدوال Increasing and Decreasing Functions

تعريف (4): تزايد وتناقص الدوال

لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I. نقول إن:

1 f دالّة متزايدة على I إذا كان: $\forall x_1, x_2 \in I \ ,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2 f دالّة متناقصة على I إذا كان: $\forall x_1, x_2 \in I \ ,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ملاحظة: تكون الدالة f ثابتة على الفترة I عندما: $\forall x_1, x_2 \in I \ ,\ f(x_1) = f(x_2)$

شكل (9) دالة ثابتة

شكل (8) دالة متناقصة

شكل (7) دالة متزايدة

الدالّة المطّردة Monotonic Function

الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.

134

6 الربط

إن تسارع سيارة من سكون لتقطع مسافة 120 m يستغرق 8 s، يبلغ معدل سرعة السيارة خلال هذه الفترة الزمنية

$\frac{120}{8} = 15\,\text{m/s}$ أي $54\,\text{km/h}$

تفيد نظرية القيمة المتوسطة أنه خلال انطلاق السيارة وفي نقطة ما محددة على المسار يجب أن يشير عداد السرعة إلى $54\,\text{km/h}$

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

عند تطبيق نتيجة (1) لتحديد أين تكون الدالة f متزايدة، يمكن أن يخطئ الطلاب عند حل المتباينة $f'(x) > 0$، وذلك إما بتحليل خطأ للدالة $f'(x)$ أو بخطأ في تحديد الإشارة.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على حل فقرات «حاول أن تحل». تأكّد من كونهم قد فهموا تزايد الدوال وتناقصها والقيمة المتوسطة.

اختبار سريع

1. بيّن أن الدالة $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تحقق شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[0,1]$، ثم أوجد قيمة c التي تحقق $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ على هذه الفترة.

الدالة متصلة على $[0,1]$، قابلة للاشتقاق على $(0,1)$ ، $f(0) = -1$ ، $f(1) = 2$

حيث: $f'(x) = 2x + 2$

$f'(c) = \frac{2 - (-1)}{1 - 0} = 3$

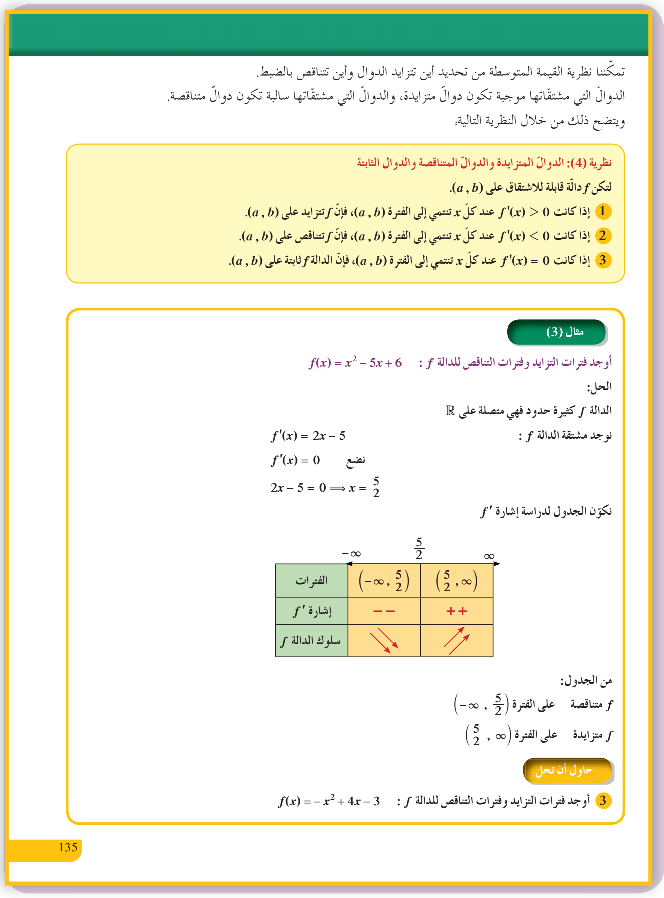
$2c + 2 = 3$

$c = \frac{1}{2}$

2. أين تتزايد الدالة $f(x) = x^3 - x^2$ ؟ وأين تتناقص؟

متزايدة على كل من $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ ، $(-\infty, 0)$

متناقصة على $\left(0, \frac{2}{3}\right)$



تمكّننا نظرية القيمة المتوسطة من تحديد أين تتزايد الدوال وأين تتناقص بالضبط.
الدوالّ التي مشتقّاتها موجبة تكون دوالّ متزايدة، والدوالّ التي مشتقّاتها سالبة تكون دوالّ متناقصة.
ويتضح ذلك من خلال النظرية التالية:

نظرية (4): الدوالّ المتزايدة والدوالّ المتناقصة والدوال الثابتة

لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على (a, b).

1. إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a, b)، فإنّ f تتزايد على (a, b).
2. إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a, b)، فإنّ f تتناقص على (a, b).
3. إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a, b)، فإنّ الدالة f ثابتة على (a, b).

مثال (3)

أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

الحل:

الدالة f كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$

نوجد مشتقة الدالة f : $f'(x) = 2x - 5$

نضع $f'(x) = 0$

$2x - 5 = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

الفترات	$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$
سلوك الدالة f	↘	↗

من الجدول:

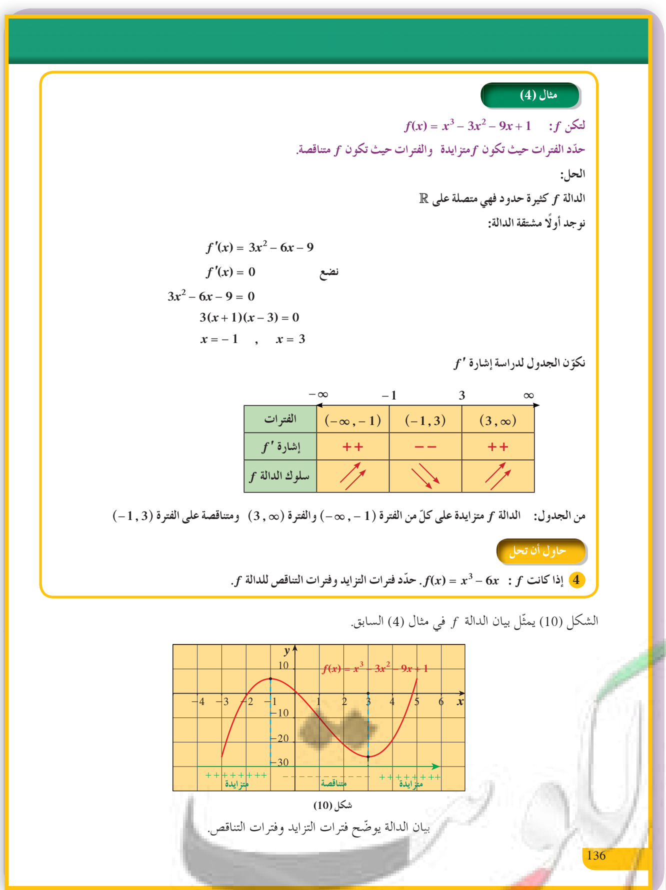
f متناقصة على الفترة $\left(-\infty , \frac{5}{2}\right)$

f متزايدة على الفترة $\left(\frac{5}{2} , \infty\right)$

حاول أن تحل

3. أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

135



مثال (4)

لتكن f: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

حدّد الفترات حيث تكون f متزايدة والفترات حيث تكون f متناقصة.

الحل:

الدالة f كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$

نوجد أولًا مشتقة الدالة:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

$3(x+1)(x-3) = 0$

$x = -1 \quad , \quad x = 3$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	$+ +$	$- -$	$+ +$
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

من الجدول: الدالة f متزايدة على كلّ من الفترة $(-\infty , -1)$ والفترة $(3, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-1, 3)$

حاول أن تحل

4. إذا كانت f : $f(x) = x^3 - 6x$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

الشكل (10) يمثّل بيان الدالة f في مثال (4) السابق.

شكل (10)

بيان الدالة يوضّح فترات التزايد وفترات التناقص.

136

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1. ميل $\overleftrightarrow{AB} = 1$

2. الدالة f متصلة على $[-1,2]$، كذلك قابلة للاشتقاق على $(-1, 2)$

3. 1

4. المماس موازٍ لِـ $\overleftrightarrow{AB}$.

«حاول أن تحل»

1. الدالة f متصلة على الفترة $[-3,1]$، قابلة للاشتقاق على $(-3,1)$ حيث: $f'(x) = 2x + 2$، $f(-3) = 3$، $f(1) = 3$، إذاً نظرية القيمة المتوسطة تحقق وجود نقطة c على الفترة $(-3,1)$

حيث: $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \dfrac{3 - 3}{4} = 0$

$2c + 2 = 0$

$c = -1$

المماس عند $c = -1$ موازٍ لمحور السينات

2. f متصلة على الفترة $[0, 4]$ وقابلة للاشتقاق على $(0, 4)$

$f(0) = 2 \quad , \quad f(4) = 54$

$\therefore$ نظرية القيمة المتوسطة تحقق وجود نقطة c على الفترة $(0, 4)$ حيث: $f'(x) = 3x^2 - 3$

$3c^2 - 3 = \dfrac{54 - 2}{4 - 0} = 13$

$3c^2 = 16 \; ; \because c = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \in (0,4),$

$c = \dfrac{-4}{\sqrt{3}} \notin (0,4) \qquad \therefore c = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

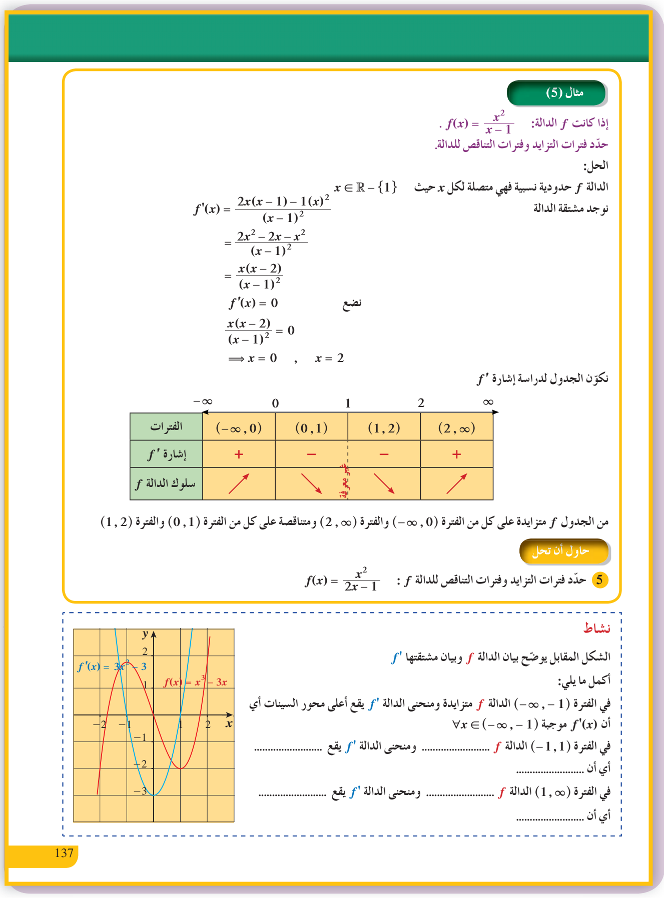
3. $f'(x) = -2x + 4$

$f'(x) = 0 \; , \; x = 2 \; , \; f(2) = 1$

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+ +	− −
سلوك f	↗↗	↘↘

f متزايدة على الفترة $(-\infty, 2)$.

f متناقصة على الفترة $(2, \infty)$.



مثال (5)

إذا كانت الدالة f: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.

الحل:

الدالة f حدودية نسبية فهي متصلة لكل x حيث $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

نوجد مشتقة الدالة

$f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - 1(x)^2}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

نضع $f'(x) = 0$

$\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$

$\Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = 2$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+	−	−	+
سلوك الدالة f	↗	↘	↘	↗

غير معرفة

من الجدول f متزايدة على كل من الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(2, \infty)$ ومتناقصة على كل من الفترة $(0, 1)$ والفترة $(1, 2)$

حاول أن تحل

5. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f: $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

نشاط

الشكل المقابل يوضّح بيان الدالة f وبيان مشتقتها f'

أكمل ما يلي:

في الفترة $(-\infty, -1)$ الدالة f متزايدة ومنحنى الدالة f' يقع أعلى محور السينات أي أن $f'(x)$ موجبة $\forall x \in (-\infty, -1)$

في الفترة $(-1, 1)$ الدالة f .... ومنحنى الدالة f' يقع ....

أي أن ....

في الفترة $(1, \infty)$ الدالة f .... ومنحنى الدالة f' يقع ....

أي أن ....

137

4. $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

الفترات	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك f	↗↗	↘↘	↗↗

f متزايدة على كلّ من الفترتين $(-\infty , -\sqrt{2})$، $(\sqrt{2} , \infty)$، f متناقصة على الفترة $(-\sqrt{2} , \sqrt{2})$

5 الدالة غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

x	$-\infty$ … 0	0 … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … 1	1 … ∞
الفترات	$(-\infty\ ,\ 0]$	$\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$		$\left(\frac{1}{2}\ ,\ 1\right)$	$(1\ ,\ \infty)$
إشارة f'	+ +	− −	غير معرفة	− −	+ +
سلوك f	↗ ↗	↘ ↘		↘ ↘	↗ ↗

f متزايدة على كلّ من الفترتين $(-\infty\ ,\ 0)$ ، $(1\ ,\ \infty)$.

f متناقصة على كلّ من الفترتين $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 1\right)$ ، $\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$.

«نشاط»

* متناقصة، منحنى الدالة f' يقع أسفل محور السينات،
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-1,1)$

* متزايدة، منحنى الدالة f' يقع أعلى محور السينات،
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (1,\infty)$

تمرّنْ 3−2

تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) بيّن أن الدالة f: $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسطة على $[0, 1]$. ثمّ أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

(2) بيّن أن الدالة f: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسطة على $\left[\frac{1}{2}\ ,\ 2\right]$. ثمّ أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

في التمارين (7−3)، حدّد الفترات التي تكون فيها الدوال التالية متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة.

(3) $f(x) = 5x - x^2$ **(4)** $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24$ **(5)** $k(x) = \frac{1}{x^2}$

(6) $h(x) = \frac{-x}{x^2+4}$ **(7)** $f(x) = x^4 - 2x^2$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (4−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة g : $g(x) = x^2 - x - 3$ متزايدة على $\left(-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ متناقصة على كل من الفترة $(-\infty\ ,\ -\sqrt{5})$ والفترة $(\sqrt{5}\ ,\ \infty)$ (a) (b)

(3) الدالة f: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0, 1]$ (a) (b)

(4) الدالة f: $f(x) = x^3 + 1$ مطّردة على $\mathbb{R}$. (a) (b)

في التمارين (8−5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) تكون الدالة k : $k(x) = \frac{x}{x^2-4}$

(a) متزايدة على كل فترة من مجال تعريفها.

(b) متناقصة على كل فترة من مجال تعريفها.

(c) متناقصة على الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(-2, 2)$ ومتزايدة على الفترة $(2\ ,\ \infty)$

(d) ليس أيّ مما سبق.

54

(6) الدالة R : $R(x) = |x|$

(a) متزايدة على مجال تعريفها.

(b) متناقصة على مجال تعريفها.

(c) متزايدة على الفترة $(0\ ,\ \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-\infty\ ,\ 0)$

(d) متناقصة على الفترة $(0\ ,\ \infty)$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty\ ,\ 0)$

(7) إذا كانت f' : $f'(x) = -x^2$ ، فإنّ الدالة f :

(a) متزايدة على مجال تعريفها.

(b) متناقصة على مجال تعريفها.

(c) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ فقط

(d) متناقصة على الفترة $(0\ ,\ \infty)$ فقط

(8) إذا كانت f' : $f'(x) = -3x$ ، فإنّ الدالة f:

(a) متزايدة على الفترة $(0, \infty)$

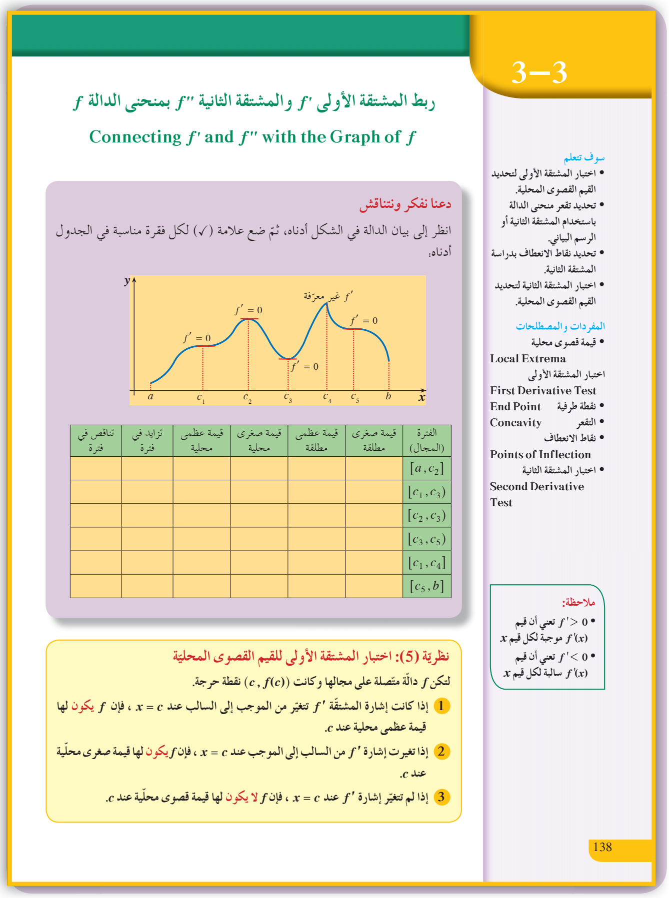
(b) متناقصة على الفترة $(-\infty, 0]$

(c) متزايدة على مجال تعريفها.

(d) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ ومتناقصة على الفترة $(0\ ,\ \infty)$

55

3–3: ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f



3–3

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

Connecting f' and f'' with the Graph of f

سوف تتعلم
- اختبار المشتقة الأولى لتحديد القيم القصوى المحلية.
- تحديد تقعر منحنى الدالة باستخدام المشتقة الثانية أو الرسم البياني.
- تحديد نقاط الانعطاف بدراسة المشتقة الثانية.
- اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية.

المفردات والمصطلحات
- قيمة قصوى محلية Local Extrema
- اختبار المشتقة الأولى First Derivative Test
- نقطة طرفية End Point
- التقعر Concavity
- نقاط الانعطاف Points of Inflection
- اختبار المشتقة الثانية Second Derivative Test

ملاحظة:
- $f' > 0$ تعني أن قيم $f'(x)$ موجبة لكل قيم x
- $f' < 0$ تعني أن قيم $f'(x)$ سالبة لكل قيم x

دعنا نفكر ونتناقش

انظر إلى بيان الدالة في الشكل أدناه، ثمّ ضع علامة (✓) لكل فقرة مناسبة في الجدول أدناه:

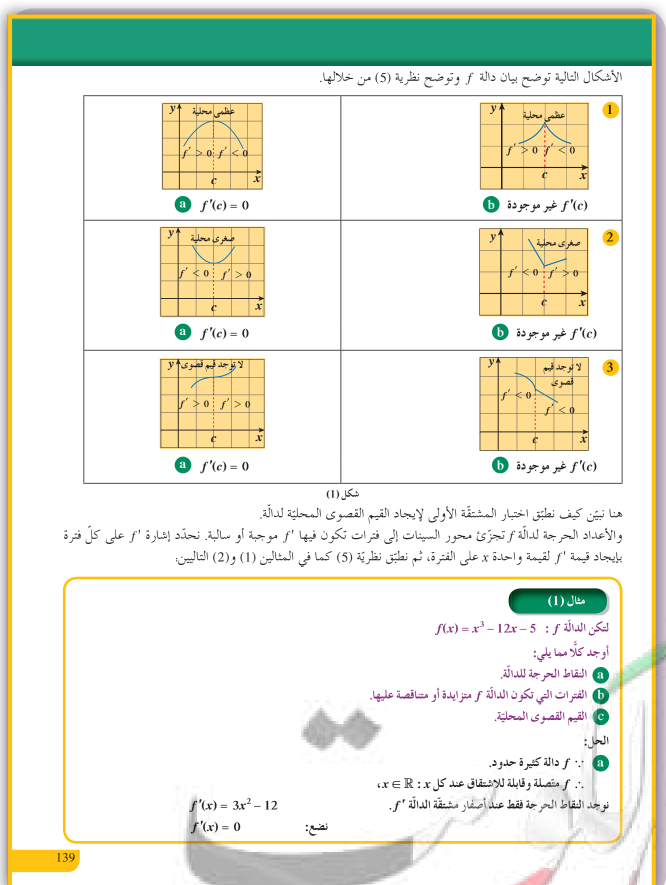
الفترة (المجال)	قيمة صغرى مطلقة	قيمة عظمى مطلقة	قيمة صغرى محلية	قيمة عظمى محلية	تزايد في فترة	تناقص في فترة
$[a, c_2]$						
$[c_1, c_3)$						
$[c_2, c_3)$						
$[c_3, c_5)$						
$[c_1, c_4]$						
$[c_5, b]$						

نظريّة (5): اختبار المشتقّة الأولى للقيم القصوى المحليّة

لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c, f(c))$ نقطة حرجة.

1. إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
2. إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.
3. إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ ، فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.

138



الأشكال التالية توضح بيان دالة f وتوضح نظرية (5) من خلالها.

شكل (1)

هنا نبيّن كيف نطبّق اختبار المشتقّة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحليّة لدالّة.

والأعداد الحرجة لدالّة f تجزّئ محور السينات إلى فترات تكون فيها f' موجبة أو سالبة. نحدّد إشارة f' على كلّ فترة بإيجاد قيمة f' لقيمة واحدة x على الفترة، ثم نطبّق نظريّة (5) كما في المثالين (1) و(2) التاليين:

مثال (1)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

أوجد كلًّا مما يلي:

(a) النقاط الحرجة للدالّة.
(b) الفترات التي تكون الدالّة f متزايدة أو متناقصة عليها.
(c) القيم القصوى المحليّة.

الحل:

(a) ∵ f دالة كثيرة حدود.
∴ f متّصلة وقابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in \mathbb{R}$،

نوجد النقاط الحرجة فقط عند أصفار مشتقّة الدالّة f'. $f'(x) = 3x^2 - 12$

نضع: $f'(x) = 0$

139

1 الأهداف

- استخدام اختبارات المشتقة الأولى لتحديد القيم القصوى المحلية.
- استخدام الرسم البياني لتحديد تقعر منحنى الدالة.
- استخدام اختبار المشتقة الثانية لتحديد تقعر منحنى الدالة وتحديد نقاط الانعطاف وتحديد القيم القصوى المحلية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قيمة قصوى محلية – اختبار المشتقة الأولى –نقطة طرفية – التقعر – نقاط الانعطاف – اختبار المشقة الثانية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

لتكن الدالة: $f(x) = x^3 - 3x + 3$

(a) أوجد $f'(x)$ و $f''(x)$

(b) أكمل الجدول التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							
$f''(x)$							
$f(x)$							

(c) ماذا تلاحظ بالنسبة إلى إشارات $f'(x)$ و $f''(x)$ وتأثيرها على تغير $f(x)$؟

(d) عيّن النقاط $(x, f(x))$ من الجدول في مستوى إحداثي.

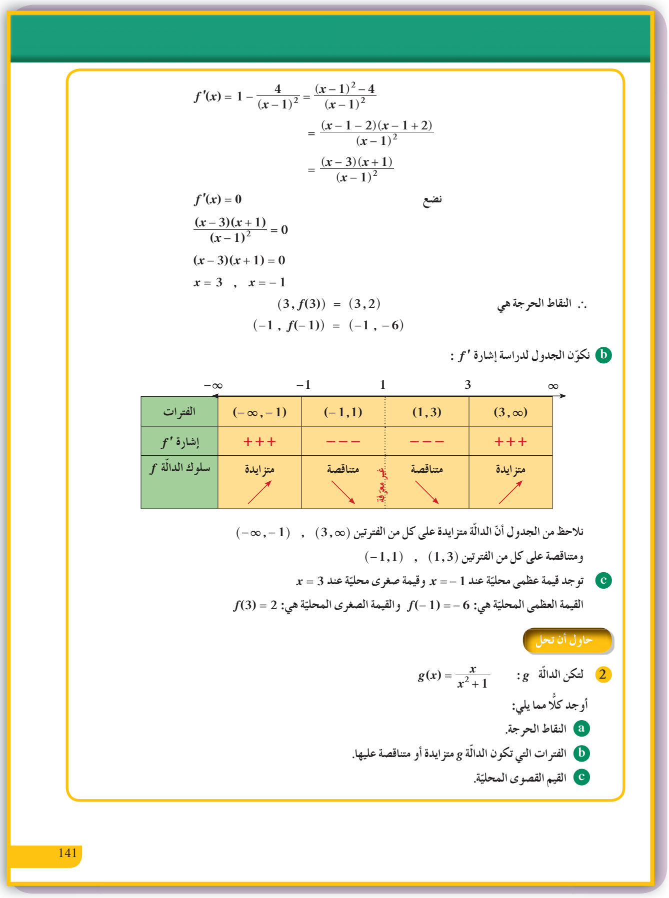
(e) ناقش الربط بين $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f(x)$.

5 التدريس

يمكنك التهيئة لنظرية (5): «اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية» من فقرة «دعنا نفكر ونناقش»، عن طريق تقديم عدة رسوم بيانية، وجَعْل الطلاب يناقشون المشتقات وعلاقتها بالقيم القصوى للدالة.

يقدم هذا الدرس العديد من الاختبارات الأساسية لدراسة تغيّر دالة تمهيدًا لرسم بيانها. وهذه الاختبارات هي: اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية (نظرية 5)، واختبار التقعر، واختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية.

على الرغم من أن استخدام هذه الاختبارات لرسم منحنيات الدوال لا يسمح برسم بيانها بدقة، إلا أنه من المهم أن يفهم الطلاب الترابط بين المشتقتين الأولى والثانية ومنحنى الدالة. دراسة إشارة المشتقتين الأولى والثانية يوضّح كل السمات المهمة التي يشير إليها منحنى مرسوم.


$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

نضع $f'(x) = 0$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 0$$
$$(x-3)(x+1) = 0$$
$$x = 3 \quad , \quad x = -1$$

∴ النقاط الحرجة هي $(3, f(3)) = (3, 2)$

$(-1, f(-1)) = (-1, -6)$

b نكوّن الجدول لدراسة إشارة f' :

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad 3 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	+++	− − −	− − −	+++
سلوك الدالّة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	غير معرّفة متناقصة ↘	متزايدة ↗

نلاحظ من الجدول أنّ الدالّة متزايدة على كل من الفترتين $(3, \infty)$, $(-\infty, -1)$

ومتناقصة على كل من الفترتين $(1, 3)$, $(-1, 1)$

c توجد قيمة عظمى محليّة عند $x = -1$ وقيمة صغرى محليّة عند $x = 3$

القيمة العظمى المحليّة هي: $f(-1) = -6$ والقيمة الصغرى المحليّة هي: $f(3) = 2$

حاول أن تحل

2 لتكن الدالّة g: $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة.

b الفترات التي تكون الدالّة g متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحليّة.

141


$$3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = -2 \quad , \quad x = 2$$

∴ النقاط الحرجة هي: $(-2, f(-2)) = (-2, 11)$

$(2, f(2)) = (2, -21)$

b نكوّن الجدول لدراسة إشارة f' :

$-\infty \quad -2 \quad 2 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+++	− − −	+++
سلوك الدالّة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

نلاحظ من الجدول: الدالّة متزايدة على الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(2, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-2, 2)$.

c نستطيع أن نلاحظ من الجدول أنّه توجد قيمة عظمى محليّة عند $x = -2$، وقيمة صغرى محليّة عند $x = 2$.

القيمة العظمى المحليّة هي $f(-2) = 11$، والقيمة الصغرى المحليّة هي $f(2) = -21$.

حاول أن تحل

1 لتكن الدالّة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

مثال (2)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-1}$

فأوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالّة.

b الفترات التي تكون عليها الدالّة f متزايدة وتلك التي تكون عليها متناقصة.

c القيم القصوى المحليّة.

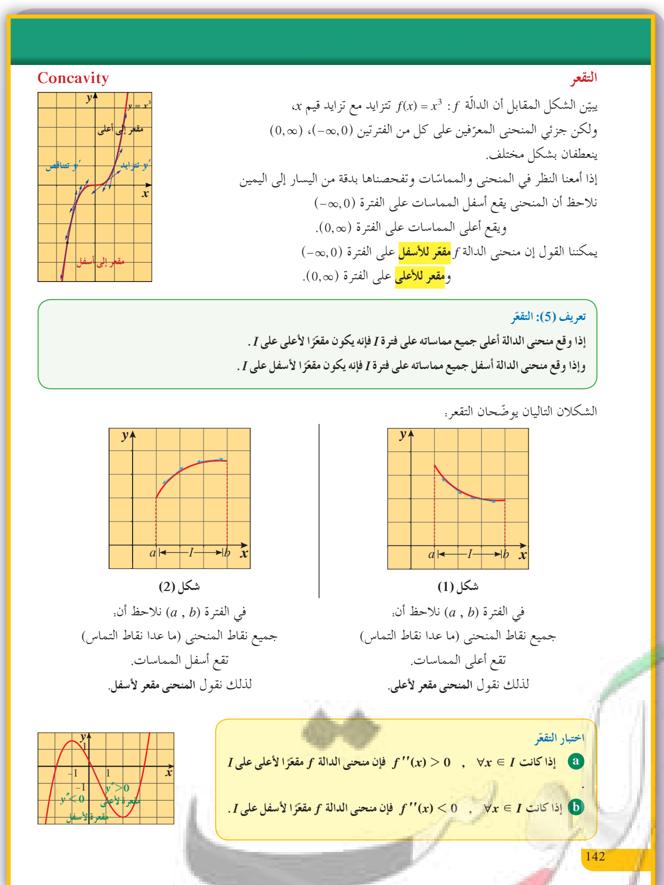
الحل:

a ∵ f مجموع دالتين إحداهما كثيرة حدود والأخرى حدودية نسبية

∴ مجال الدالة f هو $\mathbb{R} - \{1\}$

∴ f متّصلة وقابلة للاشتقاق على كل من الفترتين من مجالها $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

140


التقعر Concavity

يبيّن الشكل المقابل أن الدالّة f : $f(x) = x^3$ تتزايد مع تزايد قيم x،
ولكن جزئي المنحنى المعرّفين على كل من الفترتين $(-\infty, 0)$، $(0, \infty)$ ينعطفان بشكل مختلف.
إذا أمعنا النظر في المنحنى والمماسّات وتفحصناها بدقة من اليسار إلى اليمين
نلاحظ أن المنحنى يقع أسفل المماسات على الفترة $(-\infty, 0)$
ويقع أعلى المماسات على الفترة $(0, \infty)$.
يمكننا القول إن منحنى الدالة f **مقعّر للأسفل** على الفترة $(-\infty, 0)$
و**مقعر للأعلى** على الفترة $(0, \infty)$.

تعريف (5): التقعّر

إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأعلى على I .

وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأسفل على I .

الشكلان التاليان يوضّحان التقعر:

شكل (1)

في الفترة (a , b) نلاحظ أن:
جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس)
تقع أعلى المماسات.
لذلك نقول **المنحنى مقعر لأعلى.**

شكل (2)

في الفترة (a , b) نلاحظ أن:
جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس)
تقع أسفل المماسات.
لذلك نقول **المنحنى مقعر لأسفل.**

اختبار التقعّر

a إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأعلى على I

b إذا كانت $\forall x \in I$, $f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأسفل على I .

142

سوف يحتاج الطلاب أن يتعلموا الاعتماد على أحكامهم لتقرير أي الاختبارات يطبقونها لإيجاد القيم القصوى المحلية لدالة. في بعض الأحيان تتطلّب "y عملاً مطولاً لإيجادها جبريًّا. قد يكون اختبار المشتقة الأولى أسهل من اختبار المشتقة الثانية. شجِّع الطلاب على كتابة عبارات تصف ما يصلون إليه.

في المثالين (1), (2)

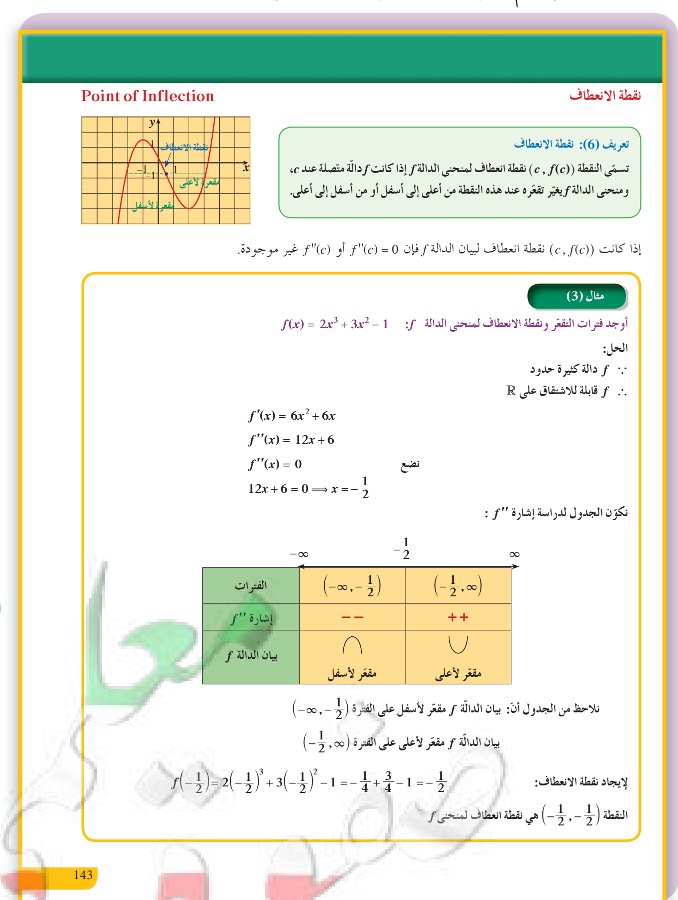
يشكل هذان المثالان تطبيقًا مباشرًا على كيفية استخدام اختبار المشتقة الأولى لإيجاد النقاط الحرجة والفترات التي تكون الدالة متزايدة أو متناقصة عليها وأيضًا القيم القصوى المحلية. تحقّق من تمكن الطلاب من وضع جدول يساعد في دراسة تغير الدوال.

في المثال (3)

دراسة تقعر الدالة وإيجاد نقطة الانعطاف باستخدام إشارة المشتقة من الرتبة الثانية. أشر إلى وجود أكثر من نقطة انعطاف في بعض الحالات.

في المثال (4)

استخدام اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية. وهذا يتطلب إيجاد قيم x بحيث تكون $f'(x) = 0$ ثم دراسة إشارة $f''(x)$.



نقطة الانعطاف Point of Inflection

تعريف (6): نقطة الانعطاف

تسمى النقطة $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالة متصلة عند c، ومنحنى الدالة f يغير تقعره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

مثال (3)

أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

الحل:

$\because$ f دالة كثيرة حدود

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 + 6x$

$f''(x) = 12x + 6$

نضع $f''(x) = 0$

$12x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'':

الفترات	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$
إشارة f''	$- -$	$+ +$
بيان الدالة f	$\cap$ مقعر لأسفل	$\cup$ مقعر لأعلى

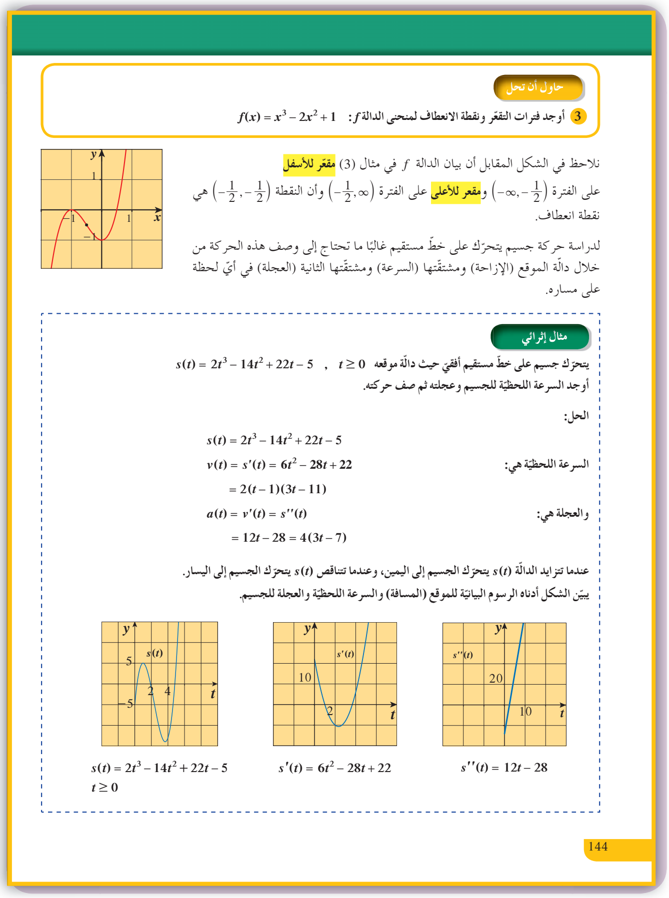
نلاحظ من الجدول أن: بيان الدالة f مقعر لأسفل على الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

بيان الدالة f مقعر لأعلى على الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

لإيجاد نقطة الانعطاف: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$

النقطة $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف لمنحنى f

143



حاول أن تحل

3 أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

نلاحظ في الشكل المقابل أن بيان الدالة f في مثال (3) مقعر للأسفل على الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ ومقعر للأعلى على الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ وأن النقطة $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف.

لدراسة حركة جسيم يتحرك على خطٍّ مستقيم غالبًا ما نحتاج إلى وصف هذه الحركة من خلال دالّة الموقع (الإزاحة) ومشتقّتها (السرعة) ومشتقّتها الثانية (العجلة) في أيّ لحظة على مساره.

مثال إثرائي

يتحرك جسيم على خط مستقيم أفقي حيث دالّة موقعه $s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$ ، $t \geq 0$

أوجد السرعة اللحظية للجسيم وعجلته ثم صف حركته.

الحل:

$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$

السرعة اللحظية هي: $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22$

$= 2(t-1)(3t-11)$

والعجلة هي: $a(t) = v'(t) = s''(t)$

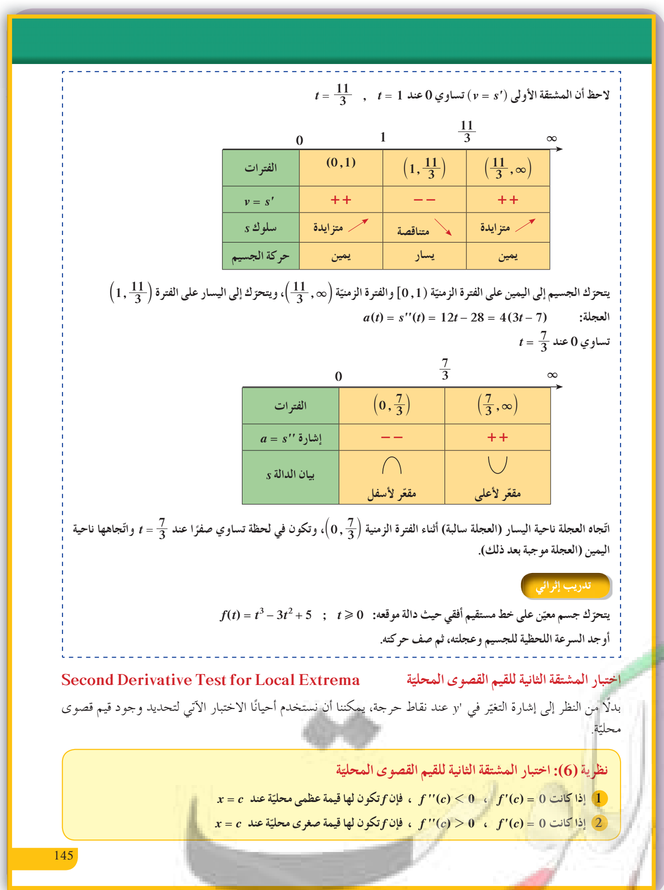
$= 12t - 28 = 4(3t - 7)$

عندما تتزايد الدالّة $s(t)$ يتحرك الجسيم إلى اليمين، وعندما تتناقص $s(t)$ يتحرك الجسيم إلى اليسار.

يبيّن الشكل أدناه الرسوم البيانية للموقع (المسافة) والسرعة اللحظية والعجلة للجسيم.

$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$, $t \geq 0$ | $s'(t) = 6t^2 - 28t + 22$ | $s''(t) = 12t - 28$

144



لاحظ أن المشتقة الأولى $(v = s')$ تساوي 0 عند $t = 1$ ، $t = \frac{11}{3}$

الفترات	$(0, 1)$	$\left(1, \frac{11}{3}\right)$	$\left(\frac{11}{3}, \infty\right)$
$v = s'$	$+ +$	$- -$	$+ +$
سلوك s	متزايدة	متناقصة	متزايدة
حركة الجسيم	يمين	يسار	يمين

يتحرك الجسيم إلى اليمين على الفترة الزمنية $[0, 1)$ والفترة الزمنية $\left(\frac{11}{3}, \infty\right)$، ويتحرك إلى اليسار على الفترة $\left(1, \frac{11}{3}\right)$

العجلة: $a(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7)$

تساوي 0 عند $t = \frac{7}{3}$

الفترات	$\left(0, \frac{7}{3}\right)$	$\left(\frac{7}{3}, \infty\right)$
إشارة $a = s''$	$- -$	$+ +$
بيان الدالة s	$\cap$ مقعر لأسفل	$\cup$ مقعر لأعلى

اتجاه العجلة ناحية اليسار (العجلة سالبة) أثناء الفترة الزمنية $\left(0, \frac{7}{3}\right)$، وتكون في لحظة تساوي صفرًا عند $t = \frac{7}{3}$ واتجاهها ناحية اليمين (العجلة موجبة بعد ذلك).

تدريب إثرائي

يتحرك جسم معين على خط مستقيم أفقي حيث دالة موقعه: $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5$; $t \geq 0$

أوجد السرعة اللحظية للجسيم وعجلته، ثم صف حركته.

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية Second Derivative Test for Local Extrema

بدلًا من النظر إلى إشارة التغير في y' عند نقاط حرجة، يمكننا أن نستخدم أحيانًا الاختبار الآتي لتحديد وجود قيم قصوى محلية

نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

1 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x = c$

2 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$

145

6 الربط

يربط المثال الإثرائي بين الدالة ومشتقاتها من جهة ودراسة الحركة على خط مستقيم من جهة أخرى.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

من المهم أن يفهم الطلاب أن الشرط $f'(c) = 0$ لا يضمن أن f لها قيمة قصوى محلية عند $(c , f(c))$. وبالمثل، يعيِّن بعض الطلّاب أي نقاط تكون عندها $f''(x) = 0$ كنقاط انعطاف. ذكِّر الطلّاب أن تغيرًا في التقعر ينبغي أن يكون موجودًا لكي يكون للدالة نقطة انعطاف.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، تأكّد من فهمهم لتأثير إشارة كل من f' ، f'' على الدالة f.

اختبار سريع

1 لتكن الدالة f: $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

(a) أوجد $f'(x)$ ، ثم $f''(x)$.

$f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

(b) ادرس تقعر الدالة f على الفترة $(-\infty , \infty)$.

الدالة مقعرة لأسفل على كل من الفترتين $(-\infty , -\sqrt{3}) , (0 , \sqrt{3})$.

الدالة مقعرة لأعلى على كل من الفترتين $(-\sqrt{3} , 0) , (\sqrt{3} , \infty)$.

2 استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة f : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$= 3(x-1)(x+3)$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \quad , \quad x = -3$

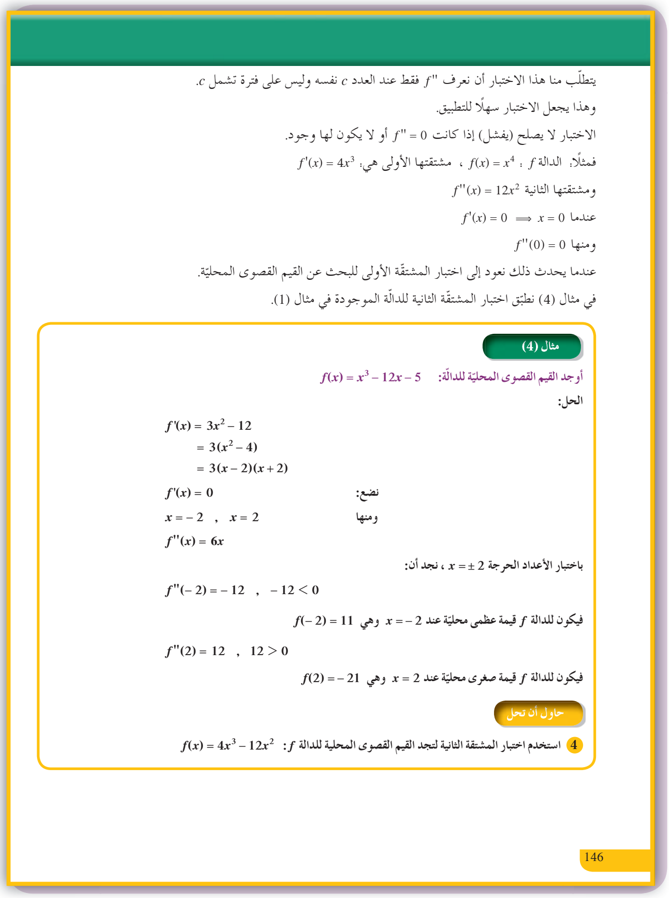
$f''(x) = 6x + 6$

$f''(-3) = -12 < 0$

للدالة f قيمة عظمى محلية 27 عند $x = -3$

$f''(1) = 12 > 0$

للدالة f قيمة صغرى محلية -5 عند $x = 1$



يتطلّب منا هذا الاختبار أن نعرف f'' فقط عند العدد c نفسه وليس على فترة تشمل c.

وهذا يجعل الاختبار سهلًا للتطبيق.

الاختبار لا يصلح (يفشل) إذا كانت $f'' = 0$ أو لا يكون لها وجود.

فمثلًا: الدالة f : $f(x) = x^4$ ، مشتقتها الأولى هي: $f'(x) = 4x^3$

ومشتقتها الثانية $f''(x) = 12x^2$

عندما $x = 0 \implies f'(x) = 0$

ومنها $f''(0) = 0$

عندما يحدث ذلك نعود إلى اختبار المشتقّة الأولى للبحث عن القيم القصوى المحليّة.

في مثال (4) نطبّق اختبار المشتقّة الثانية للدالّة الموجودة في مثال (1).

مثال (4)

أوجد القيم القصوى المحليّة للدالّة: $f(x) = x^3 - 12x - 5$

الحل:

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$= 3(x^2 - 4)$

$= 3(x-2)(x+2)$

نضع: $f'(x) = 0$

ومنها $x = -2 \quad , \quad x = 2$

$f''(x) = 6x$

باختبار الأعداد الحرجة $x = \pm 2$ ، نجد أن:

$f''(-2) = -12 \quad , \quad -12 < 0$

فيكون للدالة f قيمة عظمى محليّة عند $x = -2$ وهي $f(-2) = 11$

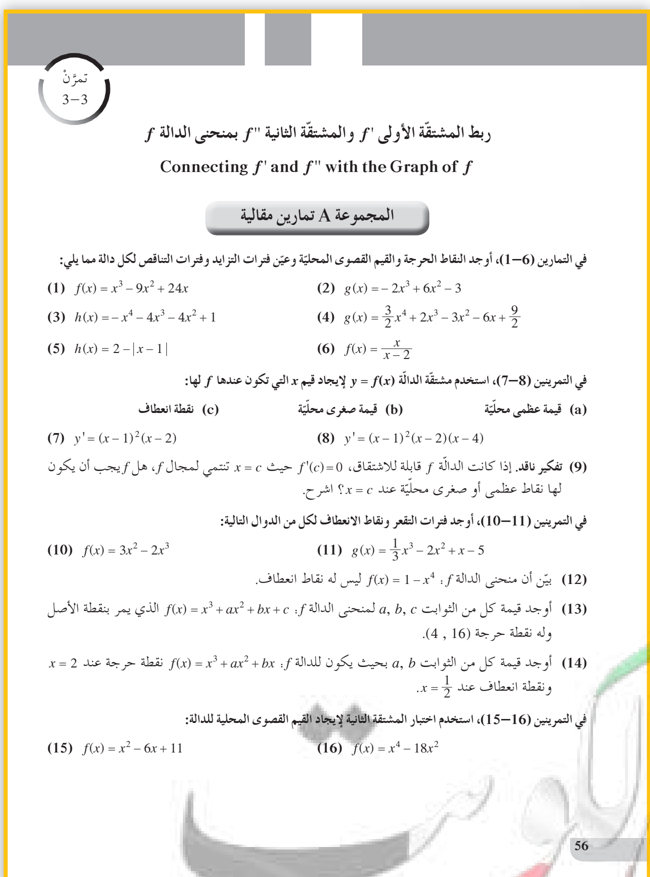
$f''(2) = 12 \quad , \quad 12 > 0$

فيكون للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x = 2$ وهي $f(2) = -21$

حاول أن تحل

4 استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f: $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

146



تمرَّنْ 3–3

ربط المشتقّة الأولى f' والمشتقّة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

Connecting f' and f'' with the Graph of f

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–6)، أوجد النقاط الحرجة والقيم القصوى المحليّة وعيّن فترات التزايد وفترات التناقص لكل دالة مما يلي:

(1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ **(2)** $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3$

(3) $h(x) = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$ **(4)** $g(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

(5) $h(x) = 2 - |x - 1|$ **(6)** $f(x) = \frac{x}{x-2}$

في التمرينين (7–8)، استخدم مشتقّة الدالّة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي تكون عندها f لها:

(a) قيمة عظمى محلّيّة **(b)** قيمة صغرى محلّيّة **(c)** نقطة انعطاف

(7) $y' = (x-1)^2(x-2)$ **(8)** $y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$

(9) **تفكير ناقد.** إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق، $f'(c) = 0$ حيث $x = c$ تنتمي لمجال f، هل f يجب أن يكون لها نقاط عظمى أو صغرى محلّيّة عند $x = c$؟ اشرح.

في التمرينين (10–11)، أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لكل من الدوال التالية:

(10) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ **(11)** $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 5$

(12) بيّن أن منحنى الدالة f : $f(x) = 1 - x^4$ ليس له نقاط انعطاف.

(13) أوجد قيمة كل من الثوابت a, b, c لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ الذي يمر بنقطة الأصل وله نقطة حرجة $(4 , 16)$.

(14) أوجد قيمة كل من الثوابت a, b بحيث يكون للدالة f: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطة حرجة عند $x = 2$ ونقطة انعطاف عند $x = \frac{1}{2}$.

في التمرينين (15–16)، استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة:

(15) $f(x) = x^2 - 6x + 11$ **(16)** $f(x) = x^4 - 18x^2$

56

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

الفترة (المجال)	قيمة صغرى مطلقة	قيمة عظمى مطلقة	قيمة صغرى محلية	قيمة عظمى محلية	تزايد في فترة	تناقص في فترة
$[a , c_2]$	✓	✓			✓	
$[c_1 , c_3)$		✓		✓	✓	✓
$[c_2 , c_3)$		✓				✓
$[c_3 , c_5)$	✓	✓		✓	✓	✓
$[c_1 , c_4]$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$[c_5 , b]$	✓	✓				✓

«حاول أن تحل»

1 **(a)** عند $(2\ ,\ 0)$ ، $(0\ ,\ -4)$

(b) متزايدة على: $(0\ ,\ 2)$

متناقصة على كل من: $(-\infty\ ,\ 0)$, $(2\ ,\ \infty)$

(c) عند $x = 0$ يوجد قيمة صغرى محلية تساوي -4

عند $x = 2$ يوجد قيمة عظمى محلية تساوي 0

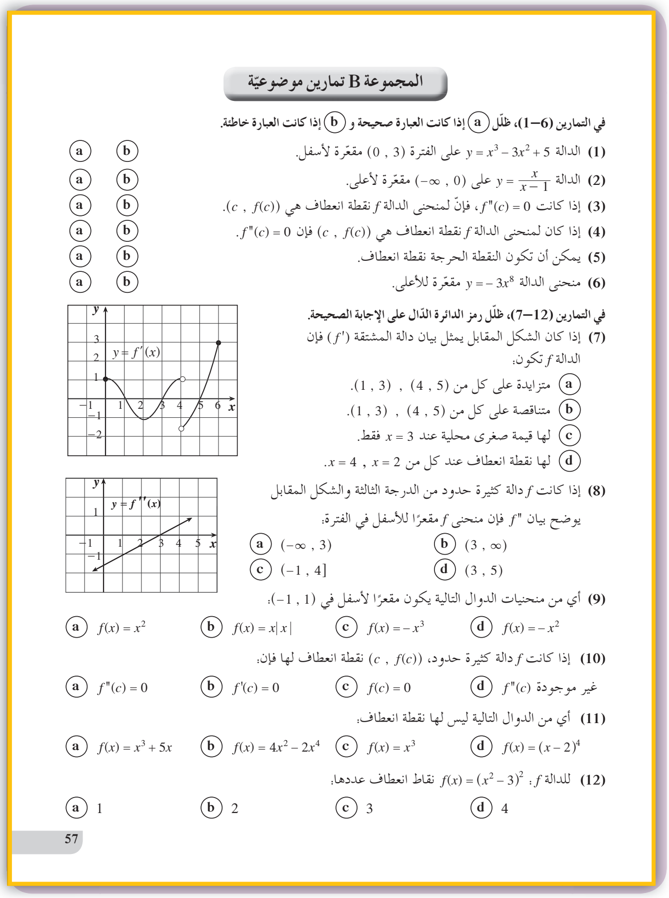
2 **(a)** عند $\left(1\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ ، $\left(-1\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$

(b) متزايدة على: $(-1, 1)$

متناقصة على كل من: $(-\infty\ ,\ -1)$, $(1\ ,\ \infty)$

(c) عند $x = -1$ يوجد قيمة صغرى محلية تساوي $-\frac{1}{2}$

عند $x = 1$ يوجد قيمة عظمى محلية تساوي $\frac{1}{2}$



المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 5$ على الفترة $(0\ ,\ 3)$ مقعّرة لأسفل. (a) (b)

(2) الدالة $y = \frac{x}{x-1}$ على $(-\infty\ ,\ 0)$ مقعّرة لأعلى. (a) (b)

(3) إذا كانت $f''(c) = 0$، فإنّ لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c\ ,\ f(c))$. (a) (b)

(4) إذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c\ ,\ f(c))$ فإن $f''(c) = 0$. (a) (b)

(5) يمكن أن تكون النقطة الحرجة نقطة انعطاف. (a) (b)

(6) منحنى الدالة $y = -3x^8$ مقعّرة للأعلى. (a) (b)

في التمارين (7–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان دالة المشتقة (f') فإن الدالة f تكون:

(a) متزايدة على كل من $(4\ ,\ 5)$, $(1\ ,\ 3)$.

(b) متناقصة على كل من $(4\ ,\ 5)$, $(1\ ,\ 3)$.

(c) لها قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ فقط.

(d) لها نقطة انعطاف عند كل من $x = 2$, $x = 4$.

(8) إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعرًا للأسفل في الفترة:

(a) $(-\infty\ ,\ 3)$ (b) $(3\ ,\ \infty)$

(c) $(-1\ ,\ 4]$ (d) $(3\ ,\ 5)$

(9) أي من منحنيات الدوال التالية يكون مقعرًا لأسفل في $(-1\ ,\ 1)$:

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x|x|$ (c) $f(x) = -x^3$ (d) $f(x) = -x^2$

(10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود، $(c\ ,\ f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:

(a) $f''(c) = 0$ (b) $f'(c) = 0$ (c) $f(c) = 0$ (d) $f''(c)$ غير موجودة

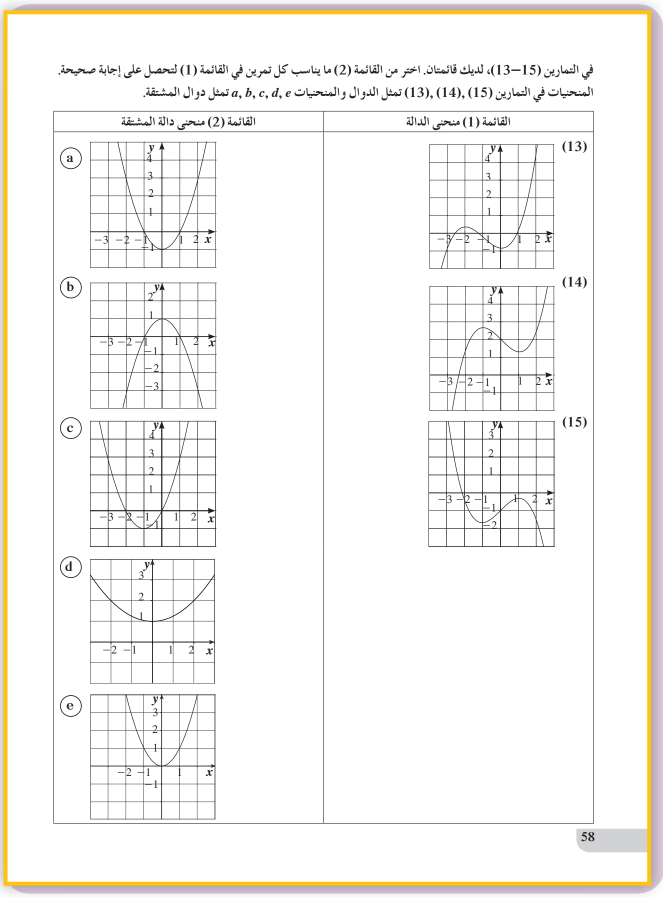
(11) أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف:

(a) $f(x) = x^3 + 5x$ (b) $f(x) = 4x^2 - 2x^4$ (c) $f(x) = x^3$ (d) $f(x) = (x-2)^4$

(12) للدالة f: $f(x) = (x^2 - 3)^2$ نقاط انعطاف عددها:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

57


في التمارين (15–13)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.
المنحنيات في التمارين (15) ,(14) ,(13) تمثل الدوال والمنحنيات a, b, c, d, e تمثل دوال المشتقة.

3 نقطة انعطاف $I\left(\frac{2}{3}\ ,\ \frac{11}{27}\right)$

على الفترة $\left(-\infty\ ,\ \frac{2}{3}\right)$ مقعرة لأسفل.

على الفترة $\left(\frac{2}{3}\ ,\ \infty\right)$ مقعرة لأعلى.

4 $f'(x) = 12x^2 - 24x$

$f'(x) = 0 \iff 12x(x-2) = 0$

$\implies x = 0\ ,\ x = 2$

$f''(x) = 24x - 24$

$f''(0) = -24 < 0$

عند $x = 0$ لمنحنى f قيمة عظمى محلية هي 0.

$f''(2) = 24 > 0$

عند $x = 2$ لمنحنى f قيمة صغرى محلية هي -16

«تدريب إثرائي»

السرعة اللحظية:

$f'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$

0 — 2 — ∞		
الفترات	$(0\,,2)$	$(2\,,\infty)$
إشارة f' $V = f'$	$-\ -$	$+\ +$
سلوك f	↘ ↘ متناقصة	↗ ↗ متزايدة
حركة الجسيم	يتحرك يسارًا	يتحرك يمينًا

العجلة: $f''(t) = 6t - 6 = a$

0 — 1 — ∞		
الفترات	$(0\,,1)$	$(1\,,\infty)$
إشارة f'' $a = f''$	$-\ -$	$+\ +$
بيان f	$\cap$ مقعر لأسفل	$\cup$ مقعر لأعلى

العجلة تناقصية في الفترة $(0\ ,\ 1)$ وتساوي صفر عند اللحظة $t = 1$ وتزايدية على الفترة $(1\ ,\ \infty)$

3-4: رسم بيان دوال كثيرات الحدود

1 الأهداف

- ربط بيان f' و f.
- رسم بيان دوال كثيرات الحدود.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

بيان دوال كثيرات الحدود.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عما يلي:

ارسم بيان كل من الدوال التالية:

(a) $y = 2x + 1$ **(b)** $y = 3 - 2x$

(c) $y = -x^2$ **(d)** $y = 2x^2$

في التمرينين (c) و(d) اطلب إليهم وصف طرفي منحنى الدالة باستخدام الأسهم: ↗ أو ↘

5 التدريس

من المهم جدًّا مناقشة الخطوات اللازم اتباعها في رسم بيان دالة كثيرة الحدود. استعرض النقاط بالترتيب. توقف عند كل نقطة منها للمناقشة والاستماع إلى آراء الطلاب.

في النقطة 2 أشر إلى أنه في حالة الحدود المقفلة نوجد $f(a)$ دون النهاية وتكون النقطة $M(a\ ,\ f(a))$ نقطة توقف. دراسة إشارة f' مهمة جدًّا وهي مفصلية في رسم بيان الدالة.

تساعد النقاط الإضافية على دقة رسم بيان الدالة. ذكّرهم بضرورة دراسة تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات ومحور الصادات وذلك بالتعويض عن x بـ صفر (التقاطع مع محور الصادات) ثم حل المعادلة $f(x) = 0$ (التقاطع مع محور السينات).

3-4

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

Graph of Polynomial Functions

سوف تتعلم

- ربط بيان f' و f.
- خطوات رسم بيان دوال كثيرات الحدود.

المفردات والمصطلحات

- بيان دوال كثيرات الحدود Graph of Polynomial Functions

دعنا نفكر ونتناقش

يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x - 1$

1 أوجد إن أمكن:

a $f'(x)$ محدّدًا كلًّا من النقاط الحرجة وفترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

b $f''(x)$ محدّدًا كلًّا من نقاط الانعطاف وفترات التقعر.

2 قارن نتائج الحل في 1 مع المنحنى المرسوم.

تعلمت فيما سبق كيفية رسم منحنى تقريبي لبيان دالة كثيرة حدود معتمدًا على سلوك نهاية الدالة، وفي البنود السابقة تعلمت تحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة وتحديد النقاط الحرجة والقيم العظمى أو الصغرى، وتمّ تحديد نقاط الانعطاف والفترات التي يكون فيها منحنى الدالة مقعرًا لأعلى أو لأسفل. وسنستفيد من كل هذه المعلومات لرسم بيان دالة كثيرة الحدود رسمًا أكثر دقة.

الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها

Steps to be Followed in Drawing the Graph of a Polynomial Function

1 **عيّن مجال الدالة f.**
مجال دالة كثيرة الحدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحيانًا على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.

2 **أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f.**

3 **عيّن النقاط الحرجة للدالة f.**

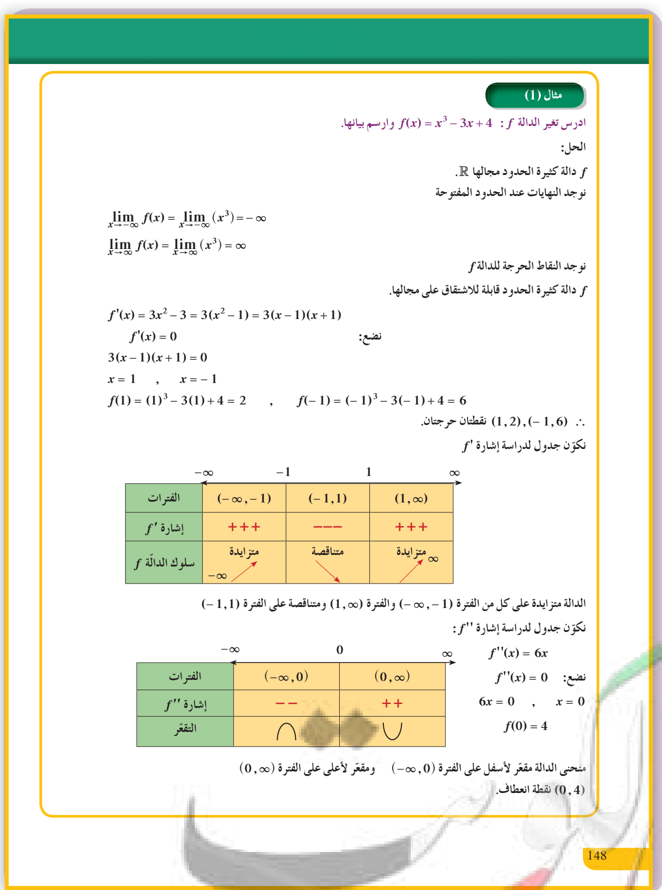
4 **كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.**

5 **كوّن جدولًا لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.**

6 **أوجد نقاطًا إضافية.**
تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحورين إن أمكن.

7 **ارسم بيان الدالة f.** استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

147



مثال (1)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

نضع: $f'(x) = 0$

$3(x-1)(x+1) = 0$

$x = 1 \quad , \quad x = -1$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 2 \quad , \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$

$\therefore$ $(1, 2), (-1, 6)$ نقطتان حرجتان.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$
سلوك الدالّة f	متزايدة $-\infty$ ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗ ∞

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(1, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-1, 1)$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'':

$f''(x) = 6x$

نضع: $f''(x) = 0$

$6x = 0 \quad , \quad x = 0$

$f(0) = 4$

$-\infty \quad 0 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f''	$--$	$++$
التقعّر	$\cap$	$\cup$

منحنى الدالة مقعّر لأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$ ومقعّر لأعلى على الفترة $(0, \infty)$

$(0, 4)$ نقطة انعطاف.

148

في الأمثلة (4) ,(3) ,(2) ,(1)

دراسة تغير دالة ورسم بيانها حيث درجة الدالة تتدرج من الدرجة الثالثة إلى الرابعة لاحظ أنه في المثالين (2) ,(1)، حيث درجة كل دالة 3 يوجد نقطة انعطاف واحدة ولكن في المثالين (4) ,(3) يوجد نقطتي انعطاف.

في المثال (5)

ربط بين بيان f' وبيان f. الفكرة مهمة جدًّا ويجدر بالمعلم التوقف عندها ومناقشتها مع الطلاب. لاحظ اقتصار دراستنا على حالات سهلة.

6 الربط

لا يوجد.

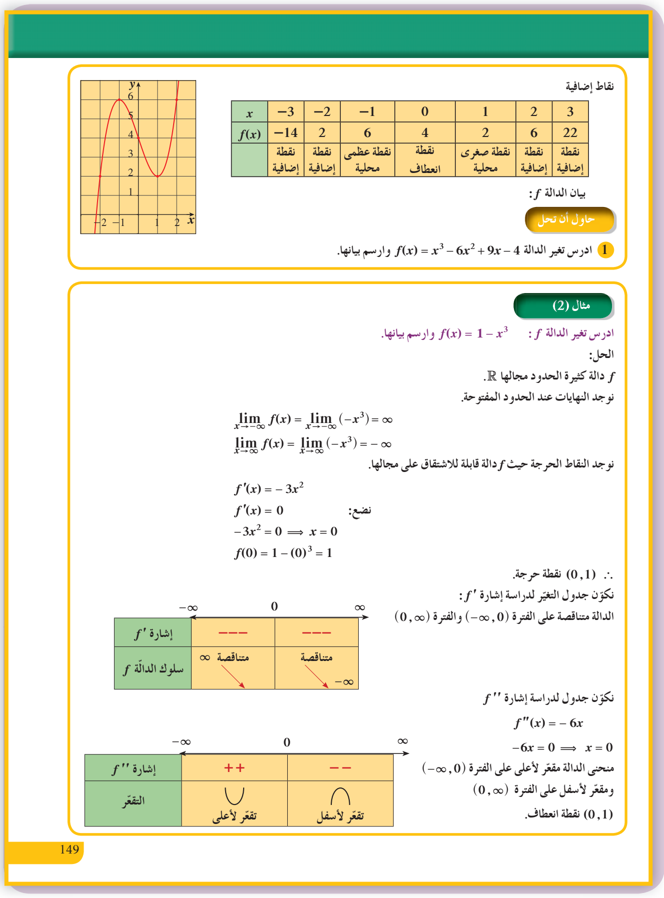
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في الربط بين بيان الدالة f' لرسم بيان الدالة f.

أشر إلى الطلاب أن بيان الدالة f' فوق محور السينات يناظر قيمة موجبة لذا شجعهم على إيجاد فترة المتغير x وإن بيان الدالة f' أسفل محور السينات يناظر قيمة سالبة لذا شجّعهم على إيجاد فترة المتغير x .

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، تحقق من صحة عملهم ومن اتباعهم بالترتيب للخطوات المقترحة في رسم بيان الدوال.



نقاط إضافية

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-14	2	6	4	2	6	22
	نقطة إضافية	نقطة إضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية	نقطة إضافية

بيان الدالة f:

حاول أن تحل

1 ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

مثال (2)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^3) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجالها.

$f'(x) = -3x^2$

نضع: $f'(x) = 0$

$-3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

$f(0) = 1 - (0)^3 = 1$

$\therefore$ $(0,1)$ نقطة حرجة.

نكوّن جدول التغيّر لدراسة إشارة f':

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(0, \infty)$

x	$-\infty$ إلى 0	0 إلى ∞
إشارة f'	$---$	$---$
سلوك الدالّة f	∞ متناقصة	متناقصة $-\infty$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$f''(x) = -6x$

$-6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

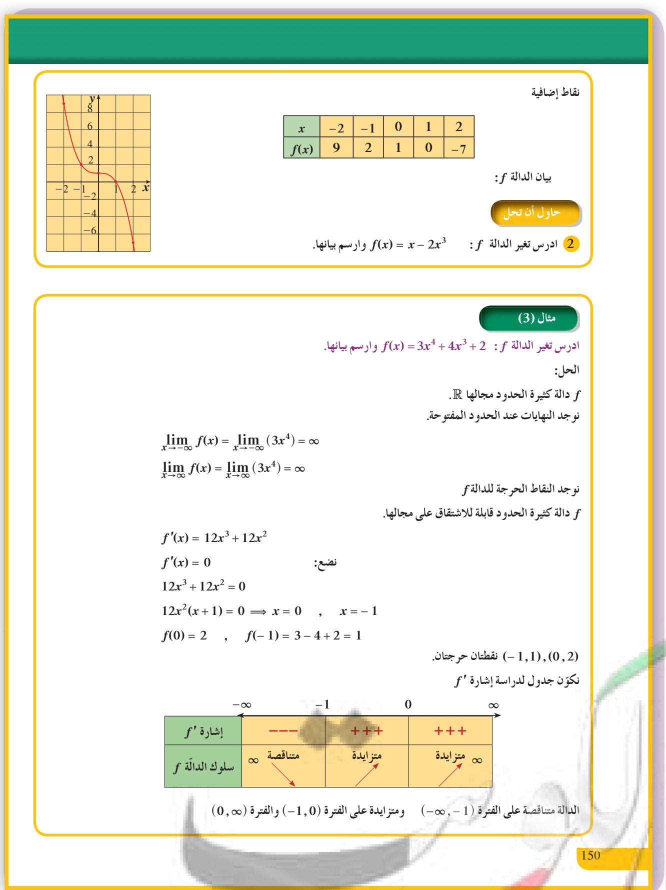
منحنى الدالة مقعّر لأعلى على الفترة $(-\infty, 0)$

ومقعّر لأسفل على الفترة $(0, \infty)$

$(0,1)$ نقطة انعطاف.

x	$-\infty$ إلى 0	0 إلى ∞
إشارة f''	$++$	$--$
التقعّر	تقعّر لأعلى	تقعّر لأسفل

149



نقاط إضافية

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7

بيان الدالة f:

حاول أن تحل

2 ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

مثال (3)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(3x^4) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(3x^4) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$

نضع: $f'(x) = 0$

$12x^3 + 12x^2 = 0$

$12x^2(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = -1$

$f(0) = 2 \quad , \quad f(-1) = 3 - 4 + 2 = 1$

$(-1,1), (0,2)$ نقطتان حرجتان.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

x	$-\infty$ إلى -1	-1 إلى 0	0 إلى ∞
إشارة f'	$---$	$+++$	$+++$
سلوك الدالّة f	∞ متناقصة	متزايدة	متزايدة ∞

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, -1)$ ومتزايدة على الفترة $(-1, 0)$ والفترة $(0, \infty)$

150

اختبار سريع

ادرس تغيّر الدالة f: $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 10$ وارسم بيانها.

الدالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

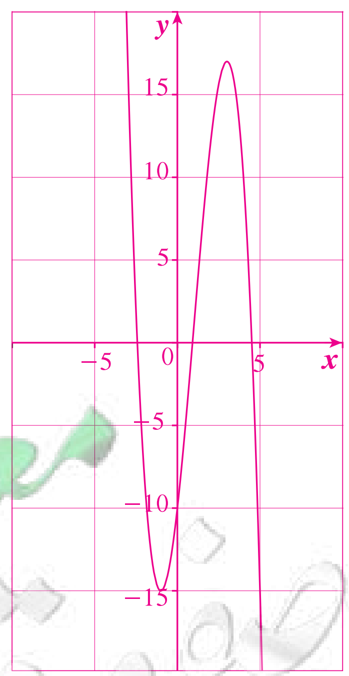
$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 3(-x^2 + 2x + 3)$$
$$= 3(-x-1)(x-3)$$
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -1 \quad , \quad x = 3$$

	$-\infty$ ... -1	-1 ... 3	3 ... ∞
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$- -$
سلوك f	↘ ↘	↗ ↗	↘ ↘

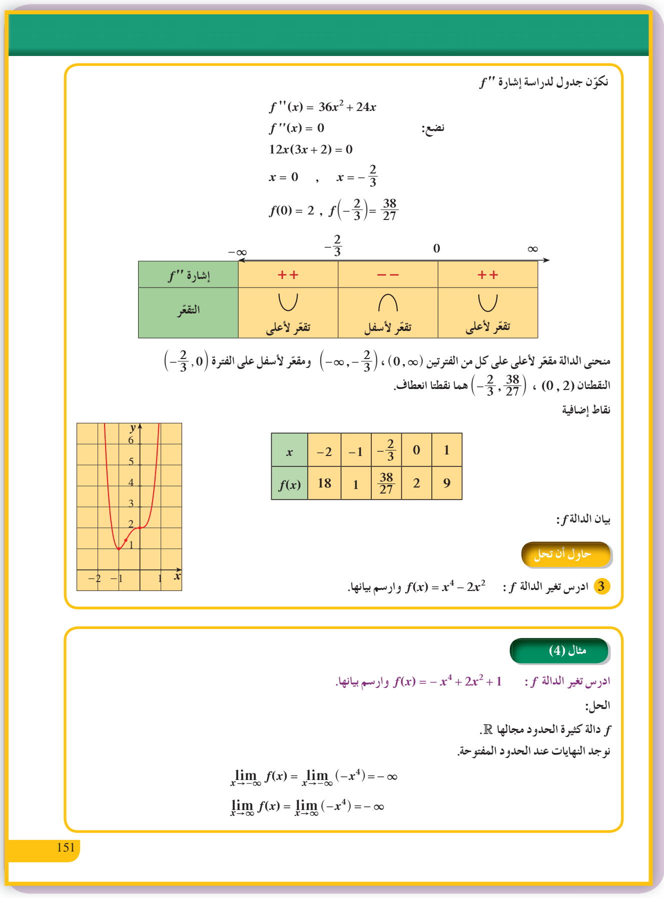
$$f''(x) = -6x + 6$$
$$f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow$$

$(1,1)$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة.

	$-\infty$ ... 1	1 ... ∞
الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f''	$+$	$-$
التقعّر	$\cup$	$\cap$



$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 10$



نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = 36x^2 + 24x$$

نضع: $f''(x) = 0$

$$12x(3x+2) = 0$$
$$x = 0 \quad , \quad x = -\frac{2}{3}$$
$$f(0) = 2 \ , \ f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{38}{27}$$

	$-\infty$ ... $-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$ ... 0	0 ... ∞
إشارة f''	$++$	$--$	$++$
التقعّر	$\cup$ تقعّر لأعلى	$\cap$ تقعّر لأسفل	$\cup$ تقعّر لأعلى

منحنى الدالة مقعّر لأعلى على كل من الفترتين $(0, \infty)$ ، $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ ومقعّر لأسفل على الفترة $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

النقطتان $(0, 2)$ ، $\left(-\frac{2}{3}, \frac{38}{27}\right)$ هما نقطتا انعطاف.

نقاط إضافية

x	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	0	1
$f(x)$	18	1	$\frac{38}{27}$	2	9

بيان الدالة f:

حاول أن تحل

3 ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها.

مثال (4)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ وارسم بيانها.

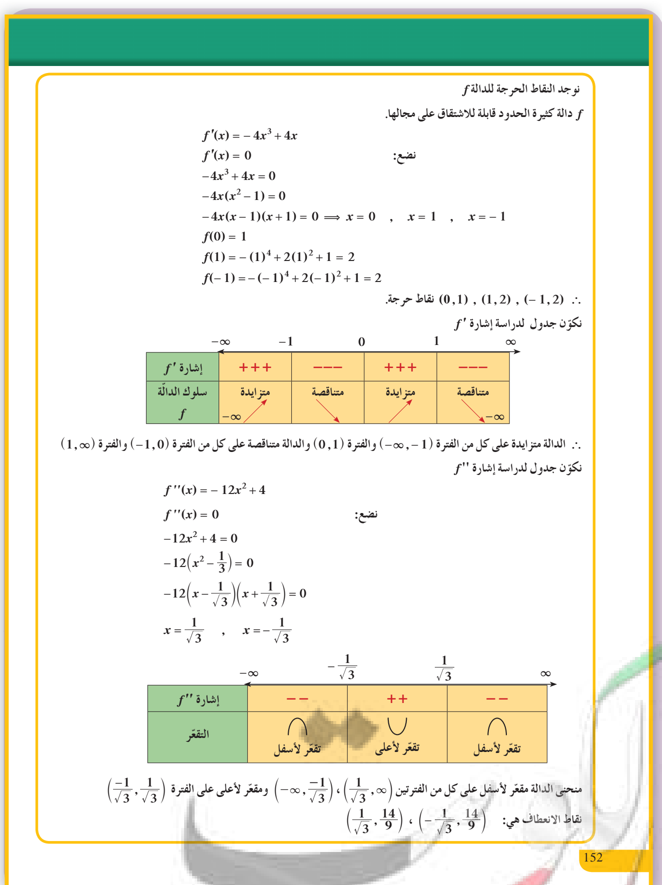
الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^4) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^4) = -\infty$$

151



نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = -4x^3 + 4x$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$-4x^3 + 4x = 0$$
$$-4x(x^2 - 1) = 0$$
$$-4x(x-1)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = -1$$
$$f(0) = 1$$
$$f(1) = -(1)^4 + 2(1)^2 + 1 = 2$$
$$f(-1) = -(-1)^4 + 2(-1)^2 + 1 = 2$$

$\therefore$ $(-1, 2)$, $(1, 2)$, $(0, 1)$ نقاط حرجة.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

	$-\infty$ ... -1	-1 ... 0	0 ... 1	1 ... ∞
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$	$---$
سلوك الدالّة f	متزايدة $-\infty$ ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗	متناقصة ↘ $-\infty$

$\therefore$ الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(0, 1)$ والدالة متناقصة على كل من الفترة $(-1, 0)$ والفترة $(1, \infty)$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = -12x^2 + 4$$

نضع: $f''(x) = 0$

$$-12x^2 + 4 = 0$$
$$-12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 0$$
$$-12\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

	$-\infty$ ... $-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ... $\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ ... ∞
إشارة f''	$--$	$++$	$--$
التقعّر	$\cap$ تقعّر لأسفل	$\cup$ تقعّر لأعلى	$\cap$ تقعّر لأسفل

منحنى الدالة مقعّر لأسفل على كل من الفترتين $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ ، $\left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ومقعّر لأعلى على الفترة $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

نقاط الانعطاف هي: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{14}{9}\right)$ ، $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{14}{9}\right)$

152

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 **(a)** $f'(x) = 2x + 2$ تكون $f'(x) = 0$ عند $x = -1$ أي أن $(-1\ ,\ -2)$ نقطة حرجة.

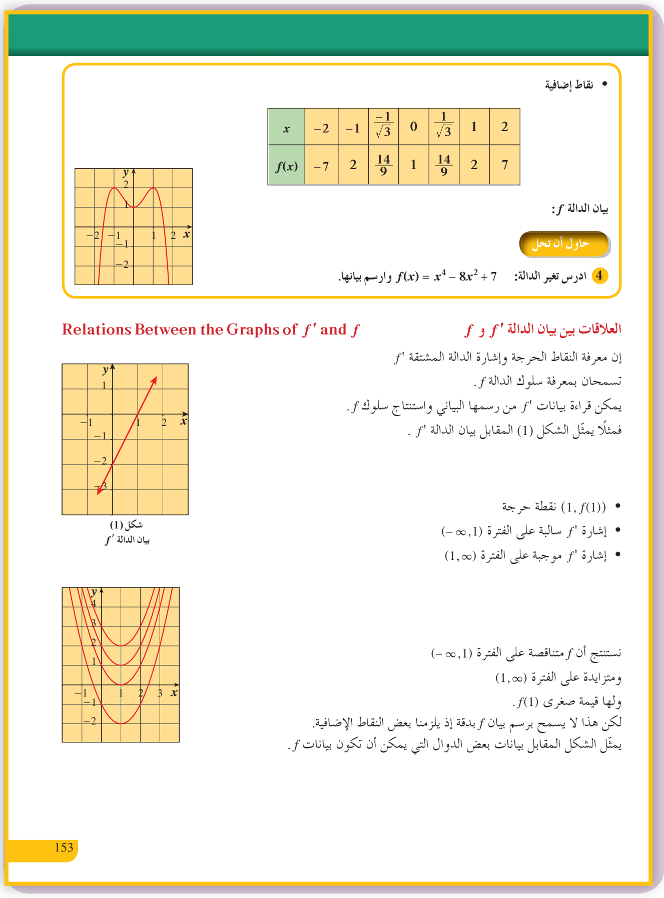
	$-\infty$	-1	∞
الفترات	$(-\infty,\ -1)$	$(-1,\infty)$	
إشارة f'	$- \ -$	$+ \ +$	
سلوك f	متناقصة	متزايدة	

تتناقص f على الفترة $(-\infty, -1)$ وتتزايد f على الفترة $(-1,\infty)$.

(b) $f''(x) = 2 > 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$

لا يوجد نقاط انعطاف وتقعر المنحنى إلى أعلى.

2 يتوافق المنحنى المرسوم مع كافة الإجابات الموجودة في السؤال (1).



• نقاط إضافية

x	-2	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	2
$f(x)$	-7	2	$\frac{14}{9}$	1	$\frac{14}{9}$	2	7

بيان الدالة f:

حاول أن تحل

4 ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ وارسم بيانها.

العلاقات بين بيان الدالة f' و f — Relations Between the Graphs of f' and f

إن معرفة النقاط الحرجة وإشارة الدالة المشتقة f' تسمحان بمعرفة سلوك الدالة f.

يمكن قراءة بيانات f' من رسمها البياني واستنتاج سلوك f.

فمثلًا يمثّل الشكل (1) المقابل بيان الدالة f'.

شكل (1)
بيان الدالة f'

• $(1, f(1))$ نقطة حرجة
• إشارة f' سالبة على الفترة $(-\infty,1)$
• إشارة f' موجبة على الفترة $(1,\infty)$

نستنتج أن f متناقصة على الفترة $(-\infty,1)$ ومتزايدة على الفترة $(1,\infty)$ ولها قيمة صغرى $f(1)$.

لكن هذا لا يسمح برسم بيان f بدقة إذ يلزمنا بعض النقاط الإضافية.

يمثّل الشكل المقابل بيانات بعض الدوال التي يمكن أن تكون بيانات f.

153

«حاول أن تحل»

1 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

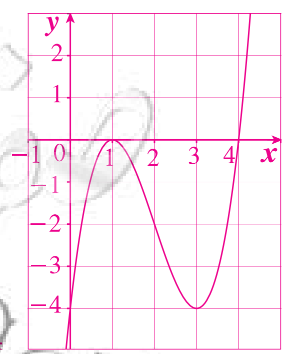
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

	$-\infty$	1	3	∞
الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$	
إشارة f'	$+ \ +$	$- \ -$	$+ \ +$	
سلوك f	↗ ↗	↘ ↘	↗ ↗	

$f''(x) = 6x - 12\ ,\ f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$

$(2, -2)$ هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f.

	$-\infty$	2	∞
الفترات	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$	
إشارة f''	$- \ -$	$+ \ +$	
التقعر	$\cap$	$\cup$	



$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

2 $f'(x) = 1 - 6x^2$

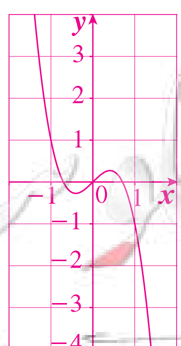
$= (1 - \sqrt{6}\,x)(1 + \sqrt{6}\,x)$

	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	∞
إشارة f'	$- \ -$	$+ \ +$	$- \ -$	
سلوك f	↘ ↘	↗ ↗	↘ ↘	

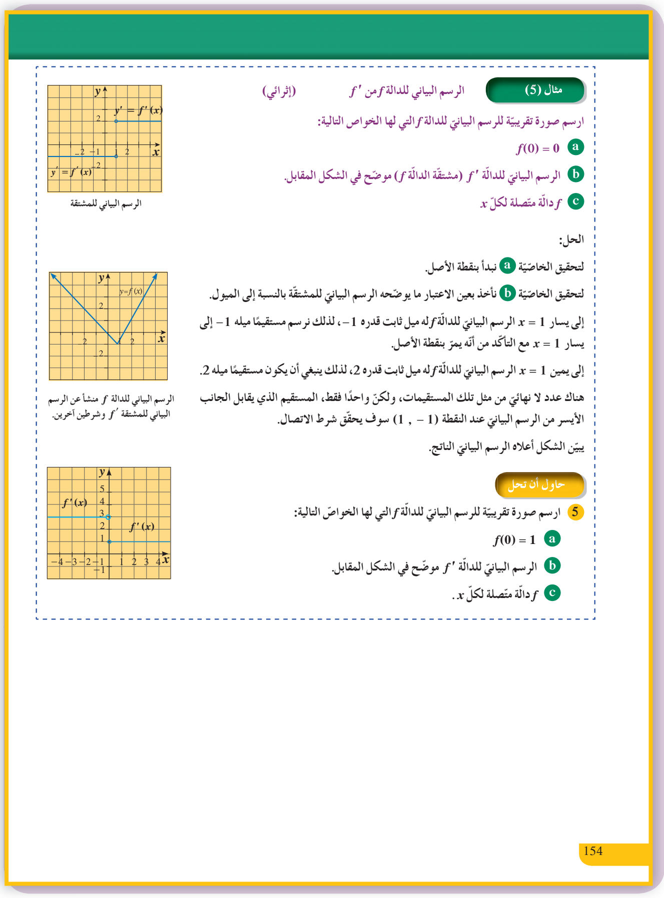
$f''(x) = -12x\ \ ,\ \ f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

$(0, 0)$ هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f.

	$-\infty$	0	∞
إشارة f''	$+$	$-$	
تقعر منحنى f	$\cup$	$\cap$	



$f(x) = x - 2x^3$


مثال (5)   الرسم البياني للدالة f من f' (إثرائي)

ارسم صورة تقريبيّة للرسم البيانيّ للدالة f التي لها الخواص التالية:

a $f(0) = 0$

b الرسم البيانيّ للدالّة f' (مشتقّة الدالّة f) موضّح في الشكل المقابل.

c f دالّة متّصلة لكلّ x

الرسم البياني للمشتقة

الحل:

لتحقيق الخاصّيّة a نبدأ بنقطة الأصل.

لتحقيق الخاصّيّة b نأخذ بعين الاعتبار ما يوضّحه الرسم البيانيّ للمشتقّة بالنسبة إلى الميول.

إلى يسار $x = 1$ الرسم البيانيّ للدالّة f له ميل ثابت قدره -1، لذلك نرسم مستقيمًا ميله -1 إلى يسار $x = 1$ مع التأكّد من أنّه يمرّ بنقطة الأصل.

إلى يمين $x = 1$ الرسم البيانيّ للدالّة f له ميل ثابت قدره 2، لذلك ينبغي أن يكون مستقيمًا ميله 2.

هناك عدد لا نهائيّ من مثل تلك المستقيمات، ولكنّ واحدًا فقط، المستقيم الذي يقابل الجانب الأيسر من الرسم البيانيّ عند النقطة $(1 , -1)$ سوف يحقّق شرط الاتصال.

يبيّن الشكل أعلاه الرسم البيانيّ الناتج.

الرسم البياني للدالة f منشأ عن الرسم البياني للمشتقة f' وشرطين آخرين.

حاول أن تحل

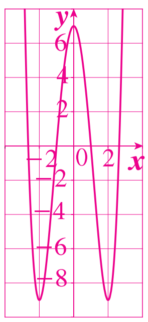
5 ارسم صورة تقريبيّة للرسم البيانيّ للدالّة f التي لها الخواصّ التالية:

a $f(0) = 1$

b الرسم البيانيّ للدالّة f' موضّح في الشكل المقابل.

c f دالّة متّصلة لكلّ x .

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$



3 $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$= 4x(x-1)(x+1)$

	$-\infty$ — -1	-1 — 0	0 — 1	1 — ∞
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$- -$	$+ +$
سلوك f	↘↘	↗↗	↘↘	↗↗

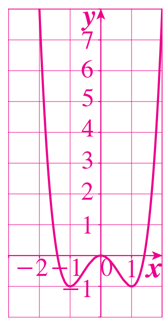
$f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , -\frac{5}{9}\right) , \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{-5}{9}\right)$

نقاط انعطاف لمنحنى الدالة f

	$-\infty$ — $-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ — $\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ — ∞
إشارة f''	$+$	$-$	$+$
تقعر منحنى f	∪	∩	∪

$f(x) = x^4 - 2x^2$



4 $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$

	$-\infty$ — -2	-2 — 0	0 — 2	2 — ∞
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$- -$	$+ +$
سلوك f	↘↘	↗↗	↘↘	↗↗

$f''(x) = 12x^2 - 16 = 4(x\sqrt{3} - 2)(x\sqrt{3} + 2)$

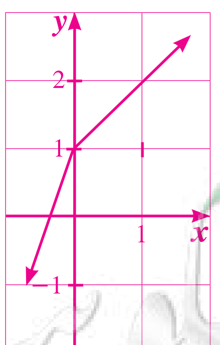
نقاط انعطاف $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} , -\frac{17}{9}\right) , \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} , \frac{-17}{9}\right)$

لمنحنى الدالة f.

	$-\infty$ — $-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$ — $\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$ — ∞
إشارة f'	$+$	$-$	$+$
تقعر منحنى f	∪	∩	∪

5 $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 , & x < 0 \\ x + 1 , & x \geqslant 0 \end{cases}$

إجابة ممكنة:



تمرّن 3-4

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

Graph of Polynomial Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2—1)، استخدم جدول دراسة إشارة f' لتحديد مجال f ورسم بيان تقريبي لمنحنى الدالة f.

(1)

الفترات	$(-\infty , 2)$	$(2 , \infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$
سلوك f	↘	↗

علمًا بأن: $f(2) = -2$

(2)

الفترات	$(-\infty , -3)$	$(-3 , 0)$	$(0 , 5)$	$(5, \infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$+ +$	$- -$
سلوك f	↘	↗	↗	↘

علمًا بأن: $f(-3) = 0$ و $f(0) = 2$ و $f(5) = 4$

في التمارين (6—3)، ادرس تغير كل من الدوال التالية وارسم بيانها.

(3) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$

(4) $g(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$

(5) $h(x) = 8x^2 - x^4 - 8$

(6) $f(x) = -x^3 - 3x$

(7) لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 1$ لكل عدد حقيقي x وليكن (C) منحنى هذه الدالة.

(a) ضع جدول التغير لـ f.

(b) لتكن A النقطة على (C) التي إحداثيها السيني 1.

أوجد معادلة مستقيم المماس l في A على منحنى الدالة.

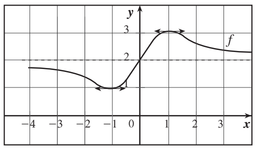
(c) ارسم l و (C).

(8) f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية.

استخدم جدول التغير التالي لإيجاد قيم a, b, c, d حيث $f(-2) = 5$ ، $f(0) = 1$

x	$-\infty$		-2		0		∞
إشارة f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
سلوك f	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

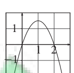
(9) كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' من بيان الدالة f الممثلة بالرسم أدناه.



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

لتكن f : $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ و (C) منحناها.



(1) يمر المنحنى (C) بنقطة الأصل. (a) (b)

(2) الشكل المجاور يمثّل منحنى الدالة f'. (a) (b)

(3) المماس عند النقطة التي إحداثيها السيني يساوي 2 موازٍ لمحور السينات. (a) (b)

(4) 4 هي قيمة عظمى محلية. (a) (b)

(5) المنحنى (C) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty , 1)$. (a) (b)

في التمارين (11—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

في التمارين (8—6)، الدالة f دالة كثيرة حدود جدول تغيرها:

x	$-\infty$		-1		5		∞
$f(x)$	∞	↘	-5	↗	3	↘	$-\infty$

(6) العبارة الصحيحة فيما يلي هي:

(a) $f(-2) > f(0)$ (b) $f(0) < f(6)$

(c) $f(-9) > f(-2)$ (d) $f(-1) > f(8)$

(7) للمعادلة $f(x) = 0$:

(a) حل واحد (b) حلّان

(c) ثلاثة حلول (d) لا حل لها.

(8) جدول تغير الدالة f يوضّح أن:

(a) -5 قيمة صغرى مطلقة.

(b) 3 قيمة عظمى مطلقة.

(c) -5 قيمة صغرى محلية، 3 قيمة عظمى محلية.

(d) -1 قيمة صغرى محلية، 5 قيمة عظمى محلية.

(9) لتكن الدالة f : $f(x) = -x^2 + 7x + 1$

(a) لمنحنى f قيمة عظمى محلية.

(b) لمنحنى f نقطة انعطاف.

(c) منحنى f مقعر لأعلى.

(d) لمنحنى f قيمة صغرى محلية.

(10) لتكن f : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ , \ a \neq 0$. لمنحنى f دائمًا:

(a) قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية.

(b) نقطة انعطاف.

(c) تقعُّر لأسفل ثم تقعُّر لأعلى.

(d) لا تمر بنقطة الأصل.

(11) الدالة f كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة:

(a) لمنحنى f دائمًا نقطتي انعطاف.

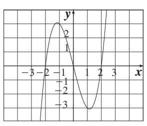
(b) لمنحنى f أكثر من قيمة عظمى محلية.

(c) منحنى f يقطع دائمًا محور السينات.

(d) قد لا يكون لمنحنى f قيمة صغرى محلية.

في التمارين (14—12)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة f.



القائمة (1)	القائمة (2)
(12) $f'(x) = 0$	(a) $(-\infty , 0)$
(13) $f'(x) > 0$ في	(b) $(-\infty , -1) \ , \ (1 , \infty)$
(14) $f''(x) < 0$ في	(c) $-2 , 0 , 2$
	(d) $-1 , 1$
	(e) $(0 , \infty)$

3–5: تطبيقات على القيم القصوى


3–5

تطبيقات على القيم القصوى

Applications on Extreme Value

سوف تتعلم
- تطبيقات على الهندسة والصناعة.
- تطبيقات على الاقتصاد.

المفردات والمصطلحات
- القيم العظمى والقيم الصغرى Max–Min Values

عمل تعاوني

وجد صاحب محل لبيع الأحذية الرياضية أنه يمكن نمذجة ربحه بالدالة f :

$f(x) = -15x^2 + 600x + 50$، حيث x تمثل سعر الحذاء بالدينار.

(a) ما سعر الحذاء الذي يحقق أعلى ربح؟

(b) ما قيمة أعلى ربح؟

من «العمل التعاوني» وجدت أكبر قيمة للدالة من خلال تطبيق خواص القطع المكافئ للدالة التربيعية، وفي هذا البند يمكنك إيجاد القيم نفسها باستخدام خواص القيم القصوى التي درستها حيث إن الاشتقاق يقدم لنا الطريقة الناجحة لإيجاد أكبر القيم وأصغرها للدوال ويمكن أن تساعدنا الخطوات التالية على ذلك :

1. **افهم المسألة:** اقرأ المسألة بعناية، حدّد المعلومات التي تحتاج إليها لحل المسألة.
2. **كوّن نموذجًا رياضيًّا للمسألة:** ارسم أشكالًا وضع علامات على الأجزاء المهمّة في المسألة. ضع متغيّرًا واحدًا يمثّل الكميّة المطلوب الحصول على قيمتها العظمى أو قيمتها الصغرى. ثم اكتب دالة باستخدام المتغيّر بحيث تعطي قيمتها القصوى المعلومات التي نبحث عنها.
3. أوجد مجال الدالة. وحدّد قيم المتغيّر التي تكون معقولة في المسألة.
4. حدّد **النقاط الحرجة** ويمكن إيجاد **النقاط الطرفيّة**.
   أوجد أين تكون المشتقّة صفريّة أو أين لا يكون لها وجود.
5. **حل النموذج الرياضي:** إذا لم تكن واثقًا من النتيجة دعّم أو أكّد صحّة حلك بطريقة أخرى.
6. **فسّر الحل:** ترجم نتيجتك الرياضية إلى الموقف في المسألة، ثمّ قرّر ما إذا كانت النتيجة معقولة.

مثال (1)

عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

155

1 الأهداف

- حل مسائل تطبيقية تتضمن إيجاد قيم صغرى وعظمى للدوال في الهندسة والصناعة والاقتصاد.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

القيم العظمى والقيم الصغرى.

3 الأدوات والوسائل

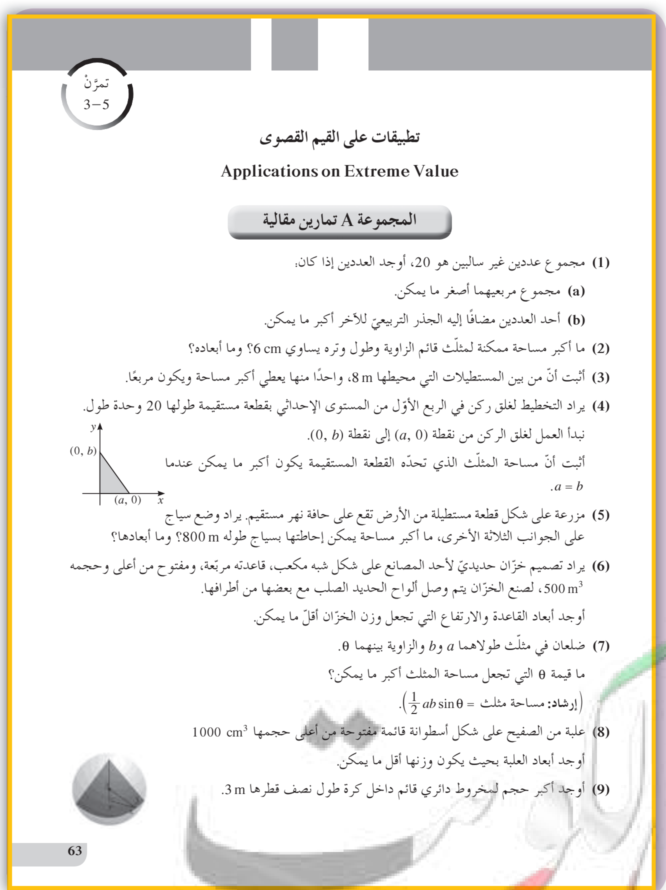
آلة حاسبة علمية – ورق مقوى – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) إذا كان لدينا عددان $a > 0$ ، $b > 0$ ومجموعهما $a + b = 20$، فمتى يكون حاصل ضربهما أكبر عدد ممكن؟

(b) إذا كان لدينا عددان $a > 0$ ، $b > 0$ وحاصل ضربهما $ab = 36$، فمتى يكون حاصل جمعهما أصغر عدد ممكن؟


تمرَّنْ 3–5

تطبيقات على القيم القصوى

Applications on Extreme Value

المجموعة A تمارين مقالية

(1) مجموع عددين غير سالبين هو 20، أوجد العددين إذا كان:

(a) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن.

(b) أحد العددين مضافًا إليه الجذر التربيعيّ للآخر أكبر ما يمكن.

(2) ما أكبر مساحة ممكنة لمثلّث قائم الزاوية وطول وتره يساوي 6 cm؟ وما أبعاده؟

(3) أثبت أنّ من بين المستطيلات التي محيطها 8 m، واحدًا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعًا.

(4) يراد التخطيط لغلق ركن في الربع الأوّل من المستوى الإحداثي بقطعة مستقيمة طولها 20 وحدة طول.
نبدأ العمل لغلق الركن من نقطة $(a, 0)$ إلى نقطة $(0, b)$.
أثبت أنّ مساحة المثلّث الذي تحدّه القطعة المستقيمة يكون أكبر ما يمكن عندما $a = b$.

(5) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم. يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله 800 m؟ وما أبعادها؟

(6) يراد تصميم خزّان حديديّ لأحد المصانع على شكل شبه مكعب، قاعدته مربّعة، ومفتوح من أعلى وحجمه $500\ m^3$، لصنع الخزّان يتم وصل ألواح الحديد الصلب مع بعضها من أطرافها.
أوجد أبعاد القاعدة والارتفاع التي تجعل وزن الخزّان أقلّ ما يمكن.

(7) ضلعان في مثلّث طولاهما a و b والزاوية بينهما θ.
ما قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن؟
(**إرشاد:** مساحة مثلث $= \frac{1}{2} ab \sin\theta$).

(8) علبة من الصفيح على شكل أسطوانة قائمة مفتوحة من أعلى حجمها $1000\ cm^3$
أوجد أبعاد العلبة بحيث يكون وزنها أقل ما يمكن.

(9) أوجد أكبر حجم لمخروط دائري قائم داخل كرة طول نصف قطرها 3 m.

63

5 التدريس

قد ترغب في أن تبدأ هذا الدرس بأن تطلب إلى الطلاب أن يأتوا بمواقف يريدون فيها أن يوجدوا قيمًا عظمى أو صغرى لدالة. كن مستعدًا لإعطاء العديد من الأمثلة في حالة لم يقدم الطلاب أي موقف.

تقليديًّا، يجد الطلاب صعوبة مع مسائل حياتية، خاصة بتكوين الدالة التي يكون مطلوبًا إيجاد قيمها القصوى (أصغر أو أكبر قيمة)، وتحديد المجال المناسب لسياق المسألة. في هذا الصدد، أكِّد على «إستراتيجيّة الخطوات لحل مسائل القيم العظمى والصغرى».

في المثال (1)

تطبيق مباشر على القيم العظمى. أشر إلى أن وجود عبارة «مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن» هي التي تدفعنا لإيجاد القيم الصغرى.

في المثال (2)

راجع مع الطلاب هذا المثال مشدّدًا على أنّ الجملة «حجم الصندوق أكبر ما يمكن» هي المؤشر لتطبيقات القيم القصوى.

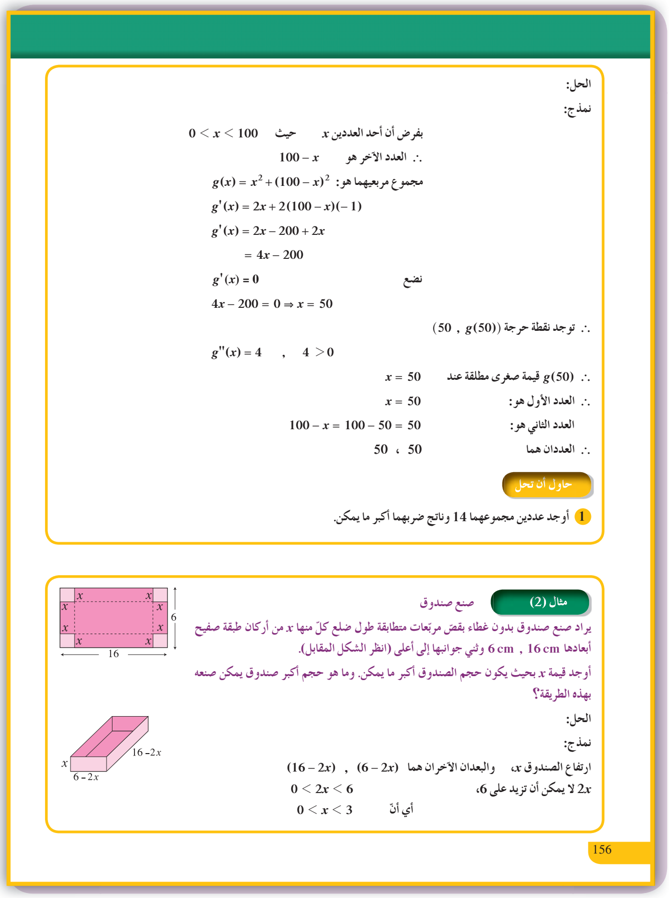
أشر إلى أن المفردات والتعبيرات المماثلة تدل على استخدام القيم القصوى.

أحيانًا في التطبيقات الحياتية لا يمكن وضع رسم بياني دقيق للدالة يدويًّا نظرًا لوجود قيم كبيرة لـ x أو y. لذا ينصح في هذه الحالة استخدام آلة حاسبة بيانية أو حاسوب.

في المثال (3)

من المهم قبل البدء في هذا المثال مراجعة قواعد المساحات المطلوب استخدامها (مساحة الدائرة + المساحة الجانبية للأسطوانة) وأيضًا حجم الأسطوانة.

اسأل عن العلاقة بين السعة والحجم (العلاقة بين اللتر و cm^3).



الحل:

نمذج:

بفرض أن أحد العددين x حيث $0 < x < 100$

$\therefore$ العدد الآخر هو $100 - x$

مجموع مربعيهما هو: $g(x) = x^2 + (100 - x)^2$

$g'(x) = 2x + 2(100 - x)(-1)$

$g'(x) = 2x - 200 + 2x$

$= 4x - 200$

نضع $g'(x) = 0$

$4x - 200 = 0 \Rightarrow x = 50$

$\therefore$ توجد نقطة حرجة $(50\ ,\ g(50))$

$g''(x) = 4 \quad , \quad 4 > 0$

$\therefore$ $g(50)$ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 50$

$\therefore$ العدد الأول هو: $x = 50$

العدد الثاني هو: $100 - x = 100 - 50 = 50$

$\therefore$ العددان هما 50 ، 50

حاول أن تحل

1 أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

مثال (2) صنع صندوق

يراد صنع صندوق بدون غطاء بقصّ مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها 16 cm , 6 cm وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟

الحل:

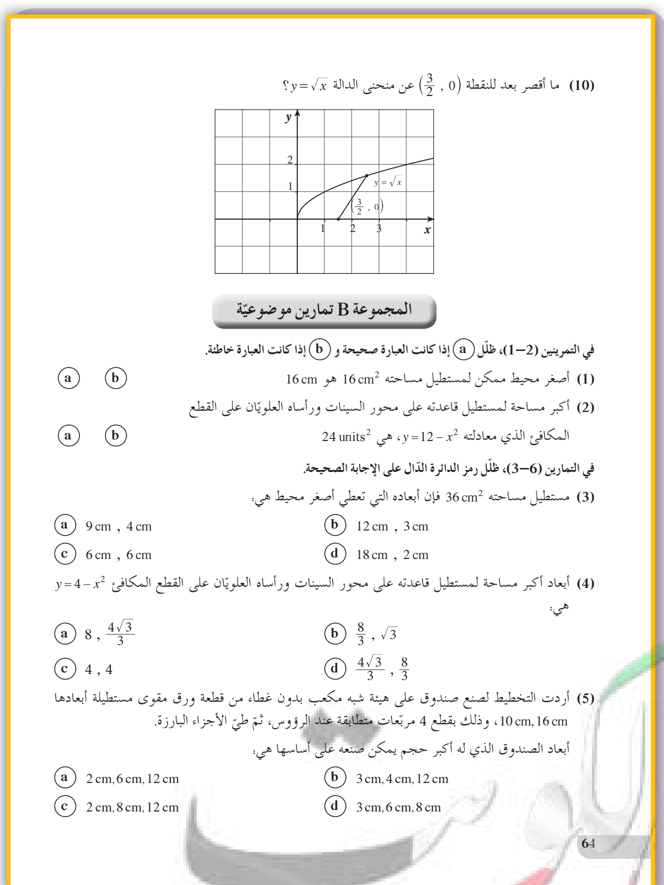
نمذج:

ارتفاع الصندوق x، والبعدان الآخران هما $(6 - 2x)$, $(16 - 2x)$

$2x$ لا يمكن أن تزيد على 6، $0 < 2x < 6$

أي أنّ $0 < x < 3$

156



(10) ما أقصر بعد للنقطة $\left(\frac{3}{2}\ ,\ 0\right)$ عن منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$؟

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمرينين (1—2)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته 16 cm^2 هو 16 cm (a) (b)

(2) أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويّان على القطع المكافئ الذي معادلته $y = 12 - x^2$، هي 24 units^2 (a) (b)

في التمارين (3—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(3) مستطيل مساحته 36 cm^2 فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط هي:

(a) $9\text{ cm}\ ,\ 4\text{ cm}$ (b) $12\text{ cm}\ ,\ 3\text{ cm}$

(c) $6\text{ cm}\ ,\ 6\text{ cm}$ (d) $18\text{ cm}\ ,\ 2\text{ cm}$

(4) أبعاد أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويّان على القطع المكافئ $y = 4 - x^2$ هي:

(a) $8\ ,\ \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{8}{3}\ ,\ \sqrt{3}$

(c) $4\ ,\ 4$ (d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{8}{3}$

(5) أردت التخطيط لصنع صندوق على هيئة شبه مكعب بدون غطاء من قطعة ورق مقوى مستطيلة أبعادها $10\text{ cm}, 16\text{ cm}$، وذلك بقطع 4 مربّعات متطابقة عند الرؤوس، ثمّ طيّ الأجزاء البارزة.

أبعاد الصندوق الذي له أكبر حجم يمكن صنعه على أساسها هي:

(a) $2\text{ cm}, 6\text{ cm}, 12\text{ cm}$ (b) $3\text{ cm}, 4\text{ cm}, 12\text{ cm}$

(c) $2\text{ cm}, 8\text{ cm}, 12\text{ cm}$ (d) $3\text{ cm}, 6\text{ cm}, 8\text{ cm}$

64

في المثال (4)

من المفيد محاورة الطلاب والنقاش معهم بواسطة رسم هندسي عن أقصر مسافة بين نقطة ومستقيم وهي طول القطعة المستقيمة على الخط العمودي من النقطة إلى المستقيم وبالتالي نوجد القيمة الصغرى لدالة المسافة بين النقطة خارج المستقيم وأي نقطة على هذا المستقيم.

في المثال (5)

كثيرًا ما تحوّل المسائل الاقتصادية إلى دوال يدرس تغيّرها لإيجاد القيم العظمى (كالربح) والصغرى (كالكلفة) وهذا مبدأ أساسي في الاقتصاد.

6 الربط

تعطى التكلفة الكلية لإنتاج آلة ما بالدالة: $C(x) = 100x^2 + 1300x + 1000$، حيث x تمثل ألف وحدة إنتاج، و$C(x)$ تعطى بآلاف الدنانير. تباع كل وحدة إنتاج بثمن 2 000 دينار.

(a) إذا كان x عدد الوحدات المباعة، فأوجد بدلالة x

الربح = سعر مبيع الكمية − كلفة الكمية المباعة

دالة الربح: $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P(x) = 2\,000x - 100x^2 - 1300x - 1000$$

$$P(x) = -100x^2 + 700x - 1000$$

(b) أوجد قيمة x التي تحقق أكبر ربح.

$$P'(x) = -200x + 700 \Rightarrow P'(x) = 0$$

$$-200x = -700 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$P''(x) = -200 < 0$$

يتحقق أكبر ربح عند: $P'(x) = 0$

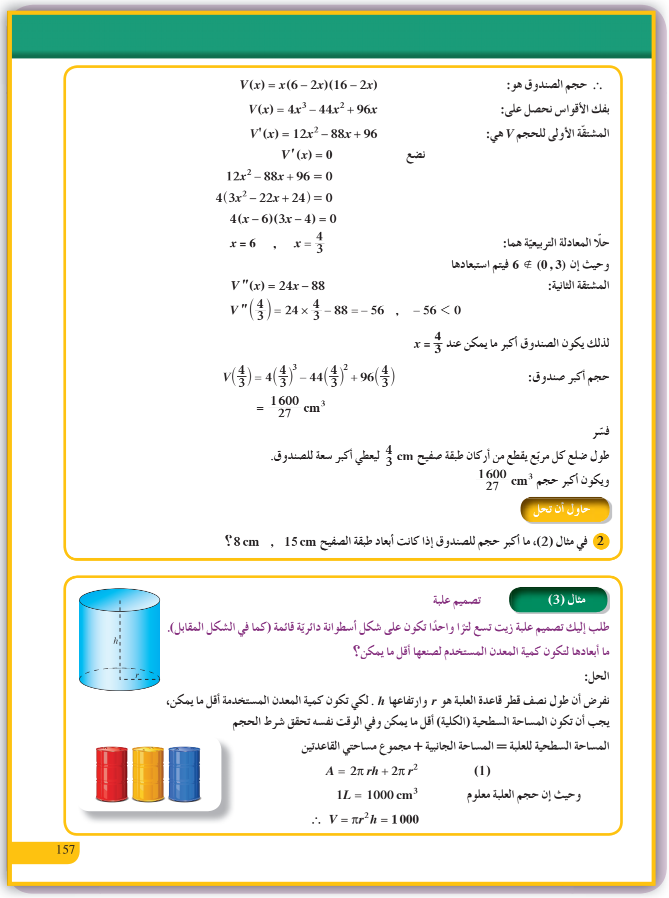
$\because$ x تمثل 1 000 وحدة إنتاج

$\therefore$ يتحقق أكبر ربح عند: $\frac{7}{2} \times 1000$

أي 3 500 وحدة إنتاج.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

في مسائل تطبيقات على القيم القصوى، قد يتغاضى الطلاب عن نقاط النهاية كنقاط ممكنة لقيم قصوى، أو يجدون حلولًا خارج مجال المتغير موضع الدراسة.



∴ حجم الصندوق هو: $V(x) = x(6-2x)(16-2x)$

بفك الأقواس نحصل على: $V(x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x$

المشتقّة الأولى للحجم V هي: $V'(x) = 12x^2 - 88x + 96$

نضع $V'(x) = 0$

$$12x^2 - 88x + 96 = 0$$

$$4(3x^2 - 22x + 24) = 0$$

$$4(x-6)(3x-4) = 0$$

حلّا المعادلة التربيعيّة هما: $x = 6 \quad , \quad x = \frac{4}{3}$

وحيث إن $6 \notin (0\,,3)$ فيتم استبعادها

المشتقّة الثانية: $V''(x) = 24x - 88$

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24 \times \frac{4}{3} - 88 = -56 \quad , \quad -56 < 0$$

لذلك يكون الصندوق أكبر ما يمكن عند $x = \frac{4}{3}$

حجم أكبر صندوق: $V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 44\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 96\left(\frac{4}{3}\right)$

$$= \frac{1\,600}{27}\ \text{cm}^3$$

فسّر

طول ضلع كل مربّع يقطع من أركان طبقة صفيح $\frac{4}{3}$ cm ليعطي أكبر سعة للصندوق.

ويكون أكبر حجم $\frac{1600}{27}$ cm^3

حاول أن تحل

2 في مثال (2)، ما أكبر حجم للصندوق إذا كانت أبعاد طبقة الصفيح 15 cm ، 8 cm؟

مثال (3) تصميم علبة

طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترًا واحدًا تكون على شكل أسطوانة دائريّة قائمة (كما في الشكل المقابل). ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

الحل:

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة العلبة هو r وارتفاعها h . لكي تكون كمية المعدن المستخدمة أقل ما يمكن، يجب أن تكون المساحة السطحية (الكلية) أقل ما يمكن وفي الوقت نفسه تحقق شرط الحجم

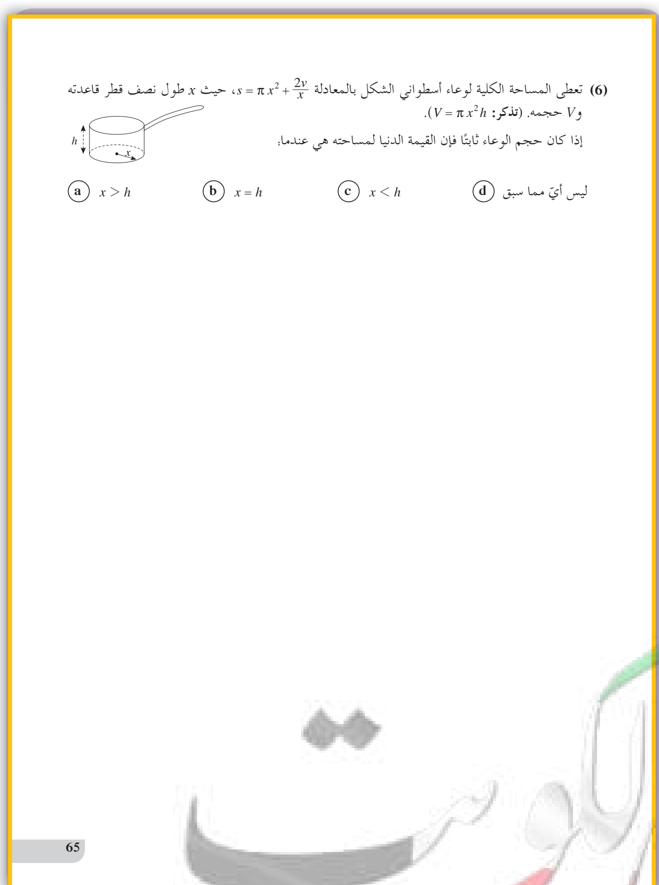
المساحة السطحية للعلبة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ (1)

وحيث إن حجم العلبة معلوم $1L = 1000\ \text{cm}^3$

$\therefore\ V = \pi r^2 h = 1\,000$

157



(6) تعطى المساحة الكلية لوعاء أسطواني الشكل بالمعادلة $s = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$، حيث x طول نصف قطر قاعدته وV حجمه. (**تذكر:** $V = \pi x^2 h$).

إذا كان حجم الوعاء ثابتًا فإن القيمة الدنيا لمساحته هي عندما:

(a) $x > h$ (b) $x = h$ (c) $x < h$ (d) ليس أيّ مما سبق

65

عند الرسم البياني لمسائل التطبيقات التي تتضمن دوال مثلثية، غالبًا ما يتم التغاضي عن حلول بديلة لكل من: $f'(x) = 0$ أو $f''(x) = 0$.

الطبيعة الدورية للدوال المثلثية لا بد من أن تكون دائمًا موضع الاعتبار في هذه المسائل، وذلك باستثناء بعض الحالات التي تكون فيها الشروط الفيزيائية للمسألة مقيّدة للمجال.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، وتأكّد من فهمهم لتطبيق الدوال على القيم العظمى والصغرى لنماذج من الواقع.

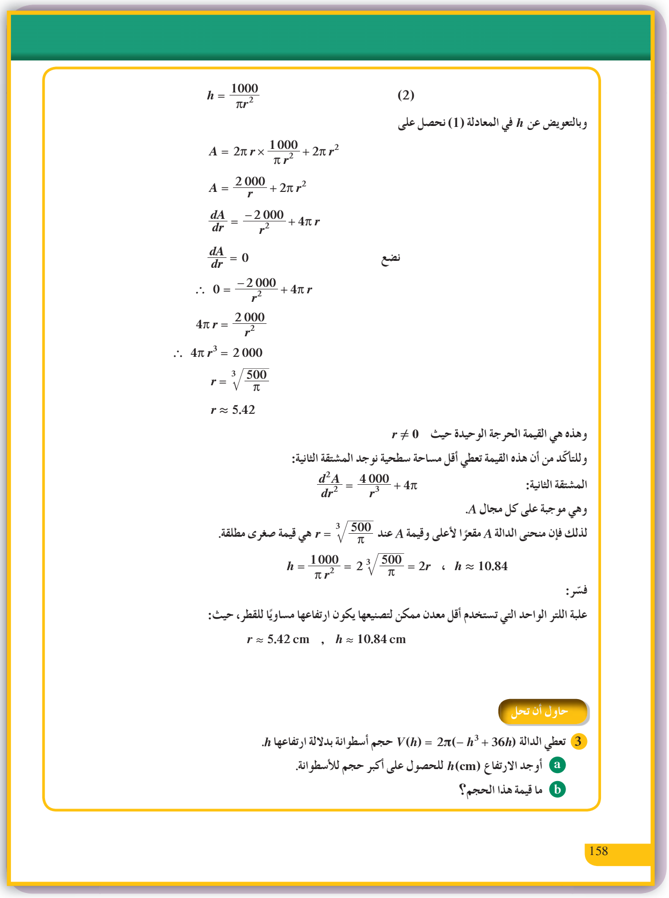
اختبار سريع

يريد صاحب مشروع زراعي بناء خزان مياه على شكل شبه مكعب مفتوح من أعلى يتسع لِـ $72\ m^3$، قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها $x\ m$ وارتفاعه $y\ m$ تعطى تكاليف بناء الخزان بالمعادلة:

$$C = 50x^3 + 300xy$$

أوجد قيم x , y للحصول على أقل كلفة ممكنة.

$2\sqrt{3}\ m \quad , \quad 6\ m$



$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad (2)$$

وبالتعويض عن h في المعادلة (1) نحصل على

$$A = 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{2\,000}{r} + 2\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{-2\,000}{r^2} + 4\pi r$$

نضع

$$\frac{dA}{dr} = 0$$

$$\therefore\ 0 = \frac{-2\,000}{r^2} + 4\pi r$$

$$4\pi r = \frac{2\,000}{r^2}$$

$$\therefore\ 4\pi r^3 = 2\,000$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

$$r \approx 5.42$$

وهذه هي القيمة الحرجة الوحيدة حيث $r \neq 0$

وللتأكّد من أن هذه القيمة تعطي أقل مساحة سطحية نوجد المشتقة الثانية:

المشتقة الثانية: $\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{4\,000}{r^3} + 4\pi$

وهي موجبة على كل مجال A.

لذلك فإن منحنى الدالة A مقعرًا لأعلى وقيمة A عند $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ هي قيمة صغرى مطلقة.

$$h = \frac{1\,000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r \quad ، \quad h \approx 10.84$$

فسّر:

علبة اللتر الواحد التي تستخدم أقل معدن ممكن لتصنيعها يكون ارتفاعها مساويًا للقطر، حيث:

$r \approx 5.42\ cm \quad , \quad h \approx 10.84\ cm$

حاول أن تحل

3. تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a. أوجد الارتفاع $h(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b. ما قيمة هذا الحجم؟

158

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) 20 دينارًا

(b) 6 050 دينارًا

«حاول أن تحل»

1 العدد الأول 7 ، العدد الثاني 7

2 $\dfrac{2450}{27}\ \text{cm}^3$

3 **(a)** $h = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$

(b) $V \approx 522.37\ \text{cm}^3$

4 أقصر مسافة تحدث عند $x = \dfrac{5}{2}$ وتساوي $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ وحدة طول

5 **(a)** 5 000 مكثف.

(b) 6 000 مكثف.

مثال (5)

تنتج إحدى شركات الأدوات الكهربائية خلال فترة زمنية محددة كمية x من الخلاطات الكهربائية..

يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة (بالدينار) بالعلاقة $C(x) = x - 20 + \dfrac{400}{x}$

1 أوجد كمية عدد القطع المنتجة خلال الفترة لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

2 تباع كل قطعة منتجة بمبلغ 100 دينار.

a عبّر عن ربح الشركة بمعلومية x.

b أوجد قيمة x التي تحقق أكبر ربح، وما قيمته؟

الحل:

يمثّل المتغير x عدد القطع المنتجة $\therefore$ x عدد صحيح موجب.

1 ندرس تغير الدالة c على الفترة $(0,\infty)$ لحساب قيمة x التي تعطي قيمة صغرى.

$$C'(x) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2} = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$$

$\because\ x^2 > 0\ ,\ x + 20 > 0$ (x عدد صحيح موجب)

$\therefore$ C' ، $x - 20$ لهما نفس الإشارة

جدول التغير

x	0 ⟶ 20	20 ⟶ ∞
إشارة f'	$--$	$++$
سلوك f	↘	↗

من جدول التغير نستنتج أن إنتاج 20 قطعة يحقق أقل كلفة ممكنة.

2 a الربح = سعر مبيع الكمية − كلفة الكمية المباعة

سعر الكمية المباعة: $100x$

كلفة الكمية المباعة: $\left(x - 20 + \dfrac{400}{x}\right).x = x^2 - 20x + 400$

الربح:

$$P(x) = 100x - (x^2 - 20x + 400)$$
$$= 100x - x^2 + 20x - 400$$
$$= -x^2 + 120x - 400$$

b لحساب قيمة x التي تحقق أكبر ربح ندرس تغيّر الدالة P على الفترة $(0,\infty)$ ونوجد قيمة x التي تحقق قيمة قصوى.

$P'(x) = -2x + 120$

نضع $P'(x) = 0$

$-2x + 120 = 0$

$x = 60$

مثال (4)

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $P(x\ ,\ y)$ على المنحنى الذي معادلته $y^2 - x^2 = 16$ والنقطة $Q(6\ ,\ 0)$

الحل:

$$y^2 - x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 + 16$$

نوجد المسافة بين النقطتين $P\ ,\ Q$

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$
$$= \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$$

نفرض أن دالة المسافة هي:

$$S(x) = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + x^2 + 16}$$
$$= \sqrt{2x^2 - 12x + 52}$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}(4x - 12)(2x^2 - 12x + 52)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{2x - 5}{\sqrt{2x^2 - 12x + 52}}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

نوجد أصفار المقام بوضع $2x^2 - 12x + 52 = 0$

$x^2 - 6x + 26 = 0$

المميز: $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 26$

$= 36 - 104 = -68\ ,\ -68 < 0$

$\therefore$ لا يوجد أصفار للمقام

نكوّن جدول التغيّر

x	$-\infty$ ⟶ 3	3 ⟶ ∞
$S'(x)$	$--$	$++$
$S(x)$	↘	↗

$\therefore$ أقصر مسافة بين النقطتين $Q\ ,\ P$ هي عند $x = 3$

$$S(3) = \sqrt{2(3)^2 - 12(3) + 52}$$
$$= \sqrt{34}$$

أقصر مسافة هي $\sqrt{34}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

4 أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(x\ ,\ y)$ على المنحنى الذي معادلته $y = \sqrt{x}$ والنقطة $B(3\ ,\ 0)$

تغير الدالة P :

x	0 ⟶ 60	60 ⟶ ∞
إشارة P'	$++$	$--$
سلوك P	↗	↘

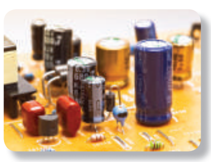
من جدول التغير نستنتج أن قيمة x التي تحقق قيمة عظمى للدالة P هي 60 أي أن مبيع 60 قطعة يحقق أكبر ربح للشركة.

أكبر قيمة للربح:

$$P(60) = -(60)^2 + 120(60) - 400$$
$$= -4\,000 + 7\,200$$
$$= 3\,200$$

أكبر قيمة للربح 3 200 دينار.

حاول أن تحل



5 تصنع إحدى الشركات يوميًّا x (بالآلاف) من المكثفات الكهربائية.

يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة بالعلاقة: $C(x) = x - 2 + \dfrac{25}{x}$

a أوجد كمية عدد المكثفات المنتجة يوميًّا لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

b تباع كل ألف قطعة بسعر 10 دنانير.

أوجد كمية المكثفات المنتجة لتحقيق أكبر ربح.

المرشد لحل المسائل

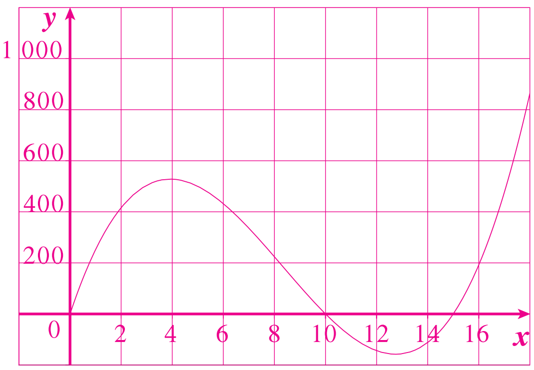
حل «مسألة إضافية»

(a) $V(x) = x(15 - x)(20 - 2x)$

(b) $0 < 2x < 20$

$0 < x < 10$

$\therefore$ مجال الدالة $(0\ ,\ 10)$

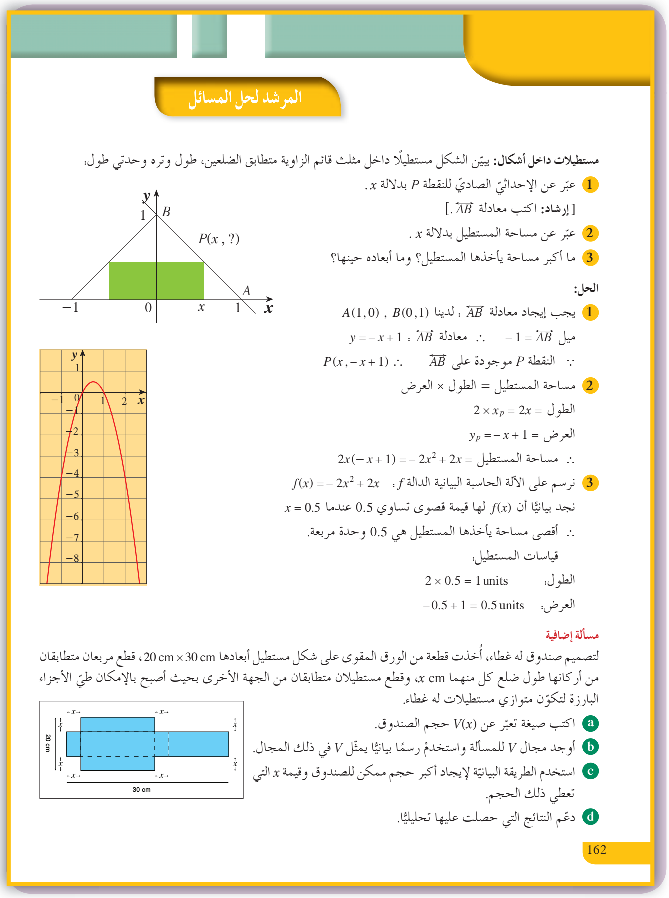


(c) $x \approx 4\ ,\ V \approx 528$

(d) $V'(x) = 6x^2 - 100x + 300$

$V'(x) = 0 \Longrightarrow x \approx 4$

$V(4) \approx 528$



المرشد لحل المسائل

مستطيلات داخل أشكال: يبيّن الشكل مستطيلًا داخل مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول وتره وحدتي طول:

1. عبّر عن الإحداثيّ الصاديّ للنقطة P بدلالة x.
   [**إرشاد:** اكتب معادلة $\overleftrightarrow{AB}$.]
2. عبّر عن مساحة المستطيل بدلالة x.
3. ما أكبر مساحة يأخذها المستطيل؟ وما أبعاده حينها؟

الحل:

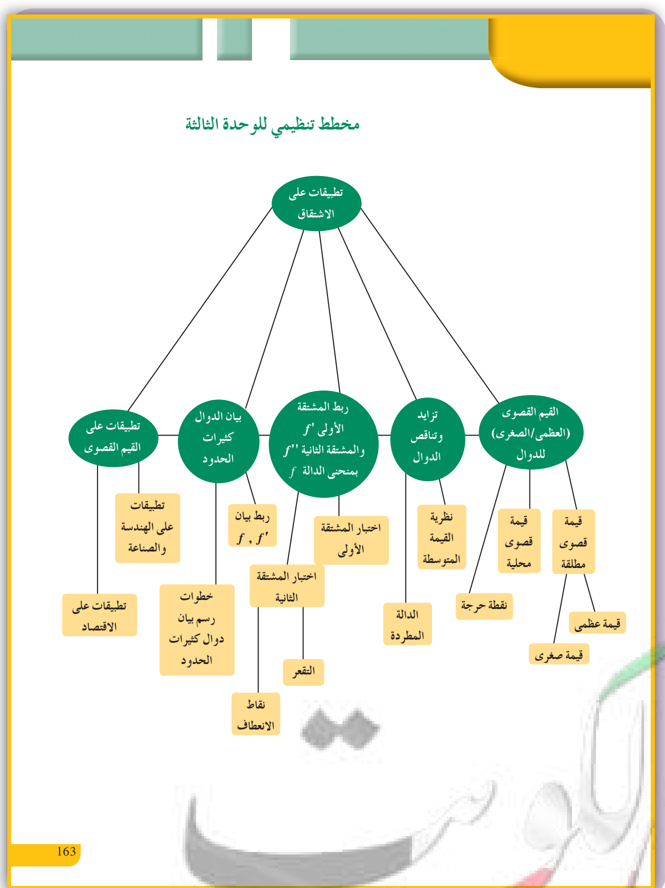
1. يجب إيجاد معادلة $\overleftrightarrow{AB}$: لدينا $A(1,0)\ ,\ B(0,1)$
   ميل $\overleftrightarrow{AB} = -1$ $\therefore$ معادلة $\overleftrightarrow{AB}$: $y = -x + 1$
   $\because$ النقطة P موجودة على $\overleftrightarrow{AB}$ $\therefore P(x, -x+1)$
2. مساحة المستطيل = الطول × العرض
   الطول = $2 \times x_p = 2x$
   العرض = $y_p = -x + 1$
   $\therefore$ مساحة المستطيل = $2x(-x+1) = -2x^2 + 2x$
3. نرسم على الآلة الحاسبة البيانية الدالة f : $f(x) = -2x^2 + 2x$
   نجد بيانيًّا أن $f(x)$ لها قيمة قصوى تساوي 0.5 عندما $x = 0.5$
   $\therefore$ أقصى مساحة يأخذها المستطيل هي 0.5 وحدة مربعة.
   قياسات المستطيل:
   الطول: $2 \times 0.5 = 1$ units
   العرض: $-0.5 + 1 = 0.5$ units

مسألة إضافية

لتصميم صندوق له غطاء، أُخذت قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل أبعادها $20\text{ cm} \times 30\text{ cm}$، قطع مربعان متطابقان من أركانها طول ضلع كل منهما x cm، وقطع مستطيلان متطابقان من الجهة الأخرى بحيث أصبح بالإمكان طيّ الأجزاء البارزة لتكوّن متوازي مستطيلات له غطاء.

a. اكتب صيغة تعبّر عن $V(x)$ حجم الصندوق.
b. أوجد مجال V للمسألة واستخدمْ رسمًا بيانيًّا يمثّل V في ذلك المجال.
c. استخدم الطريقة البيانيّة لإيجاد أكبر حجم ممكن للصندوق وقيمة x التي تعطي ذلك الحجم.
d. دعّم النتائج التي حصلت عليها تحليليًّا.

162



ملخص

- إذا كانت f دالة مجالها D، $c \in D$ فإن $f(c)$ تسمى:
  - قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \geqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$
  - قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \leqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$
- إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a\ ,\ b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.
- لتكن $(c\ ,f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c، $f(c)$ تكون:
  - **a** قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$ $\quad f(c) \geqslant f(x)$
  - **b** قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$ $\quad f(c) \leqslant f(x)$
- النقطة الداخليّة للدالّة f $(c\ ,f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.
- إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x = c$ فإنّ $(c\ ,f(c))$ نقطة حرجة.
- إذا كانت f دالة:
  - متّصلة على الفترة $[a\ ,\ b]$
  - قابلة للاشتقاق على الفترة $(a\ ,\ b)$

  فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a\ ,b)$ بحيث $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I . نقول إن:
  - **1** f دالّة متزايدة على I إذا كان: $\forall x_1\ ,\ x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - **2** f دالّة متناقصة على I إذا كان: $\forall x_1\ ,\ x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.
- لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على $(a\ ,\ b)$.
  - ذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ f تتزايد على $(a\ ,\ b)$.
  - إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ f تتناقص على $(a\ ,\ b)$.
  - إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ الدالة f ثابتة على $(a\ ,\ b)$.
- لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c\ ,f(c))$ نقطة حرجة.
  - إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
  - إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.

- إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.
- تعريف: التقعّر

  إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأعلى على I .

  وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأسفل على I .
- اختبار التقعّر:
  - **a** إذا كانت $\forall x \in I\ ,\ f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأعلى على I .
  - **b** إذا كانت $\forall x \in I\ ,\ f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأسفل على I .
- نقطة الانعطاف:

تسمّى النقطة $(c\ ,f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالّة متّصلة عند c، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

- إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$.
- إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$.

اختبار الوحدة الثالثة

في التمرينين (2–1)، أوجد القيم القصوى المطلقة للدوالّ على الفترات الموضّحة:

(1) $f(x) = x^3 - 9x^2 - 21x - 11\ ,\ [-2\ ,0]$

(2) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1}\ ,\ [-2\ ,3]$

في التمارين (5–3)، أوجد:

(a) **فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.**

(b) **القيم القصوى المحليّة.**

(3) $f(x) = x^3 - 12x + 6$ **(4)** $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ **(5)** $h(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+9}$

في التمارين (8–6)، أوجد:

(a) **فترات التقعر لأعلى وفترات التقعر لأسفل.**

(b) **نقاط الانعطاف إن وجدت.**

(6) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$ **(7)** $g(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 6$ **(8)** $h(x) = \dfrac{3}{x-1}$

في التمرينين (10–9)، استخدم مشتقة الدالة $y = f(x)$ لإيجاد:

(a) **قيم x التي عندها قيم قصوى محلية للدالة f.**

(b) **فترات التقعر لأعلى.**

(c) **فترات التقعر لأسفل.**

(9) $y' = 6(x+1)(x-2)$ **(10)** $y' = 6(x+1)(x-2)^2$

(11) استخدم المشتقة الثانية للدالّة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي يكون عندها نقاط انعطاف للدالة f.

$y'' = x(x-3)^2$

في التمارين (14–12)، ادرس تغير كل من الدوال التالية ثم ارسم بيانها.

(12) $f(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

(13) $g(x) = x^4 - 6x^2 + 9$

(14) $h(x) = (x^2 + 4x + 4)^2$

(15) لتكن الدالة f: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

(a) بيّن أنّ شروط نظريّة القيم المتوسطة محققة على الفترة $[0\ ,3]$

(b) أوجد قيم c على $(a,\ b)$ حيث $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(16) لتكن الدالة f: $f(x) = x^2 + bx + c$

أوجد قيم $b\ ,\ c$ إذا كان منحنى f له قيمة صغرى محلية تساوي -1 عند $x = -2$

تمارين إثرائية

(1) الحركة على مستقيم. يتحدد موقع جسيم A على محور السينات بالمعادلة: $S_1 = \sin t$ ويتحدد موقع جسيم B على نفس المحور بالمعادلة: $S_2 = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ حيث S_2 و S_1 بالمتر وt بالثواني.

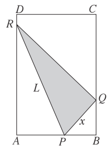
(a) في أي وقت بالثواني يتلاقى الجسيم A مع الجسيم B على الفترة $[0\ ,\ 2\pi]$؟

(b) ما أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين الجسيم A والجسيم B؟

(c) في أي وقت على الفترة $[0\ ,\ 2\pi]$ تكون المسافة بين الجسيمين تتغير بأقصى سرعة لها؟

(2) طي ورقة. قطعة ورق مستطيلة الشكل أبعادها 22 cm، 28 cm موضوعة على أرض مسطحة.

اطوِ إحدى زواياها المقابلة للضلع الأطول كما ترى في الصورة بحيث ينطبق الرأس A عند Q على $\overline{BC}$.



المطلوب إيجاد أقصر طول للضلع PR.

(a) أثبت أن: $L^2 = \frac{x^3}{x-11}$

(b) ما قيمة x التي تعطي أصغر قيمة لـ L^2؟

(c) ما أصغر قيمة لـ L؟

(3) المبيع. تبلغ تكلفة تصنيع سلعة وتوزيعها 10 دنانير.

إذا كان سعر مبيع هذه السلعة هو (دنانير) x وعدد السلع المباعة يعطى بالقاعدة:

$$n = \frac{a}{x-10} + b(100-x)$$

ما هو سعر المبيع الذي يحقق أكبر ربح؟ (a, b ثوابت موجبة في المعادلة).

(4) لتكن f الدالة المعرَّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$.

(a) ادرس تغيّر f وارسم بيانها (C).

(b) أوجد النقاط على المنحنى (C) حيث يكون ميل المماس يساوي 1.

(c) أثبت أن لنقطتين من هذه النقاط مماس مشترك.

في التمارين (7—5)، أوجد الفترات التي تكون عندها الدالّة:

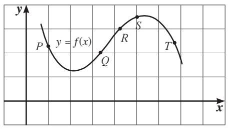
(a) متزايدة **(b) متناقصة** **(c) مقعّرة لأعلى** **(d) مقعّرة لأسفل**

ثمّ أوجد:

(e) القيم القصوى المحليّة **(f) نقاط الانعطاف**

(7) $y = x^{\frac{4}{5}}(2-x)$ **(6)** $y = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ **(5)** $y = 1 + x - x^2 - x^4$

(8) عند أيّ من النقاط الخمس المحدّدة على المنحنى الممثّل للدالّة $y = f(x)$ والمبيّنة في الشكل:



(a) تكون كلّ من y' و y'' سالبة؟

(b) تكون y' سالبة و y'' موجبة؟

(9) لنأخذ الدالة f: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

أوجد قيم a, b, c, d إذا كان منحنى f له الخصائص التالية:

(a) يمر بالنقطة $A(0\ ,\ 3)$

(b) له قيمة عظمى محلية تساوي 3 عند $x = 0$

(c) $I(1\ ,\ 1)$ نقطة انعطاف

(10) الربط بين $f\ ,\ f'\ ,\ f''$: f دالة متّصلة على $[0, 3]$ وتحقّق الآتي:

x	0	1	2	3
f	0	2	0	-2
f'	3	0	غير موجودة	-3
f''	0	-1	غير موجودة	0

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	$+$	$+$	$-$
f'	$+$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$-$

(a) أوجد القيم القصوى المطلقة لـ f وأين تتحقّق.

(b) أوجد أيّ نقاط انعطاف.

(c) ارسم بيانًا تقريبيًّا ممكنًا للدالّة f.

(11) لنأخذ الدالة f : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (a \neq 0\ ,\ c \neq 0)$

أوجد قيم a, b, c, d إذا كان منحنى f له الخصائص التالية:

(a) $y = 2$ مقارب أفقي.

(b) $x = \frac{1}{2}$ مقارب رأسي.

(c) يمر بالنقطة $A(-1\ ,\ 1)$

(12) لتكن الدالة f المعرَّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2x^2 - 4x$ و(C) منحناها.

(a) ادرس تغير f وضع جدول التغير ثم ارسم (C).

(b) استنتج منحنى الدالة g : $g(x) = |2x^2 - 4x|$.

(c) استنتج منحنى الدالة h : $h(x) = 2x^2 - 4|x|$.

(13) (a) هل يمكن أن يكون المستقيم $y = 7x + 9$ مماسًا لمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 + 4x + 11$؟

(b) في حال الإيجاب حدّد نقاط التماس.

(14) لتكن f : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

(a) ادرس تغيّر f وارسم بيانها (C).

(b) حدّد النقاط على (C) حيث يكون المماس موازيًا للمستقيم $y = 3x + 5$

(15) ليكن (C) و(C') منحنيي الدالتين f وg المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ و $g(x) = x^2 - 3x$

(a) ادرس تغير كل من الدالتين f وg ونهاياتهما.

(b) أوجد إحداثيات النقطة المشتركة بين منحنيي الدالتين.

(c) أوجد معادلات مستقيمات المماس في هذه النقطة على (C) و(C').

(d) ارسم (C) و(C').

الوحدة الرابعة: الإحصاء Statistics

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

4–1: التقدير واختبارات الفروض

جزء 1: التقدير بنقطة.

جزء 2: التقدير بفترة الثقة.

جزء 3: القيمة الحرجة.

4–2: اختبارات الفروض الإحصائية

جزء 1: الفرض الإحصائي.

جزء 2: فرض العدم والفرض البديل.

4–3: الارتباط والانحدار

جزء 1: الارتباط.

جزء 2: الانحدار.

مقدمة الوحدة

ما دور الإحصاء في تقييم الإنتاج؟ الكلفة والبيع والربح.

ما دور الإحصاء في مجالات متعددة من اهتماماتنا اليومية؟

استخدام الأدوية ومفعولها، معالجة الأمراض وحدود نجاحها أو فشلها...

يرتكز دور الإحصاء على ضمانة الدراسة لجهة كونها مفيدة ومقبولة، ويعتمد عليها، ويمكن فهمها.

يجب التمعن جيّدًا بمدلول النتائج التي نحصل عليها لاتخاذ القرار المناسب على سبيل المثال، إذا كان المنتج A أفضل من المنتج B أم لا.

يعتمد الإحصائي في البدء على تحليل البيانات باستخدام طرائق استقصائية عامة ترتكز على تمثيلات بيانية وقياسات عددية.

يستكشف البيانات لأنه لا يعرف مسبقًا النتائج التي يمكن الحصول عليها لذا يستخدم في هذه المرحلة مخططات الانتشار والصندوق ذي العارضتين والمدرج التكراري لعرض ووصف البيانات.

ومن المتعارف عليه أن الإحصائي يتعامل مع عينات المجتمع الإحصائي لذا يوجد أخطاء معيارية خاصة بكل عينة، مثل الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي، والخطأ المعياري للانحراف المعياري، والخطأ المعياري لمُعامل الارتباط.

هل يساعد الأسبيرين على تجنب النوبات القلبية الحادة؟

سؤال يطرح دائمًا من ضمن مجموعة أسئلة في الطب الوقائي.

في تجربة أجريت على 22 000 شخص في إحدى الدول حيث تناول نصفهم جرعات من الأسبيرين وتناول النصف الآخر جرعات أدوية وهمية جاءت النتائج كما يلي:


الوحدة الرابعة

الإحصاء

Statistics

مشروع الوحدة: ما هي أفضل طريقة لإيجاد وظيفة؟

1. مقدمة المشروع: بعد التخرج يواجه الحاصلون على الإجازات والشهادات الجامعيّة تحدّ جديد هو الانخراط في سوق العمل.
2. الهدف: هو البحث عن فرص عمل من خلال القيام بعدة خطوات ومحاولات متنوعة واستخدام العديد من الوسائل.
3. اللوازم: حاسوب – شبكة الإنترنت.
4. أسئلة حول التطبيق:
   - a كيف ستختار عينة عشوائية من الموظفين للاستفسار عن الوسيلة التي استخدموها في إيجاد وظيفتهم؟
   - b ما الخيارات التي اكتشفتها؟ نظّمها في استمارة.

   (إرشاد):
   - من خلال الأصدقاء والمعارف.
   - من خلال الإعلانات في الصحف والمجلات.
   - من خلال الوكالات المختصة في الربط بين سوق العمل وطالبي الوظائف.
   - من خلال البحث عبر شبكة الإنترنت.
   - من خلال التقدم مباشرة لطلب وظيفة من الشركة المختصة أو اعتماد وسيلة أخرى (اذكرها ...).

   - c حدّد النسب المئوية لكل خيار ممّا سبق.
5. التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يحدّد النسب التي حصلت عليها من خلال العينة العشوائيّة التي اعتمدتها مكوّنًا جدولًا بالنسب المئوية عن كل وسيلة تمّ استخدامها لإيجاد وظيفة.

القرار: ضمّن تقريرك بعض الاقتراحات والنصائح والاستنتاجات التي نتجت عن تلك الدراسة.

دروس الوحدة

التقدير	اختبارات الفروض الإحصائية	الارتباط والانحدار
4–1	4–2	4–3

166

- 104 أشخاص من أصل 11 000 تناولوا جرعات الأسبيرين أصيبوا بنوبات قلبية حادة.
- 189 شخصًا من أصل 11 000 تناولوا جرعات وهمية أصيبوا بنوبات قلبية حادة.

هل يمكن أن تبيّن هذه النتائج مدلولًا إحصائيًّا تناقصيًّا للإصابة بنوبات قلبية حادة بين أفراد العينة الذين يتناولون جرعات الأسبيرين؟

يمكن استخدام دروس هذه الوحدة للإجابة عن هذا السؤال خاصة أنه مهم بالنسبة إلى أعمار عدد كبير من الأشخاص.

مشروع الوحدة

إن الهم الأساسي للمتخرجين من المعاهد والجامعات هو إيجاد فرصة عمل وهنا تكمن المشكلة في الوسيلة الأفضل والأنجح لإيجاد فرصة العمل.

من هنا يعالج مشروع الوحدة بعض الوسائل المتبعة للدخول في سوق العمل.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) قد تختلف الإجابات بحسب كل طالب.

(b) تتنوّع الاستمارات بحسب كل طالب.

(c) تتنوّع الإجابة بحسب كل طالب لأنه ربما قد يجد وسيلة غير تلك المذكورة سابقًا.

التقرير

اِعرض تقريرك أمام الصف ليتم مناقشته وذلك من خلال مقارنة الأرقام والنسب المئوية المرتبطة بكل وسيلة، ثم استخدام هذه الأرقام والنسب في عملية البحث عن فرصة عمل ومقارنتها مع الأرقام المشابهة في تقارير زملائك في الصف ليعمل على اعتمادها أو تصحيحها أو حتى رفضها في حال كان هناك فوارق كبيرة في ما بينها.

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي — الوسيط — المنوال.
- تعلمت المجتمع الإحصائي.
- تعلمت العينة العشوائية وأنواعها واستخداماتها.

ماذا سوف تتعلم؟

- يُعرّف المعلمة والإحصاءة.
- إيجاد التقدير بنقطة.
- إيجاد التقدير بفترة ثقة.
- استكشاف الفروض الإحصائية.
- يُعرّف الاختبارات الإحصائية ويجريها.
- اتخاذ القرار المناسب.
- يتعرف الارتباط والانحدار.
- يوجد مُعامل ارتباط بيرسون.
- يكتب معادلة خط الانحدار ويتنبأ.

أضف إلى معلوماتك

في الوسائل الإعلامية المرئية والمسموعة والمكتوبة تطالعك نتائج إحصائية تتحدث عن توقعات أحداث معينة تتناول انتخابات نيابية أو رئاسية أو مبيعات أو مباريات... وأكثر ما يستوقفك هو نسبة مئوية معينة مع هامش خطأ محدد والسؤال المهم هو: كيف يتم التقدير وكيف يحتسب هامش الخطأ؟ توفر دروس هذه الوحدة فرصة أمام الطلاب للتعرّف على التقدير وهامش الخطأ والفروض الإحصائية وكيفية احتسابها.

كما يتعرف الطلاب على مفهوم الارتباط والانحدار ويحتسبوا معامل ارتباط بيرسون ثم يكتبوا معادلة خط الانحدار ويتنبؤا نتائج معينة.

المصطلحات الأساسية

المعلمة — الإحصاءة — التقدير — التقدير بنقطة — فترة الثقة — التقدير بفترة الثقة — درجة الثقة — التوزيع الطبيعي — القيمة الحرجة — هامش الخطأ — الخطأ المعياري — خواص التوزيع t — الفروض الإحصائية — المقياس الإحصائي — فرض العدم — الفرض البديل — القرار — الانحدار — المخطط الانتشاري — الارتباط — مُعامل الارتباط الخطي — خواص مُعامل الارتباط — مُعامل ارتباط بيرسون — التنبؤ.

167

سلّم التقييم

4	جدول النسب المئوية صحيح بالكامل — الاقتراحات والاستنتاجات ممتازة ومفيدة — التقرير منظم وواضح ويعكس نتائج بحث مميز.
3	بعض الأخطاء في الجدول — الاقتراحات والاستنتاجات جيدة ومفيدة — التقرير منظم وواضح ولكن ينقصه الدقة في بعض النقاط.
2	أخطاء كثيرة في الجدول — الاقتراحات والاستنتاجات مقبولة — التقرير غير منظم وينقصه الوضوح في التفاصيل.
1	معظم عناصر المشروع بحاجة إلى إعادة لأنها ناقصة.

1–4: التقدير

1 الأهداف

- التعرف على التقدير بنقطة.
- إيجاد التقدير بفترة ثقة.
- إيجاد هامش الخطأ.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المعلمة – الإحصاءة – تقدير المعلمة – التقدير –التقدير بنقطة – التقدير بفترة الثقة – درجة الثقة (مستوى الثقة) – نسبة الخطأ (مستوى المعنوية) – القيمة الحرجة – هامش الخطأ – درجات الحرية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد المتوسط الحسابي للأعداد التالية:

(1) 1, 1, 1, 1, 1

(2) −3, −2, −1, 3, 2, 1

(b) أوجد الوسيط للأعداد التالية:

(1) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

(2) 6, 6, 6, 6, 6

(c) أوجد المنوال للأعداد التالية:

8, 16, 7, 9, 10

5 التدريس

التأكيد على أهمية التقديرات في علم الإحصاء وكيفية التعامل معها يحتاج إلى الكثير من الدقة والانتباه خاصة عند إجراء الحسابات اللازمة، ومعرفة الفرق بين مستوى الثقة، وفترة الثقة، والقيمة الحرجة.


4–1

التقدير

Estimation

سوف تتعلم
- التقدير بنقطة.
- التقدير بفترة الثقة.
- هامش الخطأ.

المفردات والمصطلحات:
- المعلمة Parameter
- الإحصاءة Statistic Function
- تقدير المعلمة Parameter Estimate
- تقدير Estimation
- تقدير بنقطة Point Estimate
- تقدير بفترة الثقة Confidence Interval Estimation
- درجة الثقة (مستوى الثقة) (Level of Confidence) Degree of Confidence
- نسبة الخطأ (مستوى المعنوية) Percentage of error (Significance Level)
- القيمة الحرجة Critical Value
- هامش الخطأ Margin of Error
- درجات الحرية Degree of Freedom

دعنا نفكر ونتناقش

متوسط عدد الرحلات الجويّة المغادرة يوميًّا خلال شهر يونيو من أحد المطارات هو 75 رحلة.
هل يمكن استخدام هذه العيّنة لتقدير متوسّط عدد الرحلات μ خلال أشهر السنة؟ لماذا؟
وما هي أفضل وسيلة للتقدير لنقترب من الحقيقة؟

سبق لنا في الصف الحادي عشر تعريف المجتمع الإحصائي والعينة العشوائية والأسباب التي تؤدي إلى أخذ العينات لدراسة المجتمع بدلًا من الحصر الشامل، وذلك لتقدير المتوسط (الوسط) الحسابي للمجتمع μ أو الانحراف المعياري له σ.

ويعتبر الوسط الحسابي للمجتمع μ والانحراف المعياري للمجتمع σ من معالم المجتمع، وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة.

ولتقدير هذه المعالم نلجأ إلى سحب عينة عشوائية منه، ثم نحسب المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري S والذي يعتمد على قيم العينة ولا يعتمد على معالم المجتمع.

المعلمة (Parameter): هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

الإحصاءة (Statistic Function): هو اقتران تتعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري S.

تقدير المعلمة (Parameter Estimate): هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككلّ وتوزيعه.

في هذا الدرس سوف تتعرف طريقتين تساعدان على إيجاد قيم تقديرية لبعض معالم مجتمع معين:
- **طريقة أولى:** التقدير بنقطة.
- **طريقة ثانية:** التقدير بفترة الثقة.

تذكر:
الاقتران هو قيمة تربط مفردات معينة وتنتج منها.

168


التقدير بنقطة Point Estimate

التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.

فمثلًا المتوسط الحسابي للعينة العشوائية $\overline{x}$ يستخدم كتقدير بنقطة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ، وكذلك الانحراف المعياري للعينة S يستخدم كتقدير بنقطة للانحراف المعياري للمجتمع σ.

التقدير بفترة الثقة Confidence Interval Estimation

علمنا مما سبق أن لكل مجتمع معالم منها المتوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ، ودرسنا كيفية إيجاد التقدير بنقطة لتلك المعالم. وعلمنا أن التقدير بنقطة لإحدى معالم المجتمع هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة، ولذلك فإن احتمال الخطأ في التقدير بنقطة يكون كبيرًا.

وبناء عليه فإنه من الأفضل إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو باحتمال معين. إن مثل هذه الفترة تسمى فترة الثقة.

فترة الثقة Confidence Interval

هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).

التقدير بفترة الثقة

هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معيّن.

درجة الثقة (مستوى الثقة)

Degree of Confidence (Level of Confidence)

إن درجة الثقة أو مستوى الثقة هو احتمال $(1 - \alpha)$ أن تكون فترة الثقة تحوي القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع قيد الدراسة، وعادة يعبّر عنها كنسبة مئوية.

أما α فهي نسبة الخطأ في التقدير وتسمى **مستوى المعنوية** أو مستوى الدلالة.

فمثلًا:
- إذا كانت $\alpha = 0.05$ حينها تكون درجة الثقة $1 - \alpha = 0.95$ أي 95%
- إذا كان مستوى الثقة 90% فإن مستوى المعنوية $\alpha = 10\%$
- أيضًا إذا كان مستوى الثقة 99% فإن مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$

ومن هذه الخيارات الثلاثة، يعتبر مستوى الثقة 95% هو الأكثر انتشارًا لأنه يؤمن التوازن الأنسب بين الدقة الموضحة من خلال طول فترة الثقة والدقة الموضحة من خلال مستوى الثقة.

تذكر:
المتوسط الحسابي لعينة = مجموع قيم البيانات / عدد البيانات

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

الانحراف المعياري لعينة:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

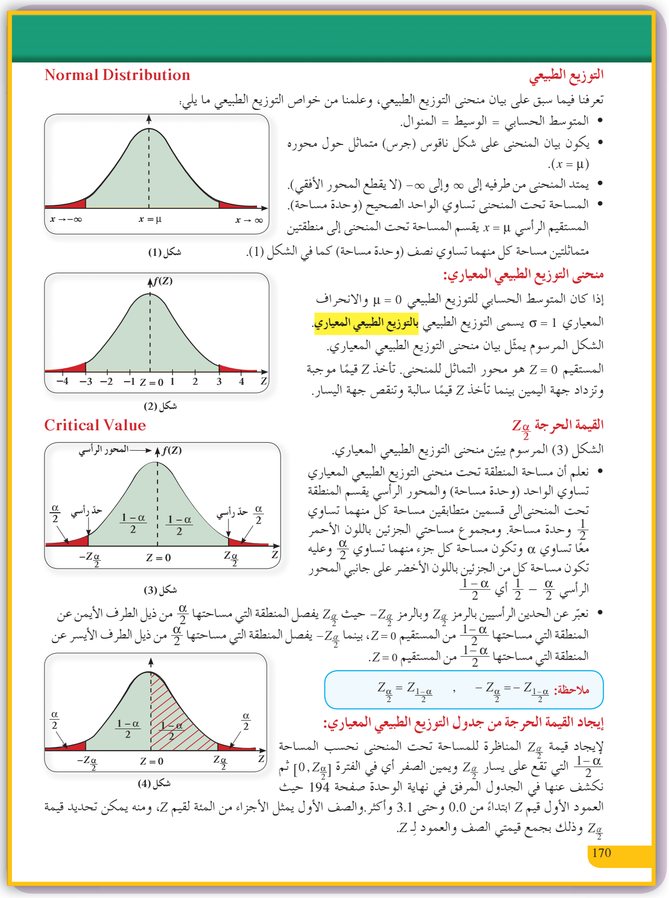
تذكر:
المتوسط الحسابي للمجتمع

$$\mu = \frac{\Sigma x_i}{N}$$

الانحراف المعياري للمجتمع:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{N}}$$

169


Normal Distribution التوزيع الطبيعي

تعرفنا فيما سبق على بيان منحنى التوزيع الطبيعي، وعلمنا من خواص التوزيع الطبيعي ما يلي:

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره ($x = \mu$).
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى ∞ وإلى $-\infty$ (لا يقطع المحور الأفقي).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).

المستقيم الرأسي $x = \mu$ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (وحدة مساحة) كما في الشكل (1).

شكل (1)

منحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي $\mu = 0$ والانحراف المعياري $\sigma = 1$ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري**.

الشكل المرسوم يمثّل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

المستقيم $Z = 0$ هو محور التماثل للمنحنى. تأخذ Z قيمًا موجبة وتزداد جهة اليمين بينما تأخذ Z قيمًا سالبة وتقص جهة اليسار.

شكل (2)

Critical Value القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$

الشكل (3) المرسوم يبيّن منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

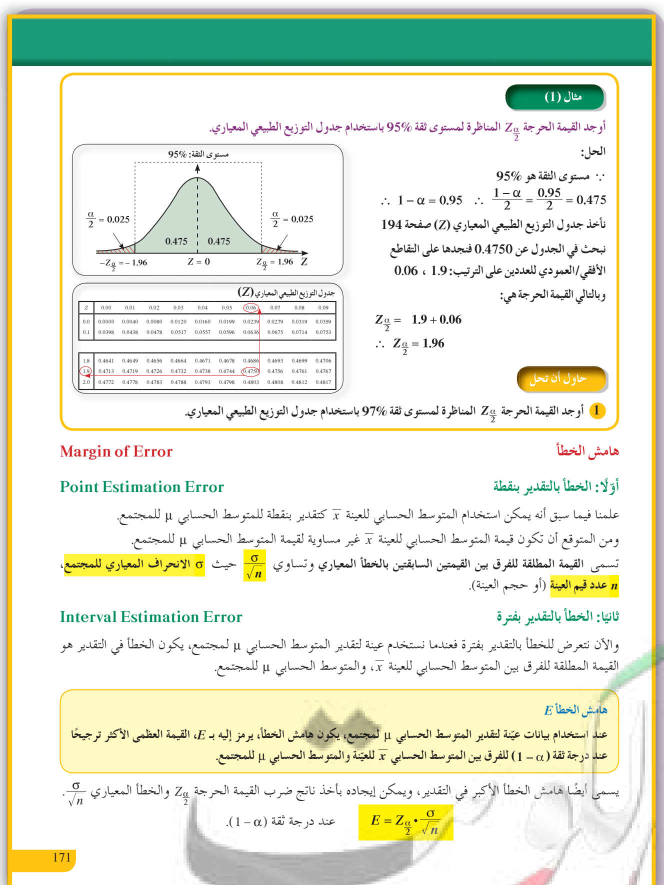
شكل (3)

ملاحظة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ ، $-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$

إيجاد القيمة الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

شكل (4)

170


مثال (1)

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

الحل:

$\because$ مستوى الثقة هو 95%

$\therefore 1-\alpha = 0.95 \quad \therefore \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.95}{2} = 0.475$

نأخذ جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z) صفحة 194

نبحث في الجدول عن 0.4750 فنجدها على تقاطع الأفقي/العمودي للعددين على الترتيب: 1.9 ، 0.06

وبالتالي القيمة الحرجة هي:

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.9 + 0.06$

$\therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

حاول أن تحل

1 أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

Margin of Error هامش الخطأ

Point Estimation Error أولًا: الخطأ بالتقدير بنقطة

Interval Estimation Error ثانيًا: الخطأ بالتقدير بفترة

هامش الخطأ E

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ عند درجة ثقة $(1-\alpha)$.

171

في المثال (1)

يستخدم الطالب جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95%.

أرشد الطلاب في البحث عن العدد 0.4750 لإيجاد قيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ وليتعرفوا كيفية التعامل مع الجدول.

ملاحظة: في حالة عدم وجود العدد في الجدول نأخذ أقرب قيمتين له وتكون القيمة الحرجة هي المتوسط الحسابي للقيمة المناظرة لهاتين القيمتين.

في المثال (2)

يوجد الطالب هامش الخطأ ثم فترة الثقة ويفسرها باستخدام مستوى الثقة 95% لعينة مكونة من 40 شخصًا حيث الانحراف المعياري 12.5 و $\overline{x} = 76.3$ علمًا أن الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي معلوم.

ذكّر الطلاب بأن فترة الثقة هي $(\overline{x}-E \,,\, \overline{x}+E)$.

تأكد من أن الطلاب قادرين على تفسير فترة الثقة. اطلب إلى بعضهم إعادة صياغة التفسير الموجودة في كتاب الطالب ص 172.

في المثال (3)

تطبيق مباشر لمفهوم هامش الخطأ وفترة الثقة بمعلومية حجم العينة ومتوسطها الحسابي وتباينها علمًا أن تباين المجتمع الإحصائي غير معلوم.

ناقش مع الطلاب تفسير فترة الثقة.

في المثال (4)

ألفت انتباه الطلاب إلى أن حجم العينة $n = 25 < 30$ وأن التباين للمجتمع الإحصائي غير معلوم لذا يجب استخدام توزيع t ودرجة الحرية 24 لحساب هامش الخطأ وفترة الثقة. لاحظ أن $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025} = 2.064$

اطلب إلى الطلاب العمل على أمثلة بديلة لإيجاد $t_{\frac{\alpha}{2}}$ على جدول التوزيع t.

شدّد على الحالات التي يتم فيها استخدام $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $(n > 30)$ وأيضاً على الحالات التي يتم فيها استخدام $t_{\frac{\alpha}{2}}$ $(n \le 30)$.

6 الربط

يوفّر المثالان (2)، (3) فرصة للطلاب للتعرف على كيفية استخدام فترة الثقة في مواقف حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام جدول التوزيع الطبيعي، وجدول التوزيع t لإيجاد القيم الحرجة، لهذا أعطهم أمثلة أخرى لتخطي هذه المشكلة.

8 التقييم

من المهم جدًّا متابعة عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لمعرفة مدى قدرتهم على فهم واستيعاب المطلوب منهم وحلّه.

اختبار سريع

1 عينة عشوائية حجمها 40 متوسطها الحسابي $\overline{x} = 15$ وتباينها 20 باستخدام مستوى ثقة 95%.

(a) أوجد هامش الخطأ. $E \approx 1.386$

(b) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ. $(13.614 , 16.386)$

(c) فسّر فترة الثقة.

عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 40)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

2 عينة عشوائية حجمها $n = 21$ متوسطها الحسابي: $\overline{x} = 25$ وتباينها $S^2 = 16$. استخدم مستوى معنوية 5% لإيجاد:

(a) هامش الخطأ.

σ غير معلوم، $n = 21 < 30$: نستخدم توزيع t، $S = 4$

درجات الحرية: $n - 1 = 21 - 1 = 20$

مستوى الثقة: $1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$

نوجد: $\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$

من جدول التوزيع t تكون قيمة $t_{0.0250} = 2.086$

هامش الخطأ: $E = 2.086 \times \frac{4}{5} = 1.6688$

(b) فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

فترة الثقة: $(\overline{x} - E \, , \, \overline{x} + E)$

$= (23.3312 \, , \, 26.6688)$

وحتى يكون الخطأ في التقدير أقل ما يمكن يجب أن تتحقق المتباينة:

$$|\overline{x} - \mu| < E$$

أي أن: $|\mu - \overline{x}| < E$

$$-E < \mu - \overline{x} < E$$

$$\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$$

وعليه تكون فترة الثقة هي: $(\overline{x} - E \, , \, \overline{x} + E)$

التقدير بفترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي
Confidence Interval Estimation for the Mean Value μ of Statistical Population

أوّلًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع معلوم

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي (μ , σ^2) حيث تباينه σ^2 معلوم وحجم العينة $n > 30$ أو $n \leq 30$ فإن تقدير فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ هو:

$(\overline{x} - E \, , \, \overline{x} + E)$ عند درجة ثقة $(1 - \alpha)$

حيث $\overline{x}$ المتوسط الحسابي للعينة، E هامش الخطأ.

وتسمى القيمتان $\overline{x} - E \, , \, \overline{x} + E$ **طرفي فترة الثقة**.

ملاحظة: عند إيجاد فترة الثقة سنكتفي بدرجة الثقة 95% والتي تناظرها القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

إذا كانت σ^2 معلومة و $n > 30$ أو $n \leq 30$.

1. نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96
2. نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، حيث σ هي الانحراف المعياري للمجتمع.
3. نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E \, , \, \overline{x} + E)$.

تفسير فترة الثقة

عند اختيار عينات عشوائية مختلفة متساوية في الحجم (n) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95% من فترات الثقة هذه تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع (μ).

فمثلًا عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (n) وفي كل مرة نحسب $\overline{x}$ وفترة الثقة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي μ الحقيقية و5 فترات لا تحويها.

172

تمرَّنْ 4−1

التقدير
Estimation

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لكل من درجات الثقة التالية، وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

(a) 97% **(b)** 99.2%

(2) قامت شركة عالميّة بدراسة لمعرفة مدى أداء سياراتها، فأخذت عينة من 1 000 سيارة. استنتجت أن المتوسط الحسابي لبقاء السيارة في حالة جيدة هو 5 سنوات. أوجد فترة الثقة للمعلمة μ عند درجة ثقة 95%، علمًا أن التباين σ^2 معلوم ويساوي 0.25 وآخذًا بالاعتبار أن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًّا.

(3) عينة عشوائية حجمها $n = 13$، أعطت $\overline{x} = 30$، $\sigma = 3.5$. أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع μ المجهولة علمًا أن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًّا. هل تتضمن هذه الفترة المتوسط الحسابي μ؟

(4) إذا كان المتوسط الحسابي لعينة من 40 شخصًا هو $\overline{x} = 172.5$ والانحراف المعياري $\sigma = 119.5$.

فأوجد تقديرًا لفترة ثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

(5) في دراسة للمدّة الزمنيّة المطلوبة من طلاب جامعيين لإنهاء دراستهم، اختير عشوائيًّا 80 طالبًا، فكان متوسط السنوات لهذه العينة (سنوات) $\overline{x} = 4.8$، والانحراف المعياري لهذه العينة $S = 2.2$.

أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع μ.

(6) عينة عشوائية حجمها $n = 16$ أُخذت من مجتمع إحصائي حيث التباين $S^2 = 15$، وعلم أن المتوسط الحسابي $\overline{x} = 13$.

أوجد فترة الثقة للمعلمة المجهولة μ عند درجة ثقة 95%.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمرينين (1−2)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت الإجابة خاطئة.

(1) إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96% هي 2.055 — (a) (b)

(2) إذا أخذنا عينة من 225 هاتفًا، ووجدنا أنّ متوسط صلاحية استخدامها $\overline{x}$ هو 1.7 سنة، والانحراف المعياري $S = 0.5$، ودرجة الثقة 95% فنجد أن فترة الثقة هي: $2.63 < \mu < 2.76$ — (a) (b)

71

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

كلا، ليس من الضرورة أن يكون المتوسط الحسابي مشتركًا بين كل أشهر السنة بعدد الرحلات الجوية من مطار الكويت.

أفضل وسيلة هي التقدير بفترة.

«حاول أن تحل»

1. $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$
2. (1) $E = 1.4112$

   (2) $(16.9888\ ,\ 19.8112)$

   (3) عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $n = 25$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

مثال (3)

عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16، باستخدام مستوى ثقة 95%:

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

الحل:

حجم العينة: $n = 36$, المتوسط الحسابي: $\overline{x} = 60$

التباين: $S^2 = 16$ ، الانحراف المعياري: $S = 4$

1. $\because$ مستوى الثقة 95%

$$\therefore\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$\because$ σ^2 غير معلوم ، $n > 30$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{36}} = 1.3066$$

$\therefore$ هامش الخطأ ≈ 1.3067

2. فترة الثقة هي:

$$(\overline{x} - E\ ,\ \overline{x} + E) = (60 - 1.3067\ ,\ 60 + 1.3067) = (58.6933\ ,\ 61.3067)$$

3. عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 36)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقّع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

حاول أن تحل

3. أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\overline{x} = 50$، وانحرافها المعياري $S = 9$، باستخدام مستوى ثقة 95%.
   1. أوجد هامش الخطأ.
   2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
   3. فسّر فترة الثقة.

ثالثًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$ فإن توزيع العينة لا يؤول إلى التوزيع الطبيعي وفي هذه الحالة يلزمنا استخدام توزيع آخر هو توزيع t **للعينات الصغيرة** التي حجمها $n \leqslant 30$ ويكون تقدير فترة الثقة $(1 - \alpha)$ للمتوسط الحسابي μ هو $(\overline{x} - E\ ,\ \overline{x} + E)$.

حيث $\overline{x}$ المتوسط الحسابي للعينة، E هامش الخطأ.

174

مثال (2)

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 76.3$. باستخدام مستوى ثقة 95%

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

الحل:

1. $\because$ مستوى الثقة 95%

$\therefore$ القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

نلاحظ أن σ معلومة $\quad \therefore\ E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\overline{x} = 76.3 \quad , \quad \sigma = 12.5 \quad , \quad \because\ n = 40$

هامش الخطأ:

$$E = 1.96 \times \frac{12.5}{\sqrt{40}}$$

$$E \approx 3.87379$$

$\therefore$ هامش الخطأ ≈ 3.8738

2. فترة الثقة هي:

$$(\overline{x} - E\ ,\ \overline{x} + E) = (76.3 - 3.8738\ ,\ 76.3 + 3.8738) = (72.4262\ ,\ 80.1738)$$

3. عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 40)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقّع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

حاول أن تحل

2. من المثال (2) إذا أجريت الدراسة على عينة أخرى من الإناث حجمها 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 18.4$
   باستخدام مستوى ثقة 95%
   1. أوجد هامش الخطأ.
   2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
   3. فسّر فترة الثقة.

ثانيًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n > 30$

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

1. نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96
2. نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ ، حيث S هي الانحراف المعياري للعينة.
3. نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E\ ,\ \overline{x} + E)$.

173

في التمارين (3–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(3) إنّ القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96.6% هي:

ⓐ 2.12 ⓑ 2.17 ⓒ 21.2 ⓓ 21%

(4) المتوسط الحسابي لدرجات 9 طلاب هو $\overline{x} = 2.76$ حيث النهاية العظمى 4 درجات والانحراف المعياري $S = 0.87$. إنّ فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي عند درجة ثقة 95% هي:

ⓐ (2.1916 , 3.3284) ⓑ (1.6232 , 3.8968)

ⓒ (2.1916 , 3.8968) ⓓ (2.0913 , 3.4287)

(5) لنفترض أن متوسط مجتمع إحصائي يقع ضمن الفترة $62.84 < \mu < 69.46$ فمتوسط هذه العينة يساوي:

ⓐ 56.34 ⓑ 62.96 ⓒ 6.62 ⓓ 66.15

(6) إن حجم العينة المطلوبة لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع مع هامش خطأ وحدتين، ومستوى ثقة 95%، وانحراف معياري للمجتمع $\sigma = 8$ يساوي:

ⓐ 65 ⓑ 62 ⓒ 8 ⓓ 26

(7) أنجز 16 طالبًا في كلية الطب قياس ضغط الدم لدى الشخص نفسه فحصلوا على النتائج التالية:

134، 138، 130، 135، 120، 125، 120، 130، 135، 144، 143، 140، 130، 150، 140، 130

على افتراض أن الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي $\sigma = 10\ \text{mm Hg}$ فإن فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي هي:

ⓐ (129.1 , 131.55) ⓑ (129.1 , 138.9)

ⓒ (131.55 , 136.45) ⓓ (136.45 , 138.9)

(8) تتقارب قيمتي Z , t المتناظرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري إذا زادت درجات الحرية عن:

ⓐ 29 ⓑ 28 ⓒ 27 ⓓ 26

72

3 (1) $E = 1.96$

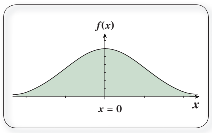
(2) $(48.04\ ,\ 51.96)$

(3) عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $n = 81$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

4 $(8.2187\ ,\ 8.5813)$

خواص التوزيع t — Properties of t Distribution

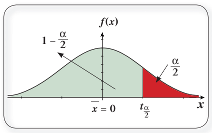
1. توزيع متماثل حول متوسطه الحسابي والذي يساوي صفرًا، ويمتد إلى ∞ من جهة اليمين وإلى $-\infty$ من جهة اليسار ويزداد قربًا من الصفر في الجهتين.
2. انحرافه المعياري أكبر من الواحد.
3. يعتمد هذا التوزيع على درجات الحرية والتي تساوي (حجم العينة – 1) أي $(n-1)$.
4. التوزيع t يشبه التوزيع الطبيعي إلّا أن قمته أكثر انخفاضًا من التوزيع الطبيعي.
5. كلما زادت درجات الحرية اقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعي ويقترب انحرافه المعياري إلى الواحد الصحيح.



إيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع t

لإيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع t حيث يبيّن العمود الأول قيم درجات الحرية $(n-1)$ وتبدأ من 1 إلى 30 وأكثر والصف الأول يمثّل قيم $\frac{\alpha}{2}$ ومنه يمكن تحديد $t_{\frac{\alpha}{2}}$. لاحظ أن:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$



هامش الخطأ للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي (في حالة σ^2 غير معلوم، $n \le 30$)

Margin of Error for Mean Value of Statistical Population where σ^2 is not known and $n \le 30$

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

حيث S الانحراف المعياري للعينة

فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي (في حالة σ^2 غير معلوم، $n \le 30$)

Confidence Interval for Mean Value of Statistical Population where σ^2 is not known and and $n \le 30$

$$(\bar{x} - E\ ,\ \bar{x} + E)$$

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحساب μ إذا كانت σ^2 غير معلومة، $n \le 30$:

1. نوجد درجات الحرية $(n-1)$.
2. نوجد القيمة الحرجة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% من جدول توزيع t.
3. نوجد هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
4. نوجد فترة الثقة $(\bar{x} - E\ ,\ \bar{x} + E)$.

175

مثال (4)

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (S) يساوي 10 ومتوسطها الحسابي $(\bar{x})$ يساوي 15، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

1. هامش الخطأ.
2. فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

الحل:

1. $\because$ σ^2 غير معلوم ، $n \le 30$

$\therefore$ نستخدم توزيع t.

$\because\ n = 25$

$\therefore$ درجات الحرية: $n - 1 = 25 - 1 = 24$

$\because$ مستوى الثقة: $1 - \alpha = 95\%$

$\therefore\ 1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 0.050$

$\therefore\ \frac{\alpha}{2} = 0.025$

من جدول توزيع t تكون قيمة $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025}$ مناظرة للعدد 2.064

هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

$= 2.064 \times \frac{10}{\sqrt{25}}$

$\therefore$ هامش الخطأ $= 4.128$

2. فترة الثقة: $(\bar{x} - E\ ,\ \bar{x} + E)$

$= (15 - 4.128\ ,\ 15 + 4.128)$

$= (10.872\ ,\ 19.128)$

حاول أن تحل

4. أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علمًا أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $n = 13$ ، $S = 0.3$ ، $\bar{x} = 8.4$

176

4–2: اختبارات الفروض الإحصائية

1 الأهداف

- إيجاد القيمة الحرجة.
- إيجاد مستوى المعنوية.
- إيجاد درجة المعنوية.
- طرح الفروض الإحصائية (فرض العدم – الفرض البديل).
- اختبار الفروض الإحصائية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الفرض الإحصائي – المقياس الإحصائي – اختبارات الفروض الإحصائية – فرض العدم – الفرض البديل.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ما القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لمستويات الثقة:
95% , 90% , 80%؟

(b) ما الفرق بين مستوى الثقة ومستوى المعنوية؟

(c) متى يستخدم التوزيع t؟ ومتى يستخدم التوزيع الطبيعي؟

(d) ما درجات الحريّة؟

5 التدريس

في هذا الدرس يتعلّم الطالب كيفية وضع فروض واتخاذ القرارات المناسبة على ضوء نتائج الحسابات الّتي سيقوم بها.

وضّح أنّ الفرض هو ادّعاء أو تصريح حول خاصيّة ما للمجتمع ولاختبار صحّة هذا الادّعاء علينا القيام بعدّة خطوات متسلسلة:

(a) وضع الفروض H_0 ، H_1 المناسبة.

(b) احتساب القيمة Z أو t (الاختبار الإحصائي).

(c) إيجاد الفترة المناسبة.

(d) اتخاذ قرار : • رفض فرض العدم

• عدم رفض فرض العدم

4–2

اختبارات الفروض الإحصائية

Statistical Hypotheses Testing

دعنا نفكر ونتناقش

ينتج مصنع نوعًا معينًا من المعلبات مسجّل على العلبة أن الوزن الصافي 200 g. فإذا تمّ أخذ عينة حجمها 100 علبة وتمّ حساب المتوسط الحسابي لأوزان هذه العينة فوجد أنه 197.3 g ، فهل يمكن الحكم على هذا المصنع بأنه يقوم بغش تجاري؟ ما هي حيثيات هذا الحكم؟

نحن نعلم أنه في كثير من الأحيان وفي مواقف معينة نحتاج إلى اتخاذ قرار بناء على معلومات محددة وحيثيات معقولة لها مبررها، لذلك دعت الضرورة إلى دراسة ما يسمى بالفرض الإحصائي واختبارات الفروض الإحصائية.

تعريف: الفرض الإحصائي Statistic Hypothesis

هو ادعاء معيّن مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

تعريف: المقياس الإحصائي

هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

تعريف: اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية)

هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

ملاحظة: سنكتفي في هذا الموضوع بدراسة معلمة واحدة من معالم المجتمع وهي المتوسط الحسابي μ.

إليك بعض الأمثلة عن الفروض التي يمكن اختبارها من خلال الطرق التي سنطوّرها في هذا الدرس. على سبيل المثال:

- **في إدارة الأعمال:** تدّعي إحدى الصحف في مقال لها أنّ معظم الموظّفين يجدون عملًا عن طريق وكالات التوظيف.
- **في الطب:** يدّعي باحثون في الطبّ أنّ متوسّط درجة حرارة جسم أي بالغ معافى ليست 37°C.

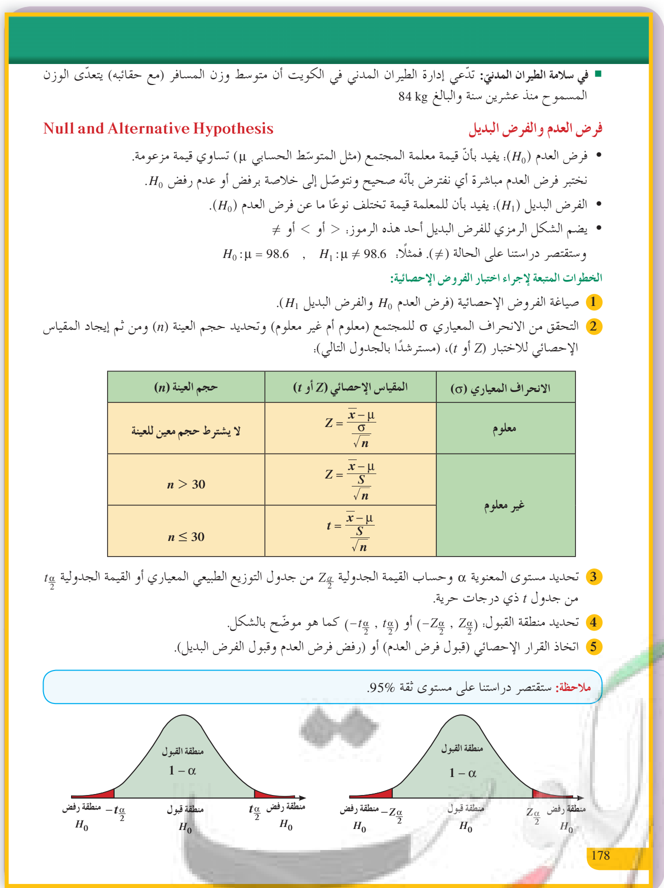
سوف تتعلم

- القيمة الحرجة.
- مستوى المعنوية.
- درجة المعنوية.
- الفروض.
- اختبار الفروض.
- فرض العدم.
- الفرض البديل.

المفردات والمصطلحات:

- الفرض الإحصائي Statistic Hypothesis
- المقياس الإحصائي Statistical Scale
- اختبارات الفروض الإحصائية Statistical Hypotheses Testing
- فرض العدم Null Hypothesis
- الفرض البديل Alternative Hypothesis

177



- **في سلامة الطيران المدنيّ:** تدّعي إدارة الطيران المدني في الكويت أن متوسط وزن المسافر (مع حقائبه) يتعدّى الوزن المسموح منذ عشرين سنة والبالغ 84 kg

فرض العدم والفرض البديل Null and Alternative Hypothesis

- فرض العدم (H_0): يفيد بأنّ قيمة معلمة المجتمع (مثل المتوسّط الحسابي μ) تساوي قيمة مزعومة.
نختبر فرض العدم مباشرة أي نفترض بأنّه صحيح ونتوصّل إلى خلاصة برفض أو عدم رفض H_0.
- الفرض البديل (H_1): يفيد بأن للمعلمة قيمة تختلف نوعًا ما عن فرض العدم (H_0).
- يضم الشكل الرمزي للفرض البديل أحد هذه الرموز: $<$ أو $>$ أو $\neq$
وستقتصر دراستنا على الحالة ($\neq$). فمثلًا: $H_1: \mu \neq 98.6$, $H_0: \mu = 98.6$

الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

1. صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1).
2. التحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t)، (مسترشدًا بالجدول التالي):

الانحراف المعياري (σ)	المقياس الإحصائي (Z أو t)	حجم العينة (n)
معلوم	$Z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	لا يشترط حجم معين للعينة
غير معلوم	$Z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n > 30$
	$t = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n \leq 30$

3. تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول t ذي درجات حرية.
4. تحديد منطقة القبول: $(-Z_{\frac{\alpha}{2}} , Z_{\frac{\alpha}{2}})$ أو $(-t_{\frac{\alpha}{2}} , t_{\frac{\alpha}{2}})$ كما هو موضّح بالشكل.
5. اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

ملاحظة: ستقتصر دراستنا على مستوى ثقة 95%.

178

إذا كان الانحراف المعياري σ لمجتمع معلوم

مثال (1)

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4 000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3 950 دينارًا كويتيًّا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (دينارًا) $\sigma = 125$

وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

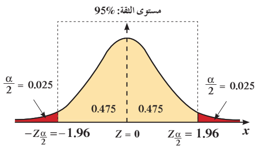
الحل:

1. صياغة الفروض

$H_0: \mu = 4\,000$ مقابل $H_1: \mu \neq 4\,000$

2. $\because \sigma = 125$ (معلومة)

$\therefore$ نستخدم المقياس الإحصائي Z : $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$



$\because n = 25 \quad , \quad \bar{x} = 3\,950$

$$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore Z = \dfrac{3\,950 - 4\,000}{\frac{125}{\sqrt{25}}} = -2$$

3. $\because$ مستوى الثقة 95%

$$\therefore \alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

4. منطقة القبول هي $(-1.96 \ , \ 1.96)$

5. اتخاذ القرار الإحصائي: $\because -2 \notin (-1.96 \ , \ 1.96)$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 4\,000$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 4\,000$

حاول أن تحل

1. بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1\,800$ kg مع انحراف معياري $\sigma = 150$ kg
ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكًا فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1 840 kg
هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

179

إذا كان الانحراف المعياري σ لمجتمع غير معلوم، $n > 30$

مثال (2)

إذا كانت $S = 1.79 \quad , \quad \bar{x} = 37.2 \quad , \quad n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

$n = 80 \quad , \quad \bar{x} = 37.2 \quad , \quad S = 1.79$

1. صياغة الفروض:

$H_0: \mu = 37$ مقابل $H_1: \mu \neq 37$

2. $\because \sigma$ غير معلومة ، $n > 30$

$\therefore$ نستخدم المقياس الإحصائي Z:

$$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \dfrac{37.2 - 37}{\frac{1.79}{\sqrt{80}}} = 0.999$$

3. تحديد مستوى المعنوية α: $\because \alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$\therefore Z_{0.025} = 1.96$$

4. منطقة القبول هي $(-1.96 \ , \ 1.96)$

5. اتخاذ القرار الإحصائي: $\because 0.999 \in (-1.96 \ , \ 1.96)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 37$

حاول أن تحل

2. متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1\,570$ بانحراف معياري $S = 120$.
يقول صاحب المصنع إنّ متوسط العمر بالساعات $\mu = 1\,600$ للمصابيح المصنعة في المصنع.
اختبر صحة الفرض $\mu = 1\,600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1\,600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

180

في المثال (1)

في هذا المثال يدرك الطالب متى عليه استخدام المقياس الإحصائي Z أو المقياس الإحصائي t (عند معرفة الانحراف المعياري σ نستخدم Z)، وأن القيمة الجدوليّة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ تستخرج من الجدول للتوزيع الطبيعي المعياري كما في الدرس السابق.

شدّد للطلاب على ضرورة الانتباه ما إذا كانت القيمة المعطاة هي تباين أو انحراف معياري.

ذكّرهم بأن الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$

في المثالين (2), (3)

يرتكز هذان المثالان على قبول فرض العدم أو الفرض البديل.

يطبّق الطلاب في المثالين الخطوات اللازمة بالتسلسل.

شدّد لهم على ضرورة الانتباه إلى الفرق بين مستوى المعنويّة ومستوى الثقة، وأن حدّي الفترة ما هما إلّا القيمة الجدولية ومعكوسها الجمعي، وأن القيمة t أو Z يمكن أن تكون سالبة، عندما يكون المتوسط الحسابي للعينة أصغر من قيمة الفرض.

6 الربط

الأمثلة (3), (2), (1)، تسمح للطالب التعرف على مجالات استخدام اختبارات الفروض الإحصائية في المواقف الحياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

من الأخطاء الشائعة جدًّا التي قد يرتكبها الطلاب تفسير القرار إن كان من جهة رفض أو عدم رفض فرض العدم.

شدّد للطلاب على ضرورة الانتباه دائمًا إلى هذه الفروض والعودة إلى فقرة «فرض العدم والفرض البديل» وفقرة «الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية» في كتاب الطالب لتجنب ارتكابها.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل»، للتأكد من أنّهم يتبعون الخطوات جميعها بالتسلسل الصحيح للوصول إلى النتيجة النهائية.

اختبار سريع

1 **(a)** لدينا: $n = 400\ ,\ \overline{x} = 18\ ,\ \sigma^2 = 36$

ما قيمة Z إذا $\mu = 16.6$؟

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{18 - 16.6}{\frac{6}{\sqrt{400}}} = 4.\overline{6}$$

(b) لمستوى ثقة %95، ضع فرض العدم، والفرض البديل، واتخذ القرار المناسب.

$H_0 : \mu = 16.6$ مقابل $H_1 : \mu \neq 16.6$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ و $4.\overline{6}$ لا تقع على الفترة $(-1.96\ ,\ 1.96)$

إذًا نرفض فرض العدم، $\mu \neq 16.6$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

تنوّع إجابات الطلاب تحقق منها.

تمرَّن 4-2

اختبارات الفروض الإحصائية
Statistical Hypotheses Testing

المجموعة A تمارين مقالية

(1) يزعم أستاذ مادة الرياضيات أن المتوسط الحسابي لدرجات الطلّاب في مادتّه هو 16 حيث النهاية العظمى 20 درجة. إذا أعطت عيّنة من 25 طالبًا متوسطًا حسابيًّا (درجة) $\overline{x} = 15$، والانحراف المعياري (درجة) $\sigma = 1.4$، فاختبر فرضية الأستاذ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(2) يزعم مسؤول في متجر لبيع الأدوات الكهربائيّة، أنّ متوسّط الأسعار هو 300 دينار. أعطت عينة من 49 آلة (دينارًا) $\overline{x} = 280$ والانحراف المعياري معلوم (دينارًا) $\sigma = 40$. تأكّد من فرضيّة المسؤول عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(3) في عينة من مجتمع إحصائي إذا كانت قيمة $\overline{x} = 40$، والانحراف المعياري $S = 7$، اختبر الفرض إذا $\mu = 35$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 35$ عند مستوى المعنوية 0.05 في الحالات التالية:

(a) حجم العينة $n = 50$.

(b) حجم العينة $n = 20$.

(4) في دراسة لعدد ساعات استخدام الحاسوب، أُخذت عيّنة من 100 شخص يعملون في مختلف المجالات، فوجد أن المتوسط الحسابي لعدد ساعات استخدام الحاسوب هو $\overline{x} = 4.5$، والانحراف المعياري $S = 1$.

اختبر الفرض إذا كان متوسّط عدد الساعات للمجتمع هو $\mu = 5$، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 5$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(5) أُخذت عيّنة عشوائية من مجتمع قيد الدراسة حجمها $n = 150$، فوجد أن المتوسّط الحسابي للعينة $\overline{x} = 30.3$ مع انحراف معياري $S = 6.5$. اختبر الفرض إذا كان المتوسّط الحسابي للمجتمع هو $\mu = 30$، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 30$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(6) المتوسط الحسابي للراتب السنوي لموظف حكومي في دولة الكويت هو 9 600 دينار، أما المتوسط الحسابي لعينة من 64 موظفًا حكوميًّا في إحدى الدول الخليجية المجاورة (دينارًا) $\overline{x} = 9\,480$ مع انحراف معياري (دينارًا) $S = 640$. اختبر إذا كان بالإمكان اعتبار الراتب السنوي في إحدى الدول الخليجية المجاورة للموظف الحكومي هو الراتب ذاته الذي يحصل عليه الموظف الحكومي في الكويت، مستخدمًا درجة الثقة %95.

73

إذا كان الانحراف المعياري σ لمجتمع غير معلوم، $n \leq 30$

مثال (3)

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارًا كويتيًّا.
فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي (دينارًا) $\overline{x} = 283$ وانحرافها المعياري (دينارًا) $S = 32$.
فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟
استخدم مستوى ثقة %95 (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًّا).

الحل:

$n = 10\ ,\ \overline{x} = 283\ ,\ S = 32$

1 صياغة الفروض

$H_0 : \mu = 290$ مقابل $H_1 : \mu \neq 290$

2 σ غير معلومة، $10 < 30\ ,\ n = 10$

$\therefore$ نستخدم المقياس الإحصائي t :

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}}$$

$t \approx -0.6917$

3 $n = 10$ $\because$ درجات الحرية: $n - 1 = 10 - 1 = 9$

مستوى الثقة %95 $\quad 1 - \alpha = 0.95$

$\alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

من جدول توزيع t $\quad \therefore\ t_{0.025} = 2.262$

4 منطقة القبول هي $(-2.262\ ,\ 2.262)$

5 اتخاذ القرار الإحصائي: $\because\ -0.6917 \in (-2.262\ ,\ 2.262)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 290$

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبيّن من خلالها أن $S = 5\ ,\ \overline{x} = 296$ لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها.

فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحًا أم لا؟ وضّح إجابتك.

181

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت الإجابة خاطئة.

(1) في مجتمع إحصائي إذا كان المتوسط الحسابي $\mu = 860$ وعينة من هذا المجتمع حجمها $n = 25$ والمتوسط الحسابي $\overline{x} = 900$ والانحراف المعياري $S = 125$.
فإن المقياس الإحصائي هو: $t = 1.6$ — (a) (b)

(2) متوسط العمر لعينة من 100 مصباح كهربائيّ بالساعات في أحد المصانع هو $\overline{x} = 1600$ بانحراف معياري $S = 125$. يقول صاحب المصنع أن متوسط عمر المصابيح بالساعات هو $\mu = 1640$. إن المقياس الإحصائي هو $Z = 3.2$ — (a) (b)

(3) متوسط عمر الإطارات في أحد المصانع $\mu = 25\,000$، في دراسة لعينة عشوائية تبيّن أن المتوسط الحسابي هو $\overline{x} = 27\,000$ مع انحراف معياري $S = 5\,000$.
إذا كان المقياس الإحصائي $t = 2$ فإنّ حجم العينة: $n = 25$ — (a) (b)

(4) أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 81$ مع متوسط حسابي $\overline{x} = 3.6$ وانحراف معياري $S = 1.8$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -1.5$ فإن المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu = 3.3$ — (a) (b)

في التمارين (10—5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كان القرار رفض فرض العدم، وفترة الثقة $(-1.96\ ,\ 1.96)$ فإن قيمة الاختبار Z ممكن أن تكون:

(a) 1.5 — (b) −2.5
(c) 1.87 — (d) −1.5

(6) إذا كانت قيمة الاختبار الإحصائي $Z = -1.5$ وفترة القبول $(-1.96\ ,\ 1.96)$ فإن القرار يكون:

(a) رفض فرض العدم — (b) قبول فرض العدم
(c) قبول الفرض البديل — (d) Z لا تنتمي للفترة

(7) في دراسة حول متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة هو (دينارًا) $\mu = 320$ وقد تبيّن أن المتوسط الحسابي لعينة حجمها $n = 25$ منزلًا من هذه المدينة هو (دينارًا) $\overline{x} = 310$ مع انحراف معياري $S = 40$. إن المقياس الإحصائي هو:

(a) 1.25 — (b) −1.25
(c) 0.8 — (d) −0.8

74

«حاول أن تحل»

1 $Z = 1.687$

منطقة القبول $(-1.96\ ,\ 1.96)$

$1.687 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

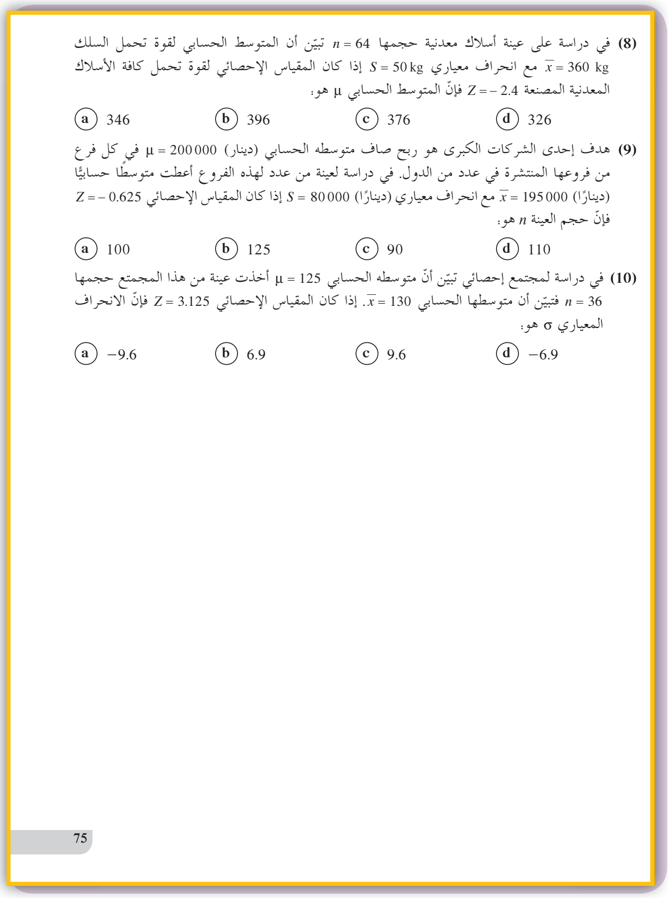
$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم، $\mu = 1800$

2 $Z = -2.5 \notin (-1.96\,, 1.96)$

$\therefore$ نرفض فرض العدم، $H_0: \mu = 1600$

3 $t = 3.795 \notin (-2.262\ ,\ 2.262)$

$\therefore$ نرفض فرض العدم، $\mu = 290$



(8) في دراسة على عينة أسلاك معدنية حجمها $n = 64$ تبيّن أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل السلك $\overline{x} = 360$ kg مع انحراف معياري $S = 50$ kg إذا كان المقياس الإحصائي لقوة تحمل كافة الأسلاك المعدنية المصنعة $Z = -2.4$ فإنّ المتوسط الحسابي μ هو:

(a) 346 (b) 396 (c) 376 (d) 326

(9) هدف إحدى الشركات الكبرى هو ربح صاف متوسطه الحسابي (دينار) $\mu = 200\,000$ في كل فرع من فروعها المنتشرة في عدد من الدول. في دراسة لعينة من عدد لهذه الفروع أعطت متوسطًا حسابيًّا (دينارًا) $\overline{x} = 195\,000$ مع انحراف معياري (دينارًا) $S = 80\,000$ إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -0.625$ فإنّ حجم العينة n هو:

(a) 100 (b) 125 (c) 90 (d) 110

(10) في دراسة لمجتمع إحصائي تبيّن أنّ متوسطه الحسابي $\mu = 125$ أخذت عينة من هذا المجتمع حجمها $n = 36$ فتبيّن أن متوسطها الحسابي $\overline{x} = 130$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z = 3.125$ فإنّ الانحراف المعياري σ هو:

(a) −9.6 (b) 6.9 (c) 9.6 (d) −6.9

75


4–3

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

سوف تتعلم
- مفهوم الارتباط وأنواعه.
- رسم مخطط الانتشار.
- إيجاد مُعامل الارتباط الخطي.
- خواص مُعامل الارتباط.
- إيجاد مُعامل ارتباط بيرسون.
- مفهوم الانحدار.
- إيجاد معادلة خط الانحدار.
- تنبؤ قيمة أحد المتغيرين.
- التقدير باستخدام معادلة خط الانحدار.
- التنبؤ.
- إيجاد مقدار الخطأ.

المفردات والمصطلحات:
- الارتباط Correlation
- ارتباط طردي Positive Correlation
- ارتباط عكسي Negative Correlation
- مُعامل الارتباط الخطي Linear Correlation Coefficient
- الانحدار Regression
- معادلة خط الانحدار Regression Line Equation
- التنبؤ Prediction
- مقدار الخطأ Error Value

دعنا نفكر ونتناقش

هل تساءلت يومًا: كيف تحسب العلاقة بين الطول والوزن؟
ما الذي يربط بين التدخين والإصابة بمرض السرطان؟
كيف نجد رابطًا بين وزن سيارة واستهلاكها للوقود؟
كيف يتغيّر سعر الذهب مع تغير قيمة الدولار الأمريكي؟
وما هي أفضل وسيلة للتقدير لنقترب من الحقيقة؟

أوّلًا: الارتباط Correlation

من دراستنا السابقة تمّ عرض بعض المقاييس الإحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال) ومقاييس التشتت (المدى – التباين – الانحراف المعياري).

نلاحظ أن هذه المقاييس كانت تصف شكل البيانات التي تمّ جمعها من ظاهرة إحصائية واحدة أي من متغير واحد والذي يمكن الحصول عليه من العينة. بينما يقابلنا في حياتنا العملية مواقف كثيرة تتضمن متغيرين (ظاهرتين) أو أكثر ويكون تساؤلنا: هل هناك علاقة بين هذه المتغيرات؟ وما هو شكل هذه العلاقة؟ وأيضًا كيف يمكن التنبؤ بقيمة أحد هذين المتغيرين إذا علم قيمة المتغير الآخر؟ وكثيرًا ما يرى الباحثون ضرورة دراسة العلاقة بين متغيرين (ظاهرتين) كما يتضح من الأمثلة التالية:

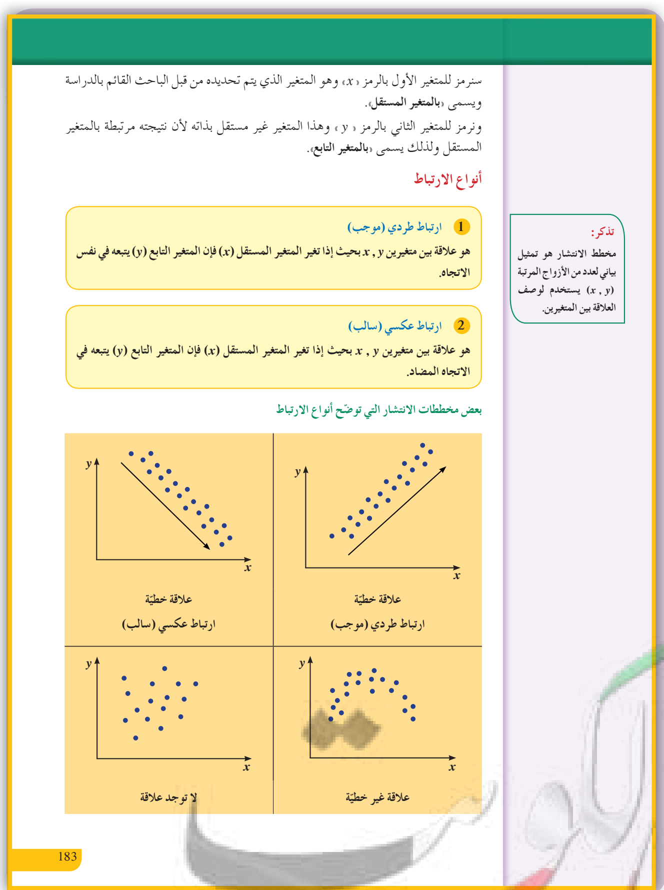
- الطول والوزن.
- التدخين والإصابة بمرض السرطان.
- وزن سيارة واستهلاكها للوقود.
- الإنفاق والدخل.
- سعر السلعة والكمية المعروضة منها.
- العمر وضغط الدم.

والأمثلة في هذا المجال كثيرة ومتعددة ولدراسة العلاقة بين هذه الظواهر ندرس ما يسمى الارتباط.

تعريف

الارتباط هو العلاقة بين متغيرين.

182


سنرمز للمتغير الأول بالرمز «x» وهو المتغير الذي يتم تحديده من قبل الباحث القائم بالدراسة ويسمى «**بالمتغير المستقل**».

ونرمز للمتغير الثاني بالرمز «y» وهذا المتغير غير مستقل بذاته لأن نتيجته مرتبطة بالمتغير المستقل ولذلك يسمى «**بالمتغير التابع**».

تذكر:
مخطط الانتشار هو تمثيل بياني لعدد من الأزواج المرتبة (x , y) يستخدم لوصف العلاقة بين المتغيرين.

أنواع الارتباط

1 ارتباط طردي (موجب)

هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في نفس الاتجاه.

2 ارتباط عكسي (سالب)

هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في الاتجاه المضاد.

بعض مخططات الانتشار التي توضّح أنواع الارتباط

183

3–4: الارتباط والانحدار

1 الأهداف

- تعرف مفهوم الارتباط وأنواعه.
- رسم مخطط الانتشار.
- تعرف مُعامل الارتباط الخطي r.
- إيجاد مُعامل ارتباط بيرسون.
- تعرف الانحدار.
- إيجاد معادلة خط الانحدار.
- التنبؤ.
- التقدير باستخدام معادلة الانحدار.
- إيجاد مقدار الخطأ.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الارتباط – ارتباط طردي – ارتباط عكسي – مُعامل الارتباط الخطي – الانحدار – معادلة خط الانحدار – التنبؤ – مقدار الخطأ.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

ارسم مخطط الانتشار الذي يوضح البيانات التالية:

(a)

x	3	4	5	6	7	8
y	1.1	1.5	2	2.2	2.3	2.8

(b)

x	15	14	15	13	14	15
y	1	6	4	2	3	5

ماذا تلاحظ في العلاقة بين x ، y وعلى كل مخطط انتشار؟

5 التدريس

يجب البدء بتعريف الارتباط على أنه نوع العلاقة بين متغيرين والتوضيح للطلاب أنه لا يجب الاكتفاء بالقول أنّه يوجد ارتباط بل يجب قياسه ورؤيته باستخدام قواعد موضحة في هذا الدرس.

ذكّر الطلاب بأنهم في هذا الدرس سوف يتعلمون فقط الارتباط الخطي.

وضّح للطلاب أن في الدراسات الإحصائية، لا يكفي تبيان العلاقة بين متغيّر وآخر، لأن الأهم هو إمكانية تنبؤ قيم لا نعرفها لمتغيّر، من خلال البيانات المعطاة.

والمعادلة التي تسمح بتوقّع هذه القيم تسمّى معادلة الانحدار وتتمثّل بـ $\widehat{y} = b_0 + b_1 x$.

تستخدم فقط هذه المعادلة إذا ما كانت العلاقة الخطيّة موجودة بين المتغيرين.

تبيّن مخططات الانتشار المختلفة كيف يكون توزيع البيانات عندما تكون العلاقة خطيّة، طرديّة، غير خطيّة أو غير موجودة.

مثال (1)

البيانات التالية تبيّن العلاقة بين عمر الشخص وعدد ساعات التمرينات الرياضية التي يقوم بها:

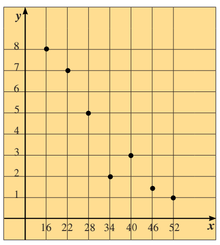
العمر (x)	16	22	28	34	40	46	52
عدد ساعات التمرينات (y)	8	7	5	2	3	$1\frac{1}{2}$	1

a ارسم مخطط الانتشار.

b حدّد نوع العلاقة.

الحل:

a



b العلاقة خطيّة عكسية.

حاول أن تحل

1 ارسم مخطط الانتشار للبيانات التالية وحدّد نوع العلاقة التي تعبر عنها:

x	2	6	5	2	7	3	4	7	5
y	2	3	1	4	1	5	3	4	5

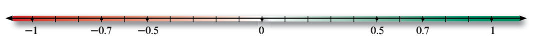
مُعامل الارتباط الخطي Linear Correlation Coefficient

تعلم أن الاستنتاجات المبنيّة على المعاينات البصريّة لمخطط الانتشار هي نسبيّة بامتياز، لذا فنحن بحاجة إلى قياسات أكثر دقة وموضوعية بالتالي نستخدم مُعامل الارتباط الخطّي (r).

تعريف

مُعامل الارتباط الخطّي (r) هو عبارة عن مقياس عددي لقوّة العلاقة بين متغيّرين يمثّلان بيانات كمّية، حيث $-1 \le r \le 1$

خواص مُعامل الارتباط (r)



1 $r \in [-1,1]$, $-1 \le r \le 1$

2 إذا كانت $r = 1$ يكون الارتباط طردي (موجب) تام.

3 إذا كانت $r = -1$ يكون الارتباط عكسي (سالب) تام.

4 إذا كانت $r = 0$ ينعدم الارتباط.

5 إذا كانت $r \in [0.7, 1)$ يكون الارتباط طردي (موجب) قوي.

6 إذا كانت $r \in [0.5, 0.7)$ يكون الارتباط طردي (موجب) متوسط.

7 إذا كانت $r \in (0, 0.5)$ يكون الارتباط طردي (موجب) ضعيف .

8 إذا كانت $r \in (-0.5, 0)$ يكون الارتباط عكسي (سالب) ضعيف.

9 إذا كانت $r \in [-0.5, -0.7)$ يكون الارتباط عكسي (سالب) متوسط.

10 إذا كانت $r \in [-0.7, -1)$ يكون الارتباط عكسي (سالب) قوي.

مُعامل ارتباط بيرسون r: Pearson Correlation Coefficient r:

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{nS_x \cdot S_y}$$

حيث: (الانحراف المعياري للمتغير x) ...... = $S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\overline{x})^2}{n}}$

(الانحراف المعياري للمتغير y) ...... = $S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\overline{y})^2}{n}}$

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\overline{x})^2}\sqrt{\Sigma(y-\overline{y})^2}}$$

مثال (2)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوة الارتباط.

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

الحل:

مُعامل الارتباط:

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\overline{x})^2}\sqrt{\Sigma(y-\overline{y})^2}}$$

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 3 \;,\; \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = 7$$

في المثال (1)

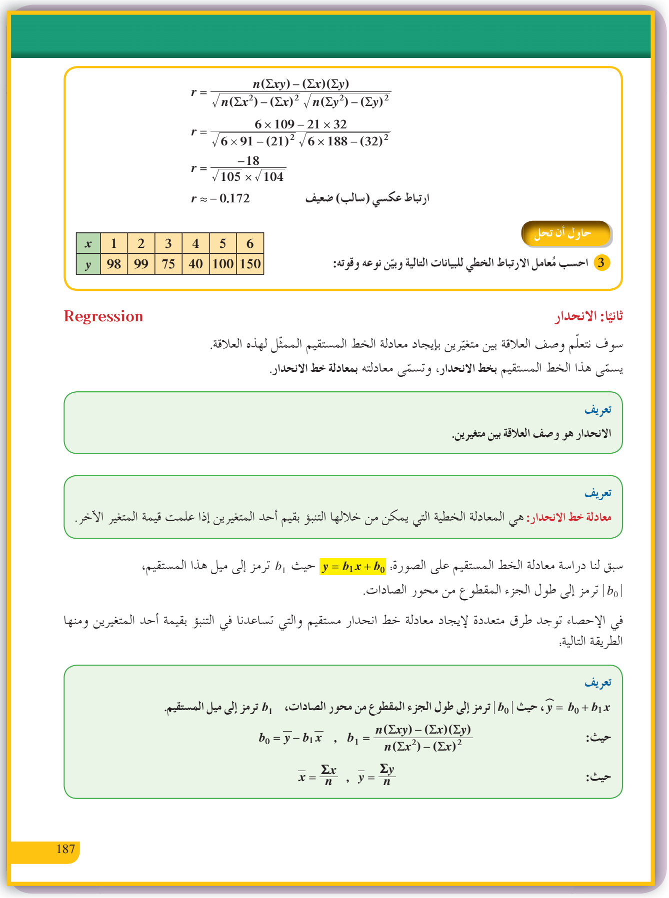
الهدف رسم مخطط الانتشار من خلال بيانات جدول ثم تحديد نوع العلاقة. العلاقة خطية عكسية وتعني أن عدد ساعات التمرينات الرياضية يقل مع ازدياد العمر.

في المثالين (2), (3)

حساب مُعامل الارتباط الخطي من خلال بيانات جدول وتحديد نوع الارتباط وقوته. في المثال (2) الارتباط طردي تام ($r = 1$)، وفي المثال (3) الارتباط عكسي ضعيف.

في المثالين (4), (5)

يجب استخدام بيانات الجدول لإيجاد معادلة خط الانحدار، ثم إيجاد قيمة y بمعلومية x مع حساب مقدار الخطأ.



$$r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}\,\sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$

$$r = \frac{6 \times 109 - 21 \times 32}{\sqrt{6 \times 91 - (21)^2}\,\sqrt{6 \times 188 - (32)^2}}$$

$$r = \frac{-18}{\sqrt{105} \times \sqrt{104}}$$

$r \approx -0.172$ ارتباط عكسي (سالب) ضعيف

حاول أن تحل

3 احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبيّن نوعه وقوته:

x	1	2	3	4	5	6
y	98	99	75	40	100	150

ثانيًا: الانحدار Regression

سوف نتعلّم وصف العلاقة بين متغيّرين بإيجاد معادلة الخط المستقيم الممثّل لهذه العلاقة.

يسمّى هذا الخط المستقيم **بخط الانحدار**، وتسمّى معادلته **بمعادلة خط الانحدار**.

تعريف

الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين.

تعريف

معادلة خط الانحدار: هي المعادلة الخطية التي يمكن من خلالها التنبؤ بقيم أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر.

سبق لنا دراسة معادلة الخط المستقيم على الصورة: $y = b_1x + b_0$ حيث b_1 ترمز إلى ميل هذا المستقيم،

$|b_0|$ ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

في الإحصاء توجد طرق متعددة لإيجاد معادلة خط انحدار مستقيم والتي تساعدنا في التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين ومنها الطريقة التالية:

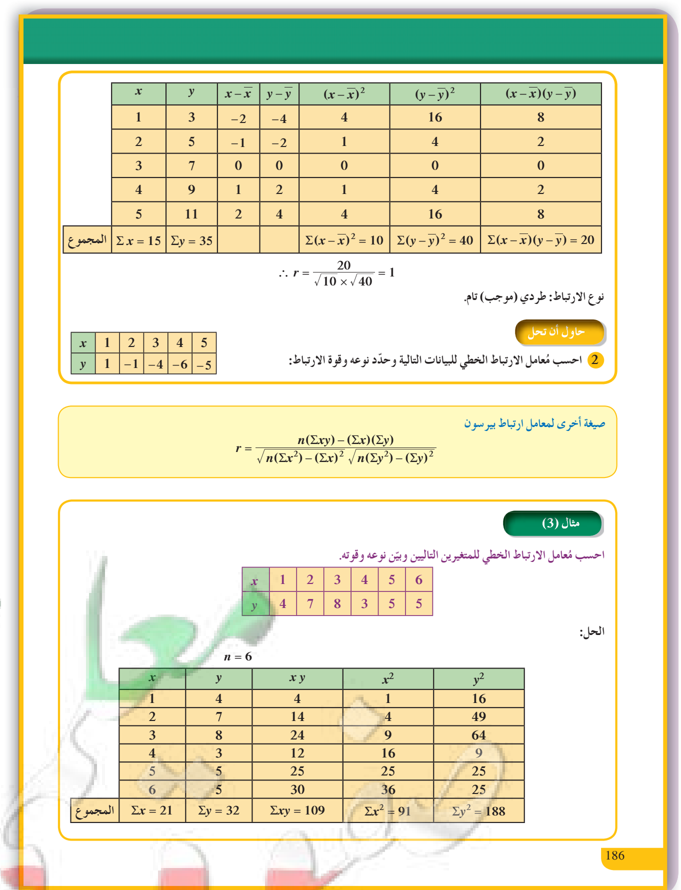
تعريف

$\hat{y} = b_0 + b_1x$، حيث $|b_0|$ ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات، b_1 ترمز إلى ميل المستقيم.

حيث: $b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$, $b_1 = \dfrac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$

حيث: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$, $\bar{y} = \dfrac{\Sigma y}{n}$

187



	x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
	1	3	−2	−4	4	16	8
	2	5	−1	−2	1	4	2
	3	7	0	0	0	0	0
	4	9	1	2	1	4	2
	5	11	2	4	4	16	8
المجموع	$\Sigma x = 15$	$\Sigma y = 35$			$\Sigma(x-\bar{x})^2 = 10$	$\Sigma(y-\bar{y})^2 = 40$	$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 20$

$$\therefore\ r = \frac{20}{\sqrt{10} \times \sqrt{40}} = 1$$

نوع الارتباط: طردي (موجب) تام.

حاول أن تحل

2 احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوة الارتباط:

x	1	2	3	4	5
y	1	−1	−4	−6	−5

صيغة أخرى لمعامل ارتباط بيرسون

$$r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}\,\sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$

مثال (3)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للمتغيرين التاليين وبيّن نوعه وقوته.

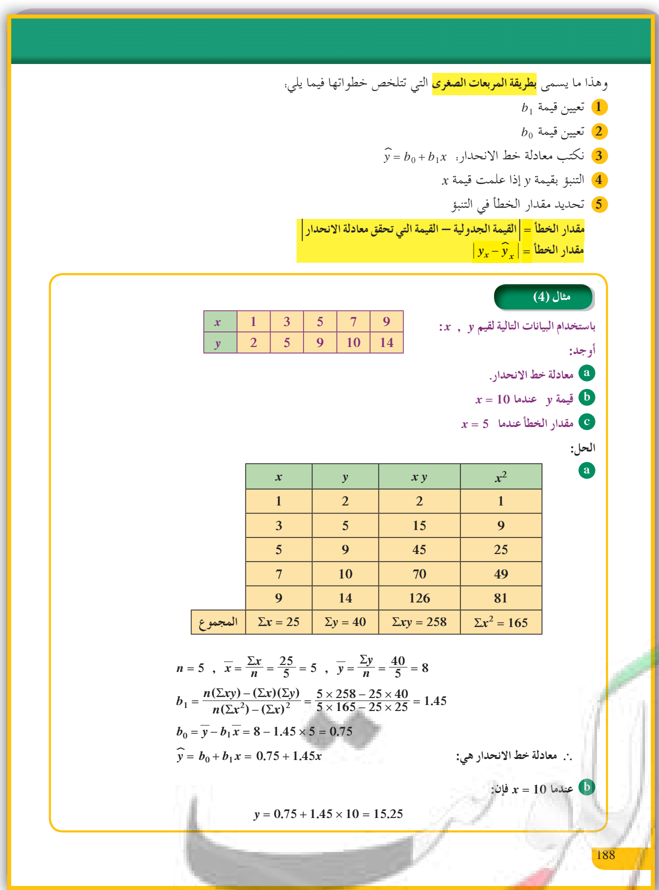
x	1	2	3	4	5	6
y	4	7	8	3	5	5

الحل:

$n = 6$

	x	y	xy	x^2	y^2
	1	4	4	1	16
	2	7	14	4	49
	3	8	24	9	64
	4	3	12	16	9
	5	5	25	25	25
	6	5	30	36	25
المجموع	$\Sigma x = 21$	$\Sigma y = 32$	$\Sigma xy = 109$	$\Sigma x^2 = 91$	$\Sigma y^2 = 188$

186



وهذا ما يسمى **بطريقة المربعات الصغرى** التي تتلخص خطواتها فيما يلي:

1. تعيين قيمة b_1
2. تعيين قيمة b_0
3. نكتب معادلة خط الانحدار: $\hat{y} = b_0 + b_1x$
4. التنبؤ بقيمة y إذا علمت قيمة x
5. تحديد مقدار الخطأ في التنبؤ

مقدار الخطأ = |القيمة الجدولية — القيمة التي تحقق معادلة الانحدار|

مقدار الخطأ = $|y_x - \hat{y}_x|$

مثال (4)

باستخدام البيانات التالية لقيم y , x:

x	1	3	5	7	9
y	2	5	9	10	14

أوجد:

a معادلة خط الانحدار.

b قيمة y عندما $x = 10$

c مقدار الخطأ عندما $x = 5$

الحل:

a

	x	y	xy	x^2
	1	2	2	1
	3	5	15	9
	5	9	45	25
	7	10	70	49
	9	14	126	81
المجموع	$\Sigma x = 25$	$\Sigma y = 40$	$\Sigma xy = 258$	$\Sigma x^2 = 165$

$n = 5$, $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n} = \dfrac{25}{5} = 5$, $\bar{y} = \dfrac{\Sigma y}{n} = \dfrac{40}{5} = 8$

$b_1 = \dfrac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \dfrac{5 \times 258 - 25 \times 40}{5 \times 165 - 25 \times 25} = 1.45$

$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 8 - 1.45 \times 5 = 0.75$

∴ معادلة خط الانحدار هي: $\hat{y} = b_0 + b_1x = 0.75 + 1.45x$

b عندما $x = 10$ فإن:

$y = 0.75 + 1.45 \times 10 = 15.25$

188

6 الربط

المثالان (5) ,(1)، يبيّنان المواقف الحياتية الّتي يمكن أن يستخدم فيها الارتباط وقياسه.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

من المهم ألا يخلط الطلاب بين Σx^2 و $(\Sigma x)^2$، لذا يجب إعطاء الطلاب أمثلة حسابيّة متعددة لتخطي هذه المشكلة.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل»، وركّز على تفسيرهم للإجابات.

اختبار سريع

1 احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبيّن نوعه وقوته:

x	13.5	14	12	11	15	13
y	7	7.5	8	9	10	7

$\Sigma x^2 = 1037.25$, $\Sigma x = 78.5$

$(\Sigma x)^2 = 6162.25$

$\Sigma y^2 = 399.25$, $\Sigma y = 48.5$

$(\Sigma y)^2 = 2352.25$

$\Sigma xy = 635.5$, $n = 6$

$r \approx 0.11$ الارتباط طردي ضعيف

2 من الجدول التالي:

x	12	15	15.5	14	10	9
y	30	33	35	33	25	25

(a) أوجد معادلة خط الانحدار

$\widehat{y} = 1.5719x + 10.3870$

(b) أوجد قيمة $\widehat{y}$ عندما $x = 13$ $\widehat{y} = 30.8217$

(c) أوجد مقدار الخطأ عند $x = 10$

من الجدول: $y_{10} = 25$

من المعادلة الخطية: $\widehat{y}_{10} = 26.1060$

مقدار الخطأ: 1.1060

---

c من الجدول $y = 9$

من المعادلة: $\widehat{y} = 0.75 + 1.45 \times 5 = 8$

∴ مقدار الخطأ: $|y_5 - \widehat{y}_5| = |9 - 8| = 1$

حاول أن تحل

4 من الجدول التالي:

x	4	5	8	9	10	12
y	2	4	5	8	6	11

أوجد:

a معادلة خط الانحدار.

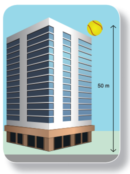
b قيمة y عندما $x = 10$

c مقدار الخطأ عندما $x = 10$

مثال (5)

سقطت كرة من ارتفاع 50m، وتمّ تسجيل المسافات (بالمتر) التي قطعتها هذه الكرة كل 0.5s لمدة ثلاث ثوان.

فأتت النتائج كما يوضح الجدول التالي:



الوقت (x)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
المسافة (y)	0	1.2	4.9	11	19.5	30.5	44

a أوجد معادلة خط الانحدار.

b قدّر قيمة المسافة y عندما $x = 4$

c أوجد مقدار الخطأ في المسافة عندما $x = 2.5\,s$

الحل:

a

	x	y	$x\,y$	x^2
	0	0	0	0
	0.5	1.2	0.6	0.25
	1	4.9	4.9	1
	1.5	11	16.5	2.25
	2	19.5	39	4
	2.5	30.5	76.25	6.25
	3	44	132	9
المجموع	$\Sigma x = 10.5$	$\Sigma y = 111.1$	$\Sigma xy = 269.25$	$\Sigma x^2 = 22.75$

$n = 7$, $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{10.5}{7} = 1.5$, $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{111.1}{7} = 15.87$

$b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \frac{7 \times 269.25 - 10.5 \times 111.1}{7 \times 22.75 - (10.5)^2} = \frac{718.2}{49}$

$b_1 \approx 14.66$

189

$b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}$

$= 15.87 - 14.66 \times 1.5$

$= -6.12$

معادلة خط الانحدار هي: $\widehat{y} = b_0 + b_1 x = -6.12 + 14.66x$

b التنبؤ: $\because\ \widehat{y} = -6.12 + 14.66x$

∴ المسافة y عندما $x = 4$ هي:

$\widehat{y}_4 = -6.12 + 14.66 \times 4 = 52.52\,m$

c مقدار الخطأ عند $x = 2.5\,s$

من المعادلة: $\widehat{y} = -6.12 + 14.66x$

نجد أن: $\widehat{y}_{2.5} = -6.12 + 14.66 \times 2.5 = 30.53$

من الجدول عند $x = 2.5\,s$

نجد أن: $y = 30.5\,s$

∴ مقدار الخطأ: $|y_x - \widehat{y}_x|$

$= |30.5 - 30.53|$

$= 0.03$

حاول أن تحل

5 في الجدول التالي، المتغير x هو تكلفة إنتاج فيلم سينمائي (بملايين الدولارات) والمتغيّر y هو مردود هذا الفيلم.

التكلفة (x)	62	90	50	35	200	100	95
المردود (y)	65	64	48	57	601	146	47

a أوجد معادلة خط الانحدار.

b قدّر مردود فيلم بلغت تكلفته 55 مليون دولار.

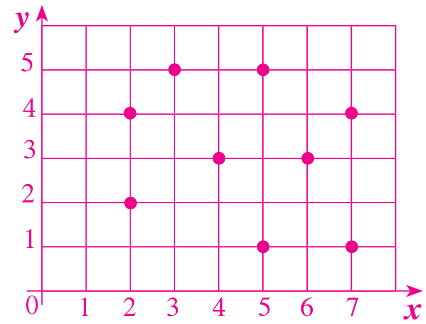
c أوجد مقدار الخطأ لفيلم بلغت تكلفته 90 مليون دولار.

190

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1



لا علاقة خطية.

2 $r = \frac{-17}{\sqrt{10} \times \sqrt{34}} \approx -0.92$

≈ -0.92

ارتباط عكسي قوي.

تمرَّنْ 4−3

الارتباط والانحدار
Correlation and Regression

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، أجب عن السؤالين التاليين:

(a) استخدم مخطط الانتشار لتوضح ما إذا كان هناك ارتباط خطي واضح بين x و y.

(b) أوجد قيم n، $\sum x$، $\sum x^2$، $(\sum x)^2$، $\sum xy$ ومُعامل الارتباط الخطي r.

(1)

x	2	3	5	5	10
y	6	9	14	16	30

(2)

x	2	3	5	5	10
y	6	0	15	5	2

في التمرينين (4–3)، أجب عن الأسئلة التالية:

(a) اصنع مخطط الانتشار.

(b) أوجد قيمة مُعامل الارتباط الخطي r.

(c) وضّح ما إذا كان هناك ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين (استخدم فقط $\alpha = 0.05$).

(3) يوضّح الجدول أدناه وزن البلاستيك المستهلك x بالكيلوجرام (kg) من قبل عدد أفراد أسرة y.

وزن البلاستيك x(kg)	0.12	0.64	1	1.3	1	0.8	0.4	1.4
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

(4) توضح البيانات المزدوجة في الجدول أدناه وزن الأوراق x بالكيلوجرام (kg) التي تمّ التخلص منها وعدد أفراد الأسرة y.

وزن الأوراق x(kg)	1.1	3.4	4.3	4	3.9	3	3.1	5.2
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

في التمرينين (6–5)، باستخدام البيانات التالية لقيم x و y أوجد:

(5)

x	1	2	4	5
y	3	5	9	11

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) قيم y عندما $x = 7$.

(c) مقدار الخطأ عندما $x = 2$.

76

(6)

x	5	3	2	1	0	2
y	−2	0	1	2	3	1

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) قيم y عندما $x = 8$.

(c) مقدار الخطأ عندما $x = 5$.

(7) باستخدام البيانات التالية لقيم x و y أوجد:

وزن البلاستيك x(kg)	0.12	0.64	1	1.3	1	0.8	0.4	1.4
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) تنبؤ عدد أفراد الأسرة التي تتخلّص من 0.2 kg من البلاستيك.

(8) باستخدام البيانات التالية لقيم x و y أوجد:

وزن الأوراق x(kg)	1.1	3.4	4.3	4	3.9	3	3.1	5.2
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) تنبؤ عدد أفراد الأسرة التي تتخلّص من 4.5 kg من الأوراق.

77

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت الإجابة خاطئة.

(1) الارتباط هو علاقة بين متغيرين. (a) (b)

(2) إذا كان r مُعامل الارتباط بين متغيرين فإن $-1 < r < 1$ (a) (b)

(3) إذا كان مُعامل الارتباط بين متغيرين $r = -1$ كان الارتباط تامًّا. (a) (b)

(4) الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين. (a) (b)

(5) إذا كان مُعامل الارتباط $r = 0$ فإن الارتباط منعدم. (a) (b)

في التمارين (15–6)، لكل تمرين 4 خيارات واحد فقط منها صحيح. ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة مُعامل الارتباط (r) التي تجعل الارتباط طردي (موجب) تام بين المتغيرين x, y هي:

(a) −1 (b) −0.5 (c) 0.5 (d) 1

(7) إذا كانت قيمة مُعامل الارتباط (r) بين متغيرين حيث $r \in (-1, -0.5]$ فإن العلاقة يمكن أن تكون:

(a) عكسية تامة (b) عكسية قوية

(c) طردية تامة (d) طردية قوية

(8) إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين x, y هي $\widehat{y} = 5.5 + 3.4x$ فإن قيمة y المتوقعة عندما $x = 6$ هي:

(a) 0.5 (b) 6.8 (c) 29.98 (d) 25.9

(9) إذا كان مُعامل الارتباط بين متغيرين $r = 0.85$ فإن الارتباط يكون:

(a) طردي قوي (b) طردي ضعيف

(c) طردي متوسط (d) طردي تام

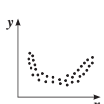
(10) إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين x, y. هي $\widehat{y} = 1 + 1.4x$ فإن مقدار الخطأ عند $x = 5$ علمًا بأن القيمة الجدولية هي $y = 9$ يساوي:

(a) −1 (b) 1 (c) 17 (d) 8

(11) الشكل أدناه يمثل علاقة بين متغيرين x, y نوع هذه العلاقة هو:

(a) علاقة خطية طردية (b) علاقة خطية عكسية

(c) علاقة غير خطية (d) ليس أيّ مما سبق



78

3 $r \approx 0.3382$

ارتباط طردي ضعيف

4 **(a)** $\widehat{y} = -1.6522 + 0.9565x$

(b) $\widehat{y}_{10} = 7.9128$

(c) 1.9128

5 **(a)** $\widehat{y} = -163.6084 + 3.4387x$

(b) $\widehat{y}_{55} = 25.52$ (مليون دولار)

(c) 81.8747

---

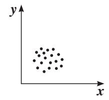
(12) من الجدول التالي:

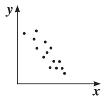
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	23	18	17	14	10	6	5	1

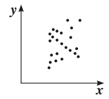
فإذا كانت معادلة خط الانحدار هي $\widehat{y} = -3.05x + 25.5$، فإن مقدار الخطأ عندما $x = 5$ يساوي:

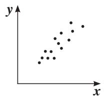
ⓐ 0.25 ⓑ −0.25 ⓒ 20.25 ⓓ 10.25

(13) الشكل الذي يمثل ارتباط عكسي قوي بين متغيرين x, y هو:

ⓐ


ⓑ


ⓒ


ⓓ


(14) قيمة مُعامل الارتباط لا يمكن أن تساوي:

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ −0.5 ⓓ 1.5

(15) إذا كان مُعامل الارتباط بين المتغيرين x, y يساوي صفر فإن الارتباط يكون:

ⓐ قوي ⓑ ضعيف ⓒ منعدم ⓓ تام

79

اختبار الوحدة الرابعة

(1) أخذت عينة من 324 موظفًا حكوميًّا فتبيّن أن المتوسط الحسابي للكلفة الشهرية لانتقال الموظف من منزله إلى العمل بسيارته الخاصة ومن ثم العودة بسيارته أيضًا هو (دينارًا) $\overline{x} = 68.5$ والانحراف المعياري (دينارًا) $S = 11$.

(a) أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 93%.

(b) أوجد بنسبة 95% فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للكلفة الشهرية لانتقال الموظف من منزله إلى العمل بسيارته ومن ثم العودة في المجتمع الإحصائي الذي أخذت منه هذه العينة.

(c) لقد افترض أحد الخبراء الاقتصاديين أن متوسط الكلفة الشهرية لانتقال الموظف الحكومي من منزله إلى العمل بسيارته الخاصة ومن ثم العودة هو (دينارًا) $\mu = 69.6$. استخدم فترة الثقة التي توصلت إليها في الجزء **(b)** لاختبار رفض أو عدم رفض الفرضية عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

(d) إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع تحت الدراسة هو (دنانير) $\sigma = 9.5$، أوجد حجم العينة اللازم لإيجاد فترة ثقة بنسبة 95% للمتوسط الحسابي لكلفة النقل الشهري μ للموظف الحكومي بهامش خطأ لا يتجاوز الدينار الواحد.

(2) في مجتمع الزائرين لمجمع تجاري كبير، يعتبر الانحراف المعياري (دنانير) $\sigma = 8.16$ ما ينفقه كل زائر على مشترياته في الزيارة الواحدة.

(a) أوجد عدد القيم لأخذ عينة من مجتمع الزائرين للمجمع التجاري لإيجاد فترة ثقة بنسبة 95% للمتوسط الحسابي لما ينفقه كل زائر على مشترياته في الزيارة الواحدة بهامش خطأ لا يتجاوز 2 دينار.

(b) إذا أعطت العينة الحجم ذاته الذي أعطاه الجزء **(a)** من السؤال والمتوسط الحسابي (دينارًا) $\overline{x} = 25.5$ لما ينفقه كل زائر في الزيارة الواحدة، استنتج فترة الثقة بنسبة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع تحت الدراسة.

(3) في الجدول أدناه، المتغير المستقل x يمثّل سنوات الخبرة لموظف في شركة تجارية كبرى في وظيفة معينة، أما المتغير التابع y فيمثّل الأجر الشهري للموظف بمئات الدنانير، وn عدد الموظفين في العينة الذين يقومون بالوظيفة نفسها:

سنوات الخبرة x	2	4	5	7	9	10	4	5
الأجر الشهري y (بمئات الدنانير)	7.5	8.2	8	8.7	10.7	10.5	8.4	8.6

(a) ارسم مخطط الانتشار.

(b) أوجد قيم: $\sum xy$, $(\sum x)^2$, $\sum x^2$, $\sum x$, n.

80

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

الفروض: $H_0: \mu = 2\,000$ مقابل $H_1: \mu \neq 2\,000$

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{2100 - 2000}{\frac{800}{\sqrt{100}}} = 1.25$$

فترة الثقة: $(-1.96 \ , \ 1.96)$

1.25 تقع على الفترة

إذًا نقبل فرض العدم

$H_0 : \mu = 2\,000$

إذًا كانت حملة هذه المؤسسة ناجحة.

المرشد لحل المسائل

نظرًا لأهميّة المياه بالنسبة إلى صحة الإنسان وحياته، قررت مؤسسة تعنى بذلك، القيام بحملة تهدف إلى التأكد من أن كل شخص يستهلك متوسط قدره 2 000 ml يوميًّا من مياه الشرب.

في دراسة سابقة لعينة من 100 شخص، لاحظت المؤسسة أنّ المتوسط الحسابي للاستهلاك: $\overline{x} = 1850$ ml مع انحراف معياري $S = 900$ ml.

وفي دراسة جديدة لعينة من 100 شخص، وبعد القيام بحملتها، لاحظت أن المتوسط الحسابي للاستهلاك: $\overline{x} = 1900$ ml مع انحراف معياري $S = 300$ ml.

اعتقدت المؤسسة أنّ حملتها قد نجحت بما أنّ المتوسط الحسابي للاستهلاك قد ازداد 50 ml وقد اقترب كثيرًا من هدفها وهو 2 000 ml يوميًّا للشخص الواحد.

هل المؤسسة على حق؟ اشرح.

الحل:

وضع يوسف جدولًا ليختبر فرضية الشركة من خلال اختبارات إحصائية مع:

$H_0 : \mu = 2\,000$ مقابل $H_1 : \mu \neq 2\,000$ ، ومستوى الثقة 0.95

	الدراسة السابقة	الدراسة الجديدة
المعايير	$\overline{x} = 1850 \ , \ S = 900 \ , \ n = 100$	$\overline{x} = 1900 \ , \ S = 300 \ , \ n = 100$
القيمة الجدولية	$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$	$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
قيمة الاختبار الإحصائي	$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{1850 - 2\,000}{\frac{900}{\sqrt{100}}} = -1.66$	$Z = \frac{1900 - 2\,000}{\frac{300}{\sqrt{100}}} = -3.33$
الفترة	$(-1.96 \ , \ 1.96)$	$(-1.96 \ , \ 1.96)$
القرار	$\because \ -1.66 \in (-1.96 \ , \ 1.96)$ قبول $H_0 : \mu = 2\,000$ ml	$\because \ -3.33 \notin (-1.96 \ , \ 1.96)$ رفض H_0 والأخذ بـ: $H_1 : \mu \neq 2\,000$ ml

الاستنتاج:

لم تكن الحملة ضرورية، والحصول على قيمة متوسطة أكبر لا يعني الاقتراب من الهدف المنشود.

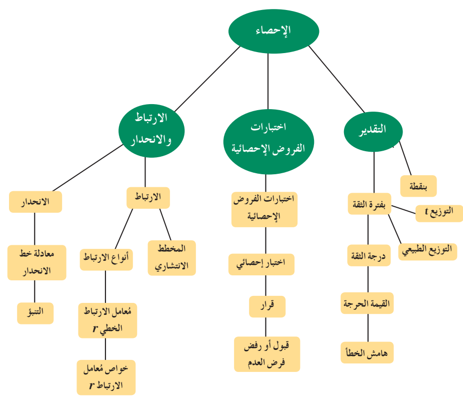
مسألة إضافية

قامت مؤسسة أخرى بحملة على عينة من 100 شخص تهدف إلى التأكد من أنّ المتوسط الحسابي لاستهلاك كل شخص لمياه الشرب $\mu = 2\,000$ ml يوميًّا. فأتت النتائج على الشكل التالي:

$S = 800$ ml ، $\overline{x} = 2\,100$ ml. برأيك، هل كانت حملة هذه المؤسسة ناجحة؟

191

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

- المعلمة هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.
- الإحصاءة هو اقتران تتعيّن قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري لها S.
- تقدير المعلمة: هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككل وتوزيعه.
- التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.
- فترة الثقة هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).
- التقدير بفترة الثقة: هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معين.
- α هي نسبة الخطأ في التقدير وتسمى مستوى المعنوية أو مستوى الدلالة.
- $(1-\alpha)$ هي درجة الثقة (مستوى الثقة).
- $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.
- $\overline{x}$ هو المتوسط الحسابي للعينة.

192

- S هو الانحراف المعياري للعينة.
- $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع t.
- هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ في حالة الانحراف المعياري σ معلوم والتوزيع الطبيعي.
- فترة الثقة هي: $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.
- الفرض الإحصائي: هو ادعاء معين مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.
- المقياس الإحصائي هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.
- اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية) هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.
- الارتباط هو العلاقة بين متغيرين.
- ارتباط طردي (موجب): هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في نفس الاتجاه.
- ارتباط عكسي (سالب): هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في الاتجاه المضاد.
- مُعامل الارتباط الخطي (r) هو عبارة عن مقياس عددي لقوّة العلاقة بين متغيرين يمثلان بيانات كمية حيث $-1 \leq r \leq 1$

خواص مُعامل الارتباط (r)

1. إذا كانت $r = 1$ يكون الارتباط **طردي (موجب) تام.**
2. إذا كانت $r = -1$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) تام.**
3. إذا كانت $r = 0$ ينعدم الارتباط.
4. إذا كانت $r \in [0.7 , 1)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) قوي.**
5. إذا كانت $r \in [0.5 , 0.7)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) متوسط.**
6. إذا كانت $r \in (0 , 0.5)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) ضعيف.**
7. إذا كانت $r \in (-0.5 , 0)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) ضعيف.**
8. إذا كانت $r \in [-0.5 , -0.7)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) متوسط.**
9. إذا كانت $r \in [-0.7 , -1)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) قوي.**

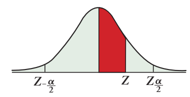
- $r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}\sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$ أو $r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\overline{x})^2}\sqrt{\Sigma(y-\overline{y})^2}}$
- الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين.
- معادلة خط الانحدار: هي المعادلة الخطية التي يمكن من خلالها التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر.

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \quad \text{حيث} \quad b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x} \quad \text{حيث} \quad \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} \quad \text{أو} \quad \overline{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

- مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة من معادلة الانحدار | $= |y_x - \hat{y}_x|$

193

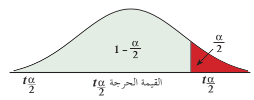


جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10 وأكثر	0.4999									

ملاحظة: استخدم 0.4999 عندما تزيد قيمة Z عن 3.09

194



جدول التوزيع t						
	$\frac{\alpha}{2}$					
درجات الحرية $(n-1)$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675

195

ALGEBRA الجبر

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

$ax^2+bx+c=0 \quad , \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a>0$:

$|x|=a$: $x=a$ أو $x=-a$

$|x|<a$: $-a<x<a$

$|x|>a$: $x>a$ أو $x<-a$

GEOMETRY الهندسة

Triangle

$A=\frac{1}{2}bh$

$=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

Circle

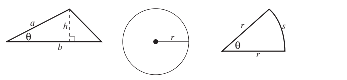
$A=\pi r^2$

$C=2\pi r$

Sector of Circle

$A=\frac{1}{2}r^2\theta$

$s=r\theta$ (θ in radians)



Sphere

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$A=4\pi r^2$

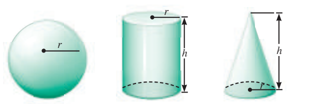
Cylinder

$V=\pi r^2 h$

Cone

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$



196

TRIGONOMETRY علم المثلثات

$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$ $\qquad$ $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad$ $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$ $\qquad$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ $\qquad$ $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\qquad$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

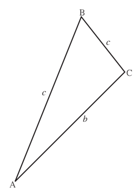
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ $\qquad$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$

$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

197

Statistics الإحصاء

(القيمة الحرجة) $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \; ; \; -Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(الخطأ المعياري للمجتمع) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(هامش الخطأ – توزيع طبيعي) $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

فترة الثقة للمتوسط الحسابي $(\overline{x} - E \; , \; \overline{x} + E)$

(التوزيع t) $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(هامش الخطأ – توزيع t الانحراف المعياري σ غير معلوم) $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

(المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي) $Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي – الانحراف المعياري σ غير معلوم) $Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

(المقياس الاحصائي – توزيع t – الانحراف المعياري σ غير معلوم) $t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

(مُعامل ارتباط بيرسون) $r = \frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\sum(x-\overline{x})^2}\sqrt{\sum(x-\overline{y})^2}} = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}\sqrt{n(\sum y^2) - (\sum y)^2}}$

(معادلة خط الانحدار) $\widehat{y} = b_1 x + b_0$

$b_1 = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} \; , \; b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x}$

حيث $\overline{x} = \frac{\sum x}{n} \; , \; \overline{y} = \frac{\sum y}{n}$

مقدار الخطأ $|y_x - \widehat{y_x}| =$

تمارين إثرائية

(1) إذا كانت الدرجة القصوى في امتحان الرياضيات هي 20. أوجد فترة ثقة بنسبة 90% للمتوسط الحسابي μ لعلامة الطالب في امتحان بناءً على نتائج عينة من 36 طالبًا خضعوا للامتحان حيث المتوسط الحسابي للعينة هو $\overline{x} = 11.6$ مع انحراف معياري $S = 2.5$.

(2) أوجد عدد القيم اللازمة لحجم عينة لإيجاد فترة ثقة بدرجة ثقة 99% للمتوسط الحسابي μ لما تنفقه وزارة الصحة سنويًا لدعم مريض مصاب بأحد الأمراض المزمنة. إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع تحت الدراسة هو (دينار) $\sigma = 800$ بهامش خطأ لا يتجاوز 150 دينارًا.

(3) افترض أحد خبراء الاتصالات أن المتوسط الحسابي لعدد زوار إحدى الصفحات على الإنترنت هو $\mu = 4.325$ ألف زائر يوميًا، أما عند أخذ عينة من 64 يومًا تبيّن أن المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 4.101$ ألف زائر يوميًّا مع انحراف معياري $S = 0.842$ ألف زائر.

اختبر إمكانية رفض أم عدم رفض فرضية الخبير عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

(4) قرر أصحاب أحد متاجر الأجهزة الكهربائية إقامة تجربة لمدة خمسة أشهر لمعرفة مدى تأثير الإنفاق الإعلاني على حجم المبيعات فكانت النتائج كما في الجدول التالي:

الأشهر	1	2	3	4	5
الإنفاق الإعلاني x بآلاف الدنانير	1	2	3	4	5
حجم المبيعات y بعشرات آلاف الدنانير	1	1	2	2	4

(a) أوجد معادلة خط الانحدار التي تربط حجم المبيعات بالإنفاق الإعلاني في أحد الأشهر.

(b) أنفق المتجر 500 4 دينار على الإعلانات، فما حجم مبيعاته في هذا الشهر؟

(5) أعطت عيّنة عشوائية متوسطًا حسابيًّا $\overline{x} = 17$، أوجد التقدير بنقطة للمعلمة المجهولة μ.

(6) أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 130$، فأعطت متوسط حسابي $\overline{x} = 28$، إذا كان تباينها معلوم وهو $\sigma^2 = 9$، فأوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمعلمة المجهولة μ.

(7) ينتظر زبائن شركة التأمين على السيّارات مدة طويلة قبل التمكن من التواصل مع مندوب خدمة الزبائن حين يتصلّون ليتقدّموا بشكاوى مختلفة. تعطي عيّنة عشوائيّة من 25 اتصالًا مماثلًا متوسطًا حسابيًّا $\overline{x} = 22$ min وانحرافًا معياريًّا من 6 دقائق.

أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابيّ الإحصائي μ لأوقات الانتظار. افترض أن هذه الأوقات تتبع توزيعًا طبيعيًّا.

(c) أوجد قيمة مُعامل الارتباط الخطي. هل هناك ارتباط خطي بين x وy؟ استخدم $\alpha = 0.05$.

(d) أوجد معادلة خط الانحدار.

(e) ما هو أفضل تنبؤ للراتب الشهري بالدينار لموظف في الوظيفة نفسها لديه 8 سنوات خبرة.

(4) يبيّن الجدول أدناه إجمالي وزن النفايات بالكيلوجرام (kg) الذي تتخلّص منه أسرة بحسب عدد أفرادها يوميًّا.

وزن النفايات x(kg)	6	2.8	8.2	5	4.1	5.3	8.8	7.1
عدد أفراد الأسرة y	3	4	5	4	6	5	4	2

(a) أوجد معادلة خط الانحدار.

(b) ما هو أفضل تنبؤ لعدد أفراد أسرة تتخلص من 11 kg من النفايات يوميًّا؟

(5) في عينة عشوائية حجمها 9 والمتوسط الحسابي $\overline{x} = 20$ min والانحراف المعياري $S = 1.2$ min.

أوجد فترة الثقة عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

(8) تمّ بيع عينة من 1500 منزل مؤخّرًا حيث إن المتوسط الحسابي لسعر المنزل الواحد 000 300 دينار. الانحراف المعياري معلوم وهو 000 70 دينار.

اختبر الفرض القائل إنّ متوسّط الأسعار 000 290 دينار مع مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

(9) تزعم مديرية التعليم العالي أن متوسّط سنوات الخبرة للمعلّمين في كل الجامعات هو 10 سنوات.

تأكّد من هذا الفرض عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$، علمًا أنّ عيّنة من 40 معلّمًا أعطت متوسطًا حسابيًّا $\overline{x} = 9$ سنوات مع انحراف معياري $S = 4$.

(10) **(a)** إذا كانت قيمة $\overline{x} = 143$، $\sigma = 10$، $n = 40$، فاختبر الفرض $H_0: \mu = 150$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 150$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

(b) اختبر الفرض نفسه مع عيّنة حجمها $n = 7$ و $S = 8$، عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

(11) إذا كانت الدرجة العظمى في اختبار الرياضيات هي 20 درجة، فأوجد فترة ثقة عند درجة ثقة 90% للمتوسط الحسابي μ لدرجة طالب في اختبار، بناءً على نتائج عيّنة من 36 طالبًا خضعوا للاختبار حيث المتوسط الحسابي للعيّنة هو $\overline{x} = 11.6$ وانحراف معياري $S = 2.5$.

في التمارين (15–12)، أوجد مُعامل الارتباط r وحدّد نوعه وقوته، إن وجد، للمتغيرين y , x حيث:

(12)

x	8	6	5	10	7	4
y	14	10	6	2	5	8

(13)

x	3	10	9	8	5	4
y	5	8	10	6	4	3

(14)

x	3	10	8	6	5	2	4	7
y	7	12	6	11	9	6	8	10

(15)

x	9	8	6	5	10	7	4
y	11	10	5	9	8	6	7

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $\lim\limits_{t\to -4^-} g(t) = 5$ (b) $\lim\limits_{t\to -4^+} g(t) = 2$ (c) $\lim\limits_{t\to -4} g(t)$ غير موجودة

لأنّ النهايتين من جهة اليمين وجهة اليسار مختلفتان.

(d) $g(-4) = 2$

(2) (a) $\lim\limits_{h\to 0^-} f(h) = -4$ (b) $\lim\limits_{h\to 0^+} f(h) = -4$

(c) $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = -4$ (d) $f(0) = -4$

(3) (a) 6 (b) 0

(c) 9 (d) −3

(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} (3x^2(2x-1)) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right] = 3\left(\frac{1}{4}\right)(-2) = -\frac{3}{2}$

(5) $\lim\limits_{y\to -3} \frac{y^2+4y+3}{y^2-3} = \frac{(-3)^2+4(-3)+3}{(-3)^2-3} = \frac{0}{6} = 0$

(6) $\lim\limits_{x\to -4} (x+3)^{1998} = (-4+3)^{1998} = (-1)^{1998} = 1$

(7) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x-2} = \sqrt{3-2} = 1$

(8) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$ $\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

(9) (a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ $\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$

(10) (a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$ $\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

(b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$

(11) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(4+x)^2-16}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x+8) = 8$

(12) $\lim\limits_{t\to 2} \frac{t-1}{t+2} = \frac{1}{4}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(3+x)^3-27}{x} = \lim\limits_{x\to 0} ((3+x)^2+3(3+x)+9) = 27$

(14) $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{-1}{x+1} = 1$; $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{1}{x+1} = -1$

(15) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+7-16}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x+3}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)} = \frac{3}{8}$

(16) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{(x+3)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}-3\sqrt[3]{9x}+9\right)}{(\sqrt[3]{9x}+3)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}-3\sqrt[3]{9x}+9\right)} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{(x+3)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}-3\sqrt[3]{9x}+9\right)}{9(x+3)} = 3$

(17) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}(x^2-5x+3)=17$

(18) $\lim\limits_{x\to3}\frac{(x^2-9)(x^2+2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)(x^2+2)=66$

(19) $\lim\limits_{x\to2}(4x^2+3x+6)=28$

(20) $=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

(21) $=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=1$

(22) $=\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{4x}{(x-2)(x+2)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x+2)x-4x}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{x}{(x+2)}=\frac{1}{2}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (a)	(3) (b)	(4) (a)	(5) (a)
(6) (a)	(7) (d)	(8) (c)	(9) (d)	(10) (c)
(11) (c)	(12) (d)	(13) (a)	(14) (a)	

تمرّنْ 2–1 نهايات تشتمل على ∞، $-\infty$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) 0	(2) 0	(3) $\frac{1}{2}$
(4) $(2-1)\times1=1$	(5) ∞	(6) ∞

(7) $-\infty$

(8) $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}} = \infty$

(9) (a) $x = 0$, $x = -\frac{5}{2}$ $y = \frac{3}{2}$

(10) (a) $x = 1$, $x = -\frac{5}{2}$ $y = 0$

(11) (a) $x = 0$, $x = -1$ $y = 4$

(12) (a) $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ $y = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (a)	(3) (a)	(4) (b)
(5) (b)	(6) (b)	(7) (c)	(8) (b)
(9) (b)	(10) (d)	(11) (a)	(12) (c)
(13) (d)			

صيغ غير معينة

تمرّنْ 3–1

المجموعة A تمارين مقالية

(1) ∞	(2) $-\infty$	(3) $-\infty$	(4) ∞	(5) -2
(6) $-\frac{2}{5}$	(7) 0	(8) 0	(9) 1	(10) -1

(11) $a = 0$, $\frac{b}{3} = -1 \Longrightarrow b = -3$

(12) $a = 0$, $\frac{2}{b} = -1 \Longrightarrow b = -2$

(13) $\frac{3}{\sqrt{a}} = 2 \Longrightarrow a = \frac{9}{4}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (a)
(5) (a)	(6) (b)	(7) (c)	(8) (d)
(9) (b)	(10) (d)	(11) (a)	(12) (a)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{5}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}$

(4) $\frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} = -1$

(6) -2

(7) 5

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} = 2$

(10) $\frac{4}{7}$

(11) $\frac{3}{2}$　　**(12)** 1　　**(13)** 3　　**(14)** $\frac{3}{2}$　　**(15)** 2

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)　　**(2)** (b)　　**(3)** (b)　　**(4)** (a)　　**(5)** (b)

(6) (a)　　**(7)** (c)　　**(8)** (d)　　**(9)** (a)　　**(10)** (b)

الاتّصال　　　　تمرَّنْ 5–1

المجموعة A تمارين مقالية

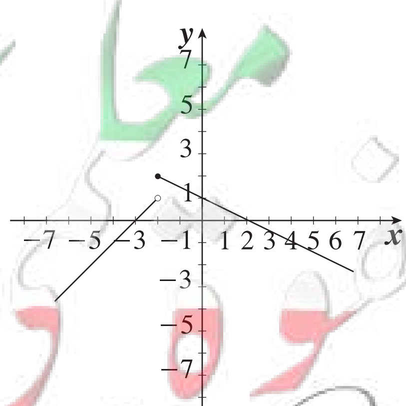
(1) $x = 0$ لا تنتمي إلى المجال، إذًا f غير متصلة عند $x = 0$.

(2) f غير متصلة عند $x = 1$　　$f(1) = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 1$

(3) f متصلة عند $x = 2$　　$f(2) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$

(4) لا، لأن النهاية لجهة اليمين لا تساوي النهاية لجهة اليسار عند النقطة صفر.

(5) إجابة ممكنة:



(6) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 5$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 5$

إذًا الدالة f متصلة عند $x = 0$

(7) $h(-1) = -1$

$\lim\limits_{x\to -1} h(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-4)}{x+1} = -5$

$\because \lim\limits_{x\to -1} h(x) \neq h(-1)$

$\therefore$ الدالة h ليست متصلة عند $x = -1$

(8) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x(x-3)}{-x} = 3$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x-3)}{x} = -3 = f(0)$

إذًا الدالة f ليست متصلة عند $x = 0$. (f متصلة جهة اليمين عند $x = 0$).

(9) $g(1) = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

$$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

إذًا الدالة متصلة عند $x = -1$.

(10) نحتاج إلى $f(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2ax) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2-1)$

$2a(3) = 3^2 - 1$

$6a = 8$

$a = \dfrac{4}{3}$

(11) الدالة $y = \dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$ هي $y = \dfrac{x-1}{(x-1)(x-3)}$، وهي متصلة على مجالها لأنها دالة نسبية، وتقع نقاط انفصالها حيث هي غير معرفة. المقام $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$ يساوي صفرًا عند $x = 1$، $x = 3$.

هناك انفصال لا يمكن التخلص منه عند $x = 3$ وانفصال يمكن التخلص منه بإعادة تعريف الدالة عند $x = 1$

(12) الدالة $y = 2x - 1$ هي دالة متصلة على مجالها $(-\infty, \infty)$، لا يوجد نقاط انفصال.

(13) $x = -1$، يمكن التخلص من الانفصال بجعل $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) = 0$

(14) لِـ $x \neq -3$ ، $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x-3$ ، فالدالة هي: $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & , x \neq -3 \\ -6 & , x = -3 \end{cases}$

(15) حيث $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4(1) = 4$ ، الدالة هي: $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & , x \neq 0 \\ 4 & , x = 0 \end{cases}$

(16) $\begin{cases} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & , x \neq 4 \\ 4 & , x = 4 \end{cases}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (a) **(4)** (a) **(5)** (c) **(6)** (a) **(7)** (d) **(8)** (d)

(9) (b) **(10)** (a) **(11)** (a) **(12)** (d) **(13)** (d) **(14)** (b) **(15)** (c)

نظريات الاتصال — تمرَّنْ 6–1

المجموعة A تمارين مقالية

(1) f متصلة عند $x = 2$

(2) g : $g(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = -1$

h : $h(x) = \frac{3}{x}$ دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = -1$

$\therefore$ دالة الطرح f متصلة عند $x = -1$

(3) g : $g(x) = x^2 + 3x$ متصلة عند $x = 3$

h : $h(x) = |x|$ متصلة عند $x = 3$

$\therefore$ $f(x) = g(x) + h(x)$ متصلة عند $x = 3$

(4) الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ دالة جذرية متصلة عند $x = -1$

الدالة h : $g(x) = x^2 + 1$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -1$

$g(-1) = 2 \ , \ 2 \neq 0$

$\therefore$ دالة ناتج القسمة f متصلة عند $x = -1$

(5) نفرض أن $g(x) = x^2 + 5x + 4$

g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -5$

$g(-5) = 4 \ , \ 4 > 0$ $\therefore$ $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = -5$

(6) **(a)** $(g\circ f)(x) = g(-x+2) = (-x+2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ **(b)** $(g\circ f)(-1) = 6$

(c) $(f\circ g)(x) = f(x^2-3) = -x^2 + 5$ **(d)** $(f\circ g)(-1) = 4$

(7) **(a)** $(f\circ g)(x) = f(x^2+4) = \sqrt{x^2+4}$ **(b)** $(f\circ g)(2) = 2\sqrt{2}$

(c) $(g\circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 + 4 = x + 4$ **(d)** $(g\circ f)(2) = 6$

(8) **(a)** $(g\circ f)(x) = \frac{1}{x^2+7}$ **(b)** $(g\circ f)(4) = \frac{1}{23}$, $(g\circ f)(-4) = \frac{1}{23}$

(9) f دالة كثيرة حدود $\therefore$ f متصلة عند $x=-2$

$f(-2)=5 \Longleftarrow g$ متصلة عند $x=5$

$\therefore$ $g\circ f$ متصلة عند $x=-2$

(10) نفرض أن: $g(x)=\sqrt{x}-3$, $h(x)=|x|$

حيث $f(x)=(h\circ g)=h(g(x))$

$=h(\sqrt{x}-3)$

$=|\sqrt{x}-3|$

نفرض أن: $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$

حيث $g_1(x)=\sqrt{x}$, $g_2(x)=3$

g_1 متصلة عند $x=4$

g_2 دالة ثابتة متصلة عند $x=4$

الدالة $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$ متصلة عند $x=4$ (1)

$g(4)=\sqrt{4}-3=-1$

h دالة مطلق x متصلة عند $x=-1$ (2)

من (1)، (2) نجد أن: الدالة f متصلة عند $x=4$

(11) نفرض أن $h(x)=|x-3|$ ، $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ حيث $g(x)=f(x)-h(x)$

لتكن $f(x)=\sqrt{f_1(x)}$ حيث $f_1(x)=x^2+1$

f_1 متصلة عند $x=3$ ، $f_1(3)=9+1=10>0$

$\therefore$ f متصلة عند $x=3$ (1)

لتكن: $h_1(x)=x-3$ ، $h_2(x)=|x|$

$\therefore\ h(x)=(h_2\circ h_1)(x)\ =h_2(h_1(x))\ =h_2(x-3)\ =|x-3|$

h_1 متصلة عند $x=3$ ، $h_1(3)=0$

h_2 متصلة عند $x=0$

$\therefore$ h متصلة عند $x=3$ (2)

من (2)، (1) نجد أن g دالة متصلة عند $x=3$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)	**(5)** (a)	**(6)** (d)
(7) (a)	**(8)** (c)	**(9)** (d)	**(10)** (a)	**(11)** (d)	**(12)** (a)

الاتّصال على فترة — تمرَّنْ 7–1

المجموعة A تمارين مقالية

(1) f دالة كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ $\therefore$ f متصلة على $[-2\ ,\ 5]$

(2) f دالة حدودية نسبية متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ $\therefore$ f متصلة على $[1\ ,\ 3]$

(3) f غير متصلة عند $x=3$ $\therefore$ f متصلة على الفترة $[0\ ,\ 3)$ والفترة $(3\ ,\ 5]$

(4) f غير متصلة عند $x = 1$ ، $x = 4$ $\therefore$ f متصلة على كل من الفترات $[-2 , 1) , (1 , 4) , (4 , 6]$

(5) f متصلة على $(-3 , 4)$، $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = -5 = f(-3)$, $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = -12 \neq f(4)$

$\therefore$ f متصلة على $[-3 , 4)$

(6) $f(7) = -3$, $\lim\limits_{x\to7^-} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to7^+} f(x) = -3$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 7$

و f متصلة على كل من الفترتين $(-\infty , 7)$ ، $(7 , \infty)$ $\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}$.

(7) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 3 = f(0)$

$\therefore$ f متصلة على كل من $(-\infty,0),[0,\infty)$.

(8) f متصلة على كل من الفترات $(4 , \infty)$, $(-2 , 4)$, $(-\infty , -2)$

$f(-2) = -9$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -9$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -9$

$\therefore$ f متصلة عند $x = -2$.

$f(4) = 9$, $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = 9$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 4$ لجهة اليمين.

$\therefore$ f متصلة على كل من $(-\infty,4),[4,\infty)$.

(9) f متصلة على كل من الفترات $(1 , \infty)$, $(-4 , 1)$, $(-\infty , -4)$

$f(-4) = -2$, $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = -2$

$\therefore$ f متصلة عند $x = -4$.

$f(1) = -2$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -2$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

$\therefore$ f متصلة على $(-\infty,\infty)$

(10) $f(1) = b$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 3 + a$

$\therefore\ a = -3$, $b = 0$

(11) $f(-2) = \dfrac{4-a}{-2-b}$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = \dfrac{4-a}{-2-b}$

$f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \dfrac{1-a}{1-b}$

$\therefore\ \dfrac{4-a}{-2-b} = 4$, $\dfrac{1-a}{1-b} = 1$

$\therefore\ a = b = -4$

(12) $D_f = [-1 , 6]$

لتكن g : $g(x) = -x^2 + 5x + 6$ ، $g(x) > 0$ لكل $x \in [0 , 4]$

$\therefore$ f متصلة على $[0 , 4]$

(13) $D_f = [-2 , 2]$ f متصلة على مجالها.

(14) $D_f = (-\infty , -1] \cup [1 , \infty)$

f متصلة على كل من الفترتين $[1 , \infty)$, $(-\infty , -1]$.

(15) f متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$

(16) g متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$ حيث $g(x) = 3x^2 + 4x - 1$ $\therefore$ f حيث $f(x) = |g(x)|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (b)
(5) (b)	**(6)** (c)	**(7)** (c)	**(8)** (b)
(9) (d)	**(10)** (c)	**(11)** (a)	

اختبار الوحدة الأولى

(1) $\lim_{x\to -2}(x^3 - 2x^2 + 1) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + 1 = -15$

(2) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{3x^2-2x+5} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

(3) $\lim_{x\to -4} \sqrt{1-2x} = 3$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2-(2+x)}{2x(2+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x(2+x)} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2(2+x)}\right) = -\frac{1}{2(2+0)} = -\frac{1}{4}$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{4x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$

(6) اضرب البسط والمقام بـ $\sin x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\csc x + 1}{x\csc x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)$$
$$= \left(\lim_{x\to 0} 1\right) + \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 1 = 2$$

(7) $\lim_{x\to 1} |x-2| + 2x = \lim_{x\to 1} (-x+2+2x) = 3$

(8) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{9-x}-2}{x-5} \times \frac{\sqrt{9-x}+2}{\sqrt{9-x}+2} = \lim_{x\to 5} \frac{-1}{\sqrt{9-x}+2} = -\frac{1}{4}$

(9) $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3}$

(10) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x-4)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-5}{x-4} = 2$

(11) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

(12) **(a)** f غير معرّفة عند $x=-2$ ، $x=2$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x=-2$ ، $x=2$.

(b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} & , \quad x \neq 2 \quad , \quad x \neq -2 \\ -\frac{1}{4} & , \quad x = 2 \end{cases}$

(13) $x=-2$

(14) $x=-2 \quad , \quad x=0$

(15) (a) عند $x=-1$

النهاية لجهة اليسار: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (1) = 1$

النهاية لجهة اليمين: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (-x) = 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$

عند $x=0$

النهاية لجهة اليسار: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$

النهاية لجهة اليمين: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

عند $x=1$

النهاية لجهة اليسار: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-x) = -1$

النهاية لجهة اليمين: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (1) = 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

(b) عند $x=-1$ ؛ متصلة لأن النهاية تساوي $f(-1)$

عند $x=0$، غير متصلة لأن النهاية لا تساوي $f(0)$

عند $x=1$، غير متصلة لأن النهاية غير موجودة.

(16) $x=-2 \quad , \quad x=2$

(17) لا وجود لنقاط عدم اتصال.

(18) $y=0 \quad , \quad x=1$

(19) $y=2 \quad , \quad x=-2 \quad , \quad x=0$

(20) $\dfrac{x^2+2x-15}{x-3} = \dfrac{(x-3)(x+5)}{x-3} = x+5 \quad ; \quad k=8$

(21) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin x}{x}\right) = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad k=\dfrac{1}{2}$

(22) (a) $(g\circ f)(x) = x^2$

(b) $(g\circ f)(0) = 0$

(c) $(f\circ g)(x) = \sqrt{(x^2-5)^2+5} \quad , \quad (f\circ g)(0) = \sqrt{30}$

(23) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 1$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 2$

f غير معرّفة عند $x = 15$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 15$

f متصلة على كل من الفترتين: $(-\infty , 15)$, $(15 , \infty)$

تمارين إثرائية

(1) f معرفة عند $x = 2$، إذًا $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = \sqrt{3(2)-2} = 2$

(2) **(a)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} (f \cdot g)(x) = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} (f \cdot g)(x) = -8$

(c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2} (f \cdot g)(x) = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ غير موجودة

$\lim\limits_{x\to 3} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to 3} = \dfrac{5}{x-3} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} (f \cdot g)(x) = \infty$

(3) لنفرض أن هذا غير صحيح. فتكون f سالبة في مكان ما من الفترة وموجبة في مكان آخر. وبنظرية القيمة المتوسطة يكون للدالة f صفرًا في مكان ما من هذه الفترة وهذا ما لا يتلاءم مع المعطيات.

(4) بما أن الدالة f هي متصلة، باستخدام نظرية الاتصال فإن الدالة المركبة لدالة متصلة هي متصلة فتكون بذلك $|f|$ متصلة.

(5) **(a)** النهاية لجهة اليسار: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} |x^3 - 4x| = |(1)^3 - 4(1)| = |-3| = 3$

النهاية لجهة اليمين: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 2x - 2) = (1)^2 - 2(1) - 2 = -3$

(b) كلّا، لأن النهايتين من كل جهة مختلفتان.

(c) كلّا.

(6) **(a)** $3x - 4 \geqslant -\frac{1}{2}$; $x \geqslant \frac{7}{6}$, $D_{f\circ g} = \left[\frac{7}{6} , \infty\right)$, $D_{g\circ f} = \left[-\frac{1}{2} , \infty\right)$

(b) $(f\circ g)(x) = \sqrt{2(3x-4)+1} = \sqrt{6x-7}$, $(g\circ f)(x) = 3\sqrt{2x+1} - 4$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (f\circ g)(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} (g\circ f)(x) = \infty$

(7) $a = 0$, $\dfrac{b}{-2} = 2 \Rightarrow b = 2$

(8) نقاط الانفصال -2 , 2. لا يمكن التخلص من هذا الانفصال لأن $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$ كذلك $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \pm\infty$.

(9) (a) فترة الانفصال: $[-2 , 2]$

(b) المقارب الأفقي: $y = 1$

المقاربات الرأسية: $x = -2$, $x = 2$

(10) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 5$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) = 5$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 4$

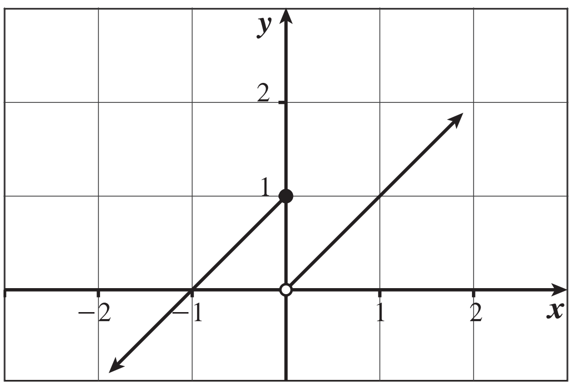
$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 18$ $\qquad f(18) = \frac{333}{5} = \lim_{x\to 18^-} f(x)$, $\lim_{x\to 18^+} f(x) = -36$

$\therefore$ f متصلة على $(18 , \infty)$, $(-\infty , 18]$

(11) -4 (12) 0 (13) $3x^2$

(14) $\frac{1}{2}$ (15) 0 (16) ∞

(17) (a)



(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

(18) (a) $x = -2$, لا يمكن التخلص منه

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$

عند $x = 0$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

(c) $x = 2$, $x = 3$

يمكن التخلص من الانفصال عند $x = 2$.

عند $x = 3$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

(d) $x = 1$, $x = -1$

يمكن التخلص من الانفصال عند $x = 1$

عند $x = -1$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

معدلات التغير وخطوط المماس — تمرَّنْ 1–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{1+h}=-1$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-4(1+h)+3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h-2)}{h}=-2$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{2+h+2}{2+h-3}+4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5h}{h(h-1)}=-5$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4-(1+h)^2-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(-2-h)}{h}=-2$

(5) (a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{2}{a+h}-\dfrac{2}{a}}{h}=\dfrac{-2h}{ah(a+h)}=\dfrac{-2}{a(a+h)}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2}{a(a+h)}=\dfrac{-2}{a^2}$

(b) يتغير المماس ولكن يبقى ميله سالبًا مهما كانت قيمة a.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (b)

(5) (a) **(6)** (b) **(7)** (c)

المشتقة — تمرَّنْ 2–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{3}{3+h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h(3+h)}=-\dfrac{1}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=6$

(3) $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x+1)=3$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

$\because\ f'_-(1)\neq f'_+(1)$

$\therefore$ ليس للدالة f مشتقة عند $x=1$.

(4) $f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x-1)(x+3)}{x - 1} = 4$

$f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{4x - 1 - 3}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{4(x-1)}{x - 1} = 4$

$\because \; f'_-(1) = f'_+(1)$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ و $f'(1) = 4$.

(5) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = |3 - 3| = 0 \; ; \; f(3) = 0$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 3$.

$f'_+(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x - 3 - 0}{x - 3} = 1$

$f'_-(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{-x + 3 - 0}{x - 3} = -1$

$\because \; f'_-(3) \neq f'_+(3)$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 3$.

(6) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \; ; \; \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 0$ وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

(7) $g'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{(x+1)^2 - 1}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x(x+2)}{x} = 2$

$g'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x + 1 - 1}{x} = 2$

$\therefore \; g'(0) = 2$

(8) $f'_-(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$

$f'_+(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x - 4 - 4}{x - 2} = 4$

$\therefore \; f'(2) = 4$

(9) $f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + x + 1) = 3$

$f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3x + k - 1}{x - 1}$

$\because$ f قابلة للاشتقاق عند $x = 1$.

$\therefore \; \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3x + k - 1}{x - 1} = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3\left(x + \dfrac{k-1}{3}\right)}{x - 1} = 3 \; ; \; \dfrac{k-1}{3} = -1 \; ; \; k = -2$

(10) (a) $f(1)=a+b$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2 \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=a+b$$

$\therefore \quad a+b=2 \qquad (1)$

(b) $2a+b=-1 \qquad (2)$

من (1) و(2) نحصل على: $b=5$, $a=-3$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (b)	(4) (b)
(5) (b)	(6) (b)	(7) (b)	(8) (a)
(9) (d)	(10) (a)	(11) (d)	(12) (b)

قواعد الاشتقاق — تمرَّنْ 3–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)-\dfrac{d}{dx}(x)=x^2-1$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(2x)+\dfrac{d}{dx}(1)=2+0=2$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(x^4)-\dfrac{d}{dx}(7x^3)+\dfrac{d}{dx}(2x^2)+\dfrac{d}{dx}(15)$

$=4x^3-21x^2+4x+0=4x^3-21x^2+4x$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(4x^{-2})-\dfrac{d}{dx}(8x)+\dfrac{d}{dx}(1)$

$=-8x^{-3}-8+0=-8x^{-3}-8$

(5) $f'(x)=(2x-5)(x^3+2x^2+1)+(3x^2+4x)(x^2-5x+6)$

$=5x^4-12x^3-12x^2+26x-5$

(6) $f(x)=10x^5-2x^7+20-4x^2$

$f'(x)=50x^4-14x^6-8x$

(7) (a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+3}{x}\right)=\dfrac{x\dfrac{d}{dx}(x^2+3)-(x^2+3)\dfrac{d}{dx}(x)}{x^2}$

$=\dfrac{x(2x)-(x^2+3)}{x^2}=\dfrac{x^2-3}{x^2}$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x + 3x^{-1}) = 1 - 3x^{-2} = 1 - \frac{3}{x^2}$

متكافئة مع إجابة السؤال **(a)**.

(8) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x^3}\right) = \frac{(1-x^3)(2x) - x^2(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{x^4+2x}{(1-x^3)^2}$

(9) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{(\sqrt{x}+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

(10) **(a)** عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}(uv) = u(0)v'(0) + v(0)u'(0) = (5)(2) + (-1)(-3) = 13$

(b) عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(0)u'(0) - u(0)v'(0)}{[v(0)]^2} = \frac{(-1)(-3)-(5)(2)}{(-1)^2} = -7$

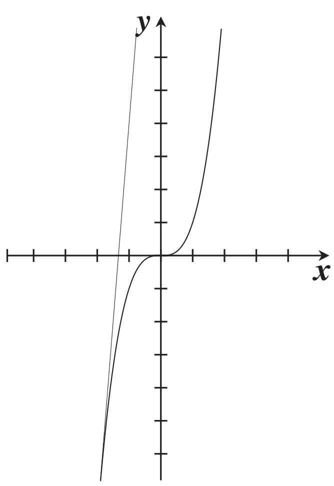
(c) عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u(0)v'(0) - v(0)u'(0)}{[u(0)]^2} = \frac{(5)(2)-(-1)(-3)}{(5)^2} = \frac{7}{25}$

(d) عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}(7v - 2u) = 7v'(0) - 2u'(0) = 7(2) - 2(-3) = 20$

(11) $f'(x) = 3x^2 + 1$; $f'(1) = 4$; $y = 4x - 2$

(12) $y'(x) = 3x^2$

$y'(-2) = 12$



ميل خط المماس 12 ويمر هذا الخط عبر $(-2\ ,\ -8)$، معادلته هي:

$y = 12(x+2) - 8$ أو $y = 12x + 16$ التقاطع مع محور السينات

هو $-\frac{4}{3}$ والتقاطع مع محور الصادات هو 16.

(13) $f'(x) = \frac{-16x}{(4+x^2)^2}$; $f'(2) = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$

معادلة المماس: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

معادلة الناظم: $y = 2x - 3$

(14) $f'(x)=\begin{cases}1+\dfrac{4}{x^2} & : \ x\geqslant 2\\ 2x & : \ x<2\end{cases}$

مجال f' : $(-\infty,\infty)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (a)
(6) (b)	**(7)** (b)	**(8)** (c)	**(9)** (b)	**(10)** (c)
(11) (c)	**(12)** (d)	**(13)** (c)	**(14)** (d)	
(15) (d)	**(16)** (c)			

مشتقات الدوال المثلثية — تمرّنْ 4–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\dfrac{d}{dx}(2\sin x-\tan x)=2\cos x-\sec^2 x$

(2) $\dfrac{d}{dx}(4-x^2\sin x)=\dfrac{d}{dx}(4)-\left[x^2\dfrac{d}{dx}(\sin x)+(\sin x)\dfrac{d}{dx}(x^2)\right]$

$=0-[x^2\cos x+(\sin x)(2x)]$

$=-x^2\cos x-2x\sin x$

(3) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cot x}{1+\cot x}\right)=\dfrac{(1+\cot x)\dfrac{d}{dx}(\cot x)-(\cot x)\dfrac{d}{dx}(1+\cot x)}{(1+\cot x)^2}$

$=\dfrac{(1+\cot x)(-\csc^2 x)-(\cot x)(-\csc^2 x)}{(1+\cot x)^2}$

$=-\dfrac{\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$

(4) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\dfrac{(1+\sin x)\dfrac{d}{dx}(\cos x)-(\cos x)\dfrac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$

$=\dfrac{(1+\sin x)(-\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$

$=\dfrac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\dfrac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$

$=-\dfrac{1}{1+\sin x}$

(5) $y'(x)=\dfrac{x\dfrac{d}{dx}(\tan x)-\tan x\dfrac{d}{dx}(x)}{x^2}$

$$= \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2 - 1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{8\pi - 16}{\pi^2}$$

(6) $\tan x \frac{1}{\cos x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ تساوي 0 عند $x = 0$، ميل خط المماس هو 0.

$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ تساوي 0 عند $x = 0$، ميل خط المماس هو 0.

(7) $y'(x) = \frac{d}{dx}(1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x)$

$$= 0 + \sqrt{2}(-\csc x\cot x) + (-\csc^2 x)$$

$$= -\sqrt{2}\csc x\cot x - \csc^2 x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\csc\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4} - \csc^2\frac{\pi}{4}$$

$$= -\sqrt{2}(\sqrt{2})(1) - (\sqrt{2})^2$$

$$= -2 - 2 = -4$$

ميل خط المماس -4 ويمر هذا الخط عبر $P\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$

المعادلة هي: $y = -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4$ أو $y = -4x + \pi + 4$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (c)
(6) (d)	**(7)** (d)	**(8)** (a)	**(9)** (c)	

قاعدة السلسلة — تمرَّنْ 5–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = (2)(6x) = 12x$

(2) $(f\circ g)'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}\times 2x = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

(3) $(f\circ g)'(x) = 10(x^{15})\times 15(x^{14}) = 150x^{29}$

(4) $(f\circ g)'(1) = f'(g(1))\cdot g'(1) = (5)(1)^2\times\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

(5) $(f\circ g)'(x) = \left(1 + \frac{2\sin\pi x}{\cos^3\pi x}\right)\times\pi$; $(f\circ g)'\left(\frac{1}{4}\right) = \left[1 + \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right]\times\pi = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)\times\pi = 5\pi$

(6) $(f\circ g)'(x)=\dfrac{2(-(10x^2+x+1)^2+1)}{((10x^2+x+1)^2+1)^2}\times(20x+1)\quad;\quad(f\circ g)'(0)=0$

(7) (a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$

$=(-\sin u)(6)$

$=-6\sin u=-6\sin(6x+2)$

(b) $\dfrac{dy}{dx}=15u^2\times 6x=90(3x^2+1)^2\times x$

(8) $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{3\pi}{2}\times\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}t\right)-\dfrac{7\pi}{4}\times\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}t\right)$

(9) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\tan(2x-x^3)=[\sec^2(2x-x^3)]\dfrac{d}{dx}(2x-x^3)$

$=[\sec^2(2x-x^3)](2-3x^2)=(2-3x^2)\sec^2(2x-x^3)$

(10) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\sin(3x+1)=[\cos(3x+1)]\dfrac{d}{dx}(3x+1)$

$=[\cos(3x+1)](3)=3\cos(3x+1)$

(11) $\dfrac{dy}{dx}=2(\tan x+\sec x)(\sec^2 x+\sec x\times\tan x)$

(12) $\dfrac{dy}{dx}=2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\left(\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}\right)=\dfrac{4(x-1)}{(x+1)^3}$

(13) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(1-6x)^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}(1-6x)^{\left(\frac{2}{3}-1\right)}\dfrac{d}{dx}(1-6x)$

$=\dfrac{2}{3}(-6)(1-6x)^{-\frac{1}{3}}$

$=-4(1-6x)^{-\frac{1}{3}}$

(14) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=\dfrac{(\sqrt{1+x^2})\dfrac{d}{dx}(x)-x\dfrac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1+x^2})^2}$

$=\dfrac{(\sqrt{1+x^2})(1)-x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\dfrac{d}{dx}(1+x^2)}{1+x^2}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right)(2x)}{1+x^2}$

$=\dfrac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2})}=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$

(15) تستخدم في الخطوة الأخيرة المتطابقة $2\sin a\cos a=\sin 2a$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(\sin^2(3x-2))$

$=2\sin(3x-2)\dfrac{d}{dx}\sin(3x-2)=2\sin(3x-2)\cos(3x-2)\dfrac{d}{dx}(3x-2)$

$=2\sin(3x-2)\cos(3x-2)(3)=6\sin(3x-2)\cos(3x-2)$

(16) (a) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$; $f'(2) = \dfrac{2}{3}$

معادلة المماس عند النقطة $(2,3)$ هي: $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

(b) معادلة الناظم: $y = -\frac{3}{2}x + 6$

(17) (a) $g'(x) = 24x^2(x^3+1)^7$

$g'(0) = 0$

معادلة المماس عند النقطة $(0,1)$ هي: $y = 1$

(b) معادل الناظم: $x = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (d)
(6) (b)	**(7)** (d)	**(8)** (b)	**(9)** (c)	

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني — تمرَّنْ 6–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 8x^3 - 3x^2 + 2x - 3$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 - 6x + 2$; $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 48x - 6$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = -5x^4 + 6x^2 - 4$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -20x^3 + 12x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3} = -60x^2 + 12$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{6}{(x-2)^3}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{-18}{(x-2)^4}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = 2\cos 2x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -4\sin 2x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3} = -8\cos 2x$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = -4\sin 4x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -16\cos 4x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 64\sin 4x$

(6) $\dfrac{dy}{dx} = 2\sin x\cos x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3} = -4\cos x\sin x - 4\sin x\cos x$

(7) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+4}{2y} = \dfrac{x+2}{y}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{y - y'(x+2)}{y^2} = \dfrac{y^2-(x+2)^2}{y^3}$

(8) $2y\,dy - 4dy = dx$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y-4}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2}{(2y-4)^3}$

(9) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$; $\dfrac{dy}{dx} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}\,y^{\frac{1}{3}}}$

(10) $2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0$; $y' = 5$

معادلة المماس: $y = 5x - 7$

معادلة الناظم: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

(11) $y' = -\frac{6}{5}$

معادلة المماس: $y = -\frac{6}{5}x - \frac{6}{5}$

معادلة الناظم: $y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$

(12) $y' = -\frac{\pi}{2}$

معادلة المماس: $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$

معادلة الناظم: $y = \frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$

(13) $y' = A\cos x - B\sin x$

$y'' = -A\sin x - B\cos x$

$y'' - y = -2A\sin x - 2B\cos x = \sin x \implies A = -\frac{1}{2}$; $B = 0$

(14) $\frac{dy}{dx} = \frac{-(\sin x + \sec x) - \sin x \tan x}{(1 + \tan x)^2}$; $y = -x + 1$

(15) $f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$; $f''(x) = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$

$4x^2 f''(x) - 3f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$

(16) $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$; $f''(x) = \frac{2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}$; $f'''(x) = \frac{24x(1+x^2)}{(1-x^2)^4}$

$(1-x^2)f'''(x) - 6xf''(x) - 6f'(x) = \frac{24x + 24x^3 - 36x^3 - 12x - 12x + 12x^3}{(1-x^2)^3} = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) (2) (a) (3) (a) (4) (c)

(5) (d) (6) (a) (7) (c)

اختبار الوحدة الثانية

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^5 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x\right) = 5x^4 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3 - 7x^3 + 3x^7) = -21x^2 + 21x^6$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x)$

$$= 2(\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) + 2(\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x) = -2\sin^2 x + 2\cos^2 x$$

حل بديل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x) = \frac{d}{dx}\sin 2x = (\cos 2x)(2)$$

$$= 2\cos 2x$$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = \frac{(2x-1)(2)-(2x+1)(2)}{(2x-1)^2} = -\frac{4}{(2x-1)^2}$

(5) $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}[\cos(1-2t)] = -\sin(1-2t)(-2) = 2\sin(1-2t)$

(6) $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\cot\left(\frac{2}{t}\right)\right] = -\csc^2\left(\frac{2}{t}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t}\right) = -\csc^2\left(\frac{2}{t}\right)\left(-\frac{2}{t^2}\right) = \frac{2}{t^2}\csc^2\left(\frac{2}{t}\right)$

(7) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

(8) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x\sqrt{2x+1}) = (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\right)(2) + (\sqrt{2x+1})(1)$

$$= \frac{x+(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$$

(9) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\sin(5x)}\right) = \frac{d}{dx}(x^2\csc 5x)$

$$= (x^2)(-\csc 5x\cot 5x)(5) + (\csc 5x)(2x) = -5x^2\csc 5x\cot 5x + 2x\csc 5x$$

(10) (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2-2x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}(2x-2) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

عند $x = 3$ نحصل على: $y = \sqrt{3^2-2(3)} = \sqrt{3}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{3-1}{\sqrt{3^2-2(3)}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

خط المماس: $y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-3) + \sqrt{3}$ أو $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3}$

(b) الخط العمودي (الناظم): $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-3) + \sqrt{3}$ أو $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{5\sqrt{3}}{2}$

(11) (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4 + \cot x - 2\csc x) = -\csc^2 x + 2\csc x\cot x$

عند $x = \frac{\pi}{2}$ نحصل على: $y = 4 + \cot\frac{\pi}{2} - 2\csc\frac{\pi}{2} = 4 + 0 - 2 = 2$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2\frac{\pi}{2} + 2\csc\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2} = -1 + 2(1)(0) = -1$$

خط المماس: $y = -1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ أو $y = -x + \frac{\pi}{2} + 2$

(b) الخط العمودي (الناظم): $y = 1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ أو $y = x - \frac{\pi}{2} + 2$

(12) $f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$

$f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2 - x - 1}{x - 1} = -1$

$\because \ f'_-(1) \neq f'_+(1)$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

(13) $\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 10x + 2 \ ; \ \frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 - 10 \ ; \ \frac{d^3y}{dx^3} = 72x$

(14) $\frac{dy}{dx} = 3\cos 3x \ ; \ \frac{d^2y}{dx^2} = -9\sin 3x \ ; \ \frac{d^3y}{dx^3} = -27\cos 3x$

(15) $\frac{dy}{dx} = -2\sin 4x \ ; \ \frac{d^2y}{dx^2} = -8\cos 4x \ ; \ \frac{d^3y}{dx^3} = 32\sin 4x$

(16) $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 16x + 5 \ ; \ \frac{d^2y}{dx^2} = 18x - 16 \ ; \ \frac{d^3y}{dx^3} = 18$

(17) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{6y - 1}$

(18) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 2x + 2}{2xy - 3}$

(19) $y' = -2$

معادلة المماس: $y = -2x + 3$

معادلة الناظم: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

تمارين إثرائية

(1) يتقاطع منحنى الدالة مع محور السينات إذا $-x^2 + 5x - 6 = 0$، فنحصل على $x = 2$ أو $x = 3$، عند $x = 2$ الميل $= 1$، عند $x = 3$ الميل $= -1$

(2) $s(t) = t^3 - 3t^2$

السرعة المتجهة: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t$

$v(2) = 12 - 12 = 0 \text{ m/s}$

$a(t) = V'(t) = 6t - 6$

$a(2) = 6(2) - 6 = 6 \text{ m/s}^2$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{4 - x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \times x^2}{4 - x^2} = \frac{2x(4 - x^2) + x^3}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} = \frac{8x - 2x^3 + x^3}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8x - x^3}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(4) يتقاطع منحنى الدالة مع محور الصادات عند النقاط $y = 0$ ، $y = 4$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-4}$ ، عند النقطة $(0,0)$ يكون الميل $= -\frac{1}{4}$ ، عند النقطة $(0,4)$ يكون الميل $= \frac{1}{4}$.

(5) $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}$

أي $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3u^2}$ باستخدام قاعدة السلسلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \times \frac{2x}{3u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{3u(u^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{3(x^2+2)\sqrt[3]{(x^2+2)^2} + 3\sqrt[3]{x^2+2} + 6x^2 + 12}$$

(6) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\sin 2x + \sin 2y}{2x\cos 2y - \cos 2x}$

معادلة المماس: $y = 2x$

معادلة الناظم: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5\pi}{8}$

(7) الدالة g متصلة عند $x = 0$ $\therefore$ $b = 1$

$$g'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1-1}{x} = 1$$

$$g'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$\because$ $g'_-(1) \neq g'_+(1)$

$\therefore$ g غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

(8) $y' = 2\cos x\cos x - 2\sin x\sin x$

$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 2\cos 2x$

(9) $AC = \sqrt{x^2+1600}$ $\qquad x \in (0,50)$

$$t = \frac{\sqrt{x^2+1600}}{45} + \frac{50-x}{75}$$

$$t' = \frac{x}{45\times\sqrt{x^2+1600}} - \frac{1}{75}$$

$t' = 0$: $5x = 3\sqrt{x^2+1600}$

$25x^2 = 9(x^2+1600)$

$16x^2 = 9\times 1600$

$x^2 = 900$

$x = 30$

$t(30) = \frac{\sqrt{900 + 1600}}{45} + \frac{50 - 30}{75} \simeq 83 \text{ min}$

$t(0) = \frac{\sqrt{0 + 1600}}{45} + \frac{50 - 0}{75} \simeq 93 \text{ min}$

$t(50) = \frac{\sqrt{2\,500 + 1600}}{45} + \frac{50 - 50}{75} \simeq 85 \text{ min}$

يستطيع السائق الوصول إلى الموقع D بأقل وقت ممكن إذا سار بخط مستقيم في الصحراء من نقطة A إلى نقطة C على الطريق الرملي (التي تبعد 30 km عن نقطة B)، ثم يسير على الطريق المعبد من C إلى D فيصل بحوالي 83 دقيقة وبالتالي أقل من 85 دقيقة ويستطيع الحصول على الجائزة.

(10) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 5y}{5x - 5y^4}$

(11) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y - 3}{2x - 4}$

الميل $= -\frac{11}{2}$

معادلة الناظم: $y = \frac{2}{11}x - \frac{46}{11}$

(12) $\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dp} \times \frac{dp}{dt} = \left(\frac{1}{2}(0.5p^2 + 17)^{-\frac{1}{2}}(0.5)(2p)\right)(0.2t)$

(a) إذا كان $t = 3$ فإن $P(3) = 3.1 + 0.1 \times 3^2 = 4$

معدل التغير يصبح: $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=3} = 0.24$

إن معدل التغير بعد مرور 3 سنوات لأول أكسيد الكربون هو 0.24 جزء من مليون وهو يتزايد لأن إشارة $\frac{dc}{dt}$ موجبة.

(b) عدد السكان 8 000 يعني أن $p = 8$ وبالتالي $8 = 3.1 + 0.1t^2$ نحصل على $t = 7$

$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=7} = 0.8$

إن معدل التغير بعد مرور 7 سنوات لعدد سكان 8 000 هو 0.8 جزء من مليون.

(13) لتكن $A(t, 9 - t^2)$ نقطة على منحنى الدالة.

$y'_A = -2t$

معادلة المماس عند A : $y = -2tx + t^2 + 9$

يمر هذا المماس بالنقطة $(1, 12)$ عندما $12 = -2t(1) + t^2 + 9$

$t^2 + 9t - 14 = 0$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$t = -1 \quad , \quad t = 3$

يمر مماسان بالنقطة $(1, 12)$.

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

المجموعة A تمارين مقالية

(1) قيمة عظمى مطلقة عند $(0,5)$، لا توجد قيم صغرى.

(2) قيمة عظمى مطلقة عند $(1,2)$، قيمة صغرى مطلقة عند $(0,-1)$

(3) القيمة العظمى عند $x = b$ والقيمة الصغرى عند $x = c_2$

تطبق نظرية القيمة القصوى لأن f متصلة على الفترة $[a,b]$، إذًا كلتا القيمتين العظمى والصغرى موجودتان.

(4) لا توجد قيمة عظمى أو صغرى، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة.

(5) قيمة عظمى عند $x = c$ وقيمة صغرى عند $x = a$، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة.

(6) قيمة عظمى عند $x = a$ وقيمة صغرى عند $x = c$، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة على فترة مغلقة.

(7) النقاط الحرجة: $(0,0)$، $\left(-\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right)$

(8) النقطة الحرجة: $(2,2)$

(9) النقاط الحرجة: $(0,3)$، $(1,4)$

(10) قيمة عظمى مطلقة عند هي 9 وقيمة صغرى مطلقة هي 1

(11) قيمة عظمى مطلقة هي 1.933 تقريبًا وقيمة صغرى مطلقة هي 1.515− تقريبًا

(12) قيمة عظمى مطلقة هي 0 وقيمة صغرى مطلقة هي $-\frac{1}{2}$

(13) قيمة عظمى مطلقة هي 2 وقيمة صغرى مطلقة هي 0

(14) قيمة عظمى مطلقة هي $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ وقيمة صغرى مطلقة هي 1

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (b)	**(6)** (b)
(7) (c)	**(8)** (b)	**(9)** (d)	**(10)** (c)	**(11)** (a)	**(12)** (d)
(13) (c)	**(14)** (b)	**(15)** (d)	**(16)** (a)		

تزايد وتناقص الدوال

تمرّنْ 2–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) f متصلة على الفترة $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,1)$

$$2c + 2 = \frac{2-(-1)}{1} \quad ; \quad c = \frac{1}{2}$$

يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = \frac{1}{2}$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(1,2)$, $(0,-1)$

(2) f متصلة على الفترة $\left[\frac{1}{2} \, , \, 2\right]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $\left(\frac{1}{2} \, , \, 2\right)$

$1 - \frac{1}{c^2} = 0 \quad ; \quad c = 1$

يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $\left(2 \, , \, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2} \, , \, \frac{5}{2}\right)$ وأيضًا يوازي محور السينات.

(3) متزايدة على الفترة $\left(-\infty \, , \, \frac{5}{2}\right)$ ومتناقصة على الفترة $\left(\frac{5}{2} \, , \, \infty\right)$

(4) متزايدة على كل من الفترتين $(6,\infty)$، $(-\infty,0)$ ومتناقصة على الفترة $(0,6)$

(5) متناقصة على الفترة $(0,\infty)$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty,0)$

(6) متزايدة على كل من الفترتين $(2,\infty)$، $(-\infty,-2)$ ومتناقصة على الفترة $(-2,2)$

(7) متزايدة على كل من الفترتين $(1,\infty)$، $(-1,0)$ ومتناقصة على كل من الفترتين $(0,1)$، $(-\infty,-1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)
(5) (b)	**(6)** (c)	**(7)** (b)	**(8)** (d)

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f — تمرَّنْ 3–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$

النقاط الحرجة هي: $(2,20)$, $(4,16)$

جدول التغير:

$-\infty \qquad 2 \qquad 4 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
إشارة f'	$+\ +$	$-\ -$	$+\ +$
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

القيمة العظمى المحلية هي: $f(2) = 20$

القيمة الصغرى المحلية هي: $f(4) = 16$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty,2)$ والفترة $(4,\infty)$ وتتناقص على الفترة $(2,4)$

(2) $g'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x-2)$

النقاط الحرجة هي: $(2,5)$, $(0,-3)$

جدول التغير:

$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$	الفترات
$--$	$++$	$--$	إشارة g'
↘	↗	↘	سلوك الدالة g

القيمة العظمى المحلية هي: $g(2) = 5$

القيمة الصغرى المحلية هي: $g(0) = -3$

الدالة تتزايد على الفترة $(0,2)$ وتتناقص على الفترة $(-\infty,0)$ والفترة $(2,\infty)$.

(3) $h'(x) = -4x^3 - 12x^2 - 8x = -4x(x+1)(x+2)$

النقاط الحرجة هي: $(0,1)$, $(-1,0)$, $(-2,1)$

جدول التغير:

$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$	الفترات
$++$	$--$	$++$	$--$	إشارة h'
↗	↘	↗	↘	سلوك الدالة h

القيمة العظمى المحلية هي: $h(-2) = 1$, $h(0) = 1$

القيمة الصغرى المحلية هي: $h(-1) = 0$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty,-2)$ والفترة $(-1,0)$ وتتناقص على الفترة $(-2,-1)$ والفترة $(0,\infty)$

(4) $g'(x) = 6x^3 + 6x^2 - 6x - 6 = 6(x+1)^2(x-1)$

النقاط الحرجة هي: $(1,-1)$, $(-1,7)$

جدول التغير:

$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$	الفترات
$--$	$--$	$++$	إشارة g'
↘	↘	↗	سلوك الدالة g

القيمة الصغرى المحلية هي: $g(1) = -1$

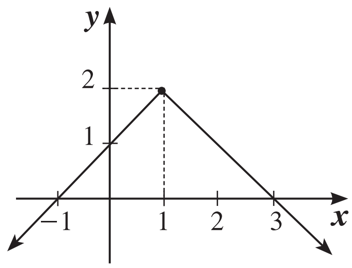
الدالة تتزايد على الفترة $(1, \infty)$ وتتناقص على الفترة $(-\infty, 1)$

(5) $h(x) = 2 - |x-1| = \begin{cases} x+1 & : \quad x < 1 \\ -x+3 & : \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

النقطة الحرجة هي: $(1, 2)$

القيمة العظمى المحلية هي: $h(1) = 2$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty, 1)$ وتتناقص على الفترة $(1, \infty)$



(6) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

لا نقاط حرجة.

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	$- -$	$- -$
سلوك الدالة f	↘	↘

لا يوجد قيم قصوى.

الدالة تتناقص على الفترة $(-\infty, 2)$ والفترة $(2, \infty)$

(7) **(a)** لا يوجد قيمة عظمى محلية.

(b) القيمة الصغرى المحلية عند $x = 2$.

جدول إشارة y':

الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة y'	$-$	$-$	$+$
سلوك الدالة y	↘	↘	↗

(c) $y'' = (x-1)(3x-5)$

نقطة انعطاف عند $x = 1$, $x = \dfrac{5}{3}$

(8) **(a)** قيمة عظمى محلية عند $x = 2$

(b) قيمة صغرى محلية عند $x = 4$

جدول التغير:

	$-\infty$ ... 1	1 ... 2	2 ... 4	4 ... ∞
الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
إشارة g'	$+$	$+$	$-$	$+$
سلوك الدالة g	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

(c) $y'' = 2(x-1)(2x^2 - 10x + 11)$

نقطة انعطاف عند $x = 1$, $x = \dfrac{5+\sqrt{3}}{2} \approx 3.366$, $x = \dfrac{5-\sqrt{3}}{2} \approx 1.634$

(9) كلّا، للدالة f مماس أفقي عند هذه النقطة ولكن يمكن أن تكون متزايدة (أو متناقصة) على كل من الفترتين (a, c) و(c, b) ولا يوجد قيمة قصوى محلية عند $x = c$

مثال: $f(x) = x^3$ حيث $f'(0) = 0$ ولا قيمة عظمى أو صغرى محلية عند $x = 0$

(10) $f'(x) = 6x - 6x^2$

$f'' = 6 - 12x = 6(1-2x)$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad , \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

جدول التغير:

	$-\infty$ ... $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ ... ∞
الفترات	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
إشارة f''	$+\ +$	$-\ -$
تقعر الدالة f	$\cup$ تقعر لأعلى	$\cap$ تقعر لأسفل

بيان الدالة f يكون مقعرًا لأعلى على الفترة $\left(-\infty \ , \ \frac{1}{2}\right)$ ومقعرًا لأسفل على الفترة $\left(\frac{1}{2} \ , \ \infty\right)$، نقطة الانعطاف $\left(\frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{2}\right)$

(11) $g'(x) = x^2 - 4x + 1$

$g''(x) = 2x - 4$

$g''(2) = 0 \quad , \quad g(2) = -\frac{25}{3}$

جدول التغير:

$-\infty \qquad 2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty , 2)$	$(2 , \infty)$
إشارة g''	$- \; -$	$+ \; +$
تقعر الدالة g	$\frown$ تقعر لأسفل	$\smile$ تقعر لأعلى

بيان الدالة f يكون مقعرًا لأعلى على الفترة $(2,\infty)$ ومقعرًا لأسفل على الفترة $(-\infty,2)$، نقطة الانعطاف $\left(2 \,,\, -\frac{25}{3}\right)$

(12) $f'(x) = -4x^3$

$f''(x) = -12x^2$

$f''(x) = 0$ عند $x = 0$ ولكن بيان f لا يغير تقعره على جانبي 0 (بيان f مقعر لأسفل على جانبي 0).

$\therefore$ منحنى f ليس له نقطة انعطاف.

(13) $f(0) = 0 \quad \therefore \quad c = 0$

$f(4) = 16 \implies 4^3 + a(4)^2 + b(4) + c = 16$

$4a + b = -12 \qquad (1)$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(4) = 0 \implies 48 + 8a + b = 0$

$8a + b = -48 \qquad (2)$

من (1)، (2) نحصل على: $a = -9 \ , \ b = 24$

$\therefore \ a = -9 \ , \ b = 24 \ , \ c = 0$

(14) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(2) = 0 \implies 12 + 4a + b = 0$

$4a + b = -12 \qquad (1)$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \implies 6\left(\frac{1}{2}\right) + 2a = 0$

$a = -\frac{3}{2}$

وبالتعويض في (1) نحصل على: $b = -6$

$\therefore \ a = -\frac{3}{2} \ , \ b = -6$

(15) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(3) = 0$

$f''(x) = 2$

$f''(3) = 2 > 0$

$f(3) = (3)^2 - 6(3) + 11 = 2$

فتكون للدالة f قيمة صغرى محلية 2 عند $x = 3$

(16) $f'(x) = 4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9) = 4x(x-3)(x+3)$

$f''(x) = 12x^2 - 36$

$f''(0) = -36 \;\; ; \;\; -36 < 0 \;\; ; \;\; f(0) = 0$

للدالة f قيمة عظمى محلية 0 عند $x = 0$

$f''(3) = 72 \;\; ; \;\; f''(-3) = 72$

$f(3) = f(-3) = -81$

للدالة f قيمة صغرى محلية -81 عند كل من $x = -3 \;\; , \;\; x = 3$

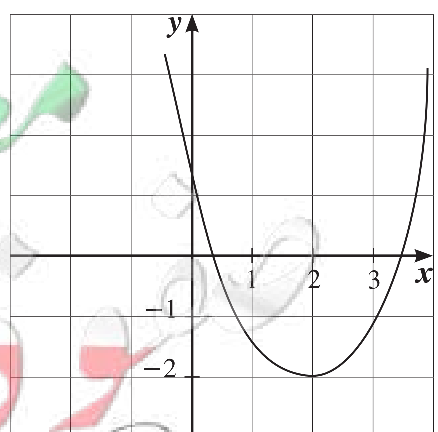
المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (b)	**(5)** (a)
(6) (b)	**(7)** (b)	**(8)** (a)	**(9)** (d)	**(10)** (a)
(11) (d)	**(12)** (b)	**(13)** (c)	**(14)** (a)	**(15)** (b)

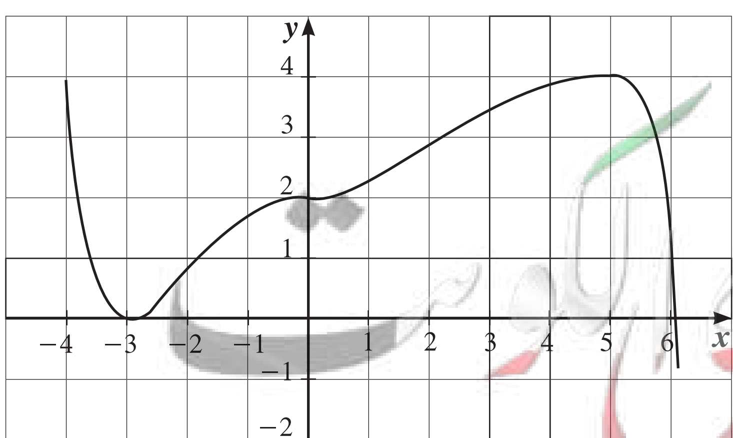
رسم بيان دوال كثيرات الحدود — تمرّنْ 4–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) مجال $f = (-\infty, \infty)$



(2) مجال $f = (-\infty, \infty)$



(3) $\therefore$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$

نوجد النقاط الحرجة:

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

نضع $f'(x) = 0 \implies x = 2 \;;\; x = -\frac{2}{3}$

نقاط حرجة: $\left(-\frac{2}{3}, \frac{229}{27}\right)$, $(2, -1)$ $\therefore$ $f(2) = -1$, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{229}{27}$

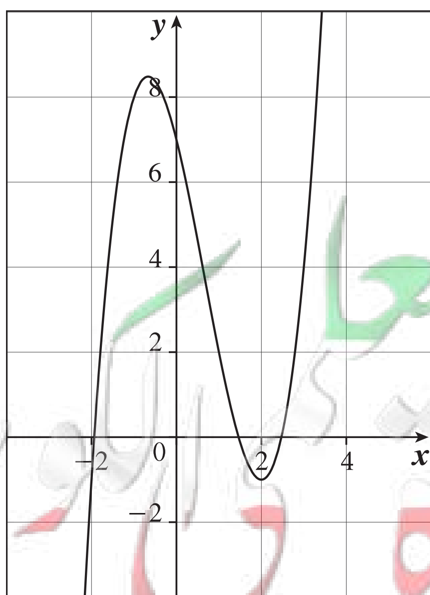
الفترات	$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

$f''(x) = 6x - 4$

$f''(x) = 0 \implies x = \frac{2}{3}$

الفترات	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
إشارة f''	− −	+ +
التقعر	∩	∪

نقطة انعطاف: $I\left(\frac{2}{3}, \frac{101}{27}\right)$ ، $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{101}{27}$



(4) $\therefore$ g دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4}{4}=\infty \;,\; \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{4}=\infty$

$g'(x)=x^3-4x=x(x-2)(x+2)$

النقاط الحرجة: $(-2,1)\;,\;(2,1)\;,\;(0,5)$

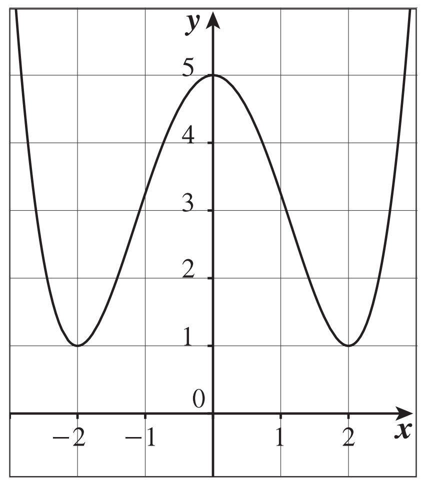
جدول التغير:

$-\infty \qquad -2 \qquad 0 \qquad 2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة g'	$-\,-$	$+\,+$	$-\,-$	$+\,+$
سلوك الدالة g	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$g''(x)=3x^2-4$

نقاط الانعطاف: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\,,\,\frac{25}{9}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\,,\,\frac{25}{9}\right)$



(5) $\therefore$ h دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^4=-\infty \;,\; \lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to\infty}-x^4=-\infty$

$h'(x)=-4x(x-2)(x+2)$

النقاط الحرجة: $(2,8)\;,\;(0,-8)\;,\;(-2,8)$

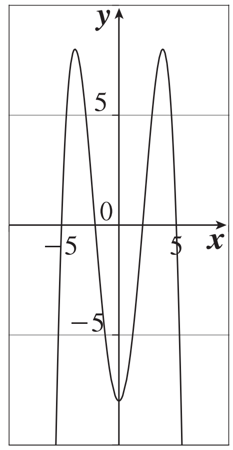
جدول التغير:

$-\infty \qquad -2 \qquad 0 \qquad 2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة h'	$+\,+$	$-\,-$	$+\,+$	$-\,-$
سلوك الدالة h	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$h''(x)=4(4-3x^2)$

نقاط الانعطاف: $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\,,\,\frac{8}{9}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\,,\,\frac{8}{9}\right)$



(6) $\therefore$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} -x^3 = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = \infty$

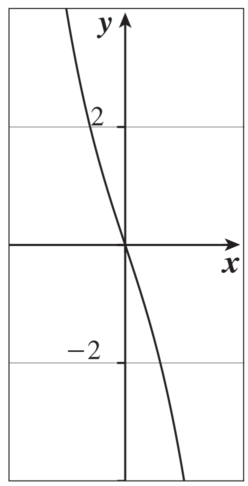
$f'(x) = -3x^2 - 3 < 0$

لا نقاط حرجة.

f دالة مطردة متناقصة.

$f''(x) = -6x$

نقطة الانعطاف: $(0\,,0)$



(7) $f'(x) = 2x^2 - 4x = 2x(x-2)$

(a) جدول التغير:

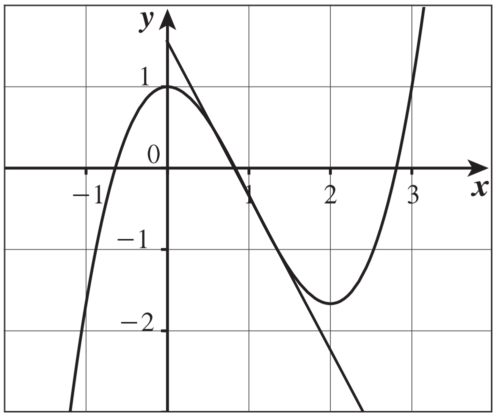
$-\infty \quad 0 \quad 2 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

(b) $A\left(1,-\frac{1}{3}\right)$; $f'(1) = -2$

معادلة (l) : $y = -2x + \frac{5}{3}$

(c)



(8) $f(0) = 1 \implies d = 1$

$f(-2) = 5 \implies -8a + 4b - 2c + 1 = 5$

$-8a + 4b - 2c = 4$

$-4a + 2b - c = 2 \qquad (1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(-2) = 0 \implies 12a - 4b + c = 0 \qquad (2)$

$f'(0) = 0 \implies c = 0 \qquad (3)$

من (1)، (2)، (3) نحصل على $b = 3 \ , \ a = 1$

(9) جدول التغير:

$-\infty \qquad -1 \qquad 1 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f'	$- \ -$	$+ \ +$	$- \ -$
سلوك الدالة f	↘	↗	↘

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (a) **(4)** (a) **(5)** (a)

(6) (c) **(7)** (c) **(8)** (c) **(9)** (a) **(10)** (b)

(11) (d) **(12)** (d) **(13)** (b) **(14)** (a)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) لتكن الأعداد x و $20-x$ حيث $0 \leqslant x \leqslant 20$

(a) مجموع مربعيهما هو: $f(x) = x^2 + (20-x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$ ، ثم $f'(x) = 4x - 40$

النقطة الحرجة والنقاط الطرفية تحدث عند $x = 0$ و $x = 10$ و $x = 20$، ثم $f(0) = 400$ و $f(10) = 200$ و $f(20) = 400$ مجموع المربعين هو أصغر ما يمكن للأعداد 10 و 10

(b) يعطى مجموع عدد واحد مع الجذر التربيعي للعدد لآخر بالدالة $g(x) = x + \sqrt{20-x}$، ثم $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{20-x}}$

تحدث النقطة الحرجة عندما $2\sqrt{20-x} = 1$، إذًا $20 - x = \dfrac{1}{4}$ و $x = \dfrac{79}{4}$، بعد التدقيق في النقاط الطرفية والنقطة الحرجة، نجد أن: $g(0) = \sqrt{20} \approx 4.47$ و $g\left(\dfrac{79}{4}\right) = \dfrac{81}{4} = 20.25$ و $g(20) = 20$

الجمع هو أكبر ما يمكن عند الأعداد $\dfrac{79}{4}$ و $\dfrac{1}{4}$

(2) ترمز x و y إلى ضلعي القائمة في المثلث ولاحظ أن $0 < x < 6$، ثم $x^2 + y^2 = 36$، إذًا $y = \sqrt{36 - x^2}$ (حيث إن $y > 0$)

المساحة هي: $A = \dfrac{1}{2}xy = \dfrac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$، إذًا $\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{1}{2}x\dfrac{1}{2\sqrt{36-x^2}}(-2x) + \dfrac{1}{2}\sqrt{36-x^2} = \dfrac{36-2x^2}{2\sqrt{36-x^2}}$

تحدث النقطة الحرجة عند $36 - 2x^2 = 0$ مما يعني أن $x = 3\sqrt{2}$ (حيث إن $x > 0$) تعود هذه القيمة إلى أكبر مساحة ممكنة حيث إن $\dfrac{dA}{dx} > 0$ لـ $0 < x < 3\sqrt{2}$ و $\dfrac{dA}{dx} < 0$ لـ $3\sqrt{2} < x < 6$ حيث $x = 3\sqrt{2}$، لدينا:

$y = \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$ و $A = \dfrac{1}{2}xy = \dfrac{1}{2}(3\sqrt{2})^2 = 9$ لذا، المساحة الأكبر الممكنة هي $9\,\text{cm}^2$ وبعدا الضلعين هما: $3\sqrt{2}\,\text{cm} \times 3\sqrt{2}\,\text{cm}$

(3) ترمز x إلى طول المستطيل بالمتر $(0 < x < 4)$. ثم العرض هو: $4 - x$ والمساحة هي: $A(x) = x(4-x) = 4x - x^2$.

حيث إن $A'(x) = 4 - 2x$، تحدث النقطة الحرجة عند $x = 2$ حيث إن $A'(x) > 0$ لـ $0 < x < 2$ و $A'(x) < 0$ لِـ $2 < x < 4$ هذه النقطة الحرجة تعود إلى المساحة العظمى.

مقياس المستطيل حسب الأطوال الكبيرة هو $2\,\text{m} \times 2\,\text{m}$، إذًا إنه مربع ومساحته العظمى هي $4\,\text{m}^2$

(4) لاحظ أن القيمتين a و b يجب أن تحققا $a^2 + b^2 = 20^2$ وهكذا، تعطى المساحة بـ: $A = \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2}a\sqrt{400 - a^2}$

لِـ $0 < a < 20$ $\dfrac{dA}{da} = \dfrac{1}{2}a\left(\dfrac{1}{2\sqrt{400-a^2}}\right)(-2a) + \dfrac{1}{2}\sqrt{400-a^2} = \dfrac{-a^2 + (400 - a^2)}{2\sqrt{400-a^2}} = \dfrac{200 - a^2}{\sqrt{400-a^2}}$

تحدث النقطة الحرجة عندما $a^2 = 200$ حيث $\dfrac{dA}{da} > 0$ لِـ $0 < a < \sqrt{200}$ و $\dfrac{dA}{da} < 0$ لِـ $\sqrt{200} < a < 20$

تناظر هذه النقطة الحرجة المساحة العظمى، بالتالي $a = \sqrt{200}$، ثم $b = \sqrt{400 - a^2} = \sqrt{200}$

إذًا المساحة العظمى عند $a = b = 10\sqrt{2}$

(5) x هي الطول بالأمتار للجهة العمودية للنهر فيكون قياس الجهة الموازية للنهر هو $(800-2x)\,\text{m}$ والمساحة هي $A(x)=x(800-2x)=800x-2x^2$ لـ $0<x<400$. بالتالي، $A'(x)=800-4x$ وتحدث النقطة الحرجة عند $x=200$ حيث إن النقطة الحرجة تناظر المساحة العظمى. المساحة الأكبر الممكنة هي $A(200)=80\,000\,\text{m}^2$ والأطوال هي $200\,\text{m}$ (عمودية على النهر) بـ $400\,\text{m}$ (الموازية للنهر).

(6) لتكن x طول كل جهة من قاعدة المربع بالمتر، الارتفاع $\frac{500}{x^2}\,\text{m}$ والمساحة الإجمالية للخزان (باستثناء الفتحة) هي: $S(x)=x^2+4x\left(\frac{500}{x^2}\right)=x^2+2\,000x^{-1}$، بالتالي $S'(x)=2x-2\,000x^{-2}=\frac{2(x^3-1000)}{x^2}$ وتحدث النقطة الحرجة عند $x=10$ حيث إن $S'(x)<0$ لـ $0<x<10$ و $S'(x)>0$ لِـ $x>10$ تناظر النقطة الحرجة أقل كمية مستخدمة من الحديد يجب أن تكون الأبعاد $10\,\text{m}\times10\,\text{m}\times5\,\text{m}$ حيث الارتفاع $5\,\text{m}$

أكّد أن الوزن ينخفض عندما ينخفض مجموع المساحة المكوّن من مساحة القاعدة ومساحات الجوانب الأربعة.

(7) بافتراض أن a و b ثابتتان، ثم $A(\theta)=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ و $A'(\theta)=\frac{1}{2}ab\cos\theta$ تحدث النقطة الحرجة (في $0<\theta<\pi$) عند $\theta=\frac{\pi}{2}$ حيث $A'(\theta)>0$ لـ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ و $A'(\theta)<0$ لـ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ فإن النقطة الحرجة تناظر المساحة العظمى. الزاوية التي تجعل مساحة المثلث أكبر هي: $\theta=\frac{\pi}{2}$ (أو 90°)

(8) نصف قطر العلبة r هو بالـ cm وارتفاعها h هو بالـ cm، ثم $\pi r^2h=1000$ إذًا $h=\frac{1000}{\pi r^2}$

مساحة المعدن المستخدم هي: $A=\pi r^2+2\pi rh=\pi r^2+\frac{2\,000}{r}$ إذًا $\frac{dA}{dr}=2\pi r-2\,000r^{-2}=\frac{2\pi r^3-2\,000}{r^2}$

تحدث النقطة الحرجة عند $r=\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}=10\pi^{\frac{-1}{3}}\,\text{cm}$، حيث $\frac{dA}{dr}<0$ لِـ $0<r<10\pi^{\frac{-1}{3}}$ و $\frac{dA}{dr}>0$ لِـ $r>10\pi^{\frac{-1}{3}}$، تناظر النقطة الحرجة أقل كمية من المواد المستخدمة لصنع العلبة الأقل سماكة.

الأبعاد هي: $r=10\pi^{\frac{-1}{3}}\approx6.83\,\text{cm}$ و $h=10\pi^{\frac{-1}{3}}\approx6.83\,\text{cm}$

(9) لتكن x طول نصف قطر قاعدة المخروط وارتفاعه $y+3$. بالعودة إلى مقدمة المسألة، حيث $x^2+y^2=9$ لدينا $x=\sqrt{9-y^2}$ حجم المخروط يعطى حسب:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi x^2(y+3)=\frac{1}{3}\pi(9-y^2)(y+3)=\frac{\pi}{3}(-y^3-3y^2+9y+27)$$ لِـ $0<y<3$ لذلك،

$$\frac{dV}{dy}=\frac{\pi}{3}(-3y^2-6y+9)=-\pi(y^2+2y-3)=-\pi(y+3)(y-1)$$ إذًا النقطة على الفترة $(0,3)$ هي $y=1$ حيث

$\frac{dV}{dy}<0$ لِـ $0<y<1$ و $\frac{dV}{dy}<0$ لِـ $1<y<3$ تناظر النقطة الحرجة القيمة العظمى، التي تساوي $V(1)=\frac{32\pi}{3}(\text{units}^3)$

(10) تربيع المسافة هو: $D(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(\sqrt{x}+0)^2=x^2-2x+\frac{9}{4}$، إذًا $D'(x)=2x-2$ وتحدث النقطة الحرجة عند $x=1$ حيث $D'(x)<0$ لـ $x<1$ و $D'(x)>0$ لـ $x>1$ تناظر النقطة الحرجة المسافة الأصغر، التي هي $\sqrt{D(1)}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ units

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (b) **(3)** (c) **(4)** (d) **(5)** (a) **(6)** (b)

اختبار الوحدة الثالثة

(1) $f' = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x+1)(x-7)$

$f(-1) = 0 \quad , \quad f(-2) = -13 \quad , \quad f(0) = -11$

0 قيمة عظمى مطلقة عند $x = -1$

-13 قيمة صغرى مطلقة عند $x = -2$

(2) $f'(x) = \dfrac{-10x}{(x^2+1)^2}$

$f(0) = 5 \quad , \quad f(-2) = 1 \quad , \quad f(3) = \dfrac{1}{2}$

5 قيمة عظمى مطلقة عند $x = 0$

$\frac{1}{2}$ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 3$

(3) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$

جدول التغير:

	$-\infty$ -2	-2 2	2 ∞
الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

$f(2) = -10$

$f(-2) = 22$

(a) فترات التزايد: $(2,\infty)$ ، $(-\infty,-2)$

فترة التناقص: $(-2,2)$

(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية 22 عند $x = -2$؛ قيمة صغرى محلية -10 عند $x = 2$

(4) $g'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

جدول التغير:

	$-\infty$ -1	-1 1	1 ∞
الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	− −	+ +	− −
سلوك الدالة f	↘	↗	↘

$f(1) = \dfrac{1}{2}$

$f(-1) = -\dfrac{1}{2}$

(a) فترة التزايد: $(-1,1)$

فترات التناقص: $(-\infty,-1)$ ، $(1,\infty)$

(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية $\frac{1}{2}$ عند $x=1$؛

قيمة صغرى محلية $-\frac{1}{2}$ عند $x=-1$

(5) $h'(x)=\dfrac{-x^2+9}{(x^2+2x+9)^2}=\dfrac{-(x-3)(x+3)}{(x^2+2x+9)^2}$

جدول التغير:

$-\infty \quad -3 \quad 3 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
إشارة f'	$--$	$++$	$--$
سلوك الدالة f	↘	↗	↘

$f(3)=\frac{1}{8}$

$f(-3)=-\frac{1}{4}$

(a) فترة التزايد: $(-3,3)$

فترات التناقص: $(-\infty,-3)$ ، $(3,\infty)$

(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية $\frac{1}{8}$ عند $x=3$؛

قيمة صغرى محلية $-\frac{1}{4}$ عند $x=-3$

(6) $f(x)=2x^3-6x^2+3$

$f'(x)=6x^2-12x$

$f''(x)=12x-12=12(x-1)$

جدول التقعر:

$-\infty \quad 1 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f''	$--$	$++$
تقعر الدالة f	$\frown$	$\smile$

$f(1)=-1$

(a) فترات التقعر: مقعرة لأعلى على الفترة $(1,\infty)$

مقعرة لأسفل على الفترة $(-\infty,1)$

(b) نقطة الانعطاف: $(1,-1)$

(7) $g(x)=x^4-2x^3+5x-6$

$g'(x)=4x^3-6x^2+5$

$g''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

جدول التقعر:

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
إشارة g''	$++$	$--$	$++$
تقعر الدالة g	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$g(1)=-2$ $\qquad$ $g(0)=-6$

(a) فترات التقعر: مقعرة لأعلى على الفترة $(-\infty,0)$ والفترة $(1,\infty)$

مقعرة لأسفل على الفترة $(0,1)$

(b) نقاط الانعطاف: $(1,-2)$, $(0,-6)$

(8) $h(x)=\dfrac{3}{x-1}$

$h'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

$h''(x)=\dfrac{6}{(x-1)^3}$

جدول التقعر:

الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
إشارة h''	$--$	$++$
تقعر الدالة h	$\cap$	$\cup$

(a) فترات التقعر: مقعرة لأعلى على الفترة $(1,\infty)$ ، مقعرة لأسفل على الفترة $(-\infty,1)$.

(b) لا نقاط انعطاف.

(9) $y''=6(2x-1)$

(a) $x=-1$ $\qquad$ $x=2$ $\qquad$ قيم x

(b) $x>\frac{1}{2}$ $\qquad$ $y''>0$

فترة التقعر لأعلى: $(\frac{1}{2}\ ,\ \infty)$

(c) $x<\frac{1}{2}$ $\qquad$ $y''<0$

فترة التقعر لأسفل: $(-\infty\ ,\ \frac{1}{2})$

(10) $y'' = 18x(x-2)$

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 2 & \\ ++ & & -- & & ++ \end{array}$$

(a) $x = -1$

(b) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(2, \infty)$

(c) مقعر لأسفل على الفترة $(0, 2)$

(11) ليس للدالة نقطة انعطاف عند $x = 3$ ، وهناك نقطة انعطاف عند $x = 0$

(12) $f(x) = x^3 + 8$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 8$

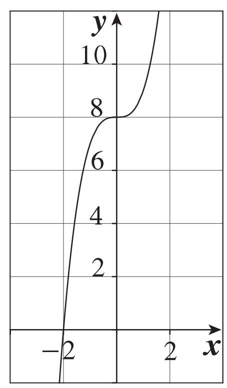
جدول التغير:

$-\infty$ 0 ∞

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f'	$++$	$++$
سلوك الدالة f	$\nearrow$	$\nearrow$

$f''(x) = 6x \;\; ; \;\; f(0) = 8$

النقطة $(0, 8)$ نقطة انعطاف.



(13) $g'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$

جدول التغير:

$-\infty$ $-\sqrt{3}$ 0 $\sqrt{3}$ ∞

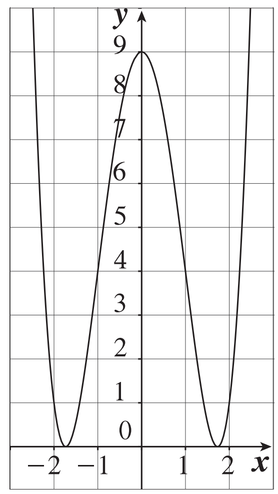
الفترات	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
إشارة g'	$--$	$++$	$--$	$++$
سلوك الدالة g	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$g(0) = 9 \qquad g(-\sqrt{3}) = g(\sqrt{3}) = 0$

$g''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x-1)(x+1)$

$g(-1) = 4 \qquad g(1) = 4$

نقاط الانعطاف: $(1,4)$, $(-1,4)$



(14) $h'(x) = 2(x^2 + 4x + 4)(2x + 4) = 4(x+2)^3$

جدول التغير:

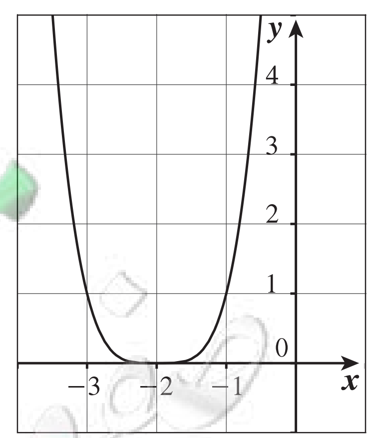
$-\infty \qquad -2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
إشارة h'	$- -$	$+ +$
سلوك الدالة h	↘	↗

$h(-2) = 0$

$h''(x) = 12(x+2)^2$

النقطة $(-2,0)$ ليست نقطة انعطاف.



(15) **(a)** f دالة كثيرة حدود متصلة على الفترة $[0,3]$، قابلة للاشتقاق على الفترة $(0,3)$

$\therefore$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0,3]$

(b) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$f'(c) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0}$$

$$3c^2 - 6c = \frac{5-5}{3} = 0$$

$$3c(c-2) = 0$$

$$c = 2 \quad , \quad c = 0 \notin (0,3)$$

(16) $f(-2) = -1 \implies 4 - 2b + c = -1$

$$-2b + c = -5 \qquad (1)$$

$$f'(x) = 2x + b$$

$$f'(-2) = 0 \implies 2(-2) + b = 0 \quad ; \quad b = 4$$

من (1) نحصل على $-2(4) + c = -5$

$$c = 3$$

تمارين إثرائية

(1) **(a)** عند $t = \frac{\pi}{3}\,s$ أو عند $t = \frac{4\pi}{3}\,s$

(b) المسافة القصوى بين الجسيم A والجسيم B. نحصل عليها من:

$$f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin t$$

$$f(t) = \sin t \times \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \times \cos t - \sin t$$

$$f(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

$$f'(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$$

$$f'(t) = 0 \implies \tan t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$t = \frac{11\pi}{6}$ أو $t = \frac{5\pi}{6}$

وبالتالي أبعد مسافة هي $1\,\text{m}$

(c) نوجد $f''(t)$ عند $t = \frac{\pi}{3}\,s$ أو $t = \frac{4\pi}{3}\,s$

(2) **(a)** نرسم القطعة RS كما هو موضّح، ونجعل y طول QR. $PB = 22 - x$

$$QB = \sqrt{x^2 - (22-x)^2} = \sqrt{22(2x-22)}$$

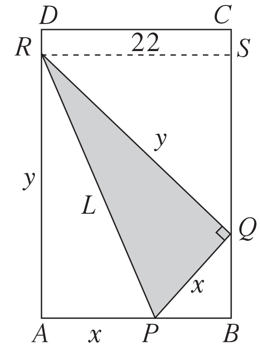
إن المثلثين QRS، PQB متشابهان إذاً:

$$\frac{y}{x} = \frac{22}{\sqrt{22(2x-22)}}$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{22^2}{22(2x-22)}$$

$$y^2 = \frac{22x^2}{2x-22}$$

$$y^2 = \frac{11x^2}{x-11}$$



$L^2 = x^2 + y^2$ نظرية فيثاغورث

$$L^2 = x^2 + \frac{11x^2}{x-11}$$

$$L^2 = \frac{x^2(x-11)+11x^2}{x-11}$$

$$L^2 = \frac{x^3}{x-11}$$

(b) $L^2 = \frac{x^3}{x-11}$ نوجد مشتقة L^2

$$\frac{d(L^2)}{dx} = \frac{3x^2(x-11)-1(x^3)}{(x-11)^2} = \frac{2x^3-33x^2}{(x-11)^2}$$

$$= \frac{x^2(2x-33)}{(x-11)^2} \quad ; \quad x^2 > 0$$

$$\frac{d(L^2)}{dx} = 0 \Rightarrow 2x-33 = 0 \Rightarrow x = \frac{33}{2}$$

(c) $L^2\left(\frac{33}{2}\right) = \frac{\left(\frac{33}{2}\right)^3}{\frac{33}{2}-11} = \frac{3\times(33)^2}{4}$

$$L = \frac{33\sqrt{3}}{2} \approx 28.5788\,\text{cm}$$

(3) قيمة مبيع السلعة: $nx = \frac{ax}{x-10} + bx(100-x)$

كلفة الإنتاج: $10n = \frac{10a}{x-10} + 10b(100-x)$

الربح: $P(x) = nx - 10n$

$$P(x) = \frac{ax}{x-10} + bx(100-x) - \frac{10a}{x-10} - 10b(100-x)$$

$$P'(x) = \frac{a(x-10)-ax}{(x-10)^2} + b(100-x) - bx + \frac{10a}{(x-10)^2} + 10b$$

$$P'(x) = 110b - 2bx$$

يحدث الربح الأكبر إذا $P'(x) = 0$ أي (دينارًا كويتيًّا) $x = 55$

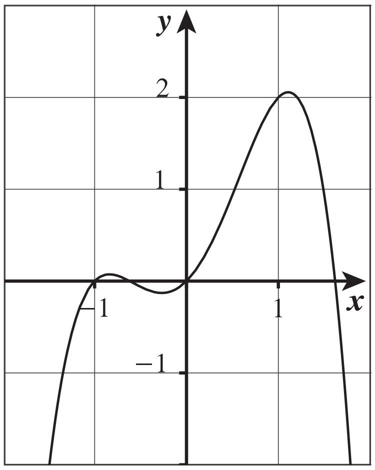
(4) **(a)** $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$

$f''(x) = -12x^2 + 4$

نقاط الانعطاف: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -0.02\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1.13\right)$

جدول التغير:

	$-\infty$ — -0.838	-0.838 — -0.269	-0.269 — 1.1	1.1 — ∞
الفترات	$(-\infty, -0.838)$	$(-0.838, -0.269)$	$(-0.269, 1.1)$	$(1.1, \infty)$
إشارة f'	$+\,+$	$-\,-$	$+\,+$	$-\,-$
سلوك الدالة f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$



(b) $f'(x) = 1 \implies -4x^3 + 4x + 1 = 1$

$-4x(x^2 - 1) = 0$

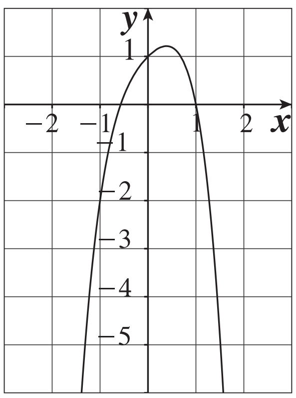
$x = 0 \;,\; x = 1 \;,\; x = -1$

$f(0) = 0 \;,\; f(1) = 2 \;,\; f(-1) = 0$

النقاط: $(-1,0) \;,\; (1,2) \;,\; (0,0)$

(c) معادلة المماس عند كل من النقطتين $(1,2)$, $(-1,0)$: $y = x + 1$

(5) $y' = 1 - 2x - 4x^3$ تكون الدالة y' صفرًا عند $x \approx 0.385$



الفترات	$x < 0.385$	$x > 0.385$
إشارة y'	$+$	$-$
سلوك y	متزايدة	متناقصة

$y'' = -2 - 12x^2 = -2(1 + 6x^2)$ المشتقة الثانية هي دائمًا سالبة إذًا هي مقعرة لأسفل لكل قيم x .

(a) $(-\infty, 0.385]$ تقريبًا.

(b) $[0.385, \infty)$ تقريبًا.

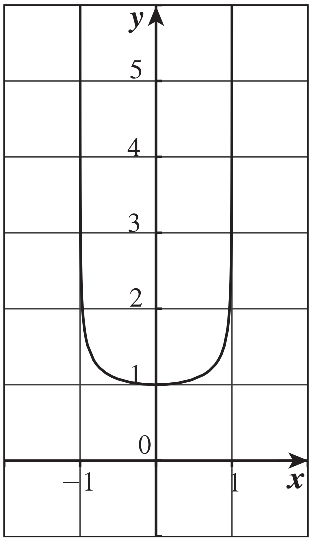
(c) غير موجودة.

(d) $(-\infty, \infty)$

(e) عظمى مطلقة عند $(0.385 , 1.215)$

(f) غير موجودة.

(6) لاحظ أن المجال هو $(-1,1)$



$$y=(1-x^2)^{\frac{-1}{4}}$$

$$y'=-\frac{1}{4}(1-x^2)^{\frac{-5}{4}}(-2x)=\frac{x}{2(1-x^2)^{\frac{5}{4}}}$$

الفترات	$(-1,0)$	$(0,1)$
إشارة y'	$-$	$+$
سلوك y	متناقصة	متزايدة

$$y''=\frac{2(1-x^2)^{\frac{5}{4}}(1)-(x)(2)\left(\frac{5}{4}\right)(1-x^2)^{\frac{1}{4}}(-2x)}{4(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}[2-2x^2+5x^2]}{4(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{3x^2+2}{4(1-x^2)^{\frac{9}{4}}}$$

المشتقة الثانية هي دائمًا موجبة، إذًا الدالة هي مقعرة لأعلى في مجالها $(-1\ ,\ 1)$

(a) $[0,1)$ **(b)** $(-1,0]$

(c) $(-1,1)$ **(d)** غير موجودة

(e) صغرى مطلقة عند $(0,1)$ **(f)** غير موجودة

(7) $y=2x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{9}{5}}$

$$y'=\frac{8}{5}x^{\frac{-1}{5}}-\frac{9}{5}x^{\frac{4}{5}}=\frac{8-9x}{5\sqrt[5]{x}}$$

الفترات	$(-\infty,0)$	$\left(0\ ,\ \frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{8}{9}\ ,\ \infty\right)$
إشارة y'	$-$	$+$	$-$
سلوك y	متناقصة	متزايدة	متناقصة

$$y''=-\frac{8}{25}x^{\frac{-6}{5}}-\frac{36}{25}x^{\frac{-1}{5}}=-\frac{4(2+9x)}{25x^{\frac{6}{5}}}$$

الفترات	$\left(-\infty\ ,\ -\frac{2}{9}\right)$	$\left(-\frac{2}{9}\ ,\ 0\right)$	$(0\ ,\ \infty)$
إشارة y''	$+$	$-$	$-$
سلوك y	مقعرة لأعلى	مقعرة لأسفل	مقعرة لأسفل

(a) $\left[0,\frac{8}{9}\right]$

(b) $(-\infty,0)$ و $\left(\frac{8}{9},\infty\right)$

(c) $\left(-\infty,-\frac{2}{9}\right)$

(d) $\left(-\frac{2}{9},0\right)$ و $(0,\infty)$

(e) قيمة عظمى محلية عند $\left(\frac{8}{9}\ ,\ \frac{10}{9}\times\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{4}{5}}\right)\approx(0.889\ ,\ 1.011)$

قيمة صغرى محلية عند $(0,0)$

(f) $\left(-\frac{2}{9}\ ,\ \frac{20}{9}\times\left(-\frac{2}{9}\right)^{\frac{4}{5}}\right)\approx\left(-\frac{2}{9}\ ,\ 0.667\right)$

(8) (a) كلتا قيم y' و y'' هي سالبة حيث يتناقص المنحنى ومقعر لأسفل، عند T.

(b) قيمة y' سالبة هي وقيمة y'' موجبة بحيث يتناقص المنحنى ومقعر لأعلى، عند P.

(9) $f(0)=3 \implies d=3$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=0 \implies c=0$

$f(1)=1 \implies a+b+3=1$

$a+b=-2 \qquad (1)$

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=0 \implies 6a+2b=0$

$3a+b=0 \qquad (2)$

من (1) و (2) نحصل على $a=1\ ,\ b=-3$

(10)(a) f تتزايد على الفترة $[0,1]$ وتتناقص على الفترة $[1,3]$. تحدث القيم العظمى المطلقة عند $x=1$

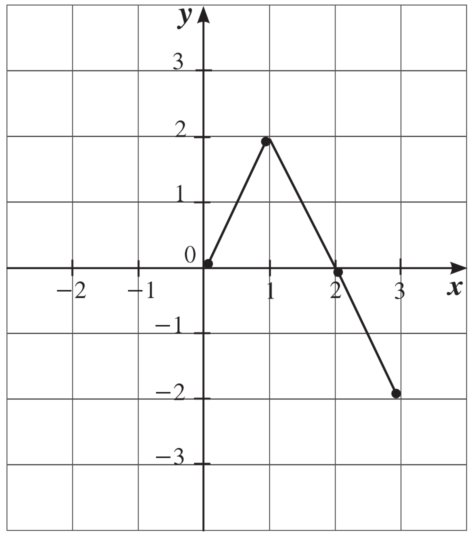
وتحدث القيم الصغرى المطلقة عند النقاط الطرفية.

حيث إن $f(0)=0\ ,\ f(1)=2\ ,\ f(3)=-2$ لذا القيمة العظمى المطلقة هي 2 عند $x=1$

والقيمة الصغرى المطلقة هي -2 عند $x=3$

(b) لا يتغير تقعر المنحنى لذا ما من نقاط انعطاف.

(c)



(11) **(a)** $y = 2$ مقارب أفقي $\therefore\ \frac{a}{c} = 2\ ,\ a = 2c$ (1)

(b) $x = \frac{1}{2}$ مقارب رأسي $\therefore\ c\left(\frac{1}{2}\right) + d = 0\ ,\ d = -\frac{1}{2}c$ (2)

(c) $A(-1\ ,\ 1)\ \therefore\ 1 = \frac{-a+b}{-c+d}\ ,\ -c+d = -a+b$

إذًا من (1), (2) نجد أنّ $c = \frac{1}{2}b$

لتكن $c = 2$ إذًا $y = \frac{4x+1}{2x-1}$

(12) $f(x) = 2x^2 - 4x$

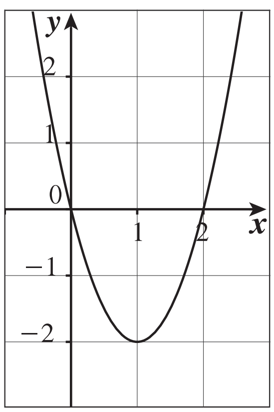
(a) $f'(x) = 4x - 4$

$f'(1) = 0 \qquad f(1) = -2$

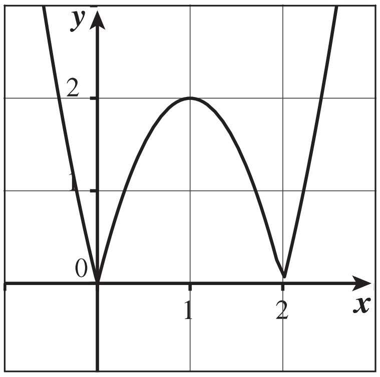
جدول التغير:

$-\infty \qquad 1 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f''	$-\ -$	$+\ +$
تقعر الدالة f	$\searrow$	$\nearrow$



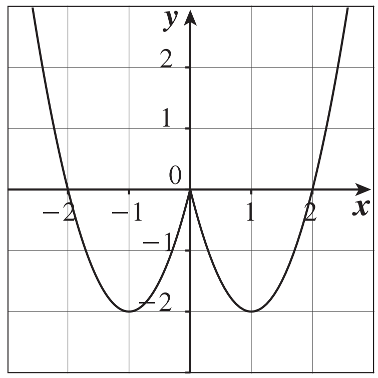
(b) $g(x) = |2x^2 - 4x| = \begin{cases} 2x^2 - 4x = f(x) & : \quad x \le 0 \\ -2x^2 + 4x = -f(x) & : \quad 0 < x < 2 \\ 2x^2 - 4x = f(x) & : \quad x \ge 2 \end{cases}$



(c) $h(x)=\begin{cases}2x^2-4x & : \quad x\ge 0\\ 2x^2+4x & : \quad x<0\end{cases}=\begin{cases}f(x) & : \quad x\ge 0\\ f(-x) & : \quad x<0\end{cases}$

بيان h على الفترة $[0,\infty)$ هو نفسه بيان f.

بيان h على الفترة $(-\infty,0)$ هو انعكاس في المحور الرأسي لبيان h على الفترة $(0,\infty)$



(13) (a) $f'(x)=3x^2+4$

$3x^2+4=7 \implies x=1$ أو $x=-1$

(b) $f(1)=16 \qquad f(-1)=6$

$y(1)=16 \qquad y(-1)=2$

النقطة $(1,16)$ هي نقطة مماس.

(14) (a) $f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$

$f(0)=0 \qquad f(2)=\frac{8}{3}-4=\frac{-4}{3}$

$-\infty \qquad 0 \qquad 2 \qquad \infty$

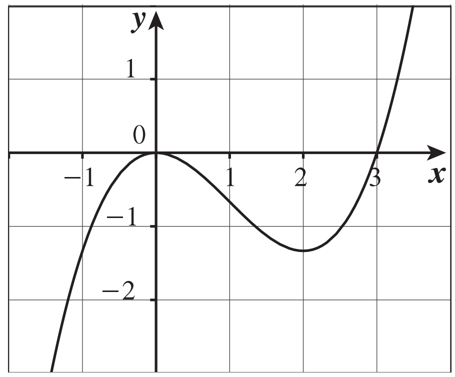
الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

$f''(x)=2x-2=2(x-1)$

$f(1)=\frac{1}{3}-1=\frac{-2}{3}$

النقاط الحرجة: $\left(2,-\frac{4}{3}\right)$ ، $(0,0)$

نقطة الانعطاف: $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$



(b) $f'(x)=3 \implies x^2-2x=3$

$x=-1 \qquad x=3$

$f(-1)=\frac{-4}{3} \qquad f(3)=0$

النقطتان $(3,0)$, $\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$

(15) (a) $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

$f(-1)=4 \qquad f(1)=0$

$g'(x)=2x-3$

الفترات	$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},\infty\right)$
إشارة g'	− −	+ +
سلوك الدالة g	↘	↗

$g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-9}{4}$

(b) $f(x) = g(x)$

$x^3 - 3x + 2 = x^2 - 3x$

$x^3 - x^2 + 2 = 0$

$x = -1$

$f(-1) = 4$

النقطة المشتركة $(-1,4)$

(c) مماس على (C)

$f'(-1) = 0$

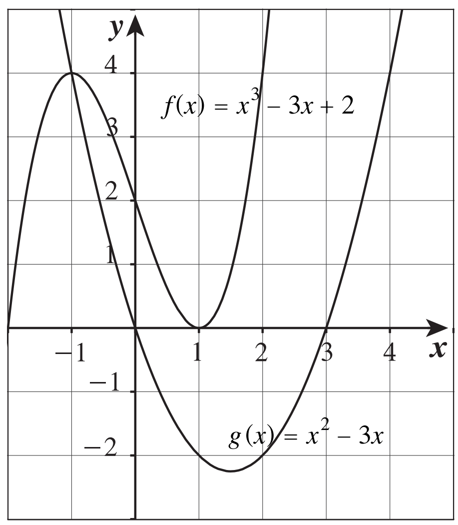
$y = 4$

مماس على (C')

$g'(-1) = -5$

$y = -5x + 9$

(d)



المجموعة A تمارين مقالية

(1) من جدول التوزيع الطبيعي:

(a) $\frac{0.97}{2} = 0.485 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$

(b) $\frac{0.992}{2} = 0.496 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.65$

(2) درجة الثقة 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 0.5$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{1000}} \approx 0.03$

فترة الثقة: $(4.97 \ , \ 5.03)$

(3) درجة الثقة = 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 3.5$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{3.5}{\sqrt{13}} \approx 1.9$

فترة الثقة: $(28.1 \ , \ 31.9)$

عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 13)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة عشوائية فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

(4) درجة الثقة = 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 119.5$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{119.5}{\sqrt{40}} \approx 37.0338$

فترة الثقة: $(135.4662 \ , \ 209.5338)$

(5) درجة الثقة: 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $S = 2.2$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{2.2}{\sqrt{80}} \approx 0.48$

فترة الثقة: $(4.32 \ , \ 5.28)$

(6) درجة الثقة: 0.95، $n = 16 < 30$، درجات الحرية = 15، $S = \sqrt{15}$

القيمة الحرجة: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.132$

هامش الخطأ: $E = 2.132 \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} \approx 2.0643$

فترة الثقة: $(10.9357 \ , \ 15.0643)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (d)
(5) (d)	**(6)** (b)	**(7)** (b)	**(8)** (a)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 16$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 16$

$\sigma = 1.4$ معلومة، $n = 25$، $\bar{x} = 15$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{15 - 16}{\dfrac{1.4}{\sqrt{25}}} \approx -3.57$

درجة الثقة $= 0.95$

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96 \,,\, 1.96)$

بما أن: $-3.57 \notin (-1.96 \,,\, 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $\mu = 16$ ونقبل الفرض البديل: $\mu \neq 16$

(2) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 300$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 300$

$\sigma = 40$ معلومة، $n = 49$، $\bar{x} = 280$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{280 - 300}{\dfrac{40}{\sqrt{49}}} = -3.5$

درجة الثقة $= 0.95$

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96 \,,\, 1.96)$

بما أن: $-3.5 \notin (-1.96 \,,\, 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $\mu = 300$ ونقبل الفرض البديل: $\mu \neq 300$

(3) **(a)** $n = 50$. صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

σ غير معلومة، $n = 50$، $\bar{x} = 40$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{40 - 35}{\dfrac{7}{\sqrt{50}}} \approx 5.0508$

درجة الثقة $= 0.95$

فتكون: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96 \,,\, 1.96)$

بما أن $5.0508 \notin (-1.96 \,,\, 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ ونقبل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

(b) $n = 20$ ، صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

σ غير معلومة، $n = 20 < 30$ ، $\bar{x} = 280$

الاختبار الإحصائي: $t = \dfrac{40 - 35}{\dfrac{7}{\sqrt{20}}} \approx 3.1944$

درجات الحرية: $20 - 1 = 19$

درجة الثقة: 0.95، مستوى المعنوية: $\alpha = 0.05$ ، $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0.05}{2} = 0.025$

من جدول التوزيع t نجد $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$

منطقة القبول: $(-2.093 \,,\, 2.093)$

بما أن: $3.1944 \notin (-2.093\ ,\ 2.093)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ ونقبل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

(4) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 5$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 5$

$\overline{x} = 4.5$ ، $S = 1$ ، $n = 100$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{4.5 - 5}{\dfrac{1}{\sqrt{100}}} = -5$

درجة الثقة $= 0.95$ فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ منطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن $-5 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0: \mu = 5$ ونقبل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 5$

(5) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 30$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 30$

$\overline{x} = 30.3$ ، $n = 150$ ، $S = 6.5$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{30.3 - 30}{\dfrac{6.5}{\sqrt{150}}} \approx 0.565$

درجة الثقة $= 0.95$

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ منطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن $0.565 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

لذا نقبل فرض العدم: $H_0: \mu = 30$

(6) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 9\,600$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 9\,600$

$\overline{x} = 9\,480$ ، $n = 64$ ، $S = 640$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{9\,480 - 9\,600}{\dfrac{640}{\sqrt{64}}} = -1.5$

درجة الثقة $= 0.95$ فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن $-1.5 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

القرار: نقبل فرض العدم: $H_0: \mu = 9\,600$

المجموعة B تمارين موضوعية

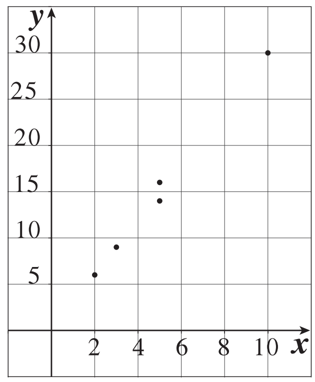
(1) (a) **(2)** (b) **(3)** (a) **(4)** (b)

(5) (b) **(6)** (b) **(7)** (b) **(8)** (c)

(9) (a) **(10)** (c)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a)

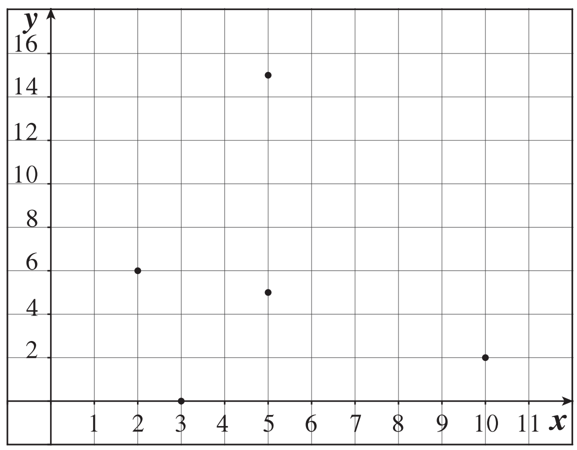


يوجد ارتباط خطي واضح بين x و y .

(b) $n = 5$, $\sum x = 25$, $\sum x^2 = 163$,

$\left(\sum x\right)^2 = 625$, $\sum xy = 489$, $r = 0.997$

(2) (a)

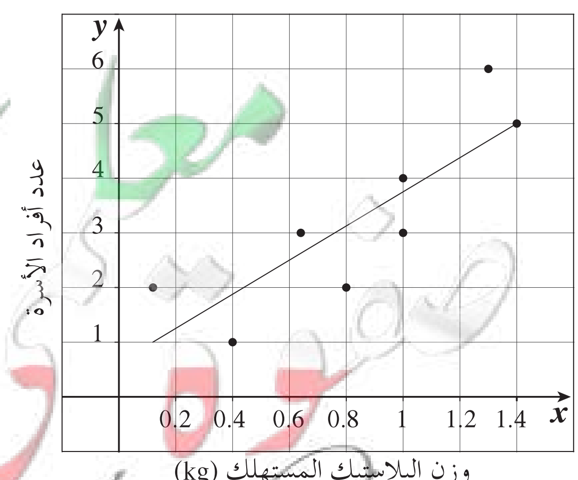


لا يوجد ارتباط خطي واضح بين x و y .

(b) $n = 5$, $\sum x = 25$, $\sum x^2 = 163$,

$\left(\sum x\right)^2 = 625$, $\sum xy = 132$, $r = -0.112$

(3) (a)

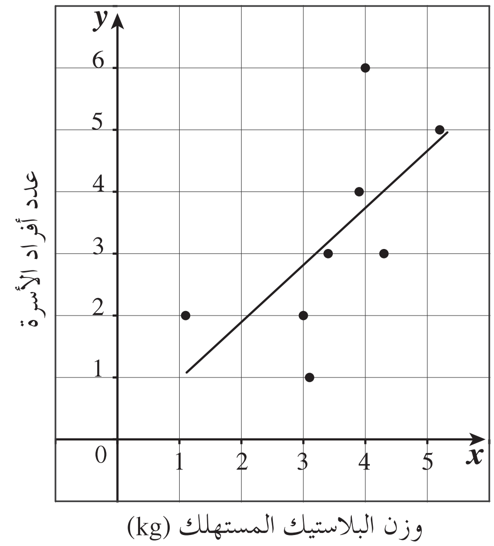


(b) قيمة مُعامل الارتباط الخطي هي: $r = 0.847$

(c) القيمة الحرجة لمُعامل ارتباط بيرسون إذا كان $n = 8$ و $\alpha = 0.05$ هي $r = \pm\, 0.707$

إذًا يوجد ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين.

(4) (a)



(b) قيمة مُعامل الارتباط الخطي هي: $r = 0.6344$

(c) القيمة الحرجة لمُعامل ارتباط بيرسون إذا كان $n = 8$ و $\alpha = 0.05$ هي $r = \pm\, 0.707$

إذًا لا يوجد ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين.

(5) (a) $\widehat{y} = 2x + 1$

(b) $\widehat{y}_7 = 2 \times 7 + 1 = 15$

(c) $\widehat{y}_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$

مقدار الخطأ عند $x = 2$

$|5 - 5| = 0$

(6) (a) $\widehat{y} = -x + 3$

(b) $\widehat{y}_8 = -8 + 3 = -5$

(c) $\widehat{y}_5 = -5 + 3 = -2$

مقدار الخطأ عند $x = 5$

$|-2 + 2| = 0$

(7) (a) $\widehat{y} = 3.246x + 0.55$

(b) $\widehat{y} = 3.246 \times 0.2 + 0.55$

≈ 1.2

أي واحد فقط من أفراد الأسرة.

(8) **(a)** $\widehat{y} = 0.89x + 0.137$

(b) $\widehat{y} = 0.89x \times 4.5 + 0.137$

$= 4.142$

أي 4 من أفراد الأسرة.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)
(5) (a)	**(6)** (d)	**(7)** (b)	**(8)** (d)
(9) (a)	**(10)** (b)	**(11)** (c)	**(12)** (a)
(13) (b)	**(14)** (d)	**(15)** (c)	

اختبار الوحدة الرابعة

(1) **(a)** درجة الثقة 93% تناظر مستوى المعنوية $\alpha = 0.07$ أي أن $\frac{\alpha}{2} = 0.035$ باستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي عند $0.93 \div 2 = 0.465$ فنحصل على $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.815$

(b) درجة الثقة 0.95، $n = 324$، $\overline{x} = 68.5$، $S = 11$، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ عندها $\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$

$$68.5 - 1.96\left(\frac{11}{\sqrt{324}}\right) < \mu < 68.5 + 1.96\left(\frac{11}{\sqrt{324}}\right)$$

$$67.302 < \mu < 69.698$$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 95% أن المتوسط الحسابي لكلفة النقل للموظف الحكومي من منزله إلى العمل وبالعكس بسيارته الخاصة هو بين 67.302 دينارًا كويتيًّا و69.698 دينارًا كويتيًّا أي $67.302 < \mu < 69.698$

(c) بما أن $n = 324 > 30$، أي أنه يمكننا استخدام $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ كقيمة حرجة، لمستوى المعنوية $\alpha = 0.05$، وبما أن $\mu = 69.6$ يقع داخل فترة الثقة $(67.302\ ,\ 69.698)$ فإن قرارنا هو عدم رفض فرضية $\mu = 69.6$ (دينارًا كويتيًّا) متوسط كلفة شهرية.

(d) $E < 1$، $\sigma = 9.5$، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$، عندها نستخدم القاعدة: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$1 > 1.96\left(\frac{9.5}{\sqrt{n}}\right)$، $\sqrt{n} > 1.96(9.5)$

$n > 346.7$ أي 347 موظفًا وأكثر.

(2) **(a)** درجة الثقة 95% أي أن $1 - \alpha = 0.95$ حيث $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

هامش الخطأ: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$E = \frac{1.96(8.16)}{\sqrt{n}} < 2$$

$$n > \left(\frac{1.96(8.16)}{2}\right)^2 > 63.95$$

أي 64 زائدًا وأكثر

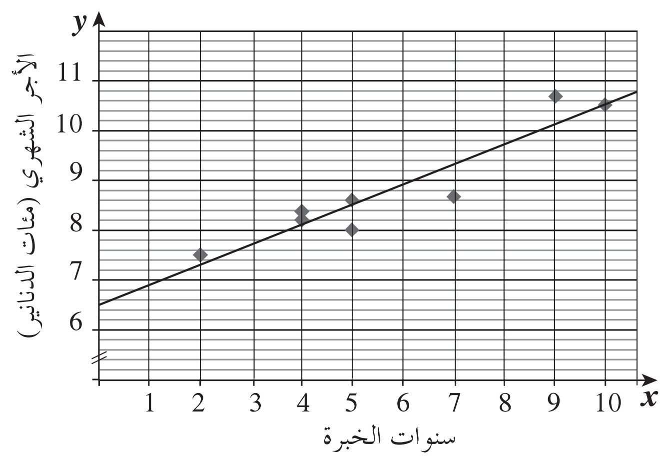
(b) $E = 2$, $\overline{x} = 25.5$, $n = 64$

عندها $\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$

$23.5 < \mu < 27.5$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 95% أن المتوسط الحسابي μ لما ينفقه كل زائر للمجمع التجاري في زيارة واحدة هو بين 23.5 وَ27.5 دينارًا كويتيًّا، أي أن: $23.5 < \mu < 27.5$

(3) (a)



(b) $n = 8$ ، $\sum x = 46$ ، $\sum x^2 = 316$ ، $\left(\sum x\right)^2 = 2116$ ، $\sum xy = 426.6$

(c) $r = 0.9388$ ، القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$ هي $\mu = \pm 0.707$ مما يعني أن هناك ارتباط خطي إيجابي قوي بين x, y

(d) معادلة خط الانحدار: $\widehat{y} = 0.4x + 6.525$

(e) التنبؤ لراتب موظف لديه 8 سنوات خبرة هو $\widehat{y} = 0.4(8) + 6.525$ أي 9.725 مئة دينار أو 973 (دينارًا كويتيًّا).

(4) (a) معادلة خط الانحدار: $\widehat{y} = -\,0.1513x + 5.0196$

(b) أفضل تنبؤ لعدد أفراد الأسرة هو: 3 أفراد

(5) $E = 1.96 \times \dfrac{1.2}{\sqrt{9}} = 0.784$

فترة الثقة: (19.216 , 20.784)

تمارين إثرائية

(1) $n = 36$ ، $\overline{x} = 11.6$ ، $S = 2.5$ ، $1 - \alpha = 0.9$ أي $\alpha = 0.1$ مما يعطينا $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$ كقيمة حرجة أي أن:

$\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$

$11.6 - 1.645\left(\dfrac{2.5}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 11.6 + 1.645\left(\dfrac{2.5}{\sqrt{36}}\right)$

$11.6 - 0.685 < \mu < 11.6 + 0.685$

$10.915 < \mu < 12.285$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 90% أن المتوسط الحسابي μ لمعدل الطالب في امتحان الرياضيات بين 10.915 و12.285

(2) $E = 150 \ , \ \sigma = 800 \ , \ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$150 = (2.575)\left(\frac{800}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sqrt{n} = (2.575) \times \frac{800}{150} = 13.733$$

$$n = (13.733)^2 = 188.6 \approx 189 \quad \text{(مريضًا)}$$

إذًا حجم العينة المناسب هو 189 مريضًا.

(3) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0 : \mu = 4.325$ مقابل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 4.325$

$\because \ \alpha = 0.05 \quad \therefore$ درجة الثقة 0.95 فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96 \ , \ 1.96)$

$\overline{x} = 4.101$ ، $n = 64$ أي $n > 30$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{4.101 - 4.325}{\frac{0.842}{\sqrt{64}}} = -\dfrac{0.224}{0.10524} \approx -2.1283$

بما أن $-2.1283 \notin (-1.96 \ , \ 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 4.325$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 4.325$

(4) **(a)** $\widehat{y} = 0.7x - 0.1$

(b) 4.5 تمثل 500 4 دينار

$$\widehat{y} = 0.7(4.5) - 0.1 = 3.05$$

حجم المبيعات هو حوالى 500 30 دينار.

(5) التقدير بنقطة للمعلمة المجهولة μ هو المتوسط الحسابي للعينة العشوائية $\overline{x} = 17$

(6) درجة الثقة $= 0.95$ فيكون مستوى الثقة: $\alpha = 0.05$ والقيمة الحرجة 1.96

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \dfrac{3}{\sqrt{130}}$

$E \approx 0.516$

فترة الثقة للمعلمة المجهولة μ هي: $(27.484 \ , \ 28.516)$

(7) درجة الثقة 0.95 فيكون مستوى الثقة: $\alpha = 0.05$ أي $\dfrac{\alpha}{2} = 0.025$

وبما أن $n = 25 < 30$ لذا درجات الحرية $24 = 1 - 25$ والقيمة الحرجة: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.064$

هامش الخطأ: $E = 2.064 \times \dfrac{6}{5} = 2.4768$

فترة الثقة للمعلمة μ هي: $(19.5232 \ , \ 24.4768)$

(8) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 290\,000$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 290\,000$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{300\,000 - 290\,000}{\dfrac{70\,000}{\sqrt{1500}}}$

$Z \approx 5.533$

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$ $\because$ $5.533 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ القرار هو رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل $H_1: \mu \neq 290\,000$

(9) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 10$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 10$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{9 - 10}{\dfrac{4}{\sqrt{40}}} \approx -1.58$

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

$\because$ $-1.58 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ القرار هو قبول فرض العدم: $H_0: \mu = 10$

(10) **(a)** صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 150$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 150$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{143 - 150}{\dfrac{10}{\sqrt{40}}}$

≈ -4.427

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

$\because$ $-4.427 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ القرار هو رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل $H_1: \mu \neq 150$

(b) $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0.05}{2} = 0.025$، بما أن $n = 7$ فتكون درجات الحرية $6 = 1 - 7$، ومنطقة القبول: $(-2.447\ ,\ 2,447)$

الاختبار الإحصائي: $t = \dfrac{143 - 150}{\dfrac{8}{\sqrt{7}}}$

≈ -2.315

$\because$ $-2.315 \in (-2.447\ ,\ 2.447)$

$\therefore$ القرار هو قبول فرض العدم $H_0: \mu = 150$

(11) درجة الثقة 0.90 فتكون القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

هامش الخطأ: $E = 1.645 \times \dfrac{2.5}{6}$

≈ 0.6854

فترة الثقة: $(10.9146\ ،12.2854)$

(12) $r = \dfrac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \times \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$

$r \approx -0.243$ سلبي ضعيف

(13) $r \approx 0.825$ موجب قوي.

(14) $r \approx 0.612$ موجب متوسط.

(15) $r \approx 0.4286$ موجب ضعيف.