وزارة التربية

كويت جديدة
NEWKUWAIT

الفيزياء ١١

الصف الحادي عشر

الجزء الأوّل

telegram
قناة يوسف عزمي للفيزياء

العام الدراسي
2022 / 2023

كتاب الطالب

المرحلة الثانوية

الطبعة الثانية

وزارة التربية

الفيزياء

كتاب الطالب

الصفّ الحادي عشر ١١

الجزء الأوّل

المرحلة الثانويّة

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب العلوم

أ. برّاك مهدي برّاك (رئيسا)

أ. مصطفى محمد مصطفى علي

أ. فتوح عبد اللّٰه طاهر الشمالي

أ. سعاد عبد العزيز الرشود

أ. تهاني ذعار المطيري

الطبعة الثانية

الطبعة الأولى ٢٠١٣ - ٢٠١٤ م
الطبعة الثانية ٢٠١٥ - ٢٠١٦ م
٢٠١٨ - ٢٠١٩ م
٢٠١٩ - ٢٠٢٠ م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الفيزياء للصف الحادي عشر الثانوي

أ. أسامة مصطفى خليل العجوز

أ. أمل محمد أحمد داوود — **أ. محمد حسان محمد الكردي**

أ. منى خالد مطلق المطيري — **أ. كلثوم عبد الرحمن أحمد ملك**

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٣

الكتاب كاملًا

شاركنا بتقييم مناهجنا

ذات السلاسل - الكويت
أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٢٥) بتاريخ ٢/٤/٢٠١٥م

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدمـــــة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية، وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتويات

محتويات الجزء الأوّل

الوحدة الأولى

الحركة
Motion

فصول الوحدة

الفصل الأوّل
- حركة المقذوفات

الفصل الثاني
- الحركة الدائرية

الفصل الثالث
- مركز الثقل

الفصل الرابع
- حركة الأقمار الصناعية

أهداف الوحدة

- يعرّف الكمّيات العددية والكمّيات المتّجهة.
- يجد محصّلة عدّة متّجهات.
- يحلّل المتّجه المعطى لمركبتين أفقية ورأسية.
- يعرّف حركة المقذوفات.
- يعرّف الحركة الدائرية.
- يعرّف القوّة الجاذبة المركزية.
- يعرّف القوّة الطاردة المركزية.
- يعرّف مركز الثقل.
- يدرس حركة الأقمار الصناعية.

معالم الوحدة

الفيزياء في المختبر: خطوط الملاحة

ارتباط الفيزياء بالرياضة: ركوب الأمواج

الفيزياء في المختبر: المقذوفات والسقوط الحرّ

ارتباط الفيزياء بالرياضة: زمن التحليق

الفيزياء في المختبر: مقارنة بين المتدحرجات

الفيزياء في المختبر: تدحرج العجلات المدرجة

ارتباط الفيزياء بالتكنولوجيا: عجلات السكك الحديدية

توظيف الفيزياء: مصمّم القطار الدوّار في المدينة الترفيهية

الفيزياء في المختبر: الحركة الدائرية لدلو الماء

هل تتسارع الأرجوحة الدوّارة عندما تتحرّك على مسارها الدائري بسرعة ثابتة؟

قبل أن تبدأ اللعبة الدوّارة حركتها، تكون المقاعد معلّقة رأسيًا نحو الأرض، لكن عندما تدور تنحرف بزاوية عن موقعها. إنّ حركة الأرجوحة الدوّارة هي مثال على الحركة غير الخطّية التي هي محور هذه الوحدة.

بعد أن درسنا في السنوات السابقة الحركة الخطّية المنتظمة والحركة الخطّية منتظمة العجلة، سنتناول في هذه الوحدة حركة القذيفة، وهي حركة على مسار منحنى يجمع بين حركة أفقية منتظمة وحركة رأسية معجّلة، كما سندرس الحركة الدائرية كأحد أنواع الحركة في مستوى.

اكتشف بنفسك

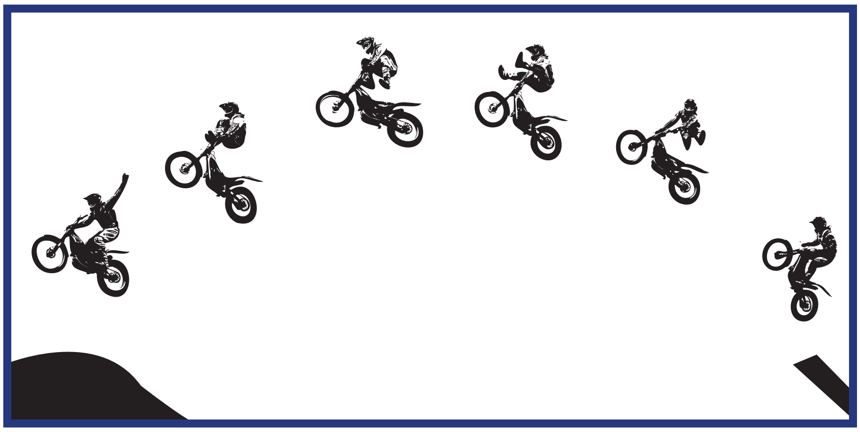
لقد اهتمّ العلماء والفلاسفة على مرّ العصور بدراسة حالتي السكون والحركة والعلاقة النسبية بينهما. وصنّفوا الحركة معتمدين على اختلاف نوع مسار الجسم المتحرّك، فعرفوا الحركة الخطية والحركة الدائرية. كما أنّ ارتباط مفهوم الحركة بالقوّة جعل العلماء اليونانيين يعتقدون أنّ بقاء القوّة المؤثّرة على الجسم ضروري لبقاء حركته، إلى أن جاء نيوتن فوضع قوانينه التي تنقض هذا الطرح وتُعتبر أساس علم الحركة.

أجب عن الأسئلة التالية مستخدمًا النصّ السابق.

1. عرّف الحركة الخطّية والحركة الدائرية.
2. اذكر نصّ قانون نيوتن الذي ينقض ضرورة بقاء القوّة المؤثّرة من أجل بقاء الحركة.

الفصل الأوّل

حركة المقذوفات
Projectile Motion



هل لتغيير زاوية الانطلاق تأثير على شكل المسار؟

إذا لاحظت حركة الدرّاجة النارية والمسار الذي تتبعه في الهواء (الصورة إلى أعلى)، لأدركت أنّ الكثير من الأشياء التي تُقذف في الهواء تأخذ شكل المسار نفسه.

فعندما يركل لاعب كرة القدم الكرة، تسلك في الهواء مسارًا مشابهًا لمسار الدرّاجة النارية الموضَّحة في الصورة أعلاه. وذلك ينطبق على تيّار الماء المندفع من النافورة الموضَّحة في الصورة أعلاه (الصورة إلى أسفل)، فكلّ قطرة من قطراته تتبع مسارًا مشابهًا. وهذا المسار المنحني الذي يتألّف من حركة إلى أعلى لفترة زمنية، ثمّ يغيّر اتّجاهه نحو أسفل يُعرف بالقطع المكافئ Parabola. وتُسمّى الأجسام التي تُقذف في الهواء مثل الكرة و قطرات الماء بالقذيفة Projectile.

في هذا الفصل، سنتناول حركة القذيفة والقوى المؤثّرة عليها، وسنكتشف أنّ حركة القذيفة هي حركة مركّبة من حركتين في اتّجاهين متعامدين، أحداهما أفقي والآخر رأسي، وأنّ لزاوية الإطلاق تأثير على حركتها. لذلك لا بدّ لنا من دراسة كلّ ما يتعلّق بالمتّجهات لنتمكّن من دراسة حركة القذيفة، وهذا ما سيتناوله الدرس الأوّل.

دروس الفصل

الدرس 1-1

الكمّيات العددية والكمّيات المتّجهة
Vector and Scalar Quantities

الأهداف العامة

- يميّز بين كمّيات عددية (قياسية) وكمّيات متّجهة.
- يعطي أمثلة على كلّ من الكمّيات العددية والمتّجهة.
- يعبّر رياضيًّا عن الكمّية المتّجهة.
- يمثّل المتّجهات بالرسم.
- يمثّل متّجه السرعة.
- يجد المحصّلة لعدّة متّجهات مستخدمًا الرسم البياني.
- يستخدم جبر المتّجهات لحساب محصّلة متّجهات مختلفة في الاتّجاهات.

لقد صنّفنا الكمّيات الفيزيائية في الصفوف السابقة إلى كمّيات أساسية مثل الطول والكتلة والزمن، وكمّيات مشتقّة مثل السرعة والعجلة والقوّة وغيرها.

لكن بعض هذه الكمّيات لا يمكن تحديدها بمعرفة مقدارها ووحدة قياسها فقط، بل يستلزم تحديدها معرفة اتّجاهها. فعلى سبيل المثال، لا يمكننا معرفة الموقع الجديد لجسم تحرّك بمعرفة مقدار إزاحته، بل يجب أن نعرف بأيّ اتّجاه تمّت هذه الإزاحة لنحدّد موقعه.

لذلك نجد أنّنا مضطرين لتصنيف الكمّيات الفيزيائية إلى كمّيات عددية وكمّيات متّجهة، وأن نتعرّف العمليات الرياضية اللازمة لحساب كلّ منها، وهذا ما سيتناوله هذا الدرس.

1. الكمّيات العددية والكمّيات المتّجهة
Scalar and Vector Quantities

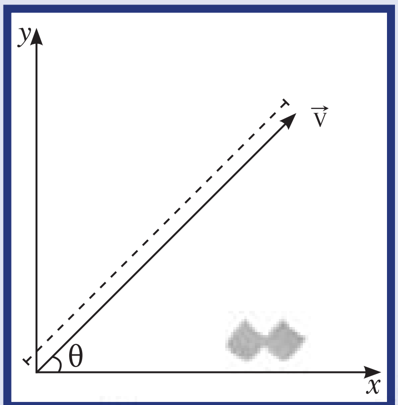
تُسمّى الكمّيات العددية أيضًا الكمّيات القياسية، وهي الكمّيات التي يكفي لتحديدها عدد يحدّد مقدارها، ووحدة فيزيائية تميّز هذا المقدار.

فكتلة الولد التي تساوي $(50)\text{kg}$ على سبيل المثال هي كمّية عددية حيث أنّ العدد 50 يحدّد المقدار، و kg هي الوحدة التي تميّز هذا المقدار.

المسافة والزمن هما أيضًا كمّيتان عدديتان.

تتبع الكمّيات العددية قواعد الجبر الحسابية Arithmetic Algebra الخاصّة بالأعداد، فهي تُجمع وتُطرح إذا كانت متجانسة الوحدات. فإذا كانت كتلة الولد تساوي $(40)\text{kg}$ وكتلة درّاجته $(60)\text{kg}$ مثلًا، فإنّ كتلة النظام المؤلّف من الولد والدرّاجة تساوي $(100)\text{kg}$.

أمّا الكمّيات المتّجهة فهي الكمّيات التي تحتاج في تحديدها إلى الاتّجاه الذي تأخذه بالإضافة إلى العدد الذي يحدّد مقداره ووحدة القياس التي تميّزها.



(شكل 1)

تمثيل المتّجه $\vec{v}$

تُمثّل الكمّيات المتّجهة بيانيًّا بسهم (شعاع) يظهر مقدار الكمية الممثّلة واتّجاهها، ويُسمّى المتّجه (شكل 1).
تُكتب الكمّية المتّجهة بحرف يوضع فوقه سهم مثل $\vec{v}$ ليتمّ تمييزه عن الكمّية القياسية، أو من نقطة بداية إلى نقطة نهاية مثل $\overrightarrow{AB}$، وأحيانًا تُستخدم أحرف تُكتب ببنط عريض مثل **v** أو **AB**.
يُحدّد مقدار المتّجه بعدد ووحدة قياس ويُكتب $|\overrightarrow{AB}|$، ويُحدّد اتّجاهه بالزاوية التي يصنعها مع محور إسناد، ويكون قياس الزاوية بدأً من الاتّجاه الموجب لمحور السينات.
يُعبّر عن الكمّية المتّجهة **v** رياضيًّا كما يلي: $\vec{v} = (v, \theta)$، حيث v هي مقدار المتّجه وθ اتّجاهه.

مسألتان مع إجابات

1. ورد في نشرة الأرصاد الجوّية أنّ سرعة الرياح الشمالية المتوقّعة لنهار غد قد تصل إلى $(60)km/h$.
مثّل هذه السرعة رياضيًّا.
الإجابة: $v = (60, 90°)$

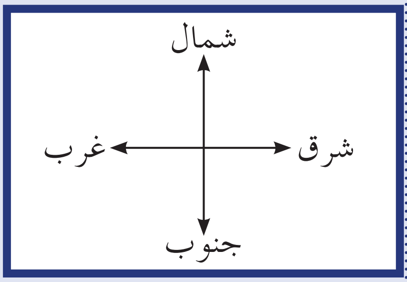
2. استخدم القانون الثاني لنيوتن لإيجاد متّجه العجلة لجسم كتلته $(2.5)kg$ أثّرت فيه قوّة $\vec{F} = ((10)N, 45°)$.
الإجابة: $\vec{a} = (4, 45°)$

مثال (1)

قوّة تؤثّر على صندوق خشبي مقدارها $(5)N$ تدفعه إلى الغرب.
مثّل هذه القوّة: **(أ)** رياضيًّا

الحلّ

(أ) يُكتب مقدار متّجه القوّة $\vec{F}$ على الشكل التالي: $|F| = (5)N$ أو $F = (5)N$
أمّا الاتّجاه فهو إلى الغرب أي بالاتّجاه السالب لمحور السينات، أي أنّه يصنع زاوية $\theta = 180°$ مع محور الإسناد الموجب. وعليه نمثّل متّجه القوّة رياضيًّا كما يلي:
$\vec{F} = ((5)N, 180°)$



Vector Quantities — 1.1 الكمّيات المتّجهة

تخضع الكمّيات المتّجهة عند إجراء عمليات جمعها وطرحها أو ضربها إلى جبر المتّجهات بدلًا من الجبر الحسابي.

ومن الأمثلة على الكمّيات المتّجهة والتي درسناها سابقًا:

Displacement — (أ) الإزاحة

هي المسافة الأقصر بين نقطة بداية الحركة ونقطة نهايتها، وباتّجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.

Velocity Vector — (ب) السرعة المتّجهة

السرعة المتّجهة التي عرّفناها في الصف العاشر هي من الأمثلة على الكمّيات المتّجهة التي تعبّر عن مقدار واتّجاه، وهي تختلف عن السرعة العددية التي تعبّر عن المقدار فقط.

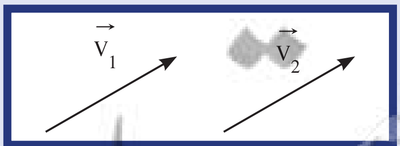
فعندما نصف السرعة المتّجهة، نستخدم سهمًا يُسمّى المتّجه ليمثّل المقدار والاتّجاه للكمّية المتّجهة، حيث يحدّد طول السهم المرسوم وفقًا لمقياس محدّد مقدار الكمّية المتّجهة، ويحدّد اتّجاهه اتّجاه الكمّية.

فالمتّجه في الشكل (3) رُسم بحيث يدلّ كلّ (1)cm منه على (20)km/h، وبما أنّ طوله يبلغ (3)cm وهو يشير إلى اليمين، فهو يمثّل سرعة (60)km/h باتّجاه اليمين أو نحو الشرق.

Properties of Vectors — 2. خصائص المتّجهات

Equality — 1.2 التساوي

لنأخذ المتّجهين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$. يُقال إنّ المتّجهين متساويان إذا كان لهما المقدار والاتّجاه نفسهما (شكل 4).



(شكل 4)

$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$

Transport — 2.2 النقل

من الخواصّ الهندسية المهمّة لبعض المتّجهات هي خاصّية النقل. تُقسم المتّجهات إلى قسمين: المتّجهات الحرّة والمتّجهات المقيّدة.

1. المتّجهات الحرّة Free Vectors هي حين يمكن نقل متّجه من مكان إلى آخر بدون أن تتغيّر قيمته واتّجاهه. تُسمّى متّجهات الإزاحة والسرعة المتّجهة بالمتّجهات الحرّة لأنّها غير مقيّدة بنقطة تأثير.
2. المتّجات المقيّدة Restricted Vectors هي متّجهات مقيّدة بنقطة التأثير مثل متّجه القوّة الذي لا يمكن نقله لارتباطه بنقطة تأثير.

3.2 جمع المتّجهات Addition of Vectors

تُسمّى عملية جمع المتّجهات عملية تركيب، حيث تتمّ الاستعاضة عن متّجهين أو أكثر بمتّجه واحد بما أنّ المتّجهات هي كمّيات لها مقدار واتّجاه، فهي تحتاج إلى عملية جبر المتّجهات.

في هذا الدرس، سنهتمّ بمحصّلة متّجهات الإزاحة التي سيرمز إليها بـ D ومتّجهات السرعة بـ $\vec{v}$، وحيث يمكن تعميم النتائج على جميع المتّجهات.

(أ) محصّلة متّجهات لها الاتّجاه نفسه أو متعاكسة

عندما تكون المتّجهات بالاتّجاه نفسه يُستخدم الجبر البسيط في حساب المحصّلة.

فإذا أخذنا طائرة تطير بسرعة (100)km/h بالنسبة إلى الهواء المحيط بها باتّجاه الشمال، وافترضنا أنّ رياحًا من جهة الذيل تهبّ باتّجاه الشمال أيضًا بسرعة (20)km/h، فإنّ السرعة المحصّلة بالنسبة إلى الأرض تساوي (120)km/h (شكل 5 – أ).

وعندما تكون حركة الطائرة باتّجاه الرياح وبدون الرياح التي تأتي من اتّجاه الذيل، فستحلّق الطائرة بسرعة (100)km/h بالنسبة إلى الأرض.

إذا افترضنا أنّ الطائرة ستستدير على شكل حرف (U) ثمّ تحلّق بعكس اتّجاه الرياح بدلًا من التحليق باتّجاهها، فستكون السرعة المحصّلة $v = 100 - 20 = (80)$km/h بالنسبة إلى الأرض (شكل 5 – ب).

يوضّح لنا هذا المثال أنّنا لسنا بحاجة لاستخدام جبر المتّجهات لحساب السرعة المحصّلة عندما تهبّ الرياح باتّجاه المقدّمة أو الذيل. لكن هل نستطيع أن نحسب محصّلة السرعة إذا كانت الرياح تهبّ عموديًّا على حركة الطائرة بسرعة (60)km/h من الغرب إلى الشرق بينما تتحرّك الطائرة باتّجاه الشمال بسرعة (80)km/h؟ هذا ما سنتناوله في فقرة حساب **محصّلة المتّجهات المتعامدة.**

(ب) محصّلة متّجهات متعامدة

من المؤكّد في مثل هذا الوضع أنّنا بحاجة إلى جمع المتّجهات لمعرفة مقدار محصّلة السرعة واتّجاهها. فلنمثّل هذه السرعات بالمتّجهات كما في الشكل (6)، حيث يمثّل كلّ (1)cm مقدار (20)km/h وتتمثّل المحصّلة بقطر المستطيل المحدّد بالمتّجهين. ويمكن قياس هذه المحصّلة من الرسم وتساوي (5)cm، وهي تُمثّل باستخدام المقياس المعطى محصّلة السرعة التي تساوي (100)km/h. أمّا الاتّجاه فيُقاس باستخدام المنقلة.

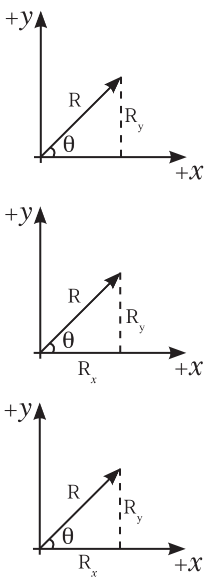
لا يُعتبر استخدام الرسم البياني لمعرفة محصّلة متّجهين الطريقة الوحيدة، بل يمكننا حساب المحصّلة بحساب طول الوتر، وذلك باستخدام الرسم الهندسي نظرية فيثاغورث حيث إنّ مربّع طول الوتر يساوي مجموع مربّعي الضلعين الآخرين، أي أنّ: $v_r^2 = v_p^2 + v_a^2$

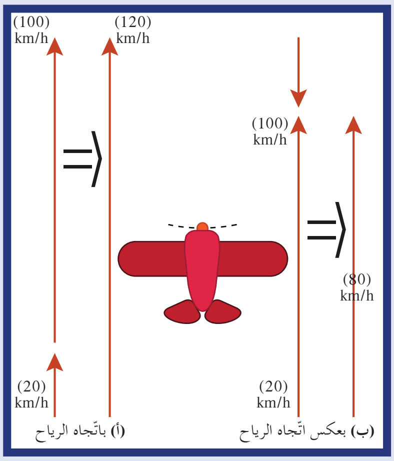
مراجعة رياضية

$\sin \theta = \dfrac{R_y}{R}$

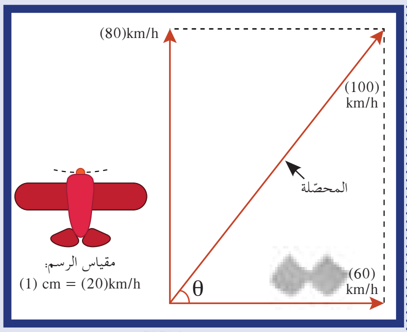
$\cos \theta = \dfrac{R_x}{R}$

$\tan \theta = \dfrac{R_y}{R_x}$





(شكل 5)
سرعة تحليق الطائرة بالنسبة للأرض تعتمد على سرعة الطائرة بالنسبة للهواء وعلى سرعة الرياح.



(شكل 6)
سرعة تحليق الطائرة (80)km/h عمودية على سرعة الرياح (60)km/h تنتج محصّلة سرعة مقدارها (100)km/h بالنسبة إلى الأرض.

وعليه يمكننا أن نكتب:

$$v_r^2 = 80^2 + 60^2 = 6400 + 3600 = 10000$$

وبالتالي تكون محصّلة سرعة الطائرة $v_r = (100)\text{km/h}$ كما حصلنا عليها من الرسم باستخدام المقياس المعطى.

أمّا الاتّجاه فيمكن احتسابه باستخدام العلاقة:

$$\tan\theta = \frac{v_p}{v_a} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = 53.13°$$

(جـ) محصّلة المتّجهات غير المتوازية أو المتعامدة

لحساب محصّلة متّجهين أو أكثر غير متعامدين ويختلفان في الاتّجاه ويقعان في مستوى واحد، يمكننا استخدام:

- الطريقة البيانية باستخدام متوازي الأضلاع
- الطريقة الحسابية لجبر المتّجهات

ثانيًا — الطريقة الحسابية:

نحسب طول الوتر الذي يمثّل المحصّلة بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\boxed{R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$$

ولتحديد اتّجاه المحصّلة نستخدم العلاقة التالية:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{B} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{R}}$$

وبما أنّ $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ نكتب:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{B\sin\theta}{R}}$$

مسائل مع إجابات

1. قوّتان $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ مقدارهما $(10)\text{N}$ و $(15)\text{N}$ على التوالي تحصران بينهما زاوية $60°$ وتؤثّران على جسم نقطي.

احسب مقدار محصّلة القوّتان واتّجاههما.

الإجابة:

$(F_r = (21.79)\text{N}, \theta = 36.58°)$

3. $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ قوّتان متعامدتان تؤثّران على النقطة O. أُحسب مقدار محصّلة القوتين علمًا أنّ مقدار $F_1 = (30)\text{N}$ و $F_2 = (40)\text{N}$

الإجابة: $(50)\text{N}$

مثال (4)

تحرّك قارب الصيد من المرفأ ليقطع مسافة (10)km باتّجاه °30 شرق الشمال ثمّ (4)km إلى الجنوب (شكل 10).

(ب) اِستخدم الطريقة الحسابية لجبر المتّجهات لإيجاد مقدار الإزاحة المحصّلة واتّجاهها.

طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم.

المعلوم: $D_1 = (10)km$ باتّجاه °30 شرق الشمال

$D_2 = (4)km$ باتّجاه الجنوب

غير المعلوم: مقدار الإزاحة المحصّلة واتّجاهها.

2. احسب غير المعلوم:

مثال (4) (تابع)

(ب) مستخدمًا الطريقة الحسابية:

$$R^2 = D_1^2 + D_2^2 + 2D_1D_2\cos 150$$

$$R^2 = 5^2 + 2^2 + 2 \times 5 \times 2 \cos 150 = 11.67$$

$$R = (3.4)\text{cm}$$

بالتالي إنّ مقدار الإزاحة $R = (6.8)\text{km}$

ولحساب الاتّجاه نستخدم المعادلة:

$$\frac{\sin \alpha}{D_2} = \frac{\sin 150}{R}$$

$$\frac{\sin \alpha}{2} = \frac{\sin 150}{3.4}$$

$$\sin \alpha = 0.29$$

$$\alpha = 16.85°$$

وبهذا، فالمتّجه $\vec{D}_2$ يأخذ الاتّجاه $\alpha = 60 - 16.85 = 43.14°$ مع المحور الأفقي.

3. قيّم: هل النتيجة مقبولة؟

لقد حصلنا على المقادير نفسها باستخدام الطريقتين وهذا يؤكّد صحّة الطريقتين.

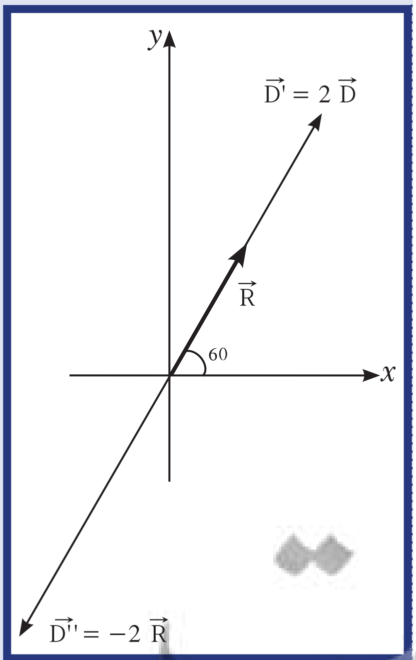
4.2 ضرب المتّجهات بكمّية قياسية

لنأخذ المتّجه $\vec{D}$ الذي يمثّل إزاحة محدّدة باتّجاه $60°$ (شكل 11).

إنّ المتّجه $\vec{D'} = 2\vec{D}$ هو متّجه مقداره ضعف مقدار المتّجه $\vec{R}$ وله الاتّجاه نفسه.

أمّا المتّجه $\vec{D''} = -2\vec{R}$ فمقداره يساوي ضعف مقدار R ولكنّ اتّجاهه معاكس.

إنّ ضرب المتّجه بكمّية قياسية سالبة يعكس اتّجاه المتّجه بالإضافة إلى تغيير مقداره، في حين أنّ ضربه بكمّية قياسية موجبة يغيّر مقداره فقط بدون أن يغيّر الاتّجاه.



(شكل 11)
تمثيل ضرب المتّجهات

3. ضرب المتّجهات

ضرب المتّجه بكمّية قياسية سالبة أو موجبة ليس فقط ما نحتاجه في الفيزياء، إذ نحتاج في تحليل بعض المسائل الفيزيائية إلى ضرب متّجه بمتّجه آخر، وهو ما يعرف بضرب المتّجهات.

نعرّف نوعين من ضرب المتّجهات:

1. الضرب القياسي (العددي) ويُسمّى أيضًا الضرب النقطي.
2. الضرب الاتّجاهي ويُسمّى أيضًا الضرب التقاطعي.

وسنتعرّف خصائص كلّ منهما في ما يلي:

1.3 الضرب القياسي

لنأخذ المتّجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ واللذين يحصران بينهما زاوية α كما يظهر في الشكل (12).

نعرّف الضرب القياسي للمتّجهين A و B بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \times B \cos \alpha$$

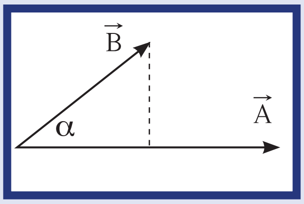
حيث أنّ α هي الزاوية المحصورة بين المتّجهين. أما A و B يمثلان مقدار كل متّجه.

لاحظ أنّ حاصل الضرب القياسي للمتّجهين هو كمّية قياسية، وهذا يفسّر سبب تسميته الضرب القياسي.

التفكير الناقد

ينطلق الماء في نافورة الماء ليرتفع (85)m، قبل أن يعود إلى نقطة الانطلاق.

ما هي إزاحة نقاط الماء خلال دورة واحدة؟

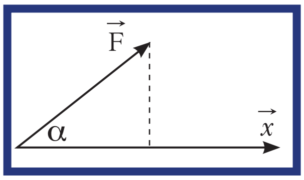


(شكل 12)

مثال (5)

من المعلوم أنّ الشغل هو كمّية فيزيائية تسبّبها قوّة مؤثّرة على جسم عند إزاحته مسافة على مساره، ويُعبَّر عنها بالضرب القياسي لكلّ من متّجه القوّة $\vec{F}$ ومتّجه الإزاحة $\vec{x}$.

استخدم الضرب القياسي لحساب الشغل الناتج عن قوّة مقدارها (50)N تصنع زاوية $60°$ مع متّجه الإزاحة، أدّت عند تطبيقها إلى إزاحة الجسم مسافة (10)m.



(شكل 13)

طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم.

المعلوم: متّجه القوّة F مقداره (50)N ويصنع زاوية $60°$ مع الإزاحة.

مقدار الإزاحة: $x = 10$، بالاتّجاه الموجب للمحور الأفقي.

غير المعلوم: الشغل المتمثّل بالضرب القياسي لكلّ من القوّة والإزاحة.

2. احسب غير المعلوم:

مستخدمًا العلاقة الرياضية:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} = F\,x\,(\cos 60)$$

وبالتعويض عن المقادير المعلومة نجد أنّ: $W = 50 \times 10 \times 0.5 = (250)J$

3. قيّم: هل النتيجة مقبولة؟

النتيجة مقبولة لأنّ الضرب القياسي للمتّجهين يساوي كمّية قياسية.

2.3 الضرب الاتّجاهي

لنأخذ المتّجهين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ واللذين يحصران بينهما زاوية α كما يظهر في الشكل (14).

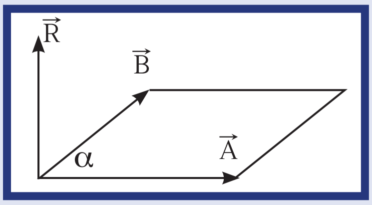
إنّ حاصل الضرب الاتّجاهي للمتّجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يُمثَّل بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\vec{R} = \vec{A} \times \vec{B}$$

وعليه نستنتج أنّ حاصل الضرب الاتّجاهي لمتّجهين هو متّجه مقداره يحدد بالعلاقة التالية:

$$\vec{R} = \vec{A} \times \vec{B} = A\,(B \sin \alpha)$$

علمًا أنّ هذا المقدار يُمثِّل مساحة متوازي الأضلاع الناشئ عن المتّجهين، واتّجاهه فهو رأسي على المستوى المكوَّن من المتّجهين، ويحدد بتطبيق قاعدة اليد اليمنى وذلك بتدوير أصابع اليد اليمنى من المتّجه الأول إلى الثاني عبر الزاوية الأصغر بين المتّجهين ليشير الإبهام إلى اتّجاه المتّجه $\vec{v}$ كما في الشكل (14).



(شكل 14)

مسألة

على ورقة رسم بياني، ارسم المتّجه $\vec{v}$ الذي يمثّل السرعة حيث مقداره يساوي $(10)\mathrm{m/s}$ باتّجاه $60°$ شرق الشمال.

(أ) مستخدمًا الرسم نفسه، مثّل بيانيًّا المتّجه $\vec{v}'$ حيث أنّ $\vec{v}' = -1.5\vec{v}$.

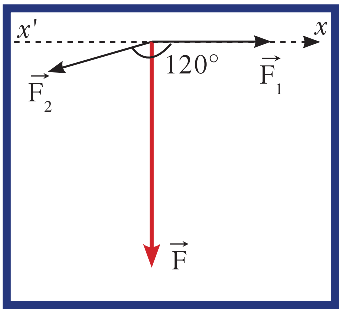
(ب) مستخدمًا الرسم البياني نفسه مثّل المتّجه $\vec{v}'' = -\vec{v}$.

(جـ) أوجد محصّلة المتّجهين $\vec{v}_{eq} = \vec{v}' + \vec{v}''$ (مقدار واتّجاه).

مثال (6)

المتّجهان $\vec{F}_1$ مقداره $(5)\mathrm{N}$ و $\vec{F}_2$ مقداره $(4)\mathrm{N}$ يحصران بينهما زاوية $120°$ كما في الشكل (15).

احسب حاصل الضرب الاتّجاهي $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2$.



(شكل 15)

طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم.

المعلوم:

متّجه القوّة $\vec{F}_1$ مقداره $(5)\mathrm{N}$ واتّجاهه بالاتّجاه الموجب على المحور $x'x$

متّجه القوّة $\vec{F}_2$ مقداره $(4)\mathrm{N}$ ويصنع زاوية $120°$ مع المحور $x'x$

غير المعلوم: حاصل الضرب الاتّجاهي للمتجهين.

2. احسب غير المعلوم:

مستخدمًا العلاقة الرياضية التالية:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 \times \vec{F}_1$$

نجد أنّ حاصل الضرب هو المتّجه $\vec{F}$ ويُحسَب مقداره بالتعويض عن المقادير المعلومة في العلاقة:

$$F = F_1 \times F_2 \ \sin 120 = 5 \times 4 \sin 120 = (17.32)\mathrm{N}$$

أمّا اتّجاهه فيُحدَّد باستخدام قاعدة اليد اليمنى من المتّجه الأوّل إلى الثاني عبر الزاوية الصغرى ليشير الإبهام إلى أنّ اتّجاه $\vec{F}$ رأسي على المستوى المتكوّن من $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ نحو الداخل (باللون الاحمر).

3. قيم: هل النتيجة مقبولة؟

النتيجة مقبولة لأنّ الضرب الاتّجاهي للمتّجهين هو كمّية متّجهة.

مراجعة الدرس 1-1

أوّلًا – عرّف الكمّيات العددية والكمّيات المتّجهة.

ثانيًا – تسير سيّارة شمالًا بسرعة عددية تساوي $(80)\text{km/h}$ بينما تسير سيّارة أخرى جنوبًا بسرعة $(80)\text{km/h}$. هل سرعتاهما المتّجهتان متساويتان؟ اشرح.

رابعًا – قوّتان $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ تؤثّران على جسم فإذا علمت أنّ مقدار $F_1 = (3)\text{N}$ و $F_2 = (5)\text{N}$.

(أ) ما هو أكبر مقدار لمحصلّة هاتين القوّتين اعتمادًا على اتّجاهيهما؟

(ب) ما هو أصغر مقدار لمحصّلة هاتين القوّتين اعتمادًا على اتّجاهيهما؟

سادسًا – $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ قوّتان متعامدتان. احسب حاصل ضربهما ضربًا قياسيًّا.

سابعًا – في الشكل (16) القوّتان $\vec{F}$ و $\vec{F'}$ موجودتان في مستوى واحد تحصران بينهما زاوية $30°$.

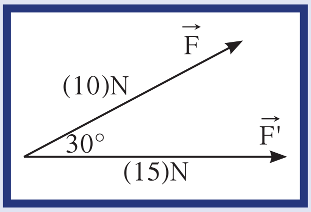
علمًا أنّ $F = (10)\text{N}$ و $F' = (15)\text{N}$، أُحسب مستخدمًا الطريقة الحسابية لجبر المتّجهات:

(أ) $\vec{F''} = \vec{F} + \vec{F'}$

(ب) $\vec{F} . \vec{F'}$

(جـ) $\vec{F} \times \vec{F'}$

ثامنًا – احسب حاصل ضرب المتّجهين $\vec{F_1} \times \vec{F_2}$ إذا كانت القوّتان متوازيتين.



(شكل 16)

تحليل المتّجهات
Vectors Analysis

الأهداف العامة

- يحلّل متّجهًا إلى مركبتيه المتعامدتين.
- يجد محصّلة عدّة متّجهات مستخدمًا الطريقة التحليلية.

تعلّمنا في الدرس السابق عملية تركيب المتّجهات واستخدمنا حساب المثلّثات ومتوازي الأضلاع في حساب مقدار المحصّلة واتّجاهها.

في هذا الدرس، سنقوم بعملية معاكسة لعملية تركيب المتّجهات وتُسمّى عملية تحليل المتّجهات، حيث سيستعاض عن متّجه بمتّجهين متعامدين لهما التأثير نفسه. وسنستخدم طريقة التحليل المتعامد للمتّجهين لإيجاد محصّلة أيّ عدد من المتّجهات.

سنستكشف خلال الدرس أيضًا أنّ استخدام طريقة تحليل المتّجهات في جمع عدّة متّجهات هي أسهل من طريقة جمع المتّجهات باستخدام متوازي الأضلاع أو حساب المثلّثات.

1. تحليل المتّجهات Vector Analysis

تحليل المتّجه هو استبدال متّجه ما بمتّجهين متعامدين يُسمّيان مركبتي المتّجه، بحيث يمثّل المتّجه المراد تحليله محصّلة هذين المتّجهين ويكون متّحدًا معهما في نقطة البداية.

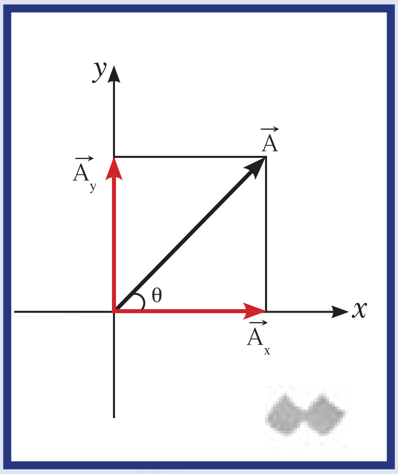
لنأخذ المتّجه $\vec{A}$ الموجود في مستوى المحورين المتعامدين x وy كما يوضّح الشكل (17)، حيث تمثّل θ اتّجاه المتّجه $\vec{A}$ بالنسبة إلى محور الإسناد x.

ينتج عن إسقاط $\vec{A}$ على المحور x المتّجه $\vec{A}_x$ وينتج عن اسقاط $\vec{A}$ على المحور y المتّجه $\vec{A}_y$ كما هو موضّح في الشكل (17).

المتّجهان $\vec{A}_x$ و $\vec{A}_y$ هما مركبتا المتّجه $\vec{A}$ حيث إنّ المتّجه $\vec{A}$ يساوي مجموع هاتين المركّبتين أي: $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$

كما أن المتّجهات الثلاثة تشكّل مثلّثًا قائمًا، وباستخدام نظرية فيثاغورث نستطيع أن نجد العلاقات التالية بين المتّجه المراد تحليله ومركباته:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$
$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \Rightarrow A_x = A\cos\theta$$
$$\sin\theta = \frac{A_y}{A} \Rightarrow A_y = A\sin\theta$$



(شكل 17)
تمثيل مركّبتي المتّجهة $\vec{A}$

مثال (1)

أوجد مركبتي السرعة المتّجهة v لطائرة مروحية تطير بسرعة (120)km/h بزاوية $35°$ مع سطح الأرض (شكل 18).

طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم.

المعلوم: $v = (120)km/h$ و $\theta = 35°$

غير المعلوم: المركبتان $\vec{v}_x$ و $\vec{v}_y$ = ؟

2. احسب غير المعلوم:

ارسم على المحورين المتعامدين x و y المتّجه $\vec{v}$ وحدّد على الرسم المركبتين $\vec{v}_x$ و $\vec{v}_y$.

مستخدمًا المعادلتين الرياضيتين:

$$\cos\theta = \frac{v_x}{v} \qquad \sin\theta = \frac{v_y}{v}$$

نحسب:

$$v_x = v\cos\theta = 120\cos 35 = (98.29)km/h$$

$$v_y = v\sin\theta = 120\sin 35 = (68.82)km/h$$

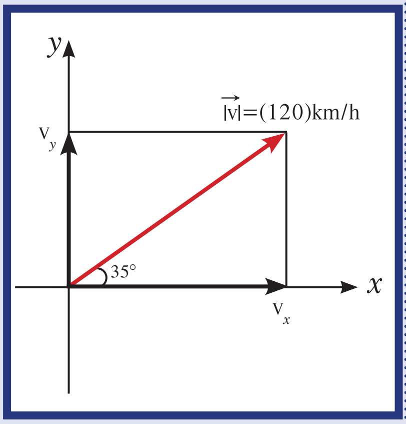
3. قيِّم: هل النتيجة مقبولة؟

بما أنّ مركبتي السرعة تشكّلان مثلثًا قائم الزاوية، فيجب أن تكون نظرية فيثاغورث محقّقة، وبتطبيقها يجب أن نحصل على مقدار متّجه السرعة المعطى في المسألة.

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$v^2 = (98.29)^2 + (68.82)^2 = 14397.11$$

$v = (119.98)km/h$ وهو يساوي مقدار السرعة المعطاة للطائرة، أمّا الفرق البسيط فيعود إلى التقريب.



(شكل 18)
مركبتا سرعة الطائرة

مسألتان مع إجابات

1. أوجد مركبتي القوّة $F = (50)N$ التي تميل بزاوية $120°$ عن المحور x.

الإجابة: $(25)N$ باتّجاه محور x السالب، $(43.3)N$ باتّجاه محور y الموجب.

2. إذا كانت مركبتا العجلة $a_x = (3)m/s^2$ و $a_y = (-4)m/s^2$.
أوجد مقدار عجلة الجسم واتّجاهها.

الإجابة: $(5)m/s^2$ و $-53°$.

1.1 إيجاد المحصّلة بتحليل المتّجهات

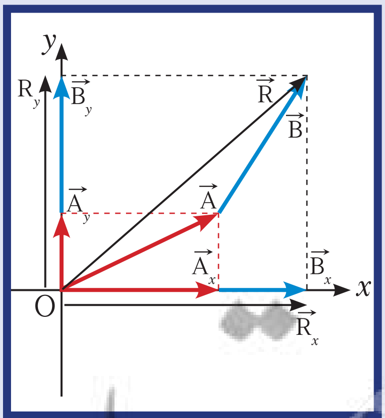
قد نتساءل لماذا نحلّل المتّجهات إلى مركباتها؟ الإجابة هي أنّ تحليل المتّجهات يسهّل عملية جمع المتّجهات.

لنأخذ المتّجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ومحصّلتهما $\vec{R}$ الموضّحة في الشكل حيث أنّ $\vec{R} = \vec{B} + \vec{A}$.

لنقم بتحليل المتّجه $\vec{A}$ والمتّجه $\vec{B}$ إلى مركبتيهما.

لاحظ في الشكل (19) أنّ مجموع المركبتين $\vec{A}_x$ و $\vec{B}_x$ على المحور x يساوي المركبة $\vec{R}_x$ وأنّ مجموع المركبتين $\vec{A}_y$ و $\vec{B}_y$ على المحور y يساوي المركبة $\vec{R}_y$.

أي أنّ $\vec{R}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x$ و $\vec{R}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y$



(شكل 19)
المتّجه $\vec{R}$ يمثّل محصّلة المتّجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

وعليه نستنتج أنّ محصّلة عدد من المتّجهات على المحور x تساوي المجموع الجبري لجميع المركبات السينية على المحور x، وأنّ محصّلة عدد من المتّجهات على المحور y تساوي المجموع الجبري لجميع المركبات الصادية على المحور y.

وهذا يسهّل احتساب المحصّلة باستخدام:

$$\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}}$$

كما أنّ اتّجاه متّجه المحصّلة بالنسبة إلى المحور x يُحسب باستخدام:

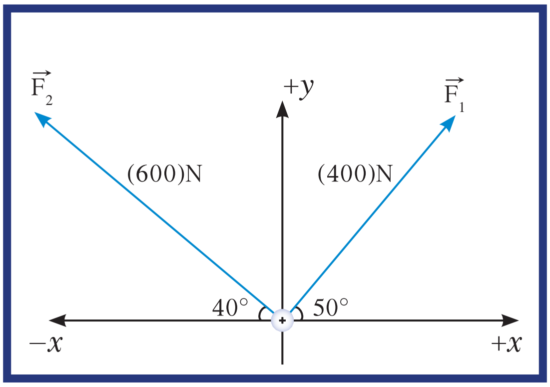
$$\boxed{\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}}$$

مثال (2)

تؤثّر على الحلقة الموضّحة في الشكل أدناه قوّتان $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$.

(أ) أُحسب مقدار محصّلة القوى المؤثّرة على الحلقة مستخدمًا تحليل المتّجهات.

(ب) أُحسب اتّجاه المحصّلة.



طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم.

المعلوم: مقدار $F_1 = (400)N$ و $\theta_1 = 50°$ مع محور الإسناد الموجب

مقدار $F_2 = (600)N$ و $\theta_2 = 40°$ مع محور الإسناد السالب

غير المعلوم: **(أ)** مقدار المحصّلة

(ب) اتّجاه المحصّلة

2. احسب غير المعلوم:

باستخدام المعادلتين الرياضيتين التاليتين:

$$F_x = F\cos\theta$$

$$F_y = F\sin\theta$$

نجد مركّبات كلّ من $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$.

فقرة إثرائية

ارتباط الفيزياء بالرياضة

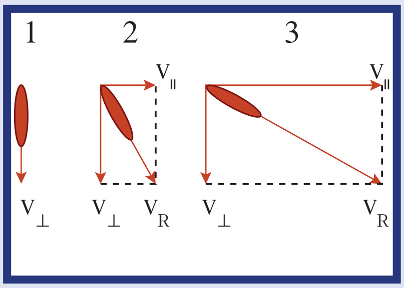
ركوب الأمواج

يوضّح التزحلق الهادئ المركبتين ومحصّلة المتّجه.

1. عند التزحلق على الموجة وباتّجاهها، تساوي سرعة المتزحلق سرعة الموجة $(V_\perp)$، وقد أُعطيت الرمز $(V_\perp)$ لأنّنا نتحرّك عموديًّا على صدر الموجة.

2. للتحرّك أسرع، يتمّ التزحلق بزاوية مع صدر الموجة.

فالآن لدينا مركبة سرعة $(V_\parallel)$ موازية لصدر الموجة والمركبة العمودية للسرعة $(V_\perp)$ ونستطيع أن نغيّر $(V_\parallel)$ ولكن تبقى $(V_\perp)$ ثابتة ما دمنا نركب



ولجمع مركبتي السرعة، نجد أنّه عند الانزلاق على الموجة بزاوية مع صدر الموجة، فإنّ السرعة المحصّلة (V_R) تزيد على المركبة العمودية للسرعة $(V_\perp)$.

3. إنّ زيادة الزاوية مع صدر الموجة، تزيد السرعة المحصّلة أيضًا.

مثال (2) (تابع)

F	F_x	F_y
F_1	$400 \cos 50 = (257.11)N$	$400 \sin 50 = (306.41)N$
F_2	$-600 \cos 40 = (-459.62)N$	$600 \sin 40 = (385.67)N$
F_R	$(-202.51)N$	$(692)N$

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{202.51^2 + 692^2} = (721.02)N$$

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{692}{202.51} = 3.42$$

$\theta = 73.7°$ مع محور x السالب أي $106°$ مع محور x الموجب.

3. قيّم: هل النتيجة مقبولة؟

إنّ استخدام الرسم البياني لتحديد مقدار المحصّلة والاتّجاه يؤكّد صحّة النتيجة التي توصّلنا إليها.

مسألة مع إجابة

جسم نقطي تؤثّر عليه ثلاثة قوى، $F_1 = (6)N$ غربًا و $F_2 = (2)N$ جنوبًا و $F_3 = (3)N$ باتّجاه $60°$ شرق الجنوب.

أحسب محصّلة القوى المؤثّرة على الجسم واتّجاهها.

الإجابة: $(4.8)N$ و $225.8°$

مراجعة الدرس 1-2

أوّلًا – هل المتّجه بزاوية $45°$ مع المحور الأفقي أكبر أم أصغر من مركبتيه الرأسية والأفقية؟ وما هي نسبة الواحد إلى الآخر؟

ثانيًا – ما مقدار الزاوية مع المحور الأفقي والتي تجعل:

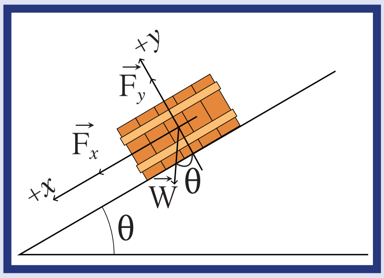
(أ) المركبة الأفقية مساوية لمقدار المتّجه الأصلي؟

(ب) المركبة الرأسية مساوية لمقدار المتّجه الأصلي؟

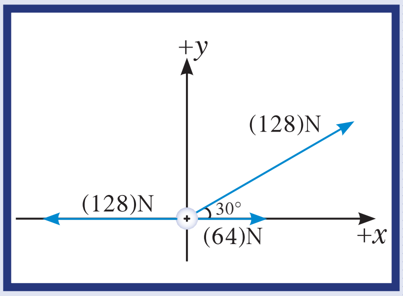
(جـ) المركبة الأفقية مساوية لمقدار المتّجه الأصلي واتّجاهها معاكس؟

ثالثًا – يستقرّ جسم كتلته $(50)kg$ على سطح مائل بزاوية $30°$ مع الخطّ الأفقي. علمًا أنّ عجلة الجاذبية $g = (10)m/s^2$، أحسب مقدار مركبتي الوزن بالنسبة إلى المحورين x و y الموضّحين في الشكل (20).

رابعًا – استخدم تحليل المتّجهات لحساب محصّلة القوى المؤثّرة على الحلقة في الشكل (21).



(شكل 20)



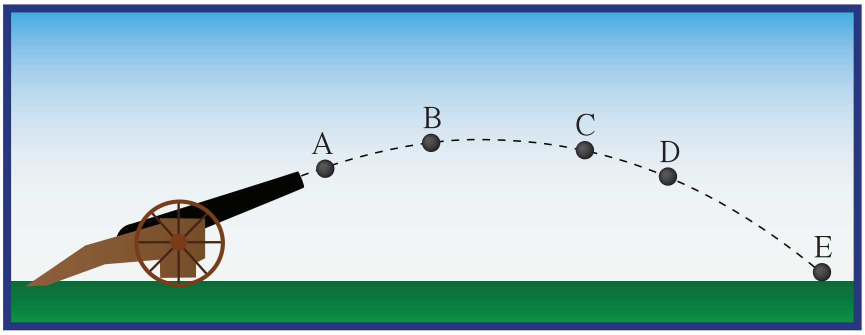
(شكل 21)

الدرس 1-3

حركة القذيفة
Projectile Motion

الأهداف العامة

- يصف التغيّرات للمركبتين الأفقية والرأسية لسرعة قذيفة، بإهمال مقاومة الهواء.
- يفسّر لماذا تتحرّك القذيفة مسافات متساوية أفقيًّا أثناء فترات زمنية متساوية، بإهمال مقاومة الهواء.
- يطبّق معادلات حركة القذيفة.
- يحسب المدى الأفقي.
- يحسب أقصى ارتفاع.
- يدرس تأثير مقاومة الهواء على ارتفاع الجسم المقذوف ومداه الأفقي.



(شكل 22)
القذيفة أُطلقت من المدفع مثال على حركة في مستوى.

بعد دراستنا للمتّجهات وجمعها وتحليلها في الدروس السابقة، أصبحنا قادرين على استخدامها لدراسة الحركة في مستوى، حيث يتحرّك الجسم في بعدين مركبين هما x و y. ومن الأمثلة التي سنتناولها عن حركة الجسم في بعدين حركة القذيفة وهي موضوع الدرس الحالي، والحركة الدائرية التي سنتناولها في الفصل القادم.

وكما ذكرنا في مقدّمة الفصل، نلاحظ حركة القذيفة في حركة أيّ جسم (المقذوف) قُذف بزاوية في مجال الجاذبية، مثل قذيفة أُطلقت من المدفع (شكل 22)، أو حجر قُذف في الهواء أو سفينة فضائية تدور حول الأرض وغيرها.

وسنتناول في هذا الدرس حركة القذيفة بمركبتيها الأفقية والرأسية، وسنحدّد مسارها ومداها الأفقي وأقصى ارتفاع قد تبلغه.

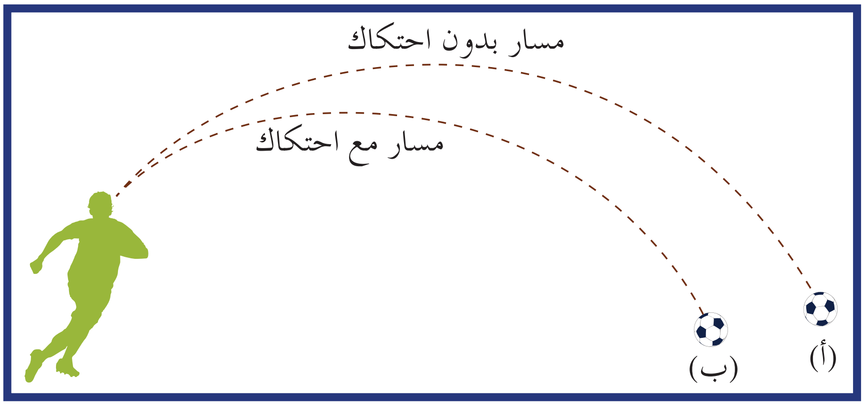
1. مسار حركة القذيفة

The Projectile Motion Trajectory

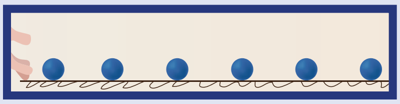
الأجسام التي تُقذف أو تُطلق في الهواء وتتعرّض لقوّة جاذبية الأرض تُسمّى المقذوفات.

وتتبع المقذوفات مسارًا منحنيًا بالقرب من سطح الأرض. وإن بدا للوهلة الأولى أنّ دراستها صعبة، إلّا أنّ النظر إليها بمركبتيها الأفقية والرأسية كلّ على حدة يسهّل دراستها.

في غياب الاحتكاك مع الهواء يكون مسار القذيفة على شكل منحنى قطع مكافئ. لكن في حال وجود مقاومة للهواء على القذيفة، تبطأ سرعتها نتيجة الاحتكاك مع الهواء، ويتغيّر شكل المسار كما في الشكل (23).



(شكل 23)
يختلف شكل المسار بوجود الاحتكاك: (أ) بدون احتكاك، (ب) مع احتكاك



(شكل 24)
عند دحرجة كرة على سطح أفقي عديم الاحتكاك تبقى سرعتها ثابتة لعدم وجود مركبة لقوّة الجاذبية تأثّر عليها أفقيًّا.

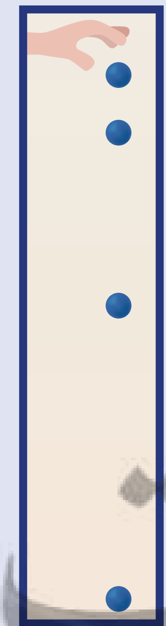
2. مركّبتا حركة القذيفة

The Components of the Projectile Motion

المركبة الأفقية لحركة القذيفة تماثل الحركة الأفقية لكرة تتدحرج على سطح منبسط. وعند إهمال الاحتكاك، تكون سرعة تدحرج الكرة منتظمة وتقطع مسافات متساوية في أزمنة متساوية كما يوضّح (شكل 24). فعدم وجود قوّة أفقية تؤثّر على الكرة يعني عدم وجود عجلة أفقية، وهذا هو الحال في حركة القذيفة حيث لا وجود لقوّة أفقية، ما يبقي سرعتها الأفقية ثابتة وحركتها على المحور الأفقي بسرعة منتظمة.

أمّا المركبة الرأسية للقذيفة فتشبه تمامًا السقوط الحرّ للأجسام، حيث تعمل قوّة الجاذبية في الاتّجاه الرأسي، ما يؤدّي إلى حركة معجّلة تؤدّي إلى زيادة المسافة المقطوعة كلّ فترة زمنية تالية (شكل 25).

من المهمّ معرفة أنّ الحركة الأفقية للقذيفة والحركة الرأسية غير مترابطتين (آنيتين)، غير أنّ تأثيرهما معًا ينتج المسار المنحني الذي تتبعه المقذوفات.



(شكل 25)
عند إسقاط الكرة، إنّها تتسارع لأسفل قاطعة مسافة رأسية أكبر كلّ ثانية.

الصورة الستربوسكوبية المتعاقبة في الشكل (26) تظهر كرتين قُذفت إحداهما أفقيًّا في حين أُسقطت الأخرى رأسيًّا في الوقت نفسه، مع إهمال مقاومة الهواء. يظهر الشكل أنّ حركة القذيفة هي سقوط حرّ مع سرعة إبتدائية متّجهة على المحور الأفقي. فإذا اختبرنا حركة الكرتين بإهمال الاحتكاك مع الهواء، سنجد أنّهما وصلتا إلى الأرض باللحظة نفسها.
فلنأخذ الكرة التي تسقط في خطّ مستقيم بدون أيّ حركة أفقية، فحركتها تمثّل السقوط الحرّ. فالكرة تسقط تحت تأثير وزنها، ويمكن تحليل حركتها باستخدام معادلات الحركة المنتظمة العجلة باتّجاه واحد حيث $a = g$ والتي درسناها في السنوات السابقة.

$$\Delta y = \frac{1}{2} g t^2$$
$$v = g t$$
$$v_f^2 = 2 g \Delta y$$

أمّا إذا لاحظنا مركبات حركة الكرة الثانية التي أُطلقت بسرعة أفقية فنسجد:

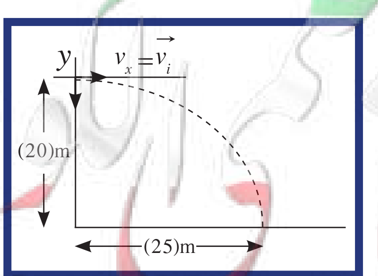
- أنّها تتحرّك مسافة أفقية واحدة خلال الفترة بين ومضتين متتاليتين، وأنّ سرعتها الأفقية ثابتة (إهمال الاحتكاك)، وأنّ حركتها على المحور الأفقي تعطى بالمعادلة $\Delta x = v \Delta t$.
- أمّا حركتها على المحور الرأسي فهي تمامًا مثل حركة الكرة التي تسقط سقوطًا حرًّا. فهي تقطع خلال أيّ لحظة المسافة الرأسية نفسها التي قطعتها الكرة التي تسقط سقوطًا حرًّا. لهذا السبب نجد أنّ الكرتين تصلان إلى الأرض في اللحظة نفسها، ونؤكّد عدم وجود علاقة بين مسافة السقوط والمركبة الأفقية للحركة.

وخلاصة ما سبق هي: **إنّ حركة القذيفة هي حركة مركبة من حركة منتظمة السرعة على المحور الأفقي وحركة منتظمة العجلة على المحور الرأسي.**

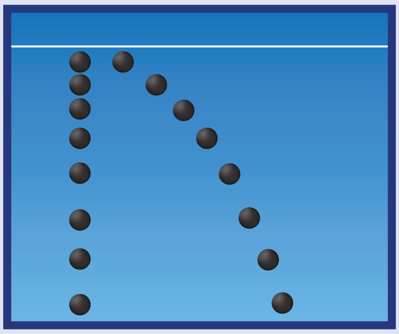
مثال (1)

رُمي جسم من ارتفاع $(20)m$ عن سطح الأرض وبسرعة أفقية مقدارها v. احسب مقدار v علمًا أنّ إزاحة الكرة الأفقية تساوي $(25)m$.
أهمل مقاومة الهواء.

طريقة التفكير في الحلّ



1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم.
المعلوم: $\Delta y = (20)m$
$\Delta x = (25)m$
غير المعلوم: $v = ?$



(شكل 26)
صورة لكرتين انطلقتا معًا من آلة تسمح لإحدى الكرتين بالسقوط الحر بينما تقذف الأخرى أفقيًا.

فقرة إثرائية

الفيزياء في المختبر

المقذوفات والسقوط الحرّ

ضع عملة معدنية على حافّة منضدة ملساء بحيث تكاد تقع عنها.
ضع قطعة ثانية على حافّة المنضدة وعلى مسافة ما من القطعة الأولى.
دحرج العملة الثانية عبر المنضدة (بدفعها بإصبعك مثلًا) شرط أن تصطدم بالعملة الأولى، وتقع العملتان على الأرض. راقب أيّ العملتين تصطدم بالأرض أوّلًا (بفرض حدوث ذلك لأحدهما).
هل تعتمد إجابتك على سرعة دحرجة العملة الثانية على المنضدة؟

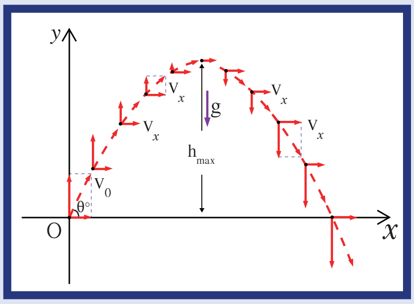
مثال (1) (تابع)

2. **احسب غير المعلوم:**
في غياب مقاومة الهواء تكون السرعة الأفقية منتظمة:
$$\Delta x = v_x \, \Delta t = vt$$
حيث $v_y = (0)m/s$
والحركة على المحور الرأسي منتظمة العجلة $a = g = (10)m/s^2$.
باستخدام المعادلة:
$$\Delta y = \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow 20 = 5t^2 \Rightarrow t = (2)s$$
وبالتعويض عن t في $\Delta x = vt$ نحصل على:
$$v = \frac{25}{2} = (12.5)m/s$$
3. **قيّم:** هل النتيجة مقبولة؟
النتيجة مقبولة ويمكن اختبارها عمليًّا والتحقّق من مقدار زمن الوصول إذا كان يحقّق النتيجة في المسألة .

3. حركة قذيفة أُطلقت بزاوية

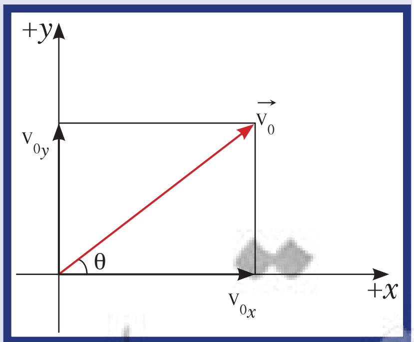
Motion of a Projectile Launched with an Angle

لنأخذ الجسم m الذي قُذف من النقطة O بزاوية قذف θ بسرعة ابتدائية مقدارها v_0 مع المحور الأفقي ، كما في الشكل (27) .



(شكل 27)
جسم قذف بزاوية θ

إن تحليل متّجه السرعة الابتدائية الموضّح في الشكل (28) يعطي:
$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$
$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$



(شكل 28)
مركبتا السرعة المتّجهة الابتدائية

أمّا بالنسبة إلى كتلة المقذوف m ، فإنّ القوّة الوحيدة المؤثّرة عليها بغياب الاحتكاك هي قوّة الجاذبية (الوزن) $\vec{W}$ واتّجاهها نحو مركز الأرض .
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:
$$\Sigma F = m\vec{a}$$
$$m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$
وبما أنّ العجلة $\vec{a}$ هي كمّية متّجهة لها مركبتان $\vec{a}_x$ و $\vec{a}_y$ وأن متّجه العجلة هو باتّجاه عجلة الجاذبية، يمكننا أن نستنتج أنّ:
$$a_y = -g \text{ و } a_x = 0$$
وأنّ الحركة على المحور الأفقي هي منتظمة السرعة وتتمثّل بالمعادلة:
$$\Delta x = v_{0x} \, t = v_0 \cos \theta \, t$$
$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta$$
وأنّ الحركة على المحور الرأسي هي منتظمة العجلة وتتمثّل بالمعادلة:
$$\Delta y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_{0y} t = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \sin \theta \, t$$
$$v_y = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin \theta$$

لاحظ أنّ المركبة الأفقية للسرعة على مسار القطع المكافئ (شكل 27) لها القيمة نفسها، بينما المركبة الرأسية للسرعة هي التي تتغيّر وتؤدّي إلى تغيّر محصّلة السرعة التي يمثّلها قطر المستطيل.

1.3 معادلة المسار Trajectory Equation

معادلة المسار Trajectory Equation هي علاقة بين مركبة الحركة الأفقية ومركبة الحركة الرأسية خالية من متغير الزمن t، ويمكن استنتاجها كما يلي:

$$\Delta x = v_{0x}\, t = v_0 \cos\theta t$$

$$t = \frac{\Delta x}{v_0 \cos\theta}$$

وبتعويض مقدار t في المعادلة وباعتبار أنّ نقطة الإطلاق هي O (0,0)

$$\Delta y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta t$$

نحصل على:

$$\boxed{y = \tan\theta\, x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2}$$

والتي تمثّل المسار المنحني ويُسمّى القطع المكافئ Parabola الذي لاحظناه في التجربة السابقة.

يتغيّر مسار القذيفة بتغيير زاوية الإطلاق بالنسبة إلى المحور الأفقي. فإذا كانت هذه الزاوية تساوي 90°، يصبح مسار القذيفة خطًّا رأسيًّا. أمّا إذا كانت زاوية الإطلاق تساوي صفرًا، فيكون شكل المسار نصف قطع مكافئ (شكل 29).

2.3 أقصى ارتفاع Maximum Height

إنّ مركبة سرعة القذيفة الرأسية v_y عند أعلى نقطة تساوي صفرًا، أي أنّ: $0 = -gt + v_0 \sin\theta$

بالتالي، إنّ الزمن للوصول إلى أعلى نقطة $t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$، وبالتعويض في y نحصل على أقصى ارتفاع:

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$$

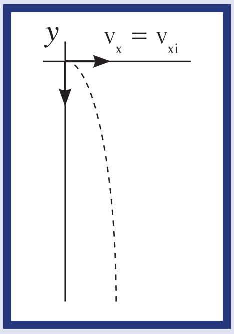
3.3 المدى Range

المدى Range هو المسافة الأفقية التي تقطعها القذيفة بين نقطة الإطلاق ونقطة الوصول على الخطّ الأفقي المارّ بنقطة الإطلاق.

عندما تصل القذيفة إلى أقصى ارتفاع، تكون قد قطعت نصف المدى. أمّا الزمن الكلّي لقطع المدى كاملًا على اعتبار أنّ القذيفة انطلقت من المستوى الأفقي ووصلت إلى المستوى نفسه، فيساوي ضعف الزمن للوصول إلى أقصى ارتفاع، أي أنّ: $t' = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$.

وبالتعويض في معادلة الحركة على المحور الأفقي نحصل على المدى الأفقي:

$$\boxed{R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$



(شكل 29)
نصف قطع مكافئ

فقرة إثرائية

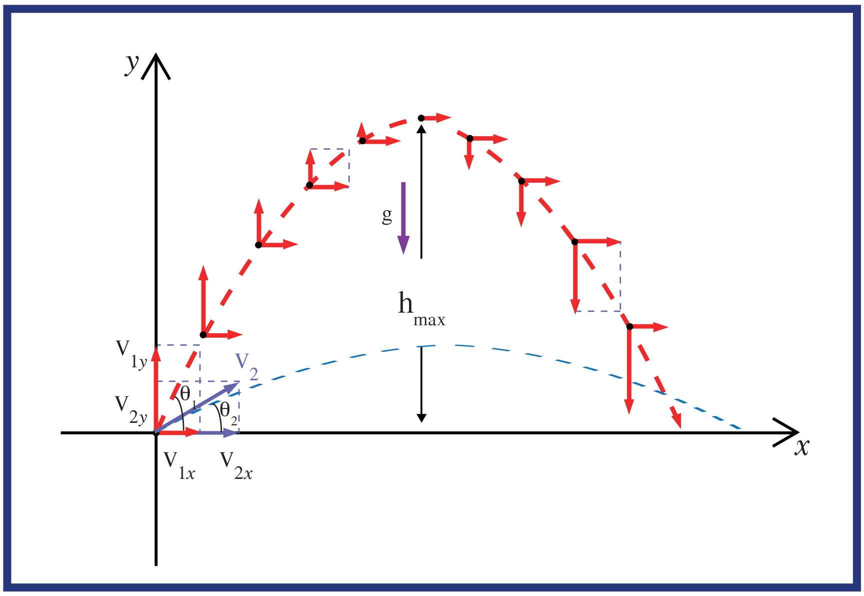
ارتباط الفيزياء بالرياضة

زمن التحليق

زمن التحليق هو الوقت الذي يقضيه شخص خلال قفزه وأثناء حمل الهواء له، وهو لا يعتمد على السرعة الأفقية. وسنوضّح الآن لماذا يحدث ذلك. من المعروف أنّ المركبتين الأفقية والرأسية للحركة لا تعتمدان الواحدة على الأخرى. ففي لحظة ابتعاد القدمين عن الأرض، وبإهمال مقاومة الهواء، تكون القوّة الوحيدة المؤثّرة على القافز هي الجاذبية. ويعتمد زمن التحليق على المركبة الرأسية لسرعة الصعود فقط التي تجعله يصعد لأعلى. والنتيجة أنّ قوّة القفزة يمكن أن تزداد بعض الشيء بتأثير الجري. لذلك، فزمن التحليق للقفزة أثناء الجري أكبر من زمن القفزة في المكان. وعلى كلّ حال، في اللحظة التي تترك فيها القدمان الأرض، نجد أنّ المركبة الرأسية للسرعة التي ترفع لأعلى هي التي تحدّد زمن التحليق. والقواعد المُستخدمة في حركة القذيفة تطبّق على الشخص أثناء القفز.

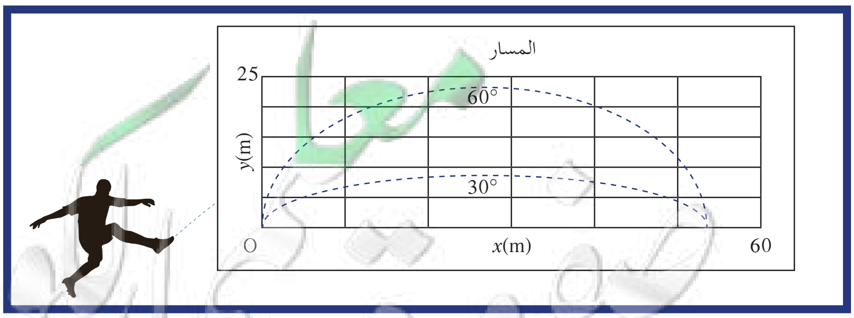
4. العلاقة بين زاوية الإطلاق والمدى الأفقي وأقصى ارتفاع
Relation Between Angle, Range and Maximum Height

عند إطلاق قذيفتين بسرعة ابتدائية متساوية لكن بزاويتي إطلاق مختلفتين، يحدث ما يوضحه الشكل (30).



(شكل 30)

القذيفة التي أُطلقت بزاوية إطلاق أكبر (θ_1) لها مركبة سرعة رأسية أكبر من تلك التي أُطلقت بزاوية أقلّ (θ_2)، وهذا يؤدّي إلى ارتفاع أكبر.
أمّا مركبة السرعة الأفقية للقذيفة التي أُطلقت بزاوية إطلاق أكبر (θ_1)، فتكون أصغر من تلك التي أُطلقت بزاوية أقل (θ_2)، ما يؤدّي إلى مدى أصغر. أي **كلما كانت المركبة الأفقية أقل كان المدى أقل**، أمّا الشكل (31) فيوضّح وصول قذيفتين مختلفتين للمدى نفسه عند إطلاقهما بزاويتين مجموعهما $90°$ في ظلّ غياب مقاومة الهواء. على سبيل المثال، إذا قُذف جسم بزاوية $60°$، سوف يصل إلى المدى نفسه الذي يصل إليه إذا تمّ إطلاقه بالسرعة نفسها لكن بزاوية $30°$ (شكل 32)، لكن سيستمرّ مساره في الهواء لفترة أقصر عندما تكون الزاوية أصغر.



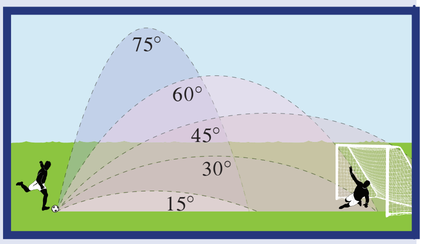
(شكل 32)

مسارا قذيفتين تمّ إطلاقهما بالسرعة نفسها بزاويتي $30°$ و $60°$ بإهمال مقاومة الهواء.

مسألة مع إجابة

قُذف جسم من سطح الأرض بسرعة ابتدائية $(25)m/s$ وبزاوية $53°$ مع المحور الأفقي ليعود إلى الأرض.
افترض أنّ عجلة الجاذبية $g = (10)m/s^2$. احسب:
(أ) أقصى ارتفاع
(ب) المدى
(جـ) موقع الجسم بعد ثانية
(د) سرعته بعد ثانية.

الإجابات: **(أ)** $(19.93)m$
(ب) $(60)m$
(جـ) $x = 15.04$ ، $y = 14.96$
(د) $\theta = 33.5°$ ، $v = (18.042)m/s$



(شكل 31)

مسارات مقذوفات تمّ إطلاقها بالسرعة نفسها، لكن بزوايا مختلفة. حُدّدت المسارات بإهمال مقاومة الهواء.

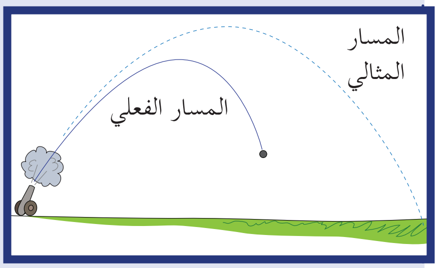
مسألة

أحسب زاوية الإطلاق θ بالنسبة إلى المحور الأفقي ليصل الجسم المقذوف إلى أبعد مدى.

عندما تكون مقاومة الهواء غير مُهمَلة، يتناقص مدى القذيفة ويصبح المسار قطعًا مكافئ غير حقيقي (شكل 33).

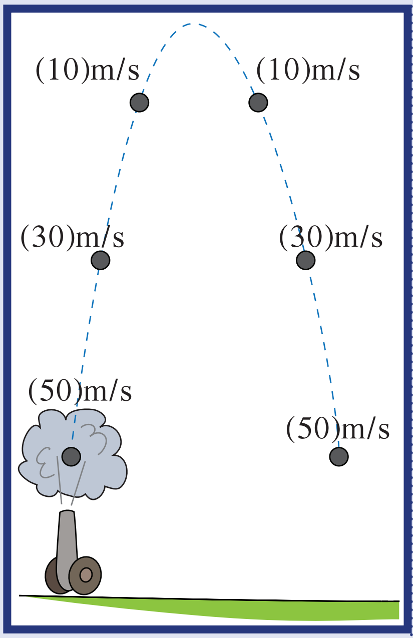
وإنّ إهمال الاحتكاك يجعل القذيفة تصل إلى أقصى ارتفاع في الزمن نفسه الذي ستستغرقه للوصول إلى الأرض من هذا الارتفاع، وبما أنّ عجلة التباطؤ عند الصعود لأعلى تساوي عجلة التسارع عند الهبوط لأسفل. فالسرعة التي تفقدها القذيفة أثناء الصعود هي نفسها التي تكتسبها أثناء الهبوط. وسرعة اصطدام القذيفة بالأرض هي السرعة نفسها التي أُطلقت بها القذيفة من الأرض لأعلى (شكل 34).

أمّا في حال عدم إهمال الاحتكاك، فستصل الكرة إلى ارتفاع أقلّ وتختلف سرعتها لحظة الاصطدام عن سرعة الإطلاق.



(شكل 33)

في وجود مقاومة الهواء، يسقط مسار القذيفة السريعة جدًّا أسفل القطع المكافئ المثالي ويتبع المسار المنحني الممثّل بالخطّ المتّصل.



(شكل 34)

بإهمال مقاومة الهواء، يكون مقدار النقص في سرعة القذيفة فيما هي منطلقة لأعلى مساويًا لمقدار تزايد سرعتها فيما هي ساقطة إلى أسفل. ونلاحظ أنّ زمن الوصول لأقصى ارتفاع يساوي زمن الهبوط إلى الأرض.

مثال (2)

أُطلقت قذيفة بزاوية $60°$ مع المحور الأفقي من النقطة $O(0,0)$ وبسرعة ابتدائية $v_0 = (20)\text{m/s}$ (شكل 35). أَهمل مقاومة الهواء.

(أ) أُكتب معادلة المسار للقذيفة.

(ب) أُحسب الزمن الذي تحتاجه للوصول إلى أقصى ارتفاع.

(جـ) اِستنتج مقدار أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة.

(د) أُحسب المدى الأفقي الذي تبلغه القذيفة علمًا أنّها اصطدمت بالأرض عند نقطة تقع على الخطّ المارّ بنقطة القذف.

(هـ) أُحسب متّجه السرعة لحظة اصطدام القذيفة بالأرض.

طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم.

المعلوم: $v_0 = (20)\text{m/s}$

$\theta = 60°$

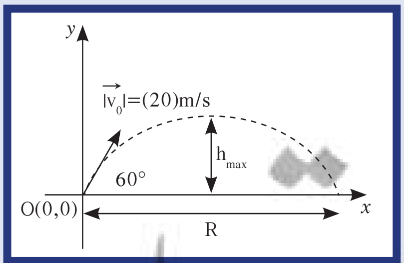
غير المعلوم:

(أ) معادلة المسار $y = f(x)$

(ب) الزمن للوصول إلى أقصى ارتفاع

(جـ) أقصى ارتفاع $h_{max} = ?$

(د) المدى الأفقي $R = ?$



(شكل 35)

مثال (2) (تابع)

2. احسب غير المعلوم

$$y = \left(\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\right) x^2 + \tan\theta \, x$$

$$y = -0.05\, x^2 + 1.73x$$

(ب) عند أقصى ارتفاع، تكون المركبة الرأسية للسرعة $\vec{v}_y$ تساوي صفرًا. ونستخدم المعادلة التالية:

$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta$$

وبالتعويض عن المقادير المعلومة نحصل على: $t = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{20 \sin 60}{10} = (1.73)s$

والذي يمثّل الزمن للوصول إلى أقصى ارتفاع.

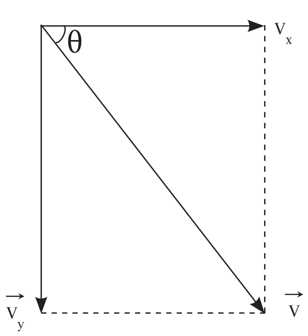
(جـ) باستخدام المعادلة $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2\,g}$ وبالتعويض عن المقادير المعلومة نحصل على:

$$h_{max} = \frac{20^2 \sin^2 60}{2 \times 10} = (15)m$$

(د) باستخدام معادلة المدى الأفقي وبالتعويض عن المقادير المعلومة نحصل على:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$R = \frac{20^2 \sin(2 \times 60)}{10} = (34.64)m$$



(شكل 36)
مركّبة السرعة v_y نحو الاتّجاه السالب للمحور الرأسي

(هـ) إن الزمن الذي تحتاجه القذيفة للوصول إلى الأرض:

$$t = 2 \times 1.73 = (3.46)s$$

وبما أنّ متّجه السرعة $\vec{v}$ يُكتب: $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$

بالتعويض عن المقادير المعلومة نحصل على مركبتا السرعة:

$$v_x = v_0 \cos\theta = 20 \cos 60 = (10)m/s$$

$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta = -\,10\,(3.46) + 20 \sin 60 = (-17.27)m/s$$

الإشارة السالبة تعني أنّ اتّجاه مركبة السرعة $\vec{v}_y$ (شكل 36) هي بالاتّجاه السالب للمحور الرأسي.

باستخدام الشكل نجد أنّ مقدار $\vec{v}$:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{100 + 298.58} = (19.96)m/s$$

أمّا اتّجاه سرعة الاصطدام مع الأرض، فتُحسب بالتعويض عن المقادير المعلومة في المعادلة:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-17.27}{10} = -1.727$$

$$\theta = -59.92°$$

والإشارة السالبة تعني أنّ متّجه السرعة يصنع زاوية 60° تحت المحور الأفقي.

مثال (2) (تابع)

3. قيّم: هل النتيجة مقبولة؟
النتائج مقبولة وسرعة الاصطدام بالأرض تساوي سرعة الإطلاق ، وأكّدنا ذلك في حال إهمال الاحتكاك ، والاختلاف البسيط يعود إلى التقريب .

مراجعة الدرس 1-3

يُعتبر تأثير الهواء مهملًا في الأسئلة التالية .

أوّلًا – ماذا يمثّل مدى مسار القذيفة؟

ثانيًا – بمَ تتميّز النقطة الأعلى في مسار قذيفة أُطلقت بزاوية θ بالنسبة إلى المحور الأفقي؟

ثالثًا – أُطلقت قذيفتان لهما كتلتان مختلفتان m_1 و m_2 ، إذا علمت أنّ $(m_1 < m_2)$ ، بالسرعة الابتدائية نفسها v_0 وبزاوية θ بالنسبة إلى المحور الأفقي نفسه . قارن بين مدى المسار والارتفاع الأعلى الذي تبلغه كلّ قذيفة من القذيفتين .

رابعًا – في إطار مبارزة إطلاق السهم ، أرسل أحد المتبارين السهم بسرعة ابتدائية v_0 قيمتها $(50)\text{m/s}$ ، وذلك لكي يصل إلى هدفه الموجود على مسافة $(80)\text{m}$. علمًا بأنّ مركز الهدف هو على المستوى الأفقي نفسه مع يد المتباري ، وبإهمال تأثير الهواء:

(أ) حدِّد قيمة زاوية θ بالنسبة إلى المحور الأفقي لكي يتمكّن المتباري من إصابة مركز الهدف الموجود على بعد $(80)\text{m}$.

(ب) إذا تمّ الإطلاق بزاوية $9°$ (دائمًا بالنسبة إلى المحور الأفقي) . أُحسب قيمة المسافة الأفقية التي قطعها السهم . هل يصل السهم إلى الهدف؟ قيم إجابتك .

مراجعة الفصل الأوّل

المفاهيم

أقصى ارتفاع	Maximum Height	مدى	Range
قطع مكافيء	Parabola	مركبتا السرعة المتّجهة	Velocity Components
كمّية عددية	Scalar Quantity	معادلة المسار	Trajectory Equation
كمّية متّجهة	Vector Quantity	مقدار	Magnitude
محصّلة المتّجهات	Resultant of Vectors		

الأفكار الرئيسة في الفصل

- الكمّيات العددية تُسمّى أيضًا الكمّيات القياسية، وهي الكمّيات التي يكفي لتحديدها عدد يحدّد مقدارها ووحدة فيزيائية تميّز هذا المقدار.
- الكمّيات المتّجهة هي الكمّيات التي تحتاج في تحديدها إلى الاتّجاه الذي تتخذه، بالإضافة إلى العدد الذي يحدّد مقدارها ووحدة القياس التي تميّزها.
- يحتاج جمع المتّجهات إلى عملية جبر المتّجهات التي تُسمّى عملية تركيب، حيث تتمّ الاستعاضة عن متّجهين أو أكثر بمتّجه واحد.
- تحليل المتّجه هو استبدال متّجه ما بمتّجهين متعامدين يُسمّيان مركبتي المتّجه، بحيث يمثّل المتّجه المراد تحليله المحصّلة لهذين المتّجهين ويكون متّحدًا معهما في نقطة البداية.
- القذيفة جسم متحرّك بسرعة ابتدائية تحت تأثير وزنه فقط، وبغياب الاحتكاك مع الهواء.
- مسار القذيفة هو مسار منحنى يُسمّى قطعًا مكافئًا.
- حركة القذيفة هي حركة مركّبة بسرعة منتظمة على المحور الأفقي وبعجلة منتظمة على المحور الرأسي.
- المدى الأفقي هو المسافة الأفقية التي تقطعها القذيفة بين نقطة الإطلاق ونقطة الوصول على الخطّ الأفقي المارّ بنقطة الإطلاق.
- إنّ حاصل الضرب القياسي لمتجهين هو كميّة قياسية تحدّد بالعلاقة $v = v_1\ v_2 \cos \alpha$.
- إنّ حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين هو متجه مقداره يحدد بالعلاقة التالية:

$v = v_1\ v_2 \sin \alpha$ أما اتجاهه فهو رأسي على المستوى المكوّن من المتجهين، ويحدّد بتطبيق قاعدة اليد اليمنى وذلك بتدوير أصابع اليد اليمنى من المتجه الأول إلى الثاني عبر الزاوية الأصغر بين المتجهين ليشير الإبهام إلى اتجاه المتجه v.

- إنّ مقدار حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين يمثل مساحة متوازي الأضلاع الناشئ عن المتجهين.

خريطة مفاهيم الفصل

استخدم المصطلحات الموضّحة في الشكل التالي لرسم خريطة مفاهيم تُنظّم معظم الأفكار التي احتواها الفصل.

عجلة منتظمة | حركة القذيفة | سرعة منتظمة | المركّبة الأفقية | المركّبة الرأسية

تحقق من فهمك

ضع علامة (✓) في المربّع الواقع أمام العبارة الصحيحة في كلّ ممّا يلي:

1. تحدّد الكمّية المتّجهة:
   - ☐ مقدار ووحدة قياس
   - ☐ اتّجاه ووحدة قياس ونقطة تطبيق
   - ☐ اتّجاه ومقدار ووحدة قياس
   - ☐ اتّجاه ومقدار ونقطة تأثير ووحدة قياس
2. تحدّد الكمّية العددية:
   - ☐ مقدار ووحدة قياس
   - ☐ اتّجاه ونقطة تأثير ووحدة قياس
   - ☐ اتّجاه ومقدار ووحدة قياس
   - ☐ اتّجاه ومقدار ونقطة تأثير ووحدة قياس
3. المركبة الأفقية لمتّجه قوّة مقداره $(5)N$ يميل بزاوية $60°$ مع المحور الرأسي بوحدة (N) تساوي:
   - ☐ (4.333)
   - ☐ (2.5)
   - ☐ (3)
   - ☐ (4)
4. المركبة الرأسية لمتّجه قوّة مقداره $(5)N$ يميل بزاوية $60°$ مع المحور الأفقي بوحدة (N) تساوي:
   - ☐ (4.333)
   - ☐ (2.5)
   - ☐ (3)
   - ☐ (4)

تحقق من معلوماتك

أجب عن الأسئلة التالية:

1. ما الفرق بين السرعة العددية والسرعة المتّجهة؟

3. تحلق طائرة بسرعة $(80)km/h$. هل تتوقّع أن تصبح سرعتها أكبر أو أقلّ من $(80)km/h$ إذا هبّت عليها رياح اتّجاهها عمودي على اتّجاه طيرانها؟
4. احسب مساحة متوازي الأضلاع الناشئ عن متجهين الإزاحة D_1 ومقداره $(4)m$ والمتجه D_2 ومقداره $(6)m$ علمًا أنهما يحصران في ما بينهم زاوية $150°$.

تحقق من مهاراتك

حلّ المسائل التالية:

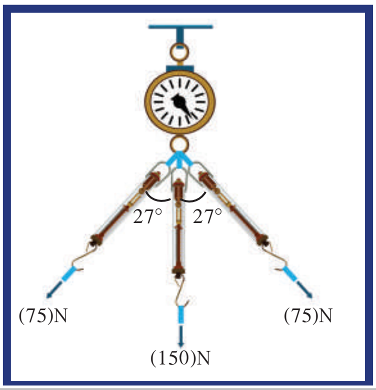
1.

لمتجهي السرعة المتلاقيين في النقطة O، علمًا أن مقدار $v_1 = (5)m/s$ ومقدار $v_2 = (5)m/s$، ويحصران بينهما زاوية مقدارها $120°$.

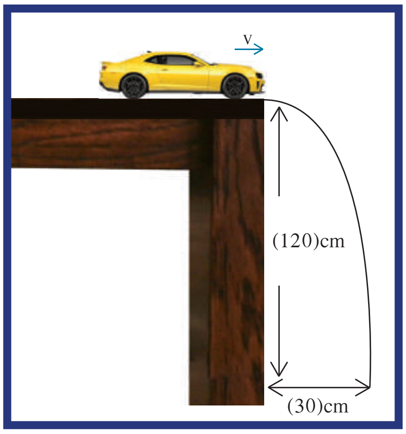
(ب) أوجد المحصّلة $\vec{v}_R$ (مقدار واتّجاه) مستخدمًا الطريقة الحسابية .

(ج) مثّل هذه السرعة رياضيًّا .

2. حلقة جهاز ميزان زنبركي يتمّ شدّها بواسطة ثلاثة حبال بقوى مختلفة، كما يوضّح الشكل المقابل.
أوجد مقدار المحصّلة التي سيقرأها الميزان الزنبركي.

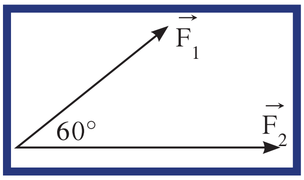


4. دفع ولد سيّارته عن حافّة طاولة ارتفاعها (120)cm لتسقط وتصطدم بالأرض عند نقطة تبعد أفقيًّا (30)cm عن الطاولة كما هو موضّح في الشكل المقابل.
(أ) أُحسب الزمن الذي تحتاجه السيارة لتصطدم بالأرض.
(ب) أُحسب سرعة السيّارة لحظة انطلاقها مبتعدة عن سطح الطاولة.
(جـ) أُحسب مقدار سرعتها واتّجاهها لحظة اصطدامها بالأرض. (علمًا أنّ $g = (10)m/s^2$)



5. أُطلقت قذيفة بزاوية $30°$ مع المحور الأفقي من النقطة O (0,0) بسرعة ابتدائية $v_0 = (30)m/s$.
اَهمل مقاومة الهواء.
(أ) أُكتب معادلة المسار للقذيفة.
(ب) أُحسب الزمن الذي تحتاجة للوصول إلى أقصى ارتفاع.
(جـ) أُحسب مقدار أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة.
(د) أُحسب المدى الأفقي الذي تبلغه القذيفة علمًا أنّها اصطدمت مع الأرض بنقطة تقع على الخطّ المارّ بنقطة القذف.
(هـ) أُحسب متّجه السرعة لحظة اصطدامها بالأرض.

7. المتجهان $\vec{F}_1$ ومقداره $(3)N$ و$\vec{F}_2$ مقداره $(4)N$ ، يحصران بينهما زاوية $60°$ وموجودان في المستوى نفسه كما في الشكل المقابل.



(أ) احسب حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$.

(ب) احسب حاصل الضرب الاتجاهي $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2$ وحدّد عناصر متجه المحصلة $\vec{F'}$ ومثله بيانيًا.

(جـ) احسب حاصل الضرب الاتجاهي $\vec{F}_2 \times \vec{F}_1$ و حدّد عناصر متجه المحصلة $\vec{F''}$ ، ومثله بيانيًا

(د) ما العلاقة بين المتجهين $\vec{F'}$ و $\vec{F''}$ ؟

مشاريع الفصل

التواصل

أُكتب مقالًا لا يزيد عن عشرة أسطر تبيّن فيه دور الجاذبية في حركة قذيفة أُطلقت بسرعة ابتدائية في غياب الاحتكاك، مبيّنًا في مقالك شكل المسار الذي ستتّخذه القذيفة في غياب الجاذبية، ومعلّلًا السبب علميًّا.

نشاط بحثي

يمكن تصنيف دراسة المقذوفات إلى نوعين: دراسة المقذوفات العادية التي درسناها في هذا الفصل ودراسة المقذوفات السريعة. اِجر بحثًا توضح فيه الفرق بين هذين النوعين من المقذوفات، واعط مثالًا على مقذوفات سريعة تُستخدم في الحياة اليومية.

الحركة الدائرية
Circular Motion

دروس الفصل

لماذا لا يسقط ركّاب عربة المدينة الترفيهية منها؟

في مقدّمة الوحدة حدّدنا هدفنا بدراسة نوعين من الحركة في مستوى، فعرضنا في الفصل السابق حركة القذيفة كمثال على الحركة في مستوى. أمّا في هذا الفصل، فسنتناول الحركة الدائرية كمثال آخر على الحركة في مستوى.

الحركة الدائرية موجودة في حركة الكثير من الأجسام من حولنا، بدءًا من حركة الإلكترونات حول النواة وصولًا إلى حركة المجرّات. فنحن نلاحظها يوميًّا في حركة عجلات السيّارات وعربات المدينة الترفيهية، وندرس نتائجها في تعاقب الليل والنهار من خلال دوران الأرض حول محورها.

دراسة الحركة الدائرية تتطلّب منا إلمامًا ببعض المقادير الفيزيائية التي تساعدنا على فهم خصائص هذه الحركة، مثل قياس الزاوية ووحدات قياسها، والإزاحة الزاوية، والسرعة الدائرية، والعجلة الزاوية وغيرها سنتناولها تفصيليًّا في دروس هذا الفصل.

وملاحظتنا للحركة الدائرية لبعض الأجسام مثل حركة الأحصنة في لعبة دوّارة الخيل أو لعبة الساقية الدوّارة ستدفعنا إلى طرح الكثير من الأسئلة التي نحتاج إلى إجابة علمية عليها، ومنها: أيّهما أسرع، الحصان القريب من الحاجز الداخلي أو الحصان القريب من الحاجز الخارجي؟

لماذا لا يسقط ركّاب عربة المدينة الترفيهية منها عندما يرتفع السطح الدوّار إلى أعلى؟ وأيّ قوّة تثبّت الركّاب بمقاعدهم؟

إذا ثبّت جسمًا في نهاية خيط وجعلته يدور في دائرة فوق رأسك، ثم انقطع الخيط، فهل سيطير الجسم خارج الدائرة أم سيكمل حركته؟

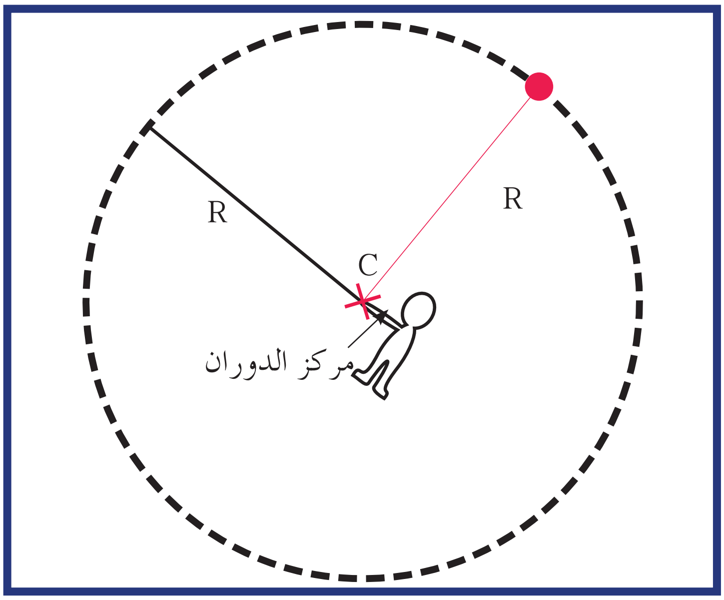
الإجابات على هذه الأسئلة والكثير غيرها هي محور دروس هذا الفصل.

الدرس 2-1

وصف الحركة الدائرية
Describing Circular Motion

الأهداف العامة

- يعرّف الحركة الدائرية.
- يميّز بين الدوران المحوري والدوران المداري.
- يصف السرعة الدائرية.
- يميّز بين السرعة الخطّية والسرعة الزاوية.
- يعرّف العجلة المركزية والعجلة الزاوية.
- يذكر معادلات الحركة الدائرية منتظمة العجلة.



(شكل 38)
كتلة تدور حول مركز الدوران C.

لنأخذ جسمًا ونربطه بطرف خيط، ثمّ نجعله يدور (شكل 38).
ما شكل المسار الذي يحدثه دوران الجسم؟
هل تتغيّر المسافة بين مركز ثقل الجسم ومركز الدوران؟
حركة الجسم على مسار دائري حول مركز دوران، مع المحافظة على مسافة ثابتة منه تُسمّى الحركة الدائرية.

وتكون الحركة الدائرية منتظمة عندما يتحرّك الجسم في مسار دائري بسرعة ثابتة القيمة. سندرس الحركة الدائرية المنتظمة تفصيليًّا في سياق الدرس بعد أن نميّز الفرق بين الدوران المحوري والدوران المداري، وبعد أن نتعرّف بعض الكمّيات الفيزيائية الضرورية لدراسة الحركة الدائرية.

1. الدوران المحوري والدوران المداري

Rotation and Revolution

الحركة الدائرية لمسطّح لعبة الساقية الدوّارة في المدينة الترفيهية الموضّحة في الشكل (39)، والحركة الدائرية للمتزلّج على الجليد، كلتاهما تدوران حول محور. والمحور هو الخطّ المستقيم الذي تحدث حوله الحركة الدائرية. فعندما يدور جسم حول محور داخلي (بمعنى أنّ المحور يستقرّ داخل هذا الجسم)، يُسمّى ذلك الحركة الدائرية المحورية أو المغزلية. وعلى ذلك، كلّ من لعبة الساقية الدوّارة في المدينة الترفيهية والمتزلّج على الجليد يدور حول محور داخلي.

أمّا عندما يدور جسم حول محور خارجي، فهذه الحركة تُسمّى الحركة المدارية (شكل 40). وعلى الرغم من أنّ مسطّح الساقية الدوّارة يدور حول محورها، فإنّ الركّاب على طول الحافّة الخارجية لهذا المسطّح يدورون حول محور الساقية.

تخضع الأرض لنوعي الحركة الدائرية. فهي تدور حول الشمس مرّة كلّ 365.25 يومًا، وتدور حول محورها مرّة كلّ 24 ساعة.

2. الإزاحة الزاوية Angular Displacement

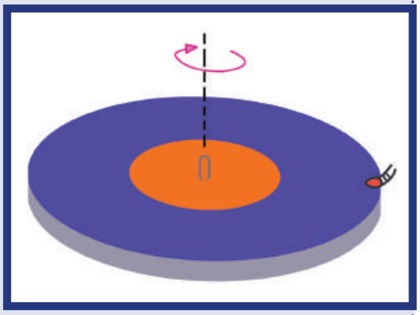
الحركة هي تغيّر الموقع بالنسبة إلى الزمن، ولكي نصف حركة جسم على مساره الدائري، يمكننا أن نستعين بالزاوية التي تحرّك بها.

لنأخذ النقطة M التي تتحرّك على المسار الدائري كما في الشكل (41). إنّ موقع M في أيّ لحظة يمكن أن يُمثّل باستخدام المركبتان x و y لمتجه الموقع $\overrightarrow{CM}$.

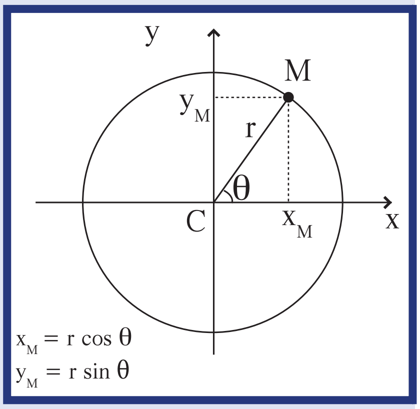
ويمكننا أن نشير إلى موقع النقطة M باستخدام التمثيل الرياضي للمتّجه CM حيث $(r\theta) = |\overrightarrow{CM}|$، حيث r هي نصف قطر المسار الدائري، والزاوية θ هي الاتّجاه الذي يقاس من المحور الأفقي باتّجاه الدوران الموجب إلى r. وبما أنّ المسافة بين النقطة M ومركز الدائرة ثابت، فإنّ استخدام الزاوية يكفي لتحديد موقع الجسم على المسار الدائري. وهذا يسهّل عمليًّا تحديد موقع الجسم المتحرّك على المسار الدائري أكثر من استخدام x و y اللتين تتغيّران بتغير الزمن.

وبناء عليه إنّ استخدام الإزاحة الزاوية $\Delta\theta$ (شكل 42) التي تقاس بين الخطّين (الخطّ المرجعي والخط المارّ بالنقطة والمركز)، تكفي لوصف الحركة الدائرية للنقطة M خلال فترة زمنية على المسار الدائري، حيث أنّ المسافة r بين الجسم ونقطة المركز ثابتة. ببساطة يمكن أن نقول إنّ الإزاحة هي θ عندما نختار $\theta_0 = 0$ rad (شكل 43).

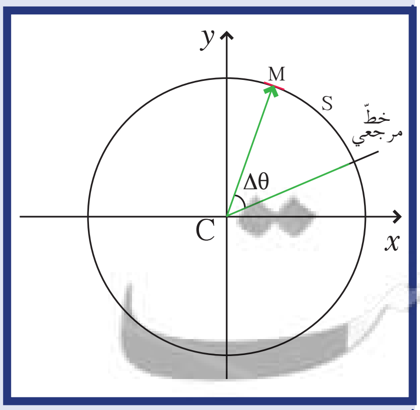
(شكل 39)
الساقية الدوّارة



(شكل 40)
تدور المنضدة الدوّارة حول محورها (دوران محوري) بينما تدور الحشرة الموجودة عند حافّتها بشكل مداري حول المحور نفسه.



(شكل 41)
المركّبتان x_M و y_M للنقطة الدوّارة M.



(شكل 42)
الإزاحة الزاوية للنقطة M عندما تكون $\theta_0 \neq O$.

تُقاس الزوايا عادة بوحدة الدرجة Degree (°) حيث تساوي الدورة الكاملة °360 ، وتتألّف كلّ درجة من 60 دقيقة وكلّ دقيقة من 60 ثانية .

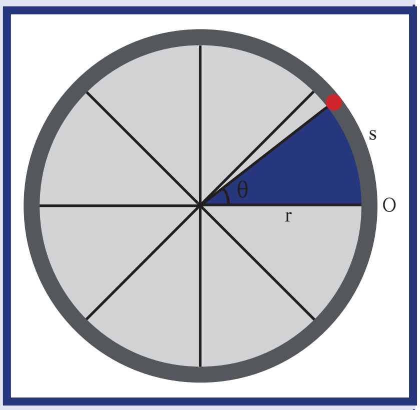
ويمكن وصف الحركة الدائرية أيضًا بالمسافة المقطوعة على القوس . من هنا أهمّية الربط بين الإزاحة الزاوية θ وطول القوس s .

يمثّل طول القوس s المسافة التي قطعها الجسم على المسار الدائري عند تحرّكه بزاوية θ . ولإيجاد علاقة بين s وθ نستخدم المعادلة الرياضية: $s = r\theta$ حيث تقاس θ بوحدة الراديان (rad) بحسب النظام الدولي للوحدات .

ولإيجاد علاقة بين الدرجة والراديان يمكننا أن نستخدم المعادلة الرياضية:

$$2\pi \text{ rad} = 360°$$

يظهر الجدول (1) بعض الزوايا بوحدتي الراديان (rad) والدرجة (°) .



(شكل 43)
الإزاحة الزاوية وطول القوس عندما تكون $O = \theta_O$.

الزاوية بالدرجة (°)	الزاوية بالرديان
360	2π
180	π
90	$\pi/2$
60	$\pi/3$
45	$\pi/4$
30	$\pi/6$

(جدول 1)
بعض الزوايا بوحدتي الراديان (rad) والدرجة °

مثال (1)

يقف حكم مباراة الركض في مركز المسار الدائري المخصص للسباق على بعد (200)m من لاعب يقف على الخط المرجعي باتّجاه الشرق يستعد للركض بالاتّجاه الدائري الموجب (شكل 44).

ركض اللاعب على المسار حتى نقطة النهاية التي تقع شمال الحكم على المحور الرأسي.

(أ) احسب المسافة التي قطعها اللاعب.

(ب) كم تكون مسافة السباق لو كان على اللاعب إكمال دورة كاملة؟

طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم .

المعلوم: $r = (200)\text{m}$

$$\theta = 90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

غير المعلوم:

(أ) طول القوس الذي يمثّل المسافة التي قطعها اللاعب على المسار:

$s = ؟$

(ب) طول المسار لدورة كاملة

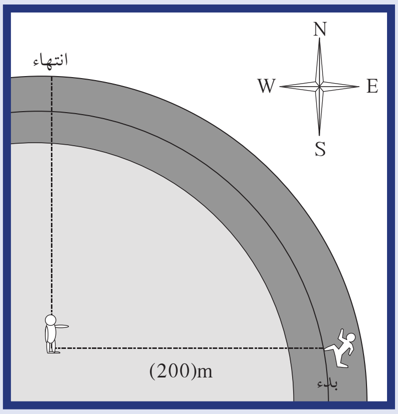
2. احسب غير المعلوم

(أ) باستخدام العلاقة الرياضية بين زاوية التحرّك وطول القوس:

$$s = r\,\theta$$

وبالتعويض عن المقادير المعلومة نحصل على:

$$s = 200 \times \frac{3.14}{2} = (314)\text{m}$$



(شكل 44)
لاعب يركض على مسار دائري

مثال (1) (تابع)

(ب) عندما يدور اللاعب دورة كاملة، يكون قد تحرّك بالنسبة إلى المحور المرجعي بزاوية $\theta = 2\pi$

وعليه فإنّ مسافة السباق لدورة كاملة تساوي:

$L = r\,(2\pi)$

$L = 200 \times 2 \times 3.14 = (1256)\text{m}$

3. قيّم: هل النتيجة مقبولة؟

مسار السباق أثناء دورة كاملة يمثّل محيط الدائرة، ونحن نعلم أنّ محيط الدائرة يُحسب بالعلاقة التالية:

المحيط $= 2\pi r$، والذي يساوي طول المسار المحسوب. وهذا يؤكّد صحّة الإجابات.

3. السرعة في الحركة الدائرية
Speed in Rotational Motion

أيّهما يتحرّك أسرع في لعبة دوّارة الخيل الخشبية، الحصان القريب من الحاجز الخارجي أم القريب من الحاجز الداخلي؟ وأيّ جزء من المنضدة الدوّارة يتحرّك أسرع؟ وفي أسطوانة التسجيل، أيّ جزء من أجزائها يتحرّك أسرع تحت إبرة التسجيل، الفتحة الموجودة في الجزء الخارجي من الأسطوانة أم الفتحة التي تقع بالقرب من المركز؟ إذا طرحت مثل هذه الأسئلة على مجموعة من الأشخاص، قد تحصل على أكثر من إجابة. ذلك لأنّ بعض الناس سيفكّر في السرعة الخطّية في حين يفكّر آخرون في السرعة الدائرية.

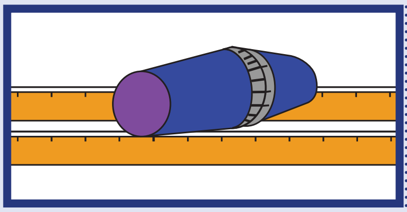
1.3 السرعة الخطّية (v) Linear Speed

تُسمّى أيضًا السرعة العددية ويُرمز إليها بالحرف v، وهي طول القوس المقطوع في وحدة الزمن. تتحرّك النقطة الموجودة على الحافّة الخارجية في لعبة دوارة الخيل الخشبية أو المنضدة الدوارة في دورة كاملة مسافة أكبر من النقطة القريبة من المركز. السرعة الخطّية Linear Speed لجسم يدور عند الحافّة الخارجية أكبر من السرعة الخطّية لجسم يدور بالقرب من المركز. ويمكن أن تُسمّى سرعة الجسم الذي يتحرّك على طول مسار دائري بالسرعة المماسية Tangential Speed، ذلك لأنّ اتّجاه الحركة يكون دائمًا مماسًّا للدائرة. ويمكن أن يُستخدم مصطلح السرعة الخطّية أو السرعة المماسية بالتبادل لوصف الحركة الدائرية.

فقرة إثرائية

الفيزياء في المختبر

تدحرج العجلات المدرجة



اَلصق كوبين من الورق أو الفوم مع بعضهما كما هو موضّح في الشكل. دحرج الكوبين مرّة على المنضدة ومرّة أخرى على قضيبين. ستجد أنّ الكوبين لن يتدحرجا بطريقة جيّدة على المنضدة، ولكنهما سيتحرّكان بطريقة جيّدة جدًّا على القضيبين. ضع مترين مدرّجين بحيث يكونان على شكل قضيبي سكّة الحديد، وضعهما متوازيين وعلى بعد مسافة طول كوب واحد بعضهما من بعض. دحرج الكوبين على القضيبين عندما يكون الكوبان متمركزين بحيث تلامس الفوّهتان المتماثلتان القضيبين. تنتج عن ذلك الحركة في خطّ مستقيم، ويكون جانبي الكوبين لهما السرعة الخطّية نفسها. دحرج الكوبين أبعد قليلًا عن المركز، ولاحظ كيفية التصحيح الذاتي لحركتهما. هل يمكنك أن ترى الجزء ذا الفوهة الواسعة من الكوب الواحد يتحرّك أسرع على القضيب من الجزء الضيّق الذي يتحرّك على القضيب المقابل؟ توجّه هذه الحركة الكوبين باتّجاه وسط القضيبين. إذا تجاوز الكوبان المتدحرجان الجزء الأوسط، هل يحدث الشيء نفسه على الجانب الآخر إذا قمت بتوجيه الكوبين للخلف باتّجاه الوسط؟ باعتقادك، هل عجلات عربات السكّك الحديدية التي تسير على القضبان أسطوانية أم مغزلية؟

2.3 السرعة الدائرية (الزاوية) (ω)

Rotational Angular Speed

تُسمّى **السرعة الدائرية Rotational Speed** أحيانًا السرعة الزاوية ويُرمز إليها بـω. وحدتها هي $\frac{rad}{s}$، وهي **عدد الدورات في وحدة الزمن**. كما نعرّف **السرعة الزاوية** بأنها **مقدار الزاوية بالراديان التي يمسحها نصف القطر في وحدة الزمن**. تدور كلّ الأجزاء الصلبة للعبة دوّارة الخيل الخشبية والمنضدة الدوّارة حول محورها في الفترة الزمنية نفسها. وعلى ذلك، فإن لكل الأجزاء معدّل الدوران نفسه، أو عدد الدورات نفسه في وحدة الزمن. ومن الشائع التعبير عن السرعة الدائرية بالدورة المدارية في الدقيقة Revolution Per Minute.

فعلى سبيل المثال، أسطوانة التسجيل الفونوغرافي التي كانت شائعة في الماضي، كانت تدور 33.33 دورة في الدقيقة. لذلك، تدور النقطة الحمراء، الموجودة في أيّ مكان على سطح أسطوانة التسجيل، حول المحور 33.33 دورة في الدقيقة (شكل 45).

ويمكن حساب السرعة الدائرية ω باستخدام المعادلة الرياضية:

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta}{t}}$$

باعتبار أنّ $\theta_0 = 0\ rad$ و $t_0 = 0\ s$

وهي تشبه معدّل السرعة $\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ في الحركة المستقيمة المنتظمة.

4. العلاقة بين السرعة المماسية والسرعة الدائرية

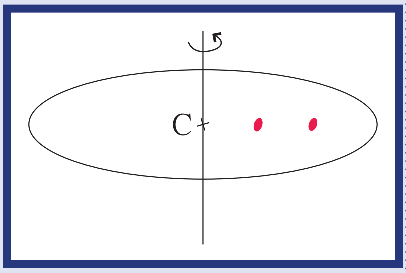
Relation Between Rotational and Tangential Speed

تتعلّق السرعة المماسية والسرعة الدائرية الواحدة بالأخرى. هل سبق أن ركبت المسطّح الدائري العملاق في لعبة الساقية الدوّارة في المدينة الترفيهية؟ كلّما زادت سرعة دورانها زادت سرعتك المماسية، فالسرعة المماسية تتناسب طرديًّا مع السرعة الدائرية والمسافة نصف القطرية من محور الدوران. وعلى ذلك فإنّ:

السرعة المماسية = المسافة نصف القطرية × السرعة الدائرية (الزاوية)

باستخدام الوحدات المناسبة لكلّ من السرعة المماسية v، السرعة الدائرية (الزاوية) ω والمسافة نصف القطرية r، فإنّ التناسب الطردي بين v وكلّ من r وω يصبح تمامًا كالمعادلة: $v = r\omega$.

تطبّق هذه العلاقة على النظام الدوّار فحسب، حيث إنّ أجزاء هذا النظام كلّها لها السرعة الدائرية (الزاوية) ω نفسها في الوقت نفسه وتُطبق على نظام الكواكب، فكلّ كوكب مثلًا له سرعة دائرية (الزاوية) ω مختلفة عن الكواكب الأخرى.



(شكل 45)
النقطة الحمراء الموجودة في أيّ مكان لها السرعة الدائرية نفسها.

فقرة إثرائية

الفيزياء في المختبر

مقارنة بين المتدحرجات

دحرج علبة أسطوانية على المنضدة (كما في الشكل أعلاه) ثمّ لاحظ أنّ مسافة التدحرج في كلّ دورة كاملة تساوي محيط العلبة. ولاحظ أيضًا أنّ التدحرج يتمّ في مسار مستقيم. بعدها، دحرج كوب شراب عاديًّا على المنضدة (كوب من الورق أو كوب من الفوم).

لاحظ أنّ الفتحة الواسعة للكوب لها نصف قطر أكبر من القاعدة الضيّقة. هل يتدحرج الكوب في مسار مستقيم أم في مسار منحنٍ؟ هل تقطع فوّهة الكوب الواسعة مسافة أكبر أثناء دورانها؟ هل السرعة الخطّية للفوّهة الواسعة أكبر؟ هل لاحظت أنّ السرعة الخطّية تعتمد على نصف القطر؟

لا توجد سرعة مماسية على الإطلاق عند مركز المسطّح الدائري والعمودي مع محوره، لكن توجد سرعة دورانية (زاوية). وكلمّا ابتعدت عن المركز، ازدادت سرعتك المماسية، في حين بقيت السرعة الدائرية (زاوية) كما هي. وإذا تحرّكت ضعف المسافة بعيدًا عن المركز، ستتضاعف السرعة المماسية (شكل 46). وإذا تحرّكت مسافة ثلاثة أضعاف، ستتضاعف السرعة المماسية ثلاث مرّات أيضًا. إذا رأيت يومًا صفًّا من المتزلجين متشابكين بأذرعهم ليعملوا دورة في حلبة التزلّج، فإنّ حركة الشخص عند طرف الصفّ هي دليل على ازدياد السرعة.

نلخص مما سبق بالتالي: في أيّ نظام جاسيء (صلب)، **تكون لجميع الأجزاء السرعة الدائرية نفسها على الرغم من أنّ السرعة الخطّية أو المماسية تتغيّر. السبب هو أنّ السرعة المماسية تعتمد على السرعة الدائرية (الزاوية) والمسافة من محور الدوران (نصف القطر).**

مثال (2)

في لعبة دوّارة الخيل التي تدور بسرعة دائرية منتظمة تساوي دورة واحدة كاملة كلّ 45 ثانية، يجلس ولدان على حصانين، الأوّل يبعد (2)m عن محور الدوران والثاني يبعد (4)m عن محور الدوران.

(أ) احسب السرعة الدائرية لكلّ ولد.

(ب) احسب السرعة الخطّية لكلّ ولد.

طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم.

المعلوم: $\theta = 2\pi$ $\quad t = (45)s$

$r_2 = (4)m$ $\quad r_1 = (2)m$

غير المعلوم:

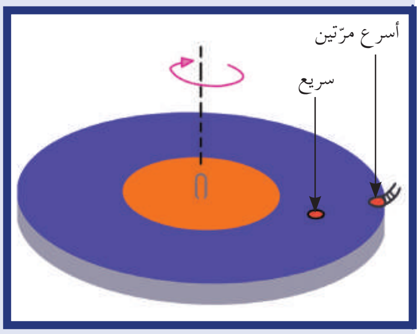
(أ) السرعة الدائرية (السرعة الزاوية) لكلّ ولد: $\omega_1 = ?$ و $\omega_2 = ?$

(ب) السرعة الخطّية لكلّ ولد: $v_1 = ?$ و $v_2 = ?$

2. احسب غير المعلوم

(أ) باستخدام العلاقة الرياضية $\omega = \frac{\theta}{t}$

$$\omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{45} = (0.14)rad/s$$



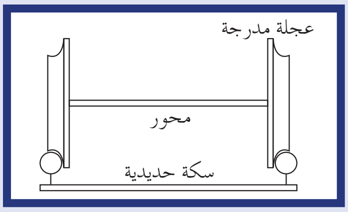
(شكل 46)

تدور أجزاء المنضدة الدوّارة كلّها بالسرعة الدائرية نفسها، لكنّ الحشرات الصغيرة الصغيرة الموجودة عند مسافات مختلفة من المركز لها سرعات خطّية مختلفة. فالحشرة التي تبعد مسافة الضعف عن المركز تتحرّك بضعف السرعة.

فقرة إثرائية

ارتباط الفيزياء بالتكنولوجيا

عجلات السكك الحديدية



لكي يتمكّن القطار من الالتفاف على مسار منحنٍ، يجب أن تسير عجلاته الخارجية الأبعد عن مركز المنحنى بسرعة أكبر من تلك الداخلية الأقرب إلى مركز المنحنى. إنّ عجلات القطار مدرّجة الشكل والشكل الدائري الخفيف لسكّة الحديد الذي يحملها يجعل جزءًا صغيرًا من العجلة يركب على المسار في أيّ وقت أثناء حركة القطار.

وعندما يلتفّ القطار إلى اليسار مثلًا، فإنّ قصوره الذاتي، وليبقيه على مساره المستقيم الذي كان عليه قبل الالتفاف، يجعل الجزء ذات القطر الأكبر من عجلة اليمين المدرّجة على قضيب اليمين للمسار، والجزء ذات القطر الأصغر من عجلة اليسار المدرّجة على قضيب اليسار للمسار. وبما أنّ العجلتين متّصلتين بالمحور نفسه ولهما السرعة نفسها، تكون لسرعة اليمين سرعة خطّية أكبر من عجلة اليسار والتي تمكّن القطار من الالتفاف نحو اليسار.

مثال (2) (تابع)

وبما أنّ الولدين يدوران حول محور الدوران نفسه، فإنّ السرعة الزاوية تساوي:

$$\omega_1 = \omega_2 = (0.14)\text{rad/s}$$

(ب) لإيجاد السرعة الخطّية لكلّ ولد، يمكننا استخدام المعادلة الرياضية التالية:

$$v = r\,\omega$$

وبالتعويض عن المقادير المعلومة نحصل على:

السرعة الخطّية للولد الأوّل:

$$v_1 = r_1\omega_1 = 2 \times 0.14 = (0.28)\text{m/s}$$

والسرعة الخطّية للولد الثاني:

$$v_2 = r_2\omega_2 = 4 \times 0.14 = (0.56)\text{m/s}$$

3. قيّم: هل النتيجة مقبولة؟

إنّ الولد الجالس على الحصان الأبعد عن محور الدوران حيث $r_2 = 2r_1$ لديه سرعة خطّية تساوي ضعف سرعة الولد الجالس على الحصان الأقرب، والذي يبعد r_1 عن محور الدوران. وهذا يؤكّد التناسب الطردي بين المسافة والسرعة الخطّية عندما تكون السرعة الزاوية ثابتة المقدار. فكلّما كان الجسم أبعد عن محور الدوران، كانت سرعته الخطّية أكبر.

5. العجلة الخطّية والعجلة الزاوية

Linear and Rotational Acceleration

نحن نعلم أنّ العجلة هي تغيّر السرعة خلال الزمن. وبما أنّ السرعة هي كمّية متّجهة، فإنّ العجلة هي أيضًا كمّية متّجهة. ونعلم أيضًا أنّه للتعبير عن سرعة الجسم على المسار الدائري يمكننا أن نستخدم السرعة الخطّية أو السرعة الزاوية. ويمكننا التعبير عن العجلة لجسم على المسار الدائري باستخدام العجلة الخطّية أو العجلة الزاوية.

1.5 العجلة الخطّية Linear Acceleration

سبق أن ذكرنا أنّ العجلة الخطّية هي كمّية متّجهة، وتساوي تغيّر السرعة المتّجهة بالنسبة إلى الزمن $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.

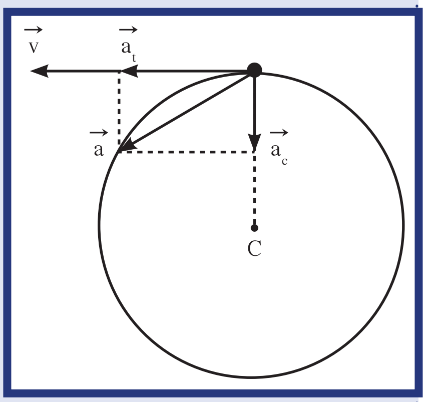
يمكن تحليل العجلة الخطّية كأيّ متّجه إلى مركبتين متعامدتين (شكل 47):

1. مركبة مماسية تُسمّى العجلة المماسية $\vec{a}_t$ لها اتّجاه السرعة نفسها والتي تكون دائمًا مماسّة للمسار وتتغيّر قيمتها بتغيّر السرعة المماسية.
2. مركبة عمودية على المركبة المماسية تُسمّى العجلة المركزية $\vec{a}_c$.

مسألتان مع إجابات

1. يدور قرص مدمج في جهاز الأستريو بسرعة دورانية ثابتة تساوي 200 دورة في الدقيقة.
(أ) احسب الزمن الذي يحتاجه ليقوم بدورة واحدة.
(ب) احسب السرعة الخطّية لنقطة موجودة على القرص تبعد (5)cm عن مركز الدوران.
الإجابات: **(أ)** $T = (0.3)\text{s}$
(ب) $v = (1.047)\text{m/s}$

2. إطار درّاجة نصف قطره (50)cm يدور بسرعة 300 دورة في الدقيقة.
(أ) احسب مقدار السرعة الزاوية لأيّ نقطة موجودة على حافّة الإطار.
(ب) احسب السرعة الزاوية لنقطة M موجودة على بعد (10)cm من محور الدوران.
(ج) احسب السرعة الخطّية للنقطة M.
الإجابات: **(أ)** $(10\pi)\text{rad/s}$
(ب) $(10\pi)\text{rad/s}$
(ج) $(3.14)\text{m/s}$



(شكل 47)
للعجلة مركبتين خطّية مماسية باتّجاه السرعة وعمودية على المركبة المماسية باتّجاه مركز الدائرة.

2.5 العجلة الزاوية Rotational Acceleration

أمّا العجلة الزاوية فهي تغيّر السرعة الزاوية ω خلال الزمن وتُمثّل بالعلاقة:

$$\boxed{\theta'' = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

وتُقاس بحسب النظام الدولي للوحدات بوحدة rad/s^2 .

6. العجلة والحركة الدائرية المنتظمة

Acceleration and Uniform Circular Motion

عندما يتحرّك جسم على مسار دائري بسرعة ثابتة المقدار ، نَصف حركته بالحركة الدائرية المنتظمة .

عندما نصف حركة جسم ما بالحركة الدائرية المنتظمة هذا لا يعني إطلاقًا أنّ عجلته تساوي صفرًا . ففي الحركة الدائرية المنتظمة تكون السرعة الخطّية ثابتة المقدار ، أمّا اتّجاهها فيتغيّر . وهذا يعني أنّ العجلة المماسية هي التي تساوي صفرًا، بينما العجلة المركزية التي تكون دائمًا باتّجاه مركز المسار الدائري يكون لها مقدار ثابت يُحسب من العلاقة $a_c = \frac{v^2}{r}$.

v يساوي مقدار السرعة الخطّية وr هي نصف قطر المسار .

أمّا بالنسبة إلى العجلة الزاوية فتساوي صفرًا لأنّ السرعة الزاوية ω في الحركة الدائرية المنتظمة ثابتة المقدار ، لا تتغيّر بالنسبة إلى الزمن .

7. التردّد والزمن الدوري في الحركة الدائرية المنتظمة

Frequency and Period in Uniform Circular Motion

إنّ تردّد الجسم الذي يدور بحركة دائرية منتظمة يساوي عدد الدورات الكاملة التي يدورها في الثانية الواحدة ويُرمز إليه بالحرف f. أمّا الزمن الدوري فهو الزمن الذي يستغرقه الجسم ليدور دورة كاملة على محيط دائرة الحركة . والعلاقة بين الزمن الدوري والتردّد هي: $f = \frac{1}{T}$.

يمكننا كتابة الزمن الدوري بالنسبة إلى السرعة الخطّية كما يلي:

في الحركة الدائرية المنتظمة $v = \frac{\widehat{s}}{t}$، وبما أنّه خلال زمن يساوي الزمن الدوري T ، فإنّ المسافة $s = 2\pi r$، وبهذا تكون $T = \frac{2\pi r}{v}$.

كذلك يمكننا أن نكتب T بالنسبة إلى السرعة الزاوية ω كما يلي:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

مثال (3)

كرة كتلتها $(150)g$ مربوطة بطرف خيط تدور بحركة دائرية منتظمة على مسار دائري نصف قطره يساوي $(60)cm$. تصنع الكرة دورتين كاملتين في الثانية الواحدة .

(أ) احسب مقدار السرعة الخطّية للكرة .

(ب) احسب العجلة المركزية .

طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم .

المعلوم: $m = (150)g$

$r = (0.6)m$

غير المعلوم:

(أ) السرعة الخطّية: $v = ?$

(ب) العجلة المركزية: $a_c = ?$

2. احسب غير المعلوم

(أ) باستخدام العلاقة الرياضية $\omega = \frac{\theta}{t}$:

$$\omega = \frac{2 \times 2\pi}{t} = \frac{2 \times 2\pi}{1} = (12.56)rad/s$$

لإيجاد السرعة الخطّية يمكننا استخدام المعادلة الرياضية التالية:

$$v = r\,\omega$$

وبالتعويض عن المقادير المعلومة نحصل على:

$$v_1 = r\,\omega = 0.6 \times 12.56 = (7.54)m/s$$

(ب) لإيجاد العجلة المركزية ، نعوّض المقادير المعلومة في العلاقة:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{7.54^2}{0.6} = (94.7)m/s^2$$

3. قيّم: هل النتيجة مقبولة؟

إنّ مقدار العجلة المركزية كبير بالمقارنة مع مقدار العجلة الخطّية في الحركة الخطّية .

مراجعة الدرس 2-1

أوّلًا – عرّف الإزاحة الزاوية.

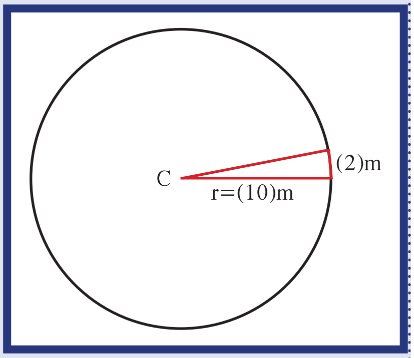
ثانيًا – ما الفرق بين السرعة الخطّية والسرعة الزاوية؟

ثالثًا – عند مسافة معيّنة من محور الدوران، كيف تتغيّر السرعة الخطّية (أو المماسية) بتغيّر السرعة الزاوية؟

رابعًا – جسم يتحرّك بسرعة منتظمة على مسار دائري نصف قطره (10)m. إذا رَسم قوسًا كما في الشكل (49)، أُحسب:

(أ) الإزاحة الزاوية للجسم.

(ب) السرعة الزاوية لحركة الجسم إذا استغرقت الإزاحة ثانيتين.



(شكل 49)

خامسًا – قرص يدور حول مركزه بسرعة(600) دورة في الدقيقة.

(أ) أُحسب السرعة الزاوية لأيّ نقطة على حافّة القرص.

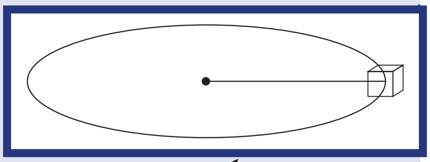
(ب) أُحسب السرعة الخطّية v لهذه النقطة إذا كان نصف قطر القرص (40)cm.

سادسًا – كتلة مقدارها (2)kg تدور بسرعة دائرية (زاوية) قدرها (5)rad/s على مسار دائري نصف قطره (1)m.

(أ) أُحسب سرعتها الخطّية.

(ب) أُحسب العجلة المركزية.

سابعًا – يدور جسم مربوط بخيط في دائرة قطرها (240)cm بسرعة زاوية بحيث تعمل 30 دورة في الدقيقة (شكل 50).



(شكل 50)

(أ) أُحسب سرعته الخطّية.

(ب) أُحسب عدد الدورات التي يصنعها الجسم خلال دقيقتين.

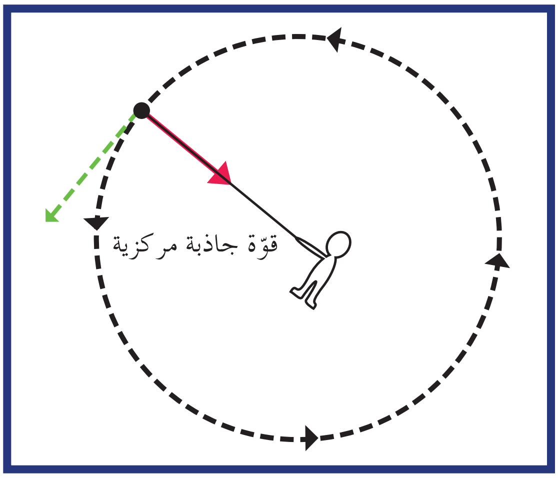
(جـ) احسب مقدار العجلة المماسية والعجلة الزاوية والعجلة المركزية.

الدرس 2-2

القوّة الجاذبة المركزية
Centripetal Force

الأهداف العامة

- يعرّف القوّة الجاذبة المركزية.
- يعدّد تطبيقات القوّة الجاذبة المركزية في الحياة العملية.



(شكل 51)
إذا أفلتّ الخيط، ستخرج الكتلة عن المسار الدائري.

تعلّمنا في الدرس السابق عن الحركة الدائرية المنتظمة واستنتجنا أنّها لا تعني إطلاقًا أنّ العجلة تساوي صفرًا، لأنّ مقدار السرعة الخطّية للجسم يكون ثابتًا، أمّا اتّجاه السرعة فيتغيّر على المسار الدائري، ما يكسب الجسم عجلة مركزية لها اتّجاه نحو مركز الدائرة.
لكن وفقًا القانون الثاني لنيوتن، يجب أن يكون هناك قوّة تؤثّر على الجسم لكي يتحرّك بعجلة. فما هي القوّة المسبّبة للعجلة المركزية؟ وما أنواعها؟ هذا ما سنستقصي عنه في سياق الدرس.

1. القوّة الجاذبة المركزية

Definition of the Centripetal Force

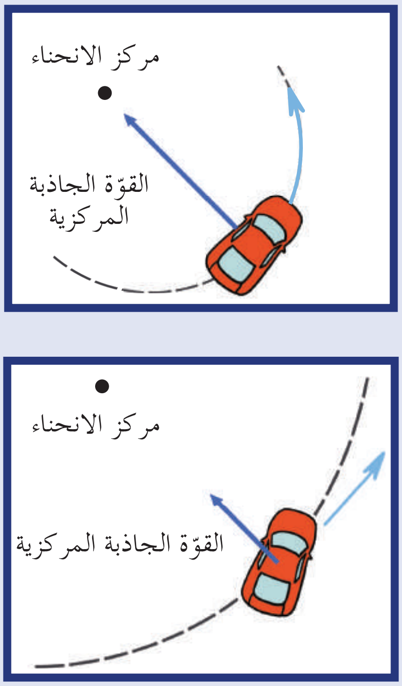
عندما تجعل كتلة مثبّتة في نهاية خيط تدور فوق رأسك (شكل 51)، تلاحظ أنّك يجب أن تسحب الخيط باستمرار إلى الداخل لتحافظ على دوران الكتلة فوق رأسك في مسار دائري، لأنّك إذا أفلتّ الخيط ستلاحظ خروجه عن المسار الدائري.

فالقوّة التي تسبّب الحركة الدائرية للكتلة ويكون اتّجاهها دائمًا نحو مركز الدائرة تُسمّى القوّة الجاذبة المركزية.

2. أنواع القوّة الجاذبة المركزية

Types of Centripetal Force

القوّة الجاذبة المركزية ليست نوعًا جديدًا من القوى، وهي الاسم المُعطى لأيّ قوّة عمودية على المسار الدائري للجسم المتحرّك. فقوّة الجاذبية الأرضية التي تعمل على جذب القمر وتجعله يدور حولها بحركة شبه دائرية هي قوّة جاذبة مركزية. وقوّة الجذب الكهربائية بين النواة والإلكترونات التي تسبّب دوران الإلكترونات حول نواة الذرّة هي قوّة جاذبة مركزية. وقوّة الاحتكاك بين إطارات السيّارة والمسار الدائري هي أيضًا قوّة جاذبة مركزية تمنع السيّارة من الانزلاق على المسار الدائري (شكل 52).



(شكل 52)
(الصورة إلى أعلى) من أجل أن تدور السيّارة في منحنًى، يجب أن يكون هناك احتكاك كافٍ لكي تنشأ القوّة الجاذبة المركزية المطلوبة.
(الصورة إلى أسفل) إذا كانت قوّة الاحتكاك غير كافية، سوف يحدث انزلاق جانبي بعيدًا جدًّا عن مركز الانحناء.

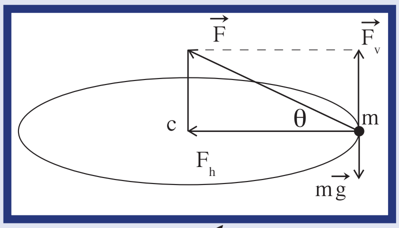
3. مقدار القوّة الجاذبة المركزية

Magnitude of the Centripetal Force

تعلّمنا في الصف العاشر، ووفقًا للقانون الأوّل لنيوتن، أنّ الجسم الذي يسير بسرعة منتظمة في خطّ مستقيم لا يحتاج إلى أيّ قوى ليحافظ على حركته الخطّية المنتظمة. أمّا لتغيير اتّجاه الحركة، فلا بدّ من وجود قوّة خارجية تعمل على ذلك. وهذا ما يحدث خلال الحركة الدائرية المنتظمة.
القوّة الجاذبة المركزية تؤثّر على حركة الجسم في كلّ نقطة على مساره الدائري، وتجعله يغيّر مساره باستمرار ويكتسب عجلة مركزية.
لنأخذ الكتلة المثبّتة بطرف الخيط والتي تتحرك حركة دائرية منتظمة.
القوى المؤثّرة على الكتلة هي ثقل الكتلة والقوّة $\vec{F}$ المبذولة على الخيط (شكل 53)، لكن للقوّة $\vec{F}$ مركبتان أفقية ورأسية.

$$\vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_h$$

تتساوى المركبة الرأسية $\vec{F}_v$ في المقدار وتتعاكس في الاتّجاه مع ثقل الجسم. هذا يعني أنّ محصّلة القوى التي تؤثّر على الكتلة هي المركبة الأفقية $\vec{F}_h$ واتّجاهها نحو مركز الدائرة، أي أنّها القوّة الجاذبة المركزية $\vec{F}_c$.



(شكل 53)
محصّلة القوى على الخيط هي القوّة الجاذبة المركزية نحو مركز الدائرة.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum\vec{F} = m\vec{a}$$

$$F_c = ma_c$$

وبما أنّ العجلة a هي عجلة مركزية مقدارها $a_c = \frac{v^2}{r}$

فإنّ مقدار القوّة الجاذبة المركزية هو:

$F_c = \frac{mv^2}{r}$، واتّجاهها نحو مركز الدائرة.

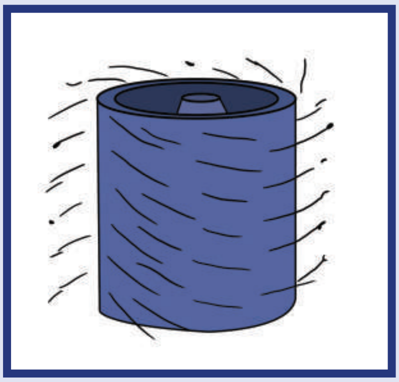
ولتلخيص ما سبق نقول:

إنّ القوّة الجاذبة المركزية هي ببساطة تسمية تُطلق على قوّة أو محصّلة لعدّة قوى مؤثّرة على جسم يتحرّك حركة دائرية منتظمة تكسبه تسارعًا مركزيًا يتناسب مقداره طرديًا مع مربّع السرعة الخطّية، ويتناسب عكسيًّا مع نصف قطر المسار.

وتؤدّي القوّة الجاذبة المركزية الدور الأساسي في عمليات الطرد المركزي. وهناك مثال مألوف لنا وهو الحوض المغزلي في الغسّالة الأوتوماتيكية (شكل 54)، حيث نجد أنّ الحوض يدور بسرعة كبيرة أثناء دورته المغزلية، ويبذل الجدار الداخلي للحوض قوّة جاذبة مركزية على الملابس المبلّلة التي تُجبر على التحرّك في مسار دائري.

يبذل الحوض قوّة كبيرة على الملابس، لكنّ الفتحات الموجودة في الحوض تمنعه من بذل القوّة نفسها على الماء الموجود في الملابس، فيخرج الماء من خلال فتحات الحوض.

ومن المهمّ ملاحظة أنّ القوّة تؤثّر على الملابس لا على الماء. وليست القوّة هي التي تجعل الماء يخرج، بل إنّه يخرج لأنّه يميل إلى التحرّك بالقصور الذاتي في مسار خطّ مستقيم (القانون الأوّل لنيوتن) ما لم تؤثّر عليه قوّة جذب مركزية أو أيّ قوّة أخرى.

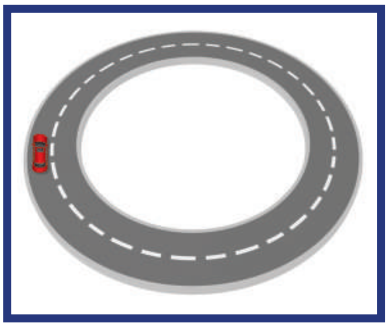


(شكل 54)
تتحرّك الملابس في مسار دائري ولا يحدث ذلك للماء.

مثال (1)

سيّارة كتلتها (1.5)tons تتحرّك بسرعة منتظمة على طريق دائرية نصف قطرها (50)m.
أُحسب القوّة المركزية المؤثّرة على السيّارة إذا أكملت خمس دورات في (314)s.
علمًا بأنّ (1)ton = (1000)kg

طريقة التفكير في الحلّ



1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم.

المعلوم: كتلة السيّارة: $m = (1.5)\text{tons} = (1500)\text{kg}$

نصف قطر المسار: $r = (50)\text{m}$

عدد الدورات $N = 5$

المدّة الزمنية لإتمام الدورات الخمس: $\Delta t = t = (314)\text{s}$

غير المعلوم:

القوّة المركزية: $F_c = ؟$

2. احسب غير المعلوم

بما أنّ الحركة الدائرية هي حركة منتظمة، فيمكن حساب السرعة الزاوية ω باستخدام العلاقة الرياضية التالية:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi N}{t}$$

$$\omega = \frac{2 \times 3.14 \times 5}{314} = (0.1)\text{rad/s}$$

وباستخدام العلاقة الرياضية بين السرعة الخطّية والسرعة الزاوية: $v = r\,\omega$

وبالتعويض عن المقادير المعلومة نحصل على: $v = 50 \times 0.1 = (5)\text{m/s}$

بالتعويض عن المقادير المعلومة في المعادلة $F_c = \frac{mv^2}{r}$

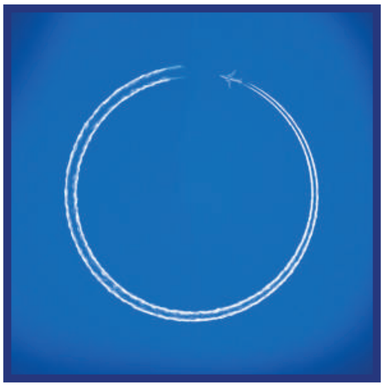
نحصل على: $F_c = \frac{1500 \times 25}{50} = (750)\text{N}$

3. قيّم: هل النتيجة مقبولة؟

يُعتبر مقدار القوّة المركزية مقبولًا لتحفظ سيّارة كتلتها (1500)kg على مسارها الدائري.

مثال (2)

يطير الطيّار بطائرته الصغيرة بسرعة $(56.6)m/s$ في مسار دائري نصف قطره يساوي $(188.5)m$.
احسب كتلة الطائرة إذا علمت أنّ القوّة الجاذبة المركزية اللازمة لإبقائها على مسارها الدائري تساوي $(1.89 \times 10^4)N$.



طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم.

المعلوم: نصف قطر المسار: $r = (188.5)m$

السرعة المماسية: $v = (56.6)m/s$

القوّة المركزية: $F_c = (1.89 \times 10^4)N$

غير المعلوم:

كتلة الطائرة: $m = ؟$

2. احسب غير المعلوم

بالتعويض عن المقادير المعلومة في المعادلة: $F_c = \frac{mv^2}{r}$

نحصل على: $m = \frac{F_c r}{v^2} = \frac{1.89 \times 10^4 \times 188.5}{(56.6)^2} = (1112.09)kg$

3. قيّم: هل النتيجة مقبولة؟

يُعتبر مقدار الكتلة منطقيًّا لطائرة صغيرة وهذا يشير إلى صحّة النتيجة.

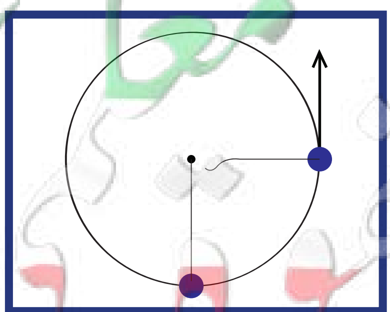
4. زوال القوّة الجاذبة المركزية

Omission of the Centripetal Force

خذ جسمًا واربطه بخيط واجعله يدور فوق رأسك بسرعة ثابتة. في لحظة معيّنة، اِقطع الخيط أو افلته. ماذا تلاحظ؟

لا شكّ أنّك لاحظت، لحظة أفلتّ الخيط، أنّ الجسم انطلق بخطّ مستقيم وباتّجاه المماسّ عند موقعه لحظة افلات الخيط.

لتفسير ذلك، نعتمد على القانون الأوّل لنيوتن. فعند إزالة القوّة الجاذبة المركزية، يصبح مقدار محصّلة القوى المؤثّرة على الجسم صفرًا في غياب الاحتكاك، أي أنّه لا توجد أيّ قوّة تغيّر اتّجاه سرعته وتبقيه على المسار الدائري، وبالتالي يتابع الجسم حركته بحركة خطّية منتظمة (شكل 55).



(شكل 55)

عندما ينقطع الخيط تكمل الكرة بخطّ مستقيم.

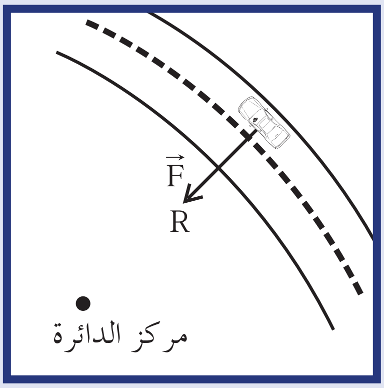
مسألتان مع إجابات

1. عندما تستدير الطائرة أثناء تحليقها بسرعة $(50)m/s$ على مسار دائري قطره $(360)m$، تحتاج لكي تحافظ على حركتها الدائرية، إلى قوّة جاذبة مركزية مقدارها $(20000)N$.
احسب مقدار كتلة الطائرة.
الإجابة: $(1440)kg$

2. يتحرّك ولد على درّاجته بسرعة خطّية $v = (10)m/s$ على مسار دائري. علمًا أنّ كتلة الدرّاجة والولد تساوي $(80)kg$ والقوّة الجاذبة المركزية المسبّبة للدوران تساوي $(350)N$، أُحسب نصف قطر المسار.
الإجابة: $r = (22.85)m$

5. تطبيقات حول القوّة الجاذبة المركزية في الحياة العملية
Applications of Centripetal Force in Practical Life

1.5 الانزلاق على المنعطفات الأفقية



(شكل 56)

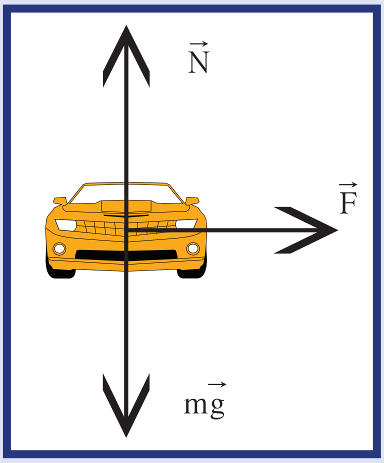
سبق أن وضّحنا أنّ انعطاف السيّارة على طريق أفقية يحتاج إلى قوّة مركزية كافية لإبقاء السيّارة على مسارها الدائري، وهذا ما يجب أن توفره قوّة الاحتكاك بين عجلات السيّارة والطريق. فعندما لا تكون هذه القوّة كافية، كما يحدث في الأيّام الممطرة أو الجليد، أو إذا كانت العجلات بحالة سيئة، ستنزلق السيّارة عن مسارها بسبب استمرارية الحركة باتّجاه المماسّ.

ولفهم تأثير مقدار قوّة الاحتكاك على التفاف السيّارة، سنناقش المسألة التالية:
سيّارة كتلتها (1000)kg تنعطف على مسار دائري قطره (100)m على طريق أفقية بسرعة (14)m/s. هل تستطيع السيّارة الالتفاف أم أنّها ستنزلق في الحالتين التاليتين؟

الحالة الأولى: معامل الاحتكاك بين العجلات والطريق يساوي $\mu = 0.66$ عندما تكون الطريق جافّة.

الحالة الثانية: معامل الاحتكاك بين العجلات والطريق يساوي $\mu = 0.25$ عندما تكون الطريق مبلّلة.

علمًا أنّ معامل الاحتكاك μ يساوي نسبة قوّة الاحتكاك $\vec{f}$ على قوّة ردّ الفعل $\vec{N}$، أيّ أنّ $\mu = \frac{f}{N}$.



(شكل 57)
القوى المؤثّرة على سيّارة تنعطف على طريق أفقية

إنّ مجموع القوى المؤثّرة على السيّارة هي وزن السيّارة إلى أسفل، ردّ الفعل من الطريق على السيارة رأسيًا لأعلى ويساوي في المقدار وزن السيّارة، وقوّة الاحتكاك بين العجلات والطريق الأفقية f (شكلا 57 و 58).

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن لحساب مقدار القوّة الجاذبة المركزية:

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

نجد أنّ القوّة الأفقية اللازمة لإبقاء السيّارة على مسارها تساوي:

$$F = \frac{1000 \times 14^2}{50} = (3920)N$$

ولو قارنّا مقدار هذه القوّة بمقدار قوّة الاحتكاك الذي يمثّل القوّة الجاذبة المركزية لوجدنا ما يلي:

في الحالة الأولى، مقدار قوّة الاحتكاك $\vec{f_1}$ تساوي:

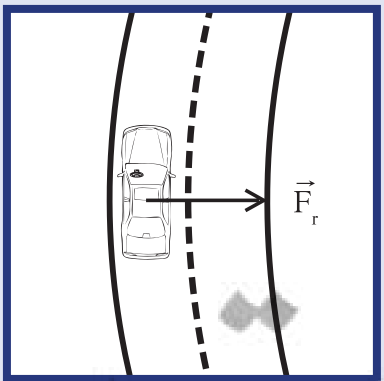
$$f_1 = \mu_1 \times mg = 0.6 \times 1000 \times 10 = (6000)N$$

وهي أكبر من القوّة اللازمة، وهذا يعني أنّ السيّارة لن تنزلق أثناء الالتفاف.

أمّا في الحالة الثانية عندما تكون الطريق مبلّلة، فمقدار قوّة الاحتكاك $\vec{f_2}$ يساوي:

$$f_2 = \mu_2 \times mg = 0.25 \times 1000 \times 10 = (2500)N$$

وهو أقلّ من القوّة اللازمة للالتفاف، وهذا يعني بالتأكيد انزلاق السيّارة عن مسارها.

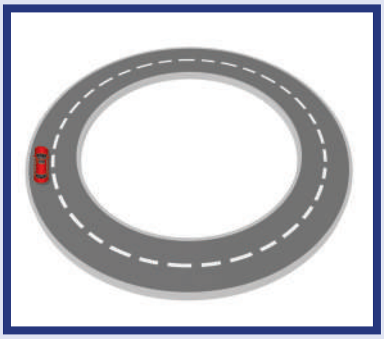


(شكل 58)
السيّارة تبدو من أعلى

مراجعة الدرس 2-2

أوّلًا – عند جعل كتلة مثبّتة في نهاية خيط تدور في مسار دائري، ما اتّجاه القوّة المؤثّرة على الكتلة؟

ثانيًا – سيّارة كتلتها 1000)kg) تتحرّك على مسار دائري نصف قطره يساوي 32.5)m) (شكل 60). إذا كان مقدار القوّة الجاذبة المركزية على السيّارة 2500)N)، أحسب السرعة المماسية للسيّارة.



(شكل 60)

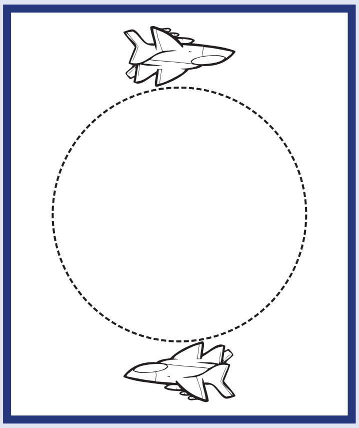
ثالثًا – يجلس ولد كتلته 25)kg) على بعد 1.1)m) من محور دوران الأرجوحة الدوّارة التي تتحرّك بسرعة 1.25)m/s).

(أ) أحسب العجلة المركزية للولد.

(ب) أحسب محصّلة القوى الأفقية التي تؤثّر على الولد.

رابعًا – ما هي السرعة القصوى التي يمكن أن يقود بها السائق سيّارته التي كتلتها 1500)kg) بحيث يستطيع أن ينعطف على مسار دائري نصف قطره 70)m) على طريق أفقية، علمًا أنّ معامل الاحتكاك السكوني بين العجلات والطريق يساوي 0.8؟

خامسًا – أحسب مقدار القوّة الجاذبة المركزية التي تحتاجها طائرة كتلتها 4000)kg) أثناء تحليقها بسرعة 50)m/s) على مسار دائري قطره 360)m) لتحافظ على حركتها الدائرية على هذا المسار (شكل 61).



(شكل 61)

سابعًا – سيّارة كتلتها 1350)kg) تنعطف بسرعة 50)km/h) على مسار دائري أفقي قطره 400)m).

(أ) أحسب العجلة المركزية للسيّارة.

(ب) أحسب مقدار القوّة الجاذبة المركزية.

(ج) ما هو مقدار أصغر معامل الاحتكاك بين العجلات والطريق، والذي يسمح للسيّارة بالالتفاف بدون انزلاق؟

مراجعة الفصل الثاني

المفاهيم

الدوران المحوري	Rotation	السرعة المماسية	Tangential Speed
الدوران المداري	Revolution	قوّة جاذبة مركزية	Centripetal Force
السرعة الدائرية (الزاوية)	Rotational Speed		
السرعة الخطّية	Linear Speed	محور	Axis

الأفكار الرئيسة في الفصل

- الحركة الدائرية هي حركة الجسم على مسار دائري حول مركز دوران، مع المحافظة على مسافة ثابتة منه.
- الإزاحة الزاوية تصف الحركة الدائرية لنقطة خلال فترة زمنية على مسار دائري.
- السرعة الدائرية، وتُسمّى أيضًا السرعة الزاوية، هي عدد الدورات في وحدة الزمن وتعرّف أيضًا بمقدار الزاوية بالراديان التي يمسحها نصف القطر خلال وحدة الزمن.
- تتناسب السرعة المماسية طرديًّا مع السرعة الزاوية ومع المسافة نصف القطرية من محور الدوران.
- السرعة المماسية تساوي حاصل ضرب كلّ من السرعة الزاوية والمسافة نصف القطرية من محور الدوران.
- العجلة الزاوية هي معدّل تغيير السرعة الزاوية.
- عندما تكون العجلة الزاوية ثابتة المقدار لجسم يتحرّك على مسار دائري، نَصف حركته بالحركة الدائرية منتظمة العجلة.
- القوّة الجاذبة المركزية هي القوّة التي تسبّب الحركة الدائرية للكتلة ويكون اتّجاهها دائمًا نحو مركز الدائرة.
- القوّة الطاردة المركزية هي قوّة وهمية غير موجودة إلّا داخل الأنظمة الدوّارة، أي بالنسبة إلى إطار مرجعي داخل النظام الذي يدور.

خريطة مفاهيم الفصل

استخدم المصطلحات الموضّحة في الشكل التالي لرسم خريطة مفاهيم تُنظّم معظم الأفكار التي احتواها الفصل.

عجلة منتظمة	الحركة الدائرية	سرعة منتظمة	تساوي صفرًا
العجلة الزاوية	العجلة المركزية	العجلة المماسية	تساوي مقدار ثابت

تحقق من فهمك

ضع علامة (✓) في المربّع الواقع أمام العبارة الصحيحة في كلّ ممّا يلي:

1. تتحرّك كتلة نقطية على مسار دائري نصف قطره يساوي $(25)m$ بزاوية $30°$، فإنّ المسافة التي تقطعها الكتلة على المسار بوحدة (m) تساوي:

☐ (7.5) ☐ (13)
☐ (750) ☐ (1.2)

2. الإزاحة الزاوية التي تقطعها كتلة نقطية عندما تتحرّك على مسار دائري نصف قطره $(100)m$ مسافة $(157)m$ تساوي:

☐ $60°$ ☐ $1.57°$
☐ $30°$ ☐ $90°$

3. تسير سيّارة كتلتها $(1000)kg$ على مسار دائري قطره $(300)m$ بسرعة خطّية ثابتة المقدار تساوي $(25)m/s$، فانّ الزمن الذي تحتاجه السيّارة لتكمل دورة كاملة بوحدة (s) يساوي:

☐ (37.68) ☐ (1.04)
☐ (18.84) ☐ (25.12)

4. القوّة الجاذبة المركزية التي تحفظ السيّارة على مسارها الدائري في السؤال السابق بوحدة (N) تساوي:

☐ (830) ☐ (83.3)
☐ (4166.6) ☐ (3802)

تحقق من معلوماتك

أجب عن الأسئلة التالية:

1. هل دوران الطفل الجالس على الخيل في لعبة دوّارة الخيل هو دوران محوري أم دوران مداري؟ علّل إجابتك.
2. يتحرّك قطار على قضيبين. أيّ قضيب يكون أكبر عند مسار منحنٍ، القضيب الداخلي أم الخارجي؟ اِشرح.

تحقق من مهاراتك

حلّ المسائل التالية:

1. كتلة صغيرة موجودة عند منتصف المسافة بين محور قرص مدمج وحافّته. ماذا سيحدث لسرعة النقطة الخطّية:
(أ) إذا تضاعفت السرعة الزاوية؟
(ب) إذا وجدت النقطة عند حافّة القرص المدمج؟
(جـ) إذا تضاعفت السرعة الزاوية ووجدت النقطة عند حافّة القرص المدمج؟

2. تدور كرة حديدية كتلتها (1)kg مربوطة بحبل طوله (2)m في دائرة أفقية بسرعة تساوي (2)m/s. أُحسب:
(أ) قوّة الشدّ التي تحدثها الكرة على الحبل.
(ب) إذا علمت أنّ الحبل قد ينقطع إذا كانت قوّة الشدّ عليه تساوي (1.8)N. كم يساوي طول الحبل الأقصر الذي يمكن استخدامه؟

3. قطار سريع كتلته (200)tons يدور على منحنى نصف قطره (2)m بسرعة (90)km/h. أُحسب مقدار القوّة الأفقية لقضبان السكّة الحديدية على عجلة القطار.

4. أُحسب عدد دورات عجلة درّاجة قطرها (70)cm عندما تقطع الدراجة مسافة (22)m.

مشاريع الفصل

التواصل

أُكتب مقالًا لا يزيد عن عشرة أسطر تبيّن فيه تأثير استبدال عجلات السيّارة بعجلات أصغر قياسًا على صدق قراءة عدّاد السرعة بالنسبة إلى السرعة الحقيقية التي تتحرّك بها السيّارة، علمًا أنّ عدّاد السرعة في السيّارة يعمل بواسطة كابل متّصل بعمود إدارة العجلات. ضمّن مقالك أفكارًا علمية تدعم ما كتبته.

نشاط بحثي

إنّ انزلاق السيّارات عند انعطافها على طريق أفقية على المسارات الدائرية هو أحد أكثر أسباب الحوادث شيوعًا وأخطرها على حياة الأشخاص في السيّارات وعلى جانب الطريق.

اِجرِ بحثًا تستخدم فيه أدوات البحث المناسبة لتوضّح سبب هذه المشكلة متبّعًا الخطوات التالية:

- حدّد القوّة أو القوى المؤثّرة في السيّارة والتي تحفظها في مسارها الدائري عندما تكون منطلقة بسرعة.
- حدّد كيفية تأثير عوامل الطقس كالأمطار والجليد على قدرة السيّارة على الالتفاف على المسار الدائري.
- ضمّن بحثك كيف أنّ إمالة المنعطفات الدائرية باتّجاه مركز الدائرة بدلًا من إبقاء الطريق أفقية والتي يقوم بها مهندسو الطرقات، يساعد على تخطّي مشكلة الانزلاقات.
- دعّم بحثك بالصور والمعادلات المناسبة التي تثبت ما توصّلت إليه.
- صغ استنتاجًا تظهر فيه أهمّية شكل الطريق في ثبات السيّارة على مسارها الدائري.

مركز الثقل
Center of Gravity

ما سبب ثبات هذه الصخور واتّزانها؟

لماذا لا تسقط الصخور مختلفة الأشكال الموضّحة في الشكل أعلاه؟
هل ستسقط إذا أزحنا أيًّا منها يمينًا أو يسارًا، أو إذا بدّلنا مواقعها؟
لماذا لا يسقط برج بيزا المائل؟ وما أقصى درجة ميل يمكن أن يبلغها قبل أن يسقط؟ لماذا يستحيل عليك أن تقف ملصقًا تمامًا إلى الحائط وأن تحاول لمس أصابع قدميك دون أن تقع؟
الإجابة على هذه الأسئلة وغيرها من التساؤلات التي تتمحور حول أسباب اتّزان الأجسام وثباتها يتطلّب منّا التعرّف على مفهوم مركز الثقل، وكيفية تطبيقه على التوازن والاتّزان.
في هذا الفصل، سنتعرّف مفهوم مركز الثقل، وسنستقصي أهمّيته في ثبات الأجسام. وسنحدّد عمليًّا موضع مركز الثقل أو مركز الكتلة لأجسام منتظمة الشكل وأخرى غير منتظمة الشكل. سنتعرّف أيضًا مفهوم مركز الكتلة، ونميّز بين مركز الثقل ومركز الكتلة. كما سنحدّد موقع مركز الثقل لأجسام مختلفة باستخدام المعادلات الرياضية.

دروس الفصل

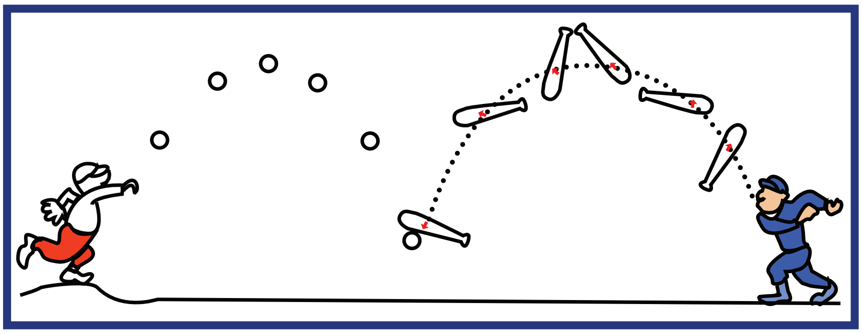
مركز الثقل
Center of Gravity

الأهداف العامة

- يعرّف مركز الثقل .
- يستنتج أنّ حركة الجسم تتمثّل بحركة مركز ثقله .

عند قذف كرة القاعدة (Baseball) في الهواء، نجد إنّها تتبع مسارًا منتظمًا على شكل قطع مكافئ قبل أن تصل إلى الأرض . أمّا عند إلقاء مضرب كرة القاعدة، فإنّه لا يتبع المسار المنتظم نفسه، إنّما يدور أثناء حركته في الهواء . والملاحظ أنّه يدور حول نقطة معيّنة ترسم حركتها مسار قطع مكافئ، على الرغم من أنّ باقي أجزاء المضرب لا تتبع هذا المسار (شكل 71) . وتُعتبر حركة مضرب كرة القاعدة محصّلة حركتين هما:

- حركة دورانية حول هذه النقطة .
- حركة انتقالية في الهواء يبدو فيها أنّ ثقل المضرب مُركّز في هذه النقطة . وتُسمّى هذه النقطة التي يرتكز عليها ثقل المضرب والتي تدور باقي أجزاء المضرب حولها بمركز ثقل المضرب .



(شكل 71)
مركز ثقل الكرة ومركز ثقل المضرب يتبعان مسارًا على شكل قطع مكافئ .

1. تعريف مركز الثقل
Definition of the Center of Gravity

درسنا سابقًا أنّ ثقل الجسم هو القوّة التي يخضع لها الجسم بسبب جذب الأرض له .

كلّ جزء من أجزاء هذا الجسم يخضع لقوّة جذب الأرض، ومحصّلة هذه القوى كلّها هي قوّة تتّجه إلى الأسفل وتساوي مقدارها مجموع مقادير هذه القوى . أمّا نقطة تأثيرها فهي نقطة نسمّيها «مركز ثقل الجسم»، أي أنّ مركز الثقل هو نقطة تأثير ثقل الجسم .

ماذا يحدث عند تطبيق قوّة على الجسم في مركز ثقله بحيث تكون معاكسة لقوّة ثقله في الاتّجاه ومساوية لها في المقدار؟ سيتوازن الجسم مهما كان وضعه، لأنّ مجموع القوى التي يخضع لها أصبح معدومًا. لذلك يُعتبر مركز ثقل الجسم نقطة توازن له.

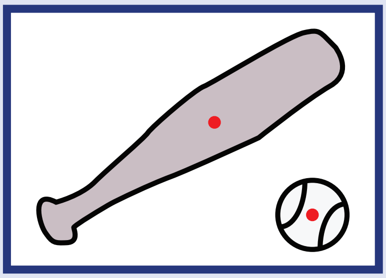
ويمكن تعريف مركز ثقل جسم ما بأنّه «النقطة التي تقع عند الموضع المتوسّط لثقل الجسم الصلب المتجانس». وبالنسبة إلى الأجسام متماثلة التكوين ومنتظمة الشكل مثل كرة القاعدة، يقع مركز الثقل عند المركز الهندسي لها. أمّا الأجسام غير منتظمة الشكل مثل مضرب كرة القاعدة، فيكون ثقل أحد طرفيها أكبر من ثقل الطرف الآخر، لذلك يكون مركز الثقل ناحية الطرف الأثقل (شكل 72). ويقع مركز ثقل قطعة رخام مثلّثة الشكل على الخطّ المار بمركز المثلّث ورأسه، وعلى بعد من القاعدة يساوي ثلث الارتفاع h. ويقع مركز ثقل مخروط مصمت على الخطّ نفسه، لكن على بعد ربع الارتفاع h من قاعدته (شكل 73).

ربما يكون مركز ثقل الأجسام التي تتركّب من أكثر من مادة (موادّ مختلفة الكثافة) بعيدًا عن مركزها الهندسي. فإذا تصوّرنا كرة مجوّفة مُلئت حتّى منتصفها بمعدن الرصاص، فلن ينطبق مركز ثقلها على مركزها الهندسي، لكنّه يكون إلى ناحية النصف الممتلئ بالرصاص. لذلك عندما تهتزّ هذه الكرة، فإنّها تتوقّف عن الاهتزاز حيث يقع مركز ثقلها عند أسفل مستوى ممكن. وإذا جعلنا هذه الكرة لعبة على شكل مهرّج (شكل 74)، للاحظنا أنّها تعود إلى الوضع العمودي مهما أُزيحت عن هذا الوضع.

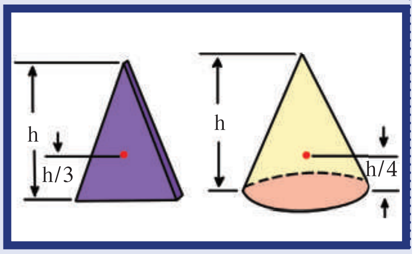
2. مسار مركز ثقل الجسم

Path of the Center of Gravity of a Body

توضّح الصورة متعدّدة اللقطات في الشكل (75) منظرًا علويًّا لمفتاح إنجليزي ينزلق أثناء دورانه حول نفسه على سطح أفقي أملس. لاحظ أنّ مركز ثقل المفتاح يتحرّك في خطّ مستقيم (مركز الثقل ممثّل في الشكل بنقطة بيضاء)، في حين يتحرّك باقي أجزاء المفتاح في حركة دورانية حول مركز الثقل. لاحظ أيضًا أنّ مركز الثقل يقطع مسافات متساوية في فترات زمنية متساوية بسبب انعدام القوّة المحصّلة في اتّجاه الحركة. وتُعتبر حركة المفتاح محصّلة حركة في خطّ مستقيم لمركز الثقل، وأخرى دورانية حول مركز ثقله.

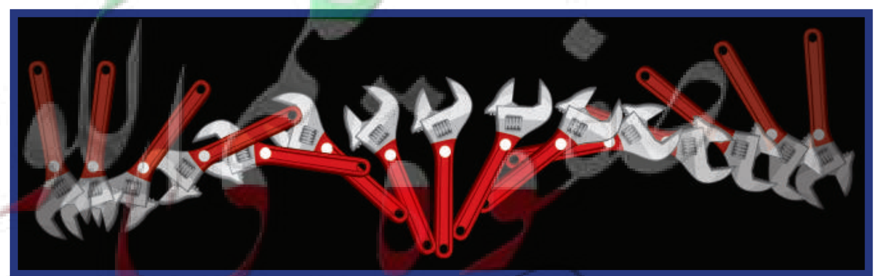


(شكل 72)
مركز ثقل الكرة هو المركز الهندسي، أمّا مركز ثقل المضرب فهو أقرب إلى الجزء الأثقل.



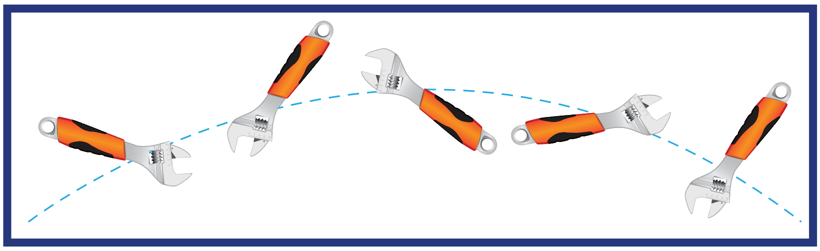
(شكل 73)
مركز الثقل هو النقطة الحمراء.

(شكل 74)
مركز ثقل هذه اللعبة يقع أسفل مركزها الهندسي.

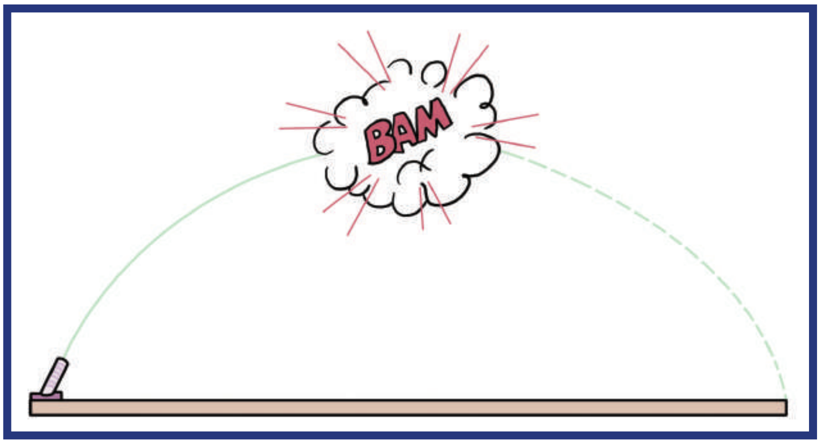


(شكل 75)
مركز ثقل المفتاح المنزلق بحركة دورانية يتبع مسارًا مستقيمًا.

وإذا رُمي المفتاح في الهواء (بدلًا من انزلاقه على السطح الأفقي الأملس)، فسوف يتبع مركز ثقله مسارًا منتظمًا على شكل قطع مكافئ (شكل 76). وينطبق ذلك على المقذوفات مثل الألعاب النارية الصاروخية. فيوضّح الشكل (77) أنّ القوى الداخلية أثناء الانفجار لا تغيّر موضع مركز ثقل القذيفة. وإذا أهملنا مقاومة الهواء، نلاحظ أنّ الشظايا المتناثرة في الهواء تحتفظ بمركز الثقل نفسه كما لو كان الانفجار لم يحدث بعد.



(شكل 76)



(شكل 77)
مسار مركز ثقل الألعاب النارية على شكل قطع مكافئ.

مراجعة الدرس 3–1

أوّلًا – عرّف مركز الثقل لجسم.

ثانيًا – لماذا لا يقع مركز ثقل مضرب كرة القاعدة على نقطة الوسط للمضرب؟

ثالثًا – ما الجزء من الجسم الذي سيتبع مسار قطع مكافئ عند دوران الجسم في الهواء أو سيتبع خطًّا مستقيمًا أثناء انزلاق الجسم على سطح أملس؟

رابعًا – هل ينطبق مركز الثقل دائمًا على المركز الهندسي للجسم؟ أَعط أمثلة تعلّل إجاباتك.

خامسًا – صف حركة مركز ثقل مقذوف قبل انفجاره في الهواء وبعده.

فقرة إثرائية

ارتباط الفيزياء بالتكنولوجيا

مركز الثقل في وسائل النقل

يرتبط تحديد مركز الثقل في الطائرة بوزن الطائرة والحمولة، وبتوزيع هذه الحمولة. وهو في الغالب يقع في وسط الطائرة، قريبًا من الأجنحة ومن مركز الرفع حيث محصلة قوى الرفع. ويؤدّي أيّ تغيير في موقع مركز الثقل إلى عدم ثبات الطائرة وحدوث كارثة جوّية، أو عدم قدرة الطائرة على الإقلاع.

ويحتاج مهندسو السفن أيضًا إلى تحديد موقع مركز الثقل عند تصميم السفن، وذلك لتحديد أماكن غرف المحرّكات وأماكن وضع الحاويات وتوزيع الحمولات، للحفاظ على توازن السفينة ومقاومة قوى الإمالة من أمواج وتيّارات بحرية.

أمّا في السيّارات، فيُعتبر موقع مركز الثقل من أهمّ العوامل المؤثّرة في ثبات السيّارة، ويُفضّل أن يكون في وسطها.

الدرس 3-2

مركز الكتلة
Center of Mass

الأهداف العامة

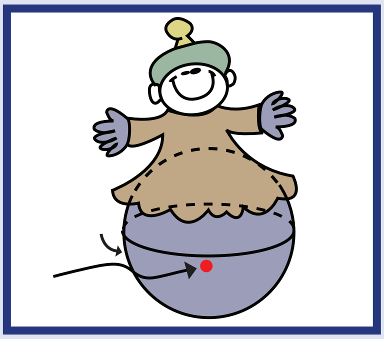
- يعرّف مركز الكتلة.
- يستنتج الفرق بين مركز الكتلة ومركز الثقل.

أثناء دراساتنا السابقة للحركة الانتقالية للأجسام، لم نعِر أبعاد الجسم أيّ اهتمام. وافترضنا أنّ أيّ جسم يمكن أن يُمثّل بنقطة، وأنّ حركة الجسم تتمثّل بحركة هذه النقطة، ذلك لأنّ كلّ نقاط الجسم في الحركة الخطّية تتحرّك بالشكل نفسه.

وإن كان اعتبار الجسم نقطة (جسم نقطي Point Mass) هو حالة خاصّة لا تنطبق على حركة الأجسام المركّبة من حركة انتقالية وحركة دورانية، إلّا أنّنا إذا عدنا إلى مثال حركة مضرب كرة القاعدة في الدرس السابق، حيث كانت حركته مؤلّفة من حركة دورانية وحركة انتقالية، وحيث كانت كلّ نقطة من نقاطه تتحرّك بشكل مختلف، لرأينا أنّ نقطة، سمّيناها في الدرس السابق بمركز الثقل، كانت تتحرّك على مسار القطع المكافئ تحت تأثير الجاذبية وتمثّل حركة الجسم. وتُسمّى هذه النقطة أيضًا مركز الكتلة للجسم، إذا نظرنا إليها ككتلة تتفاعل مع كتلة الأرض.

إنّ مركز الكتلة ومركز الثقل مفهومين قريبين جدًّا الواحد من الآخر، ويمكن استخدام أحدهما مكان الآخر في بعض الحالات التي سنستعرضها في سياق هذا الدرس.

فسنتعرّف على مركز الكتلة، ونميّز متى يكون هذا الأخير مختلفًا عن مركز الثقل، ومتى يمكن اعتبار مركز الكتلة ومركز الثقل مفهومًا واحدًا. كما سنحدّد رياضيًّا موقع مركز كتلة لجسم أو لنظام مؤلّف من عدّة أجسام.



(شكل 78)
مركز كتلة هذه اللعبة ممثّل بالنقطة الحمراء، وهو يقع أسفل المركز الهندسي لها.

1. تعريف مركز الكتلة
Definition of Center of Mass

إنّ مركز كتلة الجسم، ويُسمّى أيضًا مركز العطالة، هو الموضع المتوسّط لكتل جميع الجزيئات التي يتكوّن منها هذا الجسم (شكل 78).

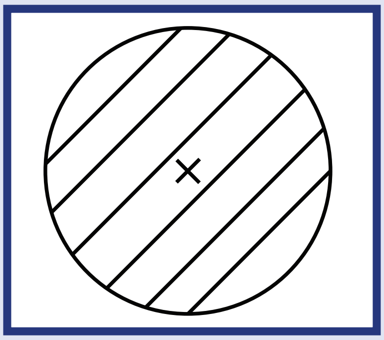
2. الفرق بين مركز الكتلة ومركز الثقل

Difference Between Center of Mass and Center of Gravity

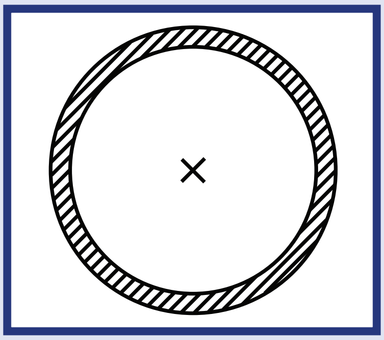
مركز الكتلة ومركز الثقل مفهومان يمكن استخدام أحدهما مكان الآخر، وذلك عندما تكون الأجسام على سطح الأرض أو قريبة منها. أمّا عندما تكون الأجسام كبيرة جدًّا بحيث تختلف قوّة الجاذبية الأرضية المؤثّرة على جزء من الجسم عن تلك المؤثّرة على جزء آخر، فيكون هناك فرق بسيط بين المركزين.
فعلى سبيل المثال، مركز الثقل لمركز التجارة العالمي الذي سينتهي بناؤه في العام 2013، والذي سيبلغ ارتفاعه 541m)، يقع عند 1)mm أسفل مركز كتلته. ويرجع السبب إلى أنّ قوى الجاذبية على الجزء السفلي القريب من سطح الأرض أكبر من القوى المؤثّرة على الجزء العلوي منه.

لذلك، سنستخدم أيّ من التعبيرين مكان الآخر بالنسبة إلى الأجسام التي نتعامل معها يوميًّا، بما فيها المباني العالية.

مركز الكتلة لجسم كتلته موزّعة بشكل متجانس، ولا تتغيّر كثافته من نقطة إلى أخرى، ينطبق على مركزه الهندسي، ويمكن أن يكون نقطة مادية على الجسم نفسه كما هو الحال في القرص، حيث ينطبق مركز الكتلة مع المركز الهندسي (شكل 79). وقد لا يقع مركز كتلة الجسم بالضرورة في إحدى نقاط الجسم، بل يمكن أن يكون خارجها. فمركز كتلة حلقة دائرية يقع في مركز الدائرة وينطبق مع المركز الهندسي (شكل 80). وفي إطار المستطيل، يكون مركز الكتلة نقطة تقاطع الوترين، وهي خارج كتلة الإطار.



(شكل 79)
ينطبق مركز الكتلة على المركز الهندسي في القرص.

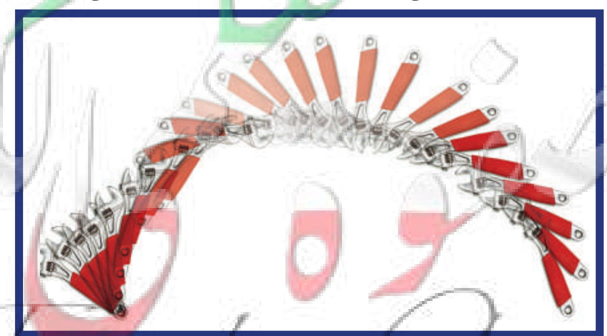


(شكل 80)
مركز الكتلة في المركز الهندسي، لكنّه خارج نقاط الجسم.

أمّا إذا لم يكن متجانسًا، فسيكون مركز الكتلة أقرب إلى المنطقة التي تحتوي على كتلة أكبر. فمركز كتلة المطرقة الحديدية يكون أقرب إلى رأسها الحديدي.

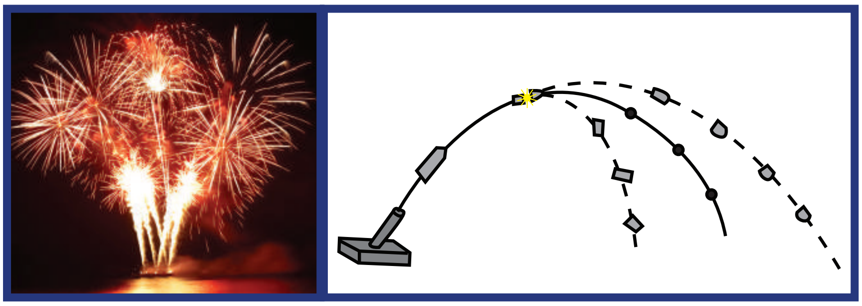
إنّ تحديد مركز الكتلة أو مركز الثقل، بالطرق التجريبية أو الحسابية، لأجسام منتظمة الشكل أو أجسام غير منتظمة الشكل، أو لنظام مؤلّف من أكثر من جسم هي من أهداف الدروس اللاحقة، حيث سنعرض تفصيليًّا كلّ حالة على حدة.

ويمكن أن نطبّق ما درسناه سابقًا عن حركة مركز الثقل على مركز الكتلة.
فحركة المفتاح الإنجليزي الذي أُلقي في الهواء بحيث يصنع حركة دورانية حول نفسه أثناء حركته يُمثّل بحركة مركز الكتلة (شكل 81).



(شكل 81)
مركز ثقل المفتاح المنزلق بحركة دورانية يتبع مسارقطع ناقص.

وبالنسبة إلى القذيفة التي تنفجر في الهواء كالألعاب النارية، يتحرّك مركز كتلتها قبل انفجارها على مسار القطع المكافئ. وبعد الانفجار، تتحرّك الشظايا المتناثرة مبتعدة عن مركز كتلتها في كلّ الاتّجاهات، راسمة قطوعًا مكافئة مختلفة، في حين يتابع مركز كتلتها حركته على مساره القديم نفسه (شكل 82).



(شكل 82)

مركز كتلة القذيفة قبل انفجارها ينطبق على مركز كتلة شظاياها المتناثرة بعد الانفجار، ويتابع حركته كأنّ الانفجار لم يحدث.

3. مركز الكتلة وتأرجح النجوم

Center of Mass and Swinging Stars

لا تدور كواكب المجموعة الشمسية حول مركز الشمس بل حول مركز كتلة المجموعة الشمسية، ولكن هذين المركزين منطبقان تقريبًا طالما أن الكواكب مبعثرة حول الشمس في جميع الجهات، أما إذا اصطفت جميع الكواكب على خط مستقيم في جانب واحد بالنسبة إلى الشمس فعندها سيبعد مركز كتلة المجموعة الشمسية مسافة 800 ألف كيلومتر عن سطح الشمس أي 1.5 مليون كيلومتر عن مركزها (شكل 83).

تدور الشمس أيضًا حول مركز كتلة المجموعة الشمسية وبما أن هذه النقطة قريبة جدًا من مركزها فإن حركة الدوران هذه تبدو للمراقب البعيد على شكل تأرجح بسيط للشمس بين نقطتين.

إن التأرجح البسيط للنجوم معروف لدى علماء الفلك وهو يشكل دليلًا على وجود كواكب تدور حول النجم المتأرجح.

(شكل 83)

لا ينطبق مركز كتلة المجموعة الشمسية على المركز الهندسي للشمس. وإذا اصطفّت الكواكب على أحد جانبي الشمس، يصبح مركز كتلة المجموعة خارج سطح الشمس.

مراجعة الدرس 3-2

أوّلًا – عرّف مركز الكتلة.

ثانيًا – متى ينطبق مركز كتلة الجسم مع مركز الثقل؟

ثالثًا – عند دراسة مركز الكتلة لأجسام مختلفة، يتبيّن لنا أنّ مركز الكتلة في بعض الأجسام يكون نقطة مادّية موجودة على الجسم، ويكون في أجسام أخرى نقطة غير موجودة على الجسم. اَعط أمثلة توضّح فيها الحالتين.

رابعًا – في بعض الحالات لا ينطبق مركز الثقل مع مركز الكتلة. اَعط مثالًا توضّح فيه هذه الحالة واشرح السبب في ذلك.

خامسًا – يلاحظ علماء الفلك أثناء مراقبتهم للنجوم أنّها تتأرجح في الفراغ حول مركز كتلتها. ما هو الاستنتاج الذي توصّل إليه العلماء من خلال هذا التأرجح؟

الدرس 3-3

تحديد موضع مركز الكتلة أو مركز الثقل

Determining the Position of the Center of Mass or Center of Gravity

الأهداف العامة

- يعرّف أنّ نقطة مركز الثقل المادية الموجودة على الجسم بأنها هي نقطة توازن الجسم.
- يحدّد عمليًّا موضع مركز الكتلة لأجسام منتظمة الشكل.
- يحدّد عمليًّا مركز الكتلة لأجسام غير منتظمة الشكل.
- يحسب رياضيًّا موقع مركز الكتلة لجسمين.
- يحسب رياضيًّا موقع مركز الكتلة لنظام مؤلّف من أكثر من كتلة نقطية.

تعرّفنا في الدروس السابقة مركز الثقل ومركز الكتلة، والتطابق بينهما في الأجسام الصغيرة حيث لا تتأثّر أجزاء الجسم بقوى جاذبية مختلفة. ودرسنا أنّ الاختلاف بينهما يكون بسيطًا جدًّا إذا لم يتطابقا، كما هو الحال في الأبراج والمباني المرتفعة جدًّا.

لذلك سنتعامل في هذا الدرس مع كلّ من مركز الكتلة ومركز الثقل على أنّهما نقطتان متطابقتان لا فرق بينهما، وعلى أنّ تحديد أيّ نقطة منهما يعني تحديد الأخرى.

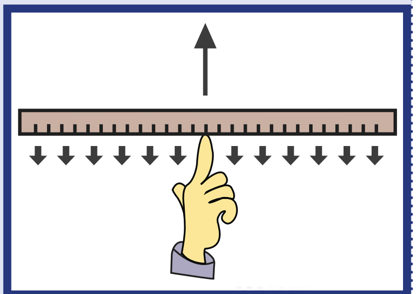
وسنحدّد موقع مركز الثقل مستخدمين الطرق العملية والطرق الحسابية في حالة الأجسام منتظمة الشكل والأجسام غير منتظمة الشكل.

1. مركز الثقل وتوازن الجسم

Center of Gravity and Equilibrium of the Body

كنّا قد درسنا سابقًا أنّ مركز الثقل لجسم ما هو نقطة ارتكاز محصّلة قوى الجاذبية المؤثّرة على الجسم حيث يتوازن الجسم إذا ارتكز على هذه النقطة، بشرط أن تكون تلك النقطة نقطة مادية على الجسم نفسه.

فعلى سبيل المثال، يقع مركز ثقل المسطرة في منتصفها تمامًا أي عند مركزها الهندسي. لاحظ الشكل (84). تمثّل الأسهم الصغيرة قوّة جذب الأرض على أجزاء المسطرة، ويمكن جمع هذه القوى كلّها في قوّة واحدة تكون محصّلة وتؤثّر في مركز الثقل. وهذا يعني أنّ ثقل المسطرة مرتكز في نقطة مركز الثقل، وبالتالي يمكننا موازنة المسطرة بالتأثير على مركز الثقل بقوّة واحدة لأعلى.



(شكل 84)
يبدو ثقل المسطرة كلّها كأنّه مركز في نقطة واحدة.

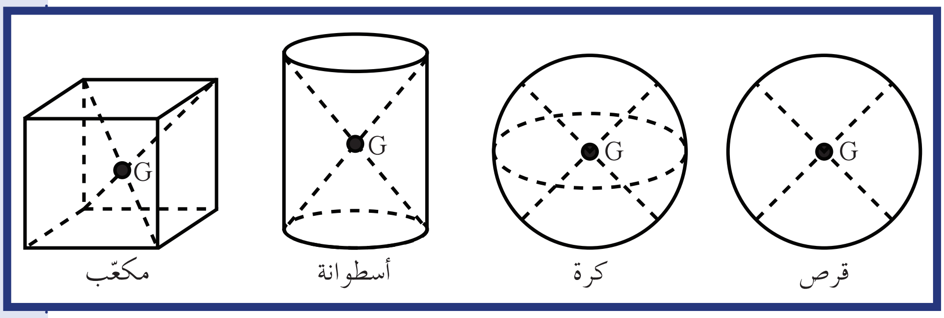
2. مركز ثقل الأجسام منتظمة الشكل

Center of Gravity of Regular–Shaped Bodies

الأجسام منتظمة الشكل مثل المسطرة، الكرة، المكعّب، الأسطوانة، متوازي المستطيلات، القرص وغيرها.

ومركز الثقل أو الكتلة في الأجسام منتظمة الشكل ينطبق مع المركز الهندسي للجسم. ويمكن أن يكون نقطة مادّية من الجسم إذا كان الجسم ممتلئًا أو نقطة خارجه إذا كان الجسم مفرغًا.

لاحظ في الشكل (85) موقع مركز الثقل في الأجسام منتظمة الشكل، ولاحظ كيف أنّه ينطبق مع المركز الهندسي، وكيف يمكنه أن يكون نقطة مادّية موجودة على الجسم أو نقطة غير موجودة على الجسم.



(شكل 85)
مركز الثقل في الأجسام منتظمة الشكل

3. مركز ثقل الأجسام غير منتظمة الشكل

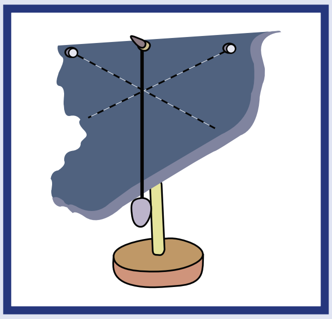
Center of Gravity of Irregular–Shaped Bodies

إنّ تحديد مركز الكتلة أو الثقل في بعض الأجسام غير منتظمة الشكل ليس بسهولة تحديده في الأجسام منتظمة الشكل.

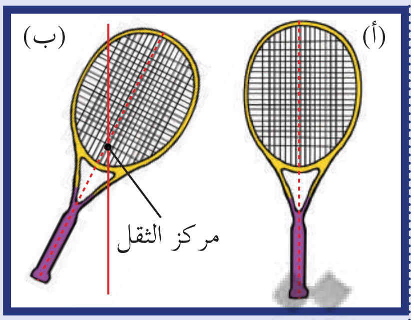
كيف تحدّد موقع مركز الثقل؟

- علّق الجسم من أيّ نقطة موجودة عليه، ودعه يستقر بعد أن كان يتأرجح. يقع مركز الثقل على خطّ عمودي أسفل نقطة التعليق (أو ينطبق على نقطة التعليق). أُرسم هذا الخطّ العمودي. يمكنك استخدام خيط الفادن (خيط ذي ثقل) لرسم الخطّ (شكل 86).
- علّق الجسم من نقطة أخرى وارسم الخطّ العمودي الذي يحمل مركز الثقل بعد أن يستقرّ الجسم من جديد.
- نقطة التقاطع بين الخطّين تمثّل مركز ثقل الجسم.

فعلى سبيل المثال، لتحديد مركز الثقل لمضرب لعبة كرة المضرب، علّقه من أحد النقاط، وعندما يتوقّف عن التأرجح، أُرسم الخطّ العمودي المارّ بنقطة التعليق، كما في الشكل (87–أ). ثمّ علّق الجسم من نقطة أخرى ولاحظ أنّ مركز الثقل يقع على الخطّ أسفل نقطة التعليق. ارسم خطًّا عموديًّا آخر. مركز الثقل هو نقطة التقاطع بين الخطّين العموديين كما في الشكل (87–ب).



(شكل 86)
تعيين مركز ثقل جسم غير منتظم الشكل بواسطة خيط ذي ثقل.

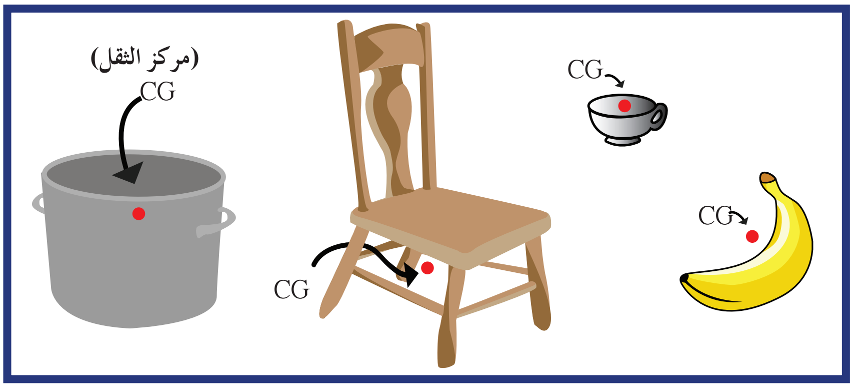


(شكل 87)
(أ) يمكن تحديد مركز الثقل للمضرب عند تعليق المضرب من أيّ نقطة.
(ب) نقطة الالتقاء للخطّين هي مركز الثقل للمضرب.

يمكننا أن نستخدم هذه الطريقة أيضًا للتحقّق عمليًّا من أنّ المركز الهندسي هو مركز الثقل للأجسام منتظمة الشكل.

تعلّمنا سابقًا في حالة الأجسام منتظمة الشكل أنّ مركز الثقل قد يكون نقطة خارج الجسم. ذلك ينطبق على الأجسام غير منتظمة الشكل حيث يمكن أن يكون مركز الثقل خارجها.

لاحظ موقع مركز الثقل في الشكل (88). فمركز ثقل الفنجان ومركز ثقل الوعاء يقعان في التجويف داخلهما، ومركز ثقل الكرسي يقع أسفلها. أي أنّ مركز الثقل في جميع هذه الأمثلة ليس نقطة موجودة على الجسم.

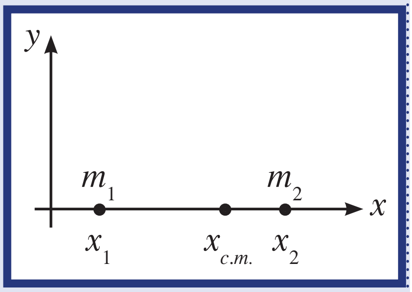


(شكل 88)

لا توجد مادّة عند مركز ثقل هذه الأجسام.

4. حساب موقع مركز كتلة جسمين نقطيين

Calculating the Position of Center of Mass of Two Point Objects



(شكل 89)

لنأخذ m_1 و m_2 كتلتين نقطيتين على محور السينات، حيث أنّ m_1 و m_2 في الموضعين x_1 و x_2 على محور السينات على الترتيب (شكل 89).

مركز كتلة الجسمين النقطيين اللذين يبعدان الواحد عن الآخر مسافة أكبر من أبعاد أيّ منهما يُحدّد بالعلاقة التالية:

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

مثال (1)

$m_1 = (2)kg$ و $m_2 = (8)kg$ كتلتان نقطيتان على محور السينات تبعدان الواحدة عن الأخرى $(6)cm$.

أُحسب أين يقع مركز كتلة الجسمين.

طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم.

المعلوم: $m_1 = (2)kg$

$m_2 = (8)kg$

مثال (1) (تابع)

باعتبار m_1 نقطة موجودة على مركز الإحداثيات $O(0,0)$، نحدّد $x_1 = 0$، $x_2 = 6\ cm$.

غير المعلوم:

مركز الكتلة: $x_{c.m.} = ؟$

2. احسب غير المعلوم

مستخدمًا المعادلة الرياضية:

$$x_{c.m.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

وبالتعويض عن المقادير المعلومة نحصل على:

$$x_{c.m.} = \frac{2(0) + 8(6)}{10} = (4.8)cm$$

3. قيّم: هل النتيجة مقبولة؟

يقع مركز كتلة الجسمين على محور السينات في الموضع $(4.8,0)$، وهو أقرب إلى الكتلة الأكبر، وهذا يؤكّد صحّة ما توصّلنا إليه.

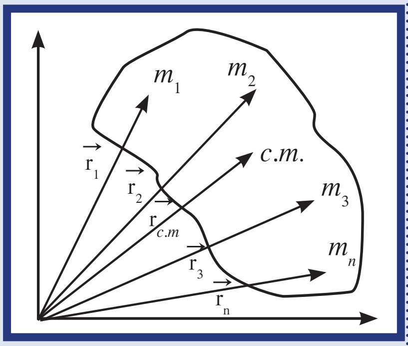
5. مركز كتلة عدّة كتل موجودة في مستوى واحد

Center of Mass of Several Bodies on the Same Plane

لنأخذ مجموعة من الكتل النقطية m_1، m_2، m_3 ... محدّد موضعها في المستوى بمتّجهات المواقع $\vec{r}_1$، $\vec{r}_2$، $\vec{r}_3$ ...

يمكن أن يُحدّد موقع مركز الكتلة بتعميم العلاقة السابقة لكتلتين، ونكتب متّجه مركز الكتلة في بعدين على الشكل التالي:

$$\boxed{\vec{R}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...}}$$



(شكل 90)

وبأخذ مركّبات العلاقة على المحاور (Ox) و (Oy)، نجد مركّبات مركز الكتلة:

$$x_{c.m.} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$y_{c.m.} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

وتجدر الإشارة إلى أنّ **موقع مركز الكتل لا يعتمد على طريقة اختيارنا لمحاور الإحداثيات بل على توزيع الجسيمات المؤلّفة للنظام**. ففي المثال المحلول، سيبقى موقع مركز الكتلة نفسه حتّى لو غيّرنا طريقة اختيار المحاور.

مثال (2)

أوجد موضع مركز كتلة ثلاث كتل $m_1 = (1)kg$ ، $m_2 = (2)kg$ و $m_3 = (3)kg$ ، موضوعة على رأس مثلّث متساو الأضلاع طول ضلعه (10)cm (شكل 91) .

طريقة التفكير في الحلّ

1. حلّل: اذكر المعلوم وغير المعلوم .

المعلوم: $m_1 = (1)kg$

$m_2 = (2)kg$

$m_3 = (3)kg$

طول الضلع: $L = (10)cm$

غير المعلوم:

مركز الكتلة: $x_{c.m.} = ?$ و $y_{c.m} = ?$

2. احسب غير المعلوم

نختار المحورين (Ox) و (Oy) كما في الشكل (91) وتكون إحداثيات الكتل على الترتيب (0,0)، (0,10) و $(5,5\sqrt{3})$ ، حيث يكون موضع الكتلة m_1 مركز الاحداثيات .

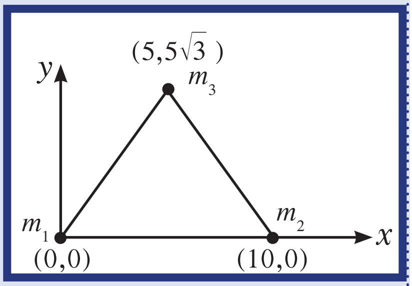
باستخدام المعادلات وبالتعويض عن القيم المعلومة نحصل على:

$$x_{c.m.} = \frac{1(0) + 2(10) + 3(5)}{(1 + 2 + 3)} = (5.8)cm$$

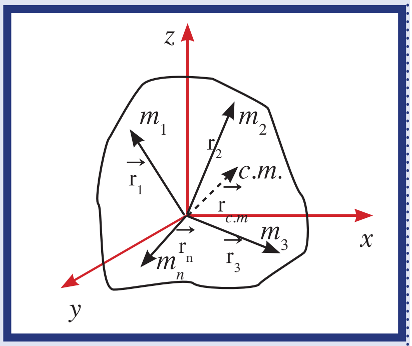
$$y_{c.m.} = \frac{1(0) + 2(0) + 3(5\sqrt{3})}{(1 + 2 + 3)} = (4.3)cm$$

3. قيّم: هل النتيجة مقبولة؟

مركز الكتلة موجود جهة الكتل الأكبر مقدارًا .



(شكل 91)



(شكل 92)

6. مركز كتلة عدّة كتل نقطية موجودة في الفراغ

Center of Mass of Several Point Objects in Space

لنأخذ مجموعة من الكتل النقطية m_1 ، m_2 ، m_3 ... محدّد موضعها في الفراغ بمتّجهات المواقع $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ، $\vec{r}_3$ (شكل 92) ...

يمكن أن يُحدّد موقع مركز الكتلة لعدّة كتل في الفراغ بتعميم العلاقة السابقة التي استخدمناها في تحديد مركز الكتل في بعدين إلى علاقة في ثلاثة أبعاد ونكتب متّجه مركز الكتلة على الشكل التالي:

$$\boxed{\vec{R}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...}}$$

مسائل مع إجابات

1. وُضعت كتلتان متساويتان على طرفي قضيب طوله (50)cm منتظم الشكل ومهمل الكتلة. أوجد موقع مركز كتلة النظام.

الإجابة: نقطة الوسط على القضيب

2. وُضع جسمان نقطيان كتلتهما $m_1 = (100)g$ و $m_2 = (300)g$ على التوالي على نقطتين A و B ، حيث $AB = (40)cm$. حدّد موضع مركز كتلة هذا النظام بالنسبة إلى النقطة A .

الإجابة: (30)cm من النقطة A

وبأخذ مركّبات العلاقة على المحاور (Ox)، (Oy) و(Oz)، نجد مركّبات مركز الكتلة:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{\text{c.m.}} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ y_{\text{c.m.}} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ z_{\text{c.m.}} &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{aligned}}$$

مسألة

أوجد مركز كتلة الكتل الموزعة على الشكل التالي:

$m_1 = (1)\text{kg}$ عند $(1,1,0)$

$m_2 = (0.5)\text{kg}$ عند $(0,0,1)$

$m_3 = (2)\text{kg}$ عند $(-1,2,2)$

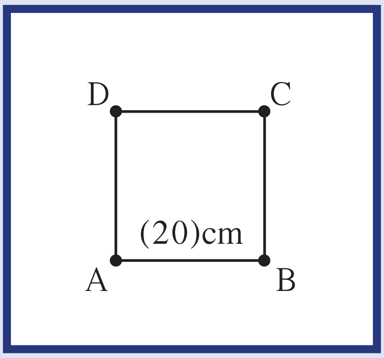
مراجعة الدرس 3-3

أوّلًا – أُذكر مثالًا لجسم يكون مركز ثقله عند نقطة لا تحتوي على أيّ مادّة .

ثانيًا – هل يمكن وجود أكثر من مركز ثقل لجسم واحد؟ علّل إجابتك .

ثالثًا – كيف يمكن تعيين موضع مركز الكتلة لجسم غير منتظم الشكل؟

خامسًا – أحسب موضع مركز الكتلة لنظام مؤلف من أربع كتل:
$m_A = (1)kg$ و $m_B = (2)kg$ و $m_C = (3)kg$ و $m_D = (4)kg$ ، موزّعة على أطراف مربّع طول ضلعه (20)cm ومهمل الكتلة كما في الشكل (95) .



(شكل 95)

مراجعة الفصل الثالث

المفاهيم

Non Uniform Shape	غير منتظمة الشكل
Center of Gravity	مركز الثقل
Center of Mass	مركز الكتلة
Supporting Area	مساحة القاعدة الحاملة
Uniform Shape	منتظمة الشكل
System of Particles	نظام من الجسيمات

الأفكار الرئيسة في الفصل

- مركز ثقل جسم ما هو النقطة الواقعة عند الموضع المتوسّط لثقل الجسم.
- عند قذف جسم في الهواء، يتبع مركز ثقله مسارًا منتظمًا على شكل قطع مكافئ حتّى لو تأرجح أو دار حول مركز الثقل.
- يقع مركز الثقل للأجسام متماثلة التكوين ومنتظمة الشكل عند المركز الهندسي لها.
- إنّ مركز كتلة الجسم الذي يُسمّى أيضًا مركز العطالة، هو الموضع المتوسّط لكتل جميع الجزيئات التي يتكوّن منها هذا الجسم.
- ينطبق مركز كتلة الجسم على مركز ثقله عندما يكون الجسم على سطح الأرض أو قريب منها، بحيث لا يختلف مقدار قوّة الجاذبية الأرضية بين أجزائه.
- لا يعتمد موقع مركز الكتلة على طريقة اختيارنا لمحاور الإحداثيات، بل على توزيع الجسيمات التي تؤلِّف النظام.

المعادلات الرياضية في الفصل

$$\vec{R}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 r_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

$$x_{c.m.} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$y_{c.m.} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

خريطة مفاهيم الفصل

استخدم المصطلحات الموضّحة في الشكل التالي لرسم خريطة مفاهيم تُنظّم معظم الأفكار التي احتواها الفصل.

مركز الكتلة	نظامية الشكل	مركز الثقل	المركز الهندسي
نقطة على الجسم	نقطة خارج الجسم	الأجسام صغيرة الأبعاد	غير نظامية الشكل

تحقق من فهمك

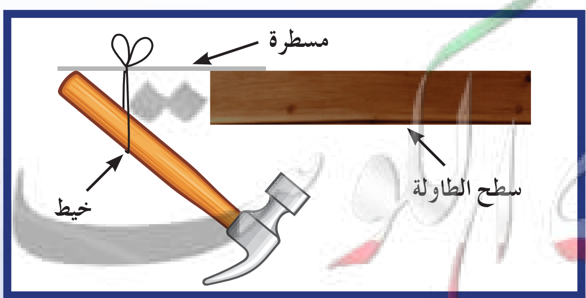
ضع علامة (✓) في المربّع الواقع أمام العبارة الصحيحة في كلّ ممّا يلي:

1. كتلتان نقطيتان $m_1 = (500)g$ و $m_2 = (100)g$ تبعدان الواحدة عن الأخرى $(30)cm$. فإنّ موضع مركز الكتلة يقع:
   - ☐ بين m_1 و m_2 ، والأقرب إلى m_1 داخل القطعة بينهما .
   - ☐ عند متوسّط المسافة بين m_1 و m_2 .
   - ☐ بين m_1 و m_2 ، والأقرب إلى m_2 داخل القطعة بينهما .
   - ☐ على الخطّ الحامل للكتلتين لجهة m_1 وخارج القطعة بينهما .
2. موقع مركز الكتلة لكتلتين m_A و m_B يبعدان الواحدة عن الأخرى L ، وحيث $m_A > m_B$ يُحدَّد بالنسبة إلى نقطة إسناد على الكتلة A بالعلاقة:
   - ☐ $x_{CG} = \frac{L\,m_B}{m_A}$
   - ☐ $x_{CG} = \frac{L\,m_A}{m_B}$
   - ☐ $x_{CG} = \frac{L\,m_B}{m_A + m_B}$
   - ☐ $x_{CG} = \frac{L\,m_A}{m_A + m_B}$

تحقق من معلوماتك

أجب عن الأسئلة التالية:

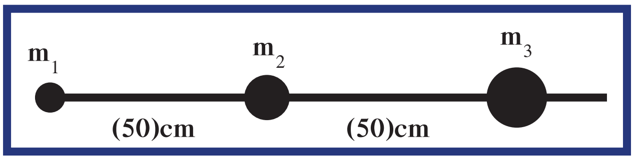
1. لمنع اهتزاز إطارات السيارات أثناء دورانها ، توضع قطع رصاص في الجزء المعدني من الإطار . أين يقع مركز ثقل الإطار المتزّن؟
2. علّق مطرقة في مسطرة غير مثبّتة كما في الشكل المقابل ، إشرح سبب عدم سقوط المطرقة والمسطرة .



تحقق من مهاراتك

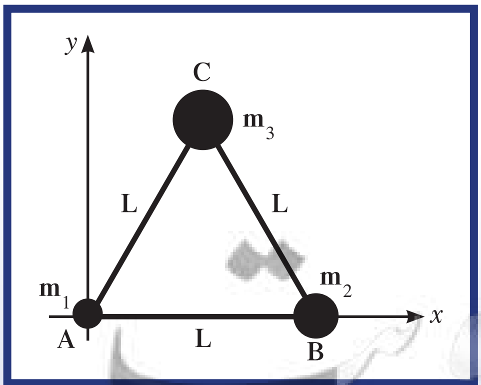
حلّ المسائل التالية:

1. كتلتان نقطيتان $m_1 = (200)g$ و$m_2 = (400)g$ موضوعتان على محور السينات، وتبعدان الواحدة عن الأخرى $(50)cm$. احسب أين يقع مركز كتلة الجسمين؟
2. ثلاث كتل نقطية $m_1 = (10)g$ و $m_2 = (20)g$ و $m_3 = (30)g$. أُحسب أين يقع مركز الكتلة:
(أ) إذا وُضعت على خطّ مستقيم، وتبعد الواحدة عن الأخرى $(50)cm$ كما في الشكل (126).



(شكل 126)

(ب) إذا وُضعت على رؤوس مثلّث متساو الأضلاع، طول ضلعه L، بحيث نضع m_1 على الرأس A وm_2 على الرأس B وm_3 على الرأس C، علمًا بأنّ A هي نقطة ارتكاز المحورين المتعامدين Ax وAy (شكل 127).



(شكل 127)