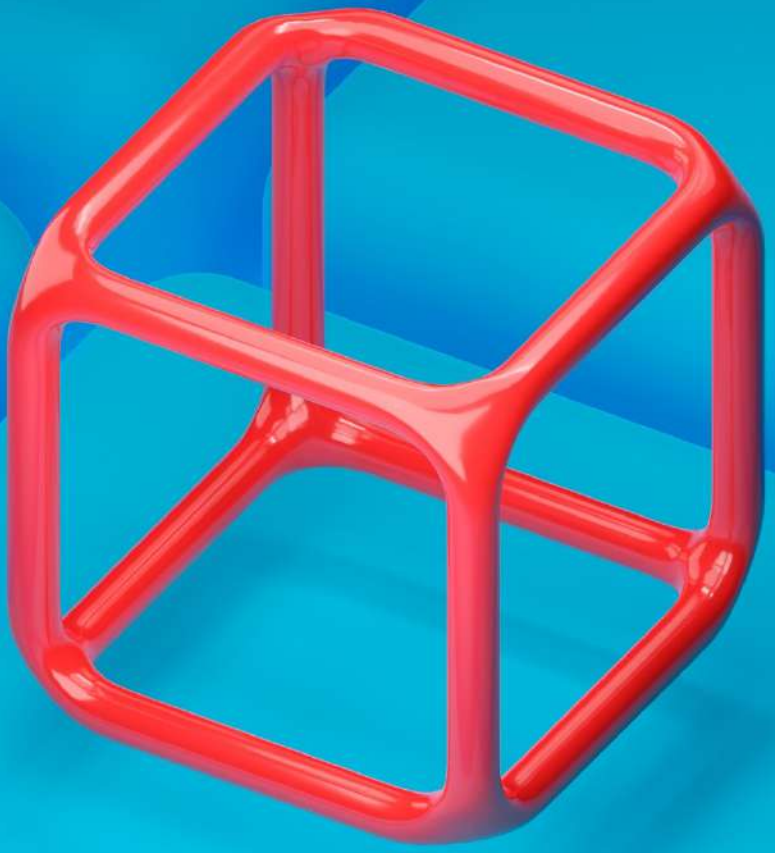
مذكرة التدريبات



الرياضيات

الكورس الأول

١١

مذكرة التدريبات

UULA

الرياضيات

الكورس الأول

١١

صفوة معلمي الكويت

شلون تتفوق بدراستك

منصة علا تخلي المذكرة أقوى

تبي أعلى الدرجات؟ لا تعتمد على المذكرة بروحها
ادرس صح من الفيديوهات و الاختبارات في منصة علا

اختبارات ذكية تدربك

حل الاختبارات الإلكترونية أول بأول
عشان ترفع مستواك

فيديوهات تشرح لك

تابع الفيديوهات و اسأل المعلم في علا وأنت
تدرس من المذكرة عشان تضبط الدرس

اكتشف عالم التفوق مع منصة علا

لتشترك بالمادة و تستمتع بالشرح
المميز صور أو اضغط على الQR

المعلق

هذه المذكرة تغطي المادة كاملة.

في حال وجود أي تغيير للمنهج أو تعليق جزء منه يمكنكم مسح رمز QR للتأكد من المقرر.

المنقذ

أول ما تحتاج مساعدة بالمادة ، المنقذ موجود!

صور الQR بكاميرا التلفون أو اضغط عليه إذا كنت تستخدم المذكرة من جهازك و يطلع لك فيديو يشرح لك.

قائمة المحتوى

01 **الأعداد الحقيقة**

الجذور والتعبيرات الجذرية 7
الأسس النسبية 12
حل المعادلات 15

02 **الدوال الحقيقة**

مجال الدالة 21
الدوال التربيعية و نمذجتها 23
الدوال التربيعية والقطوع المكافئة 24
المعكوسات ودوال الجذر التربيعي 32
حل المتباينات 36

03 **كثيرات الحدود**

دوال القوى ومعكوساتها 41
الدوال الحدودية 43
العوامل الخطية لكثيرات الحدود 45
قسمة كثيرات الحدود 48
حل معادلات كثيرات الحدود 54

04 **الدوال الأساسية & اللوغاريتمية**

استكشاف النماذج الأسية 58
الدوال الأسية وتمثيلها بيانياً 59
الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانياً 62
خواص اللوغاريتمات 64
المعادلات الأسية واللوغاريتمية 66
اللوغاريتم الطبيعي 69

05 **المتجهات**

المتجه في المستوى 72
جمع المتجهات وطرحها 76
الضرب الداخلي 78

صفوة معلمي الكويت
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

06 **الإحصاء**

المجتمع الإحصائي والمعاينة 81
العيّنات 82
أساليب عرض البيانات 83
القاعدة التجريبية 86
القيمة المعياريّة 88

صفوة معلمي الكويت

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

الجذور والتعبيرات الجذرية

1. باستخدام قوانين الجذور أوجد إن أمكن:

a. $\sqrt{400}$

$= \sqrt{2^4 \times 5^2}$

$= 2^2 \times 5$

$= 20$

b. $\sqrt{1600}$

$= \sqrt{2^6 \times 5^2}$

$= 2^3 \times 5$

$= 8 \times 5$

$= 40$

c. $\sqrt{10^4}$

$= 10^2$

$= 100$

d. $\sqrt{0 \cdot 01}$

$= \sqrt{\frac{1}{100}}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2}$

$= \frac{1}{10}$

e. $\sqrt{0 \cdot 25}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \frac{1}{2}$

f. $\sqrt{0 \cdot 0064}$

$= \sqrt{\frac{64}{10000}}$

$= \sqrt{\left(\frac{8}{100}\right)^2}$

$= \frac{8}{100}$

$= 0 \cdot 08$

g. $\sqrt{\frac{-16}{49}}$

غير معرف

h. $\sqrt{\frac{2}{50}}$

$= \sqrt{\frac{1}{25}}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2}$

$= \frac{1}{5}$

i. $\sqrt{\frac{12}{147}}$

$= \sqrt{\frac{4}{49}}$

$= \sqrt{\frac{2^2}{7^2}}$

$= \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2}$

$= \frac{2}{7}$

j. $\sqrt{36 \times 25}$

$= \sqrt{6^2 \times 5^2}$

$= \sqrt{(6 \times 5)^2}$

$= 6 \times 5$

$= 30$

k. $\sqrt{\frac{-1}{121}}$

غير معرف

l. $\sqrt{75 \times 300} =$

$\sqrt{3 \times 5^2 \times 2^2 \times 3 \times 5^2}$

$= \sqrt{3^2 \times 5^4 \times 2^2}$

$= 3 \times 5^2 \times 2$

$= 150$

2. باستخدام قوانين الجذور أوجد:

a. $\sqrt[3]{27}$

$= \sqrt[3]{3^3}$

$= 3$

b. $\sqrt[3]{1000}$

$= \sqrt[3]{10^3}$

$= 10$

c. $\sqrt[3]{-64}$

$= \sqrt[3]{(-4)^3}$

$= -4$

d. $\sqrt[3]{0 \cdot 125}$

$= \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \quad = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

$= \frac{1}{2}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

e. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

$= \sqrt[3]{\frac{2^3}{5^3}}$

$= \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$

$= \frac{2}{5}$

f. $\sqrt[3]{216\times343}$

$= \sqrt[3]{6^3\times7^3}$

$= \sqrt[3]{(6\times7)^3}$

$=6\times7$

$= 42$

g. $\sqrt[3]{-\frac{375}{24}}$

$= \sqrt[3]{-\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{5^3}{2^3}}$

$= \sqrt[3]{\left(\frac{-5}{2}\right)^3}$

$= \frac{-5}{2} \quad = -2\cdot 5$

h. $\sqrt[3]{0}$

= صفر

i. $\sqrt[3]{60\times90}$

$= \sqrt[3]{2^2\times3\times5\times3^2\times2\times5}$

$= \sqrt[3]{2^3\times3^3\times5^2}$

$= 2\times3\cdot\sqrt[3]{5^2} = 6\sqrt[3]{25}$

3. بسّط كلاًّ من التعبيرات الجذرية التالية مستخدماً قوانين الجذور:

a. $\sqrt{16x^2}$

$= \sqrt{4^2\cdot x^2} =$

$4|x| = \begin{cases} 4x & : x \geq 0 \\ -4x & : x < 0 \end{cases}$

b. $\sqrt{0\cdot 25x^6}$

$= \sqrt{\frac{x^6}{4}} = \frac{1}{2}|x^3|$

$= \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 & : x \geq 0 \\ \frac{-1}{2}x^3 & : x < 0 \end{cases}$

c. $\sqrt{x^8y^{18}}$

$= x^4|y^9| = \begin{cases} x^4y^9 & : y \geq 0 \\ -x^4y^9 & : y < 0 \end{cases}$

d. $\sqrt{8x^3}, x \geq 0$

$= \sqrt{2^2\cdot 2\cdot x^2\cdot x}$

$= 2|x|\times\sqrt{2x}$

$=2x\sqrt{2x}$

e. $\sqrt{\frac{x^3y^5}{25x}}, y \geq 0, x > 0$

$\sqrt{\frac{x^2\cdot x\, y^4\cdot y}{5^2\cdot x}} = \frac{|x|y^2}{5}\cdot\sqrt{y}$

$= \frac{xy^2}{5}\sqrt{y}$

f. $5\sqrt{216x^2} + 23\sqrt{64x^4}$

$x > 0$

$\left(\sqrt{64x^4} = 8x^2\right)$

$= 5\sqrt{216x^2} + 23\,(8x^2)$

$= 5\sqrt{400x^2}$

$= 5\sqrt{2^4\cdot 5^2\cdot x^2}$

$= 5\times2^2\times5\ \ |x| = 100x$

g. $\sqrt[3]{-125y^6}$

$= \sqrt[3]{(-5)^3\, y^6}$

$= -5y^2$

h. $\sqrt[3]{81x^2}$

$= \sqrt[3]{3^3\ \cdot\ 3x^2}$

$= 3\sqrt[3]{3x^2}$

i. $\sqrt[3]{-250x^6y^5}$

$= \sqrt[3]{2\,(-5)^3x^6\, y^3y^2}$

$= -5\,x^2y\ \ \sqrt[3]{2y^2}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

j. $\sqrt[3]{49x^2} \times \sqrt[3]{56xy^3}$

$= \sqrt[3]{49x^2 \cdot 56\,xy^3}$

$= \sqrt[3]{7^2\,x^2 \cdot 7 \cdot 2^3 xy^3}$

$= \sqrt[3]{7^3 \cdot 2^3 \cdot x^3 \cdot y^3}$

$= 14\,x\,y$

k. $\sqrt[3]{256u^5v} \div \sqrt[3]{4u^2v^{10}}, u \neq 0, v \neq 0$

$= \sqrt[3]{\frac{256\,u^5\vartheta}{4\,u^2\,v}} = \sqrt[3]{\frac{64\,u^3}{v^9}} = \sqrt[3]{\frac{2^6 \cdot u^3}{v^9}} = \frac{4u}{v^3}$

4. بسّط كلاًّ من التعبيرات التالية مستخدماً قوانين الجذور:

a. $\sqrt{5} \times \sqrt{40}$

$= \sqrt{5 \times 40}$

$= \sqrt{5 \times 5 \times 2^3}$

$= \sqrt{5^2 \times 2^2 \times 2}$

$= 10\sqrt{2}$

b. $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{80}$

$= \sqrt[3]{2^2 \times 2^4 \times 5}$

$= \sqrt[3]{2^6 \times 5}$

$= 2^2\ \sqrt[3]{5}$

$= 4\sqrt[3]{5}$

c. $\frac{\sqrt[3]{640}}{\sqrt[3]{270}}$

$= \sqrt[3]{\frac{640}{270}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}}$

$= \sqrt[3]{\frac{2^6}{3^3}} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$

d. $\sqrt{5} \times (\sqrt{5} + \sqrt{15})$

$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{15}$

$= 5 + \sqrt{5 \times 5 \times 3}$

$= 5 + \sqrt{5^2 \times 3}$

$= 5 + 5\sqrt{3}$

e. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

$= (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\,\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$

$= 3 - 2\sqrt{6} + 2$

$= 5 - 2\sqrt{6}$

f. $\sqrt{2} \times (\sqrt{50} + 7)$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{50} + \sqrt{2} \cdot 7$

$= \sqrt{100} + 7\sqrt{2}$

$= 10 + 7\sqrt{2}$

g. $(5 + 2\sqrt{11})^2$ $= 5^2 + 2 \times 5 \times 2\sqrt{11} + (2\sqrt{11})^2 = 25 + 20\sqrt{11} + 44$

$= 69 + 20\sqrt{11}$

h. $\frac{\sqrt{3 \cdot 6 \times 10^8}}{\sqrt{4 \times 10^3}}$ $= \frac{\sqrt{36 \times 10^7}}{\sqrt{4 \times 10^3}} = \sqrt{\frac{36 \times 10^7}{4 \times 10^3}} = \sqrt{9 \times 10^4} = 3 \times 10^2 = 300$

i. $3\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$ $= 3\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} - 4\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2 \cdot 2^6}$

$= 3 \times 2\sqrt[3]{2} - 4 \times 3\sqrt[3]{2} + 2^2\sqrt[3]{2}$

$= 6\sqrt[3]{2} - 12\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2}$

$= -2\sqrt[3]{2}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

j. $\sqrt{75}-4\sqrt{18}+2\sqrt{32}$

$=\sqrt{5^2\cdot 3}-4\sqrt{3^2\cdot 2}+2\sqrt{2^4\cdot 2}$

$=5\sqrt{3}-4\times 3\sqrt{2}+2\times 2^2\sqrt{2}$

$=5\sqrt{3}-12\sqrt{2}+8\sqrt{2}$

$=5\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

k. $4\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{54}$

$=4\sqrt[3]{3^3\cdot 3}-3\sqrt[3]{3^3\cdot 2}$

$=4\times 3\sqrt[3]{3}-3\times 3\sqrt[3]{2}$

$=12\sqrt[3]{3}-9\sqrt[3]{2}$

l. $\sqrt[3]{-18}\times\sqrt[3]{-12}$

$\sqrt[3]{-18\times -12}$

$=\sqrt[3]{216}$

$=\sqrt[3]{2^3\times 3^3}$

$=2\times 3=6$

m. $(2\sqrt{7}+1)^2-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$

- $(2\sqrt{7}+1)^2=(2\sqrt{7})^2+2(2\sqrt{7})\cdot 1+1^2=28+4\sqrt{7}+1\quad=29+4\sqrt{7}$
- $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=(\sqrt{3})^2-1^2=3-1=2$

  $\Rightarrow (2\sqrt{7}+1)^2-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=29+4\sqrt{7}-2=27+4\sqrt{7}$

5. حديقة مستطيلة الشكل طولها $5\sqrt{21}$ m وعرضها $2\sqrt{7}$ m

a. أوجد محيط الحديقة

محيط الحديقة $=2(5\sqrt{21}+2\sqrt{7})\quad=(10\sqrt{21}+4\sqrt{7})m$

b. أوجد مساحة الحديقة

المساحة $=5\sqrt{21}\times 2\sqrt{7}\quad=10\cdot\sqrt{7^2\times 3}\quad=10\times 7\sqrt{3}=(70\sqrt{3})m^2$

6. اكتب كلاً مما يلي بحيث يكون المقام عدداً نسبياً

a. $\sqrt{\frac{21}{4}}\times\sqrt{\frac{7}{27}}\quad=\sqrt{\frac{21}{4}\times\frac{7}{27}}=\sqrt{\frac{49}{36}}=\sqrt{\frac{7^2}{6^2}}=\frac{7}{6}$

b. $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

c. $\frac{4}{3\sqrt{3}-2}\cdot\frac{3\sqrt{3}+2}{3\sqrt{3}+2}=\frac{12\sqrt{3}+8}{(3\sqrt{3})^2-(2)^2}=\frac{12\sqrt{3}+8}{23}$

d. $\frac{3+\sqrt{8}}{2-2\sqrt{8}}\cdot\frac{2+2\sqrt{8}}{2+2\sqrt{8}}=\frac{6+6\sqrt{8}+2\sqrt{8}+16}{(2)^2-(2\sqrt{8})^2}=\frac{22+8\sqrt{8}}{-28}=-\frac{22+8\times 2\sqrt{2}}{28}=-\frac{11+8\sqrt{2}}{14}$

e. $\frac{5+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}\cdot\frac{4+3\sqrt{5}}{4+3\sqrt{5}}=\frac{20+15\sqrt{5}+4\sqrt{5}+15}{4^2-(3\sqrt{5})^2}=\frac{35+19\sqrt{5}}{-29}=-\frac{35+19\sqrt{5}}{29}$

f. $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}-(9-4\sqrt{5})$

$\left[\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\frac{5-4\sqrt{5}+4}{(\sqrt{5})^2-(2)^2}=9-4\sqrt{5}\right]\Rightarrow$

معلق ⚠

$\therefore\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}-(9-4\sqrt{5})=(9-4\sqrt{5})-(9-4\sqrt{5})=0$

g. $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ $=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})-\sqrt{2}(3-\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\frac{3\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}+2}{(9)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{4}{7}$

h. $\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\left[\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

$\left[\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}\right]$

معلق ⚠

$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$ $\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}=\frac{5(3\sqrt{2})-2(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{10}=\frac{15\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{10}=\frac{11\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{10}$

i. $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}, x\in\mathbb{Z}^+, x\neq 1$ $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x})^2-1^2}=\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$

j. $\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}, x,y\in\mathbb{Z}^+$ $\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

7. أوجد قيمة التعبير: x^2-6 ، إذا كان $x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

$x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{4\sqrt{5}+4}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{4\sqrt{5}+4}{4}=\sqrt{5}+1$

$\therefore x^2-6=(\sqrt{5}+1)^2-6=(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1^2-6=2\sqrt{5}$

8. أوجد قيمة التعبير: x^2-x+1 ، إذا كان $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x^2-x+1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1=\frac{1+2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{4}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1$

$=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{3+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2}+1=2$

9. اكتب كلاً من التعبيرين التاليين على الصورة $a+b\sqrt{2}, a,b\in\mathbb{Z}$

- $E=5+6\sqrt{2}(3\sqrt{2}+4)$ $=5+18(\sqrt{2})^2+24\sqrt{2}=41+24\sqrt{2}$
- $F=(7\sqrt{2}-4)^2$ $=(7\sqrt{2})^2-2(7\sqrt{2})(4)+(4)^2=98-56\sqrt{2}+16$
  $=114-56\sqrt{2}$

صفوة معلمي الكويت

الأسس النسبية

1. بسّط كلاً من التعبيرات الجذرية التالية إن أمكن:

a. $-\sqrt[4]{81} =$

$= -\sqrt[4]{3^4}$

$= -3$

b. $\sqrt[4]{-81} =$

غير معرف

c. $\sqrt[4]{36 \times 108}$

$= \sqrt[4]{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^3}$

$= \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3}$

$= 2 \cdot 3\sqrt[4]{3}$

$= 6\sqrt[4]{3}$

d. $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$

$= \sqrt[5]{\frac{256}{8}} \quad = \sqrt[5]{32}$

$= \sqrt[5]{2^5} \quad = 2$

e. $\sqrt[5]{32y^{10}}$

$= \sqrt[5]{2^5\, y^{10}}$

$= 2\, y^2$

f. $\sqrt[5]{-x^{20}}$

$= -x^{\frac{20}{5}}$

$= -x^4$

g. $\sqrt[5]{0 \cdot 01024}$

$= \sqrt[5]{\frac{32}{3125}}$

$= \sqrt[5]{\frac{2^5}{5^5}} \quad = \frac{2}{5}$

h. $\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{729}$

$= \sqrt[4]{3^4} + \sqrt[4]{3^4 \cdot 3^2}$

$= 3 + 3 \cdot 3^{\frac{2}{4}}$

$= 3 + 3 \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)$

$= 3 + 3\sqrt{3}$

i. $\sqrt{\frac{16x^{25}}{y^{12}}} : x, y > 0$

$= \sqrt[4]{\frac{2^4 \cdot x^{24} \cdot x}{y^{12}}}$

$= \frac{2|x^6|}{|y^3|} \cdot \sqrt[4]{x} \quad = \frac{2x^6}{y^3} \cdot \sqrt[4]{x}$

2. اكتب كل عدد مما يلي بالصورة الجذرية:

a. $x^{\frac{1}{6}}, x \geq 0$

$\sqrt[6]{x}$

b. $x^{\frac{2}{7}}$

$= \sqrt[7]{x^2}$

c. $y^{\frac{-9}{8}}, y > 0$

$= \frac{1}{\sqrt[8]{y^9}}$

d. $x^{1 \cdot 5}, x \geq 0$

$= x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$

e. $x^{\frac{3}{4}}, x \geq 0$

$= \sqrt[4]{x^3}$

f. $7^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{7^2}$

g. $y^{3 \cdot 2}$

$= y^{\frac{16}{5}} = \sqrt[5]{y^{16}}$

h. $x^{-\frac{2}{3}} : x \neq 0$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

3. بسّط كل عدد من الأعداد التالية (دون استخدام الآلة الحاسبة):

a. $64^{\frac{2}{3}}$

$= (2^6)^{\frac{2}{3}} \quad = 2^{6\times\frac{2}{3}}$

$= 2^4 \quad = 16$

b. $(-32)^{-\frac{4}{5}}$

$= \left((-2)^5\right)^{-\frac{4}{5}} \quad = (-2)^{-4}$

$= \frac{1}{(-2)^4} \quad = \frac{1}{16}$

c. $4^{1.5}$

$= 4^{\frac{3}{2}} \quad = (2^2)^{\frac{3}{2}}$

$= 2^{2\times\frac{3}{2}} = 2^3 \quad = 8$

4. اكتب كل عدد بالصورة الأسية:

a. $\sqrt{7x^3}, x \geq 0$

$(7x^3)^{\frac{1}{2}}$

b. $\sqrt{(7x)^3}, x \geq 0$

$(7x)^{\frac{3}{2}}$

c. $\left(\sqrt{7x}\right)^3, x \geq 0$

$= \left((7x)^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (7x)^{\frac{1}{2}\times 3} \quad = (7x)^{\frac{3}{2}}$

d. $\sqrt[3]{(5xy)^6}$

$= (5xy)^{\frac{6}{3}} \quad = (5xy)^2$

e. $\sqrt[4]{81x^3}, x \geq 0$

$= (81x^3)^{\frac{1}{4}}$

$= (3^4x^3)^{\frac{1}{4}} \quad = 3\cdot x^{\frac{3}{4}}$

f. $\sqrt{0\cdot 0049t^{52}}$

$= (0\cdot 0049t^{52})^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\frac{49\,t^{52}}{10000}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{7^2t^{52}}{10^4}\right)^{\frac{1}{2}} \quad = \frac{7\,t^{26}}{10^2}$

g. $\sqrt[5]{(1024)^3}$

$= (1024)^{\frac{3}{5}} \quad = (2^{10})^{\frac{3}{5}}$

$= 2^{10\times\frac{3}{5}} \quad = 2^6 \quad = 64$

5. بسّط كلاً مما يلي (دون استخدام الآلة الحاسبة):

a. $2\sqrt[4]{16^3}$

$= 2\times 16^{\frac{3}{4}}$

$= 2\times(2^4)^{\frac{3}{4}} \quad = 2\times 2^3$

$= 2^4 = 16$

b. $\sqrt[3]{(-27)^{-4}}$

$= (-27)^{\frac{-4}{3}} \quad = \left((-3)^3\right)^{-\frac{4}{3}}$

$= (-3)^{3\times\frac{-4}{3}} \quad = (-3)^{-4}$

$= \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$

c. $\sqrt[5]{-243}$

$= \sqrt[5]{(-3)^5} = -3$

d. $x^{\frac{2}{7}}\cdot x^{\frac{3}{14}}$

$x \geq 0$

$= x^{\frac{2}{7}+\frac{3}{14}}$

$= x^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{x}$

e. $x^{\frac{3}{5}} \div x^{\frac{1}{10}}$

$x > 0$

$x^{\frac{3}{5}-\frac{1}{10}}$

$= x^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{x}$

f. $\frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}$

$x > 0, y > 0$

$= x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{-1}{4}-\frac{-1}{2}}$

$= x^{\frac{1}{6}}\cdot y^{\frac{1}{4}}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

g. $\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}$ $: x > 0, y > 0$

$= x^{\frac{1}{2}-\frac{-3}{4}} \cdot y^{\frac{-1}{3}-\frac{-1}{2}}$

$= x^{\frac{5}{4}} \cdot y^{\frac{1}{6}}$

h. $\left(\left(3^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}$ $: x > 0$

$= 3^{\frac{3}{2}\times 2\times\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{3}}$

$= 3 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}$

$= \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}$

i. $\left(\frac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^2}}\right)^{-12}$ $: t > 0$

$= \left(\frac{3 \cdot t^{\frac{1}{2}}}{3t^{2/3}}\right)^{-12} = \left(t^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\right)^{-12}$

$= \left(t^{-\frac{1}{6}}\right)^{-12} = t^{-\frac{1}{6}\times -12}$

$= t^2$

6. أوجد ناتج كلّ مما يلي في أبسط صورة:

a. $\sqrt{\sqrt[3]{64x^6}}$ $= \sqrt[6]{2^6 x^6} = 2|x| = \begin{cases} 2x & : x \geq 0 \\ -2x & : x < 0 \end{cases}$

b. $5^{\frac{2}{3}} \times 25^{-\frac{1}{3}}$ $= 5^{\frac{2}{3}} \times (5^2)^{-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{-2}{3}} = 5^{\frac{2}{3}+\frac{-2}{3}} = 5^0 = 1$

c. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}$ $= \frac{8^{\frac{2}{3}} \times 32^{\frac{1}{4}}}{8 \times 4^{\frac{1}{8}}} = \frac{(2^3)^{\frac{2}{3}} \times (2^5)^{\frac{1}{4}}}{2^3 \times (2^2)^{\frac{1}{8}}} = \frac{2^2 \times 2^{\frac{5}{4}}}{2^3 \times 2^{\frac{1}{4}}} = \frac{2^{\frac{13}{4}}}{2^{\frac{13}{4}}} = 1$

d. $\sqrt[10]{1024} - 2\sqrt[6]{2^6}$ $= \sqrt[10]{2^{10}} - 2\sqrt[6]{2^6} = 2 - 2\times 2 = -2$

e. $\frac{(32)^{\frac{1}{2}} \times (16)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{64}}$ $= \frac{(2^5)^{\frac{1}{2}} \times (2^4)^{-\frac{1}{3}}}{(2^6)^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{5}{2}} \times 2^{-\frac{4}{3}}}{2} = \frac{2^{\frac{5}{2}+\frac{-4}{3}}}{2} = \frac{2^{\frac{7}{6}}}{2} = 2^{\frac{7}{6}-1} = 2^{\frac{1}{6}}$

f. $(2 - \sqrt[3]{8})(2 + \sqrt[3]{8})$ $= (2 - \sqrt[3]{2^3})(2 + \sqrt[3]{2^3})$

$= (2-2)(2+2) = 0 \times 4 = 0$

7. أوجد عدداً x بحيث يكون $(4+\sqrt{5})\times x$ عدداً نسبياً.

المرافق $x = 4 - \sqrt{5}$

$(4+\sqrt{5})\times x = (4+\sqrt{5})\times(4-\sqrt{5}) = (4)^2 - (\sqrt{5})^2 = 11$

UULA
صفوة معلمي الكويت
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

حل المعادلات

1. حل كلاً من المعادلات التالية:

a. $3\sqrt{x}+3=15$

$3\sqrt{x}=12$

$\sqrt{x}=4$

$x=16\in[0,\infty)$

$\therefore$ م.ح $=\{16\}$

شرط الحل:

$x\geq 0$

$[0,\infty)$

b. $\sqrt{x+3}=5$

$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=5^2$

$x+3=25$

$x=22\in[-3,\infty)$

$\therefore$ م.ح $=\{22\}$

شرط الحل:

$x+3\geq 0$

$x\geq -3$

$[-3,\infty)$

c. $(x+5)^{\frac{2}{3}}=4$

$\left[(x+5)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}=[2^2]^{\frac{3}{2}}$

$|x+5|=2^3$

$|x+5|=8$

$x+5=8$ | $x+5=-8$

$x=3$ | $x=-13$

$\therefore$ م.ح $=\{3,-13\}$

d. $(x+1)^{\frac{3}{2}}-2=25$

$(x+1)^{\frac{3}{2}}=27$

$\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}=[27]^{\frac{2}{3}}$

$x+1=[3^3]^{\frac{2}{3}}=9$

$x=8\in[-1,\infty)$

$\therefore$ م.ح $=\{8\}$

شرط الحل:

$x+1\geq 0$

$x\geq -1$

$[-1,\infty)$

e. $\sqrt{3-4x}-2=0$

$\left(\sqrt{3-4x}\right)^2=(2)^2$

$3-4x=4$

$-4x=4-3$

$-4x=1$

$x=\frac{-1}{4}\in\left(-\infty,\frac{3}{4}\right]$

$\therefore$ م.ح $=\left\{\frac{-1}{4}\right\}$

شرط الحل:

$3-4x\geq 0$

$-4x\geq -3$

$x\leq\frac{3}{4}$

$\left(-\infty,\frac{3}{4}\right]$

f. $2(2x+4)^{\frac{3}{4}}=16$

$(2x+4)^{\frac{3}{4}}=8$

$\left[(2x+4)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}}=[8]^{\frac{4}{3}}$

$2x+4=16$

$2x=12$

$x=6\in[-2,\infty)$

$\therefore$ م.ح $=\{6\}$

شرط الحل:

$2x+4\geq 0$

$x\geq -2$

$[-2,\infty)$

g. $(5-3x)^{\frac{3}{2}}+4=3$

$(5-3x)^{\frac{3}{2}}=-1\quad\because -1<0$

$\therefore$ م.ح $=\emptyset$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

3. حل كلاً من المعادلات التالية:

a. $\sqrt{11x+3}-2x=0$

$\sqrt{11x+3}=2x$

$\left(\sqrt{11x+3}\right)^2=(2x)^2$

$11x+3=4x^2 \Rightarrow 4x^2-11x-3=0$

شرط الحل:

$11x+3\geq 0$ $\quad 2x\geq 0$

$x\geq \frac{-3}{11}$ $\quad x\geq 0$

$[0,\infty)$

$(x-3)(4x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3\in[0,\infty) \\ x=\frac{-1}{4}\notin[0,\infty) \end{cases}$

$\therefore$ م.ح $=\{3\}$

b. $\sqrt{3x+13}-5=x$

شرط الحل:

$\sqrt{3x+13}=x+5$

$3x+13=(x+5)^2$

$3x+13=x^2+10x+25$

$x^2+7x+12=0$

$3x+13\geq 0$ $\quad x+5\geq 0$

$x\geq \frac{-13}{3}$ $\quad x\geq -5$

$\left[\frac{-13}{3},\infty\right)$

$(x+3)(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3\in\left[\frac{-13}{3},\infty\right) \\ x=-4\in\left[\frac{-13}{3},\infty\right) \end{cases}$

$\therefore$ م.ح $=\{-3,-4\}$

c. $\sqrt{-3x-5}=x+3$

شرط الحل:

$-3x-5=(x+3)^2=x^2+6x+9$

$\Rightarrow x^2+9x+14=0$

$(x+2)(x+7)=0$

$-3x-5\geq 0$ $\quad x+3\geq 0$

$x\leq \frac{-5}{3}$ $\quad x\geq -3$

$\left[-3,\frac{-5}{3}\right]$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-2\in\left[-3,\frac{-5}{3}\right] \\ x=-7\notin\left[-3,\frac{-5}{3}\right] \end{cases}$

$\therefore$ م.ح $=\{-2\}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

d. $(x+3)^{\frac{1}{2}} - 1 = x$

شرط الحل:

$x+3 \geq 0 \quad x+1 \geq 0$

$x \geq -3 \quad x \geq -1$

$[-1, \infty)$

$(x+3)^{\frac{1}{2}} = x+1$

$x+3 = (x+1)^2$

$x+3 = x^2+2x+1$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1, \infty) \\ x = -2 \notin [-1, \infty) \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \{1\} = $ ح.م ∴

e. $x+8 = (x^2+16)^{\frac{1}{2}}$

شرط الحل:

$x+8 \geq 0 \quad x^2+16 \geq 0$

$x \geq -8$

$[-8, \infty)$

$(x+8)^2 = x^2+16$

$x^2+16x+64 = x^2+16$

$16x = 16 - 64 = -48$

$x = \frac{-48}{16} = -3 \in [-8, \infty)$

$\{-3\} = $ ح.م ∴

f. $\sqrt{10x} - 2\sqrt{5x-25} = 0$

شرط الحل:

$10x \geq 0 \quad 5x-25 \geq 0$

$x \geq 0 \quad x \geq 5$

$[5, \infty)$

$\sqrt{10x} = 2\sqrt{5x-25}$

$10x = 4(5x-25)$

$10x = 20x - 100$

$-10x = -100 \Rightarrow x = 10 \in [5, \infty)$

$\{10\} = $ ح.م ∴

g. $(3x+2)^{\frac{1}{2}} - (2x+7)^{\frac{1}{2}} = 0$

شرط الحل:

$3x+2 \geq 0 \quad 2x+7 \geq 0$

$x \geq \frac{-2}{3} \quad x \geq \frac{-7}{2}$

$\left[\frac{-2}{3}, \infty\right)$

$(3x+2)^{\frac{1}{2}} = (2x+7)^{\frac{1}{2}}$

$3x+2 = 2x+7$

$3x - 2x = 7 - 2$

$x = 5 \in \left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$

$\{5\} = $ ح.م ∴

UULA
صفوة معلمي الكويت

h. $(x-9)^{\frac{1}{2}}+1=x^{\frac{1}{2}}$

شرط الحل:

$x-9\geq 0$

$x\geq 9$

$(x-9)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}-1$

$x\geq 0$

$x-9=(x^{\frac{1}{2}}-1)^2$

$x^{\frac{1}{2}}-1\geq 0$

$x-9=x-2x^{\frac{1}{2}}+1$

$x^{\frac{1}{2}}\geq 1$

$2x^{\frac{1}{2}}=9+1=10$

$x\geq 1$

$x^{\frac{1}{2}}=5$

$\therefore x\in[9,\infty)$

$x=25\in[9,\infty)$

$\therefore$ م.ج $=\{25\}$

معلق ⚠

i. $(2x+3)^{\frac{3}{4}}-3=5$

شرط الحل:

$2x+3\geq 0$

$(2x+3)^{\frac{3}{4}}=8$

$x\geq \frac{-3}{2}$

$2x+3=8^{\frac{4}{3}}$

$\left[\frac{-3}{2},\infty\right)$

$2x+3=16$

$2x=13$

$x=6.5\in\left[\frac{-3}{2},\infty\right)$

$\therefore$ م.ج $=\{6.5\}$

j. $2(x-1)^{\frac{4}{3}}+4=36$

$2(x-1)^{\frac{4}{3}}=32$

$(x-1)^{\frac{4}{3}}=16$

$|x-1|=16^{\frac{3}{4}}$

$|x-1|=8\Rightarrow$

- $x-1=8\Rightarrow x=9$
- $x-1=-8\Rightarrow x=-7$

$\therefore$ م.ج $=\{9,-7\}$

k. $(3x+2)^{\frac{1}{2}}=8(3x+2)^{\frac{-1}{2}}$

شرط الحل:

$3x+2>0$

$3x+2=64(3x+2)^{-1}$

$x>\frac{-2}{3}$

$\frac{3x+2}{1}=\frac{64}{3x+2}$

$\left(\frac{-2}{3},\infty\right)$

$(3x+2)^2=64$

$3x+2=\pm\sqrt{64}$

- $3x+2=8\Rightarrow$

$3x=6\Rightarrow$

معلق ⚠

$x=2\in\left(\frac{-2}{3},\infty\right)$

- $3x+2=-8\Rightarrow$

$3x=-10\Rightarrow$

$x=\frac{-10}{3}\notin\left(\frac{-2}{3},\infty\right)$

$\therefore$ م.ج $=\{2\}$

l. $(2x+1)^{\frac{1}{3}}=(3x+2)^{\frac{1}{3}}$

$\left((2x+1)^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left((3x+2)^{\frac{1}{3}}\right)^3$

$2x+1=3x+2$

$2x-3x=2-1$

$-x=1$

$x=-1$

$\therefore$ م.ج $=\{-1\}$

صفوة معلمي الكويت

معلق ⚠

m. $(2x-1)^{\frac{1}{3}} = (x+1)^{\frac{1}{6}}$

شرط الحل:

$2x-1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{2}$

$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

$\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

$\left[(2x-1)^{\frac{1}{3}}\right]^6 = \left[(x+1)^{\frac{1}{6}}\right]^6$

$(2x-1)^2 = x+1$

$4x^2 - 4x + 1 = x + 1$

$4x^2 - 5x = 0$

$x(4x-5) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \notin \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

$x = \frac{5}{4} \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

$\therefore$ م.ج $= \left\{\frac{5}{4}\right\}$

n. $(x+5)^{\frac{1}{2}} - (5-2x)^{\frac{1}{4}} = 0$

شرط الحل:

$x+5 \geq 0$

$x \geq -5$

$5-2x \geq 0$

$-2x \geq -5$

$x \leq \frac{5}{2}$

$\left[-5, \frac{5}{2}\right]$

$(x+5)^{\frac{1}{2}} = (5-2x)^{\frac{1}{4}}$

$\left[(x+5)^{\frac{1}{2}}\right]^4 = \left[(5-2x)^{\frac{1}{4}}\right]^4$

$(x+5)^2 = 5-2x$

$x^2 + 10x + 25 - 5 + 2x = 0$

$x^2 + 12x + 20 = 0$

$(x+2)(x+10) = 0 \Rightarrow$

$x = -2 \in \left[-5, \frac{5}{2}\right]$

$x = -10 \notin \left[-5, \frac{5}{2}\right]$

$\therefore$ م.ج $= \{-2\}$

5. صندوق مكعب الشكل سعته $150\ m^3$ أوجد طول ضلعه.

$x^3 = 150 \Rightarrow x = \sqrt[3]{150}$

6. x, y هما عددان حقيقيان.

a. أوجد الناتج: $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$= x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

b. باستخدام الصيغة السابقة اكتب الكسر في أبسط صورة :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3\times 2} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3\times 2} + \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3-2}$$

$$= \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

صفوة معلمي الكويت

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

7. حل كلاً من المعادلات الأسية التالية:

a. $5^{2x-3} = 125$

$5^{2x-3} = 5^3$

$2x - 3 = 3$

$2x = 6$

$x = 3$

b. $3^{x+1} = 1$

$3^{x+1} = 3^0$

$x + 1 = 0$

$x = -1$

c. $3^{x^2+5} = 3^9$

$x^2 + 5 = 9$

$x^2 = 4$

$x = \mp\sqrt{4}$

$x = \mp 2$

d. $3^{x^2-5x} = \frac{1}{9^2}$

$3^{x^2-5x} = 9^{-2}$

$3^{x^2-5x} = (3^2)^{-2}$

$3^{x^2-5x} = 3^{-4}$

$x^2 - 5x = -4$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1\,, \quad x = 4$

e. $4^x = 2^x$

$(2^2)^x = 2^x$

$2^{2x} = 2^x$

$2x = x$

$x = 0$

f. $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.25$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\therefore n = 2$

g. $5^x = 125\sqrt{5}$

$5^x = 5^3 \cdot 5^{\frac{1}{2}}$

$5^x = 5^{3 \cdot 5}$

$\therefore x = 3 \cdot 5$

h. $5^{x^2-3x} = 1$

$5^{x^2-3x} = 5^0$

$\therefore x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0\,, x = 3$

i. $(3^x - 27).(2^x - 1) = 0$

$3^x - 27 = 0$

$3^x = 27$

$3^x = 3^3$

$\therefore x = 3$

$2^x - 1 = 0$

$2^x = 1$

$2^x = 2^0$

$\therefore x = 0$

j. $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^x$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{5^3}{2^3}\right)^x$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3x}$

$x - 1 = -3x$

$4x = 1$

$x = \frac{1}{4}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

مجال الدالة

في التمارين حدد مجال كل من الدوال التالية:

7) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 - 1$ دالة كثيرة حدود $D_f = \mathbb{R}$

8) $g(x) = \sqrt{3x-7} + 2$

$a(x) = \sqrt{3x-7}$

$3x - 7 \geq 0 \Rightarrow$

$x \geq \frac{7}{3} \Rightarrow$

$D_a = [\frac{7}{3}, \infty)$

$b(x) = 2$ دالة ثابتة

$D_b = \mathbb{R}$

$\therefore Dg = [\frac{7}{3}, \infty) \cap \mathbb{R} = [\frac{7}{3}, \infty)$

9) $t(x) = \frac{\sqrt{-2x}+3}{x-1}$

البسط	المقام	أصفار المقام
$h(x) = \sqrt{-2x} + 3$	$g(x) = x - 1$	$x - 1 = 0$
$a(x) = \sqrt{-2x}$	كثيرة حدود	$\Rightarrow x = 1$
$-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$	$D_g = \mathbb{R}$	
$\therefore Da = (-\infty, 0]$		
$b(x) = 3$		
$D_b = \mathbb{R}$		

$\therefore Dh = (-\infty, 0] \cap \mathbb{R} = (-\infty, 0]$

$\therefore D_t = \big((-\infty, 0] \cap \mathbb{R}\big) - \{1\} = (-\infty, 0]$

10) $h(x) = -\frac{3x-1}{5-2x}$ دالة جدودية نسبية

أصفار المقام $\rightarrow$ $5 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow \therefore Dh = \mathbb{R} - \{\frac{5}{2}\}$

11) $u(x) = \sqrt[3]{7-5x}$ دالة جذر تكعيبي لكثيرة حدود $D_u = \mathbb{R}$

12) $v(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{3+x}}$

البسط	المقام	أصفار المقام
$h(x) = 2x - 1$	$g(x) = \sqrt{3+x}$	$\sqrt{3+x} = 0$
دالة كثيرة حدود	$3 + x \geq 0$	$3 + x = 0$
$D_h = \mathbb{R}$	$x \geq -3$	$x = -3$
	$D_g = [-3, \infty)$	

$\therefore D_\vartheta = (\mathbb{R} \cap [-3, \infty)) - \{-3\} = (-3, \infty)$

صفوة معلمي الكويت

13) $h(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{5+\sqrt{2x-1}}$

البسط

$a(x)=\sqrt{x-2}$

$x-2\geq 0$

$x\geq 2$

$D_a=[2,\infty)$

المقام

$b(x)=5+\sqrt{2x-1}$

$m(x)=5$

$D_m=\mathbb{R}$

$n(x)=\sqrt{2x-1}$

$2x-1\geq 0$

$x\geq \frac{1}{2}$

$D_n=\left[\frac{1}{2},\infty\right)$

$\therefore D_b=\mathbb{R}\cap\left[\frac{1}{2},\infty\right)=\left[\frac{1}{2},\infty\right)$

أصفار المقام

$5+\sqrt{2x-1}=0$

$\sqrt{2x-1}=-5$

$-5<0$

لا يوجد

$\therefore D_h=[2,\infty)\cap\left[\frac{1}{2},\infty\right)=[2,\infty)$

14) $u(x)=\frac{\sqrt{3+4x}-3}{25-9x^2}$

البسط

$h(x)=\sqrt{3+4x}-3$

$a(x)=\sqrt{3+4x}$

$3+4x\geq 0$

$x\geq \frac{-3}{4}$

$D_a=\left[\frac{-3}{4},\infty\right)$

$b(x)=-3$

$D_b=\mathbb{R}$

$\therefore D_h=\mathbb{R}\cap\left[\frac{-3}{4},\infty\right)=\left[\frac{-3}{4},\infty\right)$

المقام

$g(x)=25-9x^2$

دالة كثيرة حدود

$D_g=\mathbb{R}$

أصفار المقام

$25-9x^2=0$

$x^2=\frac{25}{9}$

$x=\mp\sqrt{\frac{25}{9}}$

$x=\mp\frac{5}{3}$

$\therefore D_u=\left(\left[\frac{-3}{4},\infty\right)\cap\mathbb{R}\right)-\left\{\frac{-5}{3},\frac{5}{3}\right\}=\left[\frac{-3}{4},\infty\right)-\left\{\frac{5}{3}\right\}$

15) $v(x)=\underbrace{\frac{3}{x+1}}_{h(x)}-\underbrace{\frac{2}{x^2-1}}_{g(x)}$

$h(x)=\frac{3}{x+1}$

حدودية نسبية

$x+1=0$

$x=-1$

$\therefore Dh=\mathbb{R}-\{-1\}$

$g(x)=\frac{2}{x^2-1}$

حدودية نسبية

$x^2-1=0$

$x=\mp 1$

$D_g=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$\therefore D_\vartheta=D_h\cap Dg=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

16) $w(x) = \underbrace{\sqrt[3]{x^2-2}}_{h(x)}\underbrace{(\sqrt{2x-3})}_{g(x)}$

$h(x) = \sqrt[3]{x^2-2}$

جذر تكعيبي لكثيرة حدود

$D_h = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{2x-3}$

$2x - 3 \geq 0$

$x \geq \frac{3}{2}$

$D_g = [\frac{3}{2}, \infty)$

$\therefore D_w = \mathbb{R} \cap [\frac{3}{2}, \infty) = [\frac{3}{2}, \infty)$

الدوال الحقيقة

الدوال التربيعية و نمذجتها

أي من الدوال التالية خطية؟ وأيها تربيعية؟

1. $y = x + 4$ دالة خطية

2. $f(x) = x^2 - 7$ دالة تربيعية

3. $y = 3(x-1)^2 + 4$

$= 3(x^2 - 2x + 1) + 4 = 3x^2 - 6x + 7$ دالة تربيعية

4. $r(x) = -7x$ دالة خطية

5. $f(x) = \frac{1}{2}(4x + 10)$

$= 2x + 5$ دالة خطية

6. $y = 3x(x-2)$

$= 3x^2 - 6x$ دالة تربيعية

7. $y = (2x+1)(x-2) + 4 - 2x^2$

$= 2x^2 - 4x + x - 2 + 4 - 2x^2 = -3x + 2$ دالة خطية

8. $y = (3x+7)^2 - (9x^2 - 49)$

$= 9x^2 + 42x + 49 - 9x^2 + 49 = 42x + 98$ خطية

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

في التمارين (1-4)، كل نقطة تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل. اكتب معادلة هذا القطع المكافئ، واذكر ما إذا كان الرسم البياني مفتوحاً إلى أعلى أم إلى الأسفل.

1) $F(3,2)$

$y = ax^2$

$2 = a \cdot (3)^2$

$a = \frac{2}{9} > 0$

$\therefore y = \frac{2}{9}x^2$

للأعلى

2) $F(8,-12)$

$y = ax^2$

$-12 = a \cdot 8^2$

$a = \frac{-12}{64} = \frac{-3}{16}$

$\therefore y = \frac{-3}{16}x^2$

للأسفل

3) $H(-6,-2)$

$y = ax^2$

$-2 = a(-6)^2$

$a = \frac{-2}{36} = \frac{-1}{18}$

$\therefore y = \frac{-1}{18}x^2$

للأسفل

4) $G(-2,5)$

$y = ax^2$

$5 = a(-2)^2$

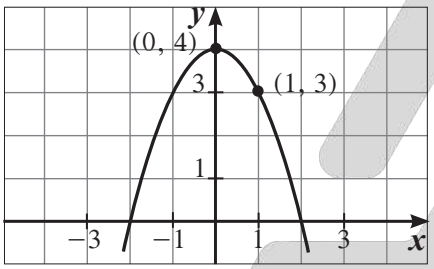
$a = \frac{5}{4} > 0$

$y = \frac{5}{4}x^2$

للأعلى

في التمارين (5-10)، اكتب معادلة كل قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.

5)



$V(0,4) \Rightarrow h = 0, \quad k = 4$

$y = a(x-h)^2 + k$

$y = ax^2 + 4$

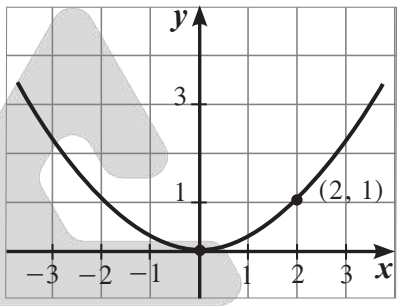
$(1,3) \Rightarrow 3 = a(1)^2 + 4$

$\Rightarrow a = -1$

$\therefore y = -x^2 + 4$

$\therefore$ معادلة القطع

6)



$V(0,0) \Rightarrow h = 0, \quad k = 0$

$y = a(x-h)^2 + k$

$y = ax^2$

$(2,1) \Rightarrow 1 = a \cdot (2)^2$

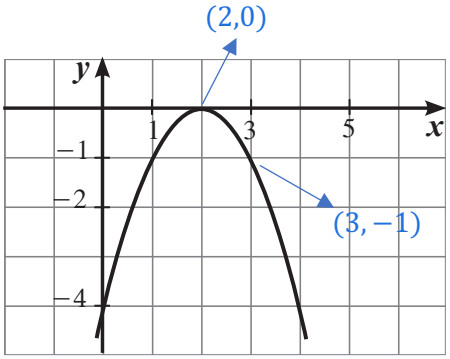
$\Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$\therefore y = \frac{1}{4}x^2$

$\therefore$ معادلة القطع

صفوة معلمي الكويت

7)



$V(2,0) \Rightarrow h = 2, \quad k = 0$

$y = a(x-h)^2 + k$

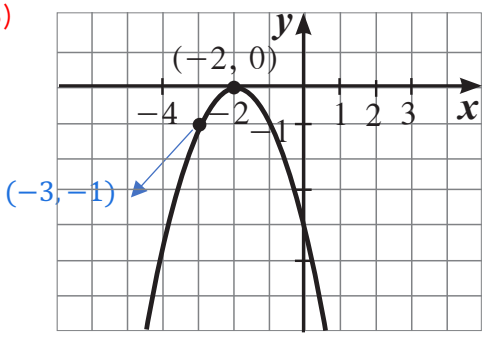
$y = a(x-2)^2$

$(3,-1) \Rightarrow -1 = a(3-2)^2$

$\Rightarrow a = -1$

$\therefore y = -(x-2)^2$

8)



$V(-2,0) \Rightarrow h = -2, \quad k = 0$

$y = a(x-h)^2 + k$

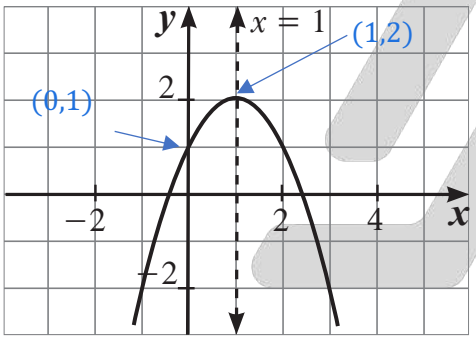
$y = a(x+2)^2$

$(-3,-1) \Rightarrow -1 = a(-3+2)^2$

$\Rightarrow a = -1$

$\therefore y = -(x+2)^2$

9)



$V(1,2) \Rightarrow h = 1, \quad k = 2$

$y = a(x-h)^2 + k$

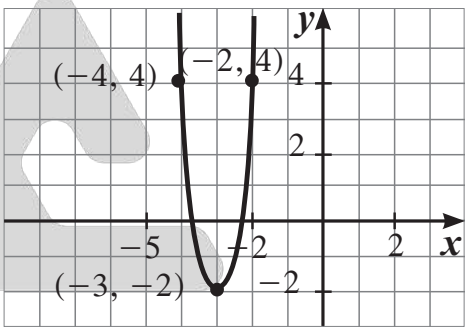
$y = a(x-1)^2 + 2$

$(0,1) \Rightarrow 1 = a(0-1)^2 + 2$

$\Rightarrow a = -1$

$\therefore y = -(x-1)^2 + 2$

10)



$V(-3,-3) \Rightarrow h = -3, \quad k = -2$

$y = a(x-h)^2 + k$

$y = a(x+3)^2 - 2$

$(-2,4) \Rightarrow 4 = a(-2+3)^2 - 2$

$\Rightarrow a = 6$

$y = 6(x+3)^2 - 2$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

في التمارين (11-18)، ارسم منحنى كل دالة من الدوال التالية:

11) $y = (x+3)^2$

∵شكل المعادلة: $y = a(x-\hbar)^2 + k$

∴هي تمثل قطع مكافئاً: $\hbar = -3\ , k = 0$

رأسه: $V(\hbar, k) = V(-3,0)$

الفتحة للأعلى $a = 1, \quad 1 > 0 \Rightarrow$

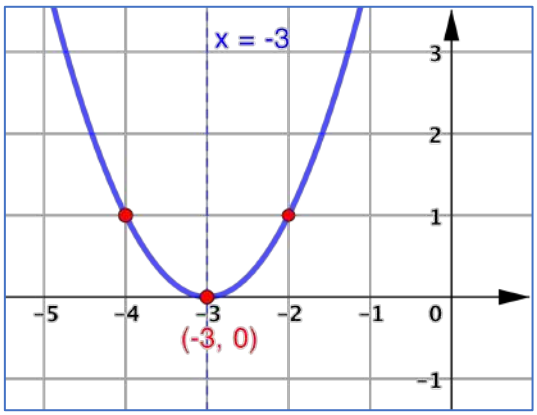
الرأس عنده قيمة صغرى

محور التماثل: $x = \hbar\ , \quad x = -3$

نقطة أخرى: $x = -2 \Longrightarrow$

$y = \big((-2)+3\big)^2 = 1 \Longrightarrow (-2,1)$

انعكاس النقطة $(-2,1)$ في محور التماثل هو النقطة: $(-4,1)$



12) $y = (x-2)^2$

∵شكل المعادلة: $y = a(x-\hbar)^2 + k$

∴هي تمثل قطع مكافئاً: $\hbar = 2\ , k = 0$

رأسه: $V(\hbar, k) = V(2,0)$

الفتحة للأعلى $a = 1, \quad 1 > 0 \Rightarrow$

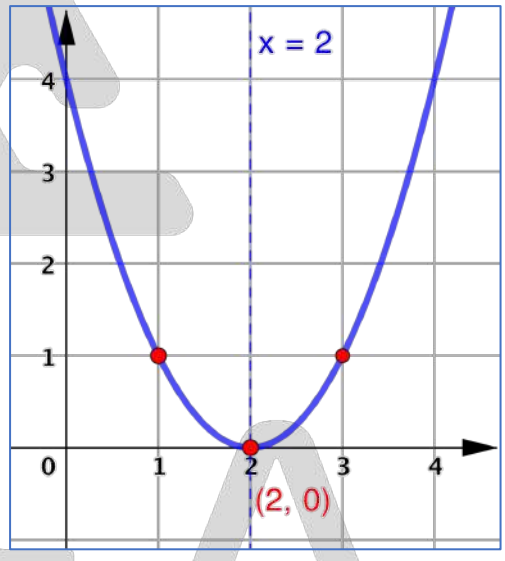
الرأس عنده قيمة صغرى

محور التماثل: $x = \hbar\ , \quad x = 2$

نقطة أخرى: $x = 1 \Longrightarrow$

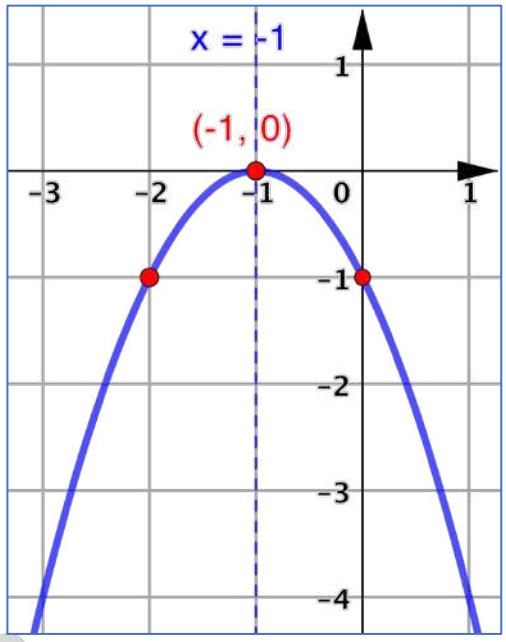
$y = \big((1)-2\big)^2 = 1 \Longrightarrow (1,1)$

انعكاس النقطة $(1,1)$ في محور التماثل هو النقطة: $(3,1)$



صفوة معلمي الكويت

13) $y = -(x+1)^2$



∵شكل المعادلة: $y = a(x-\hbar)^2 + k$

∴هي تمثل قطع مكافئاً: $\hbar = -1\ , k = 0$

رأسه: $V(\hbar, k) = V(-1,0)$

الفتحة للأسفل $a = -1, -1 < 0 \Rightarrow$

الرأس عنده قيمة عظمى

محور التماثل: $x = \hbar\ ,\quad x = -1$

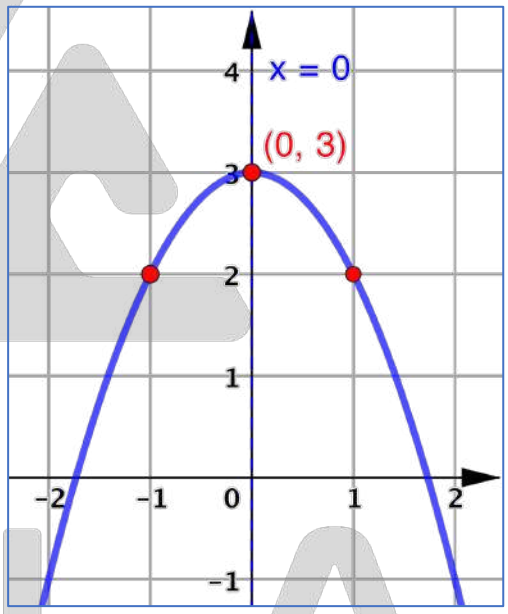
نقطة أخرى:

$x = 0 \Longrightarrow$

$y = -\big((0)+1\big)^2 = -1 \Longrightarrow (0,-1)$

انعكاس النقطة $(0,-1)$ في محور التماثل هو النقطة:
$(-2,-1)$

14) $y = -x^2 + 3$



∵شكل المعادلة: $y = a(x-\hbar)^2 + k$

∴هي تمثل قطع مكافئاً: $\hbar = 0\ , k = 3$

رأسه: $V(\hbar, k) = V(0,3)$

الفتحة للأسفل $a = -1, -1 < 0 \Rightarrow$

الرأس عنده قيمة عظمى

محور التماثل: $x = \hbar\ ,\quad x = 0$

نقطة أخرى:

$x = 1 \Longrightarrow$

$y = -(1)^2 + 3 = 2 \Longrightarrow (1,2)$

انعكاس النقطة $(1,2)$ في محور التماثل هو النقطة:
$(-1,2)$

صفوة معلمي الكويت

15) $y = (x+4)^2 + 1$

∵شكل المعادلة: $y = a(x-\hbar)^2 + k$

∴هي تمثل قطع مكافئاً: $\hbar = -4\ ,\ k = 1$ رأسه: $V(\hbar, k) = V(-4,1)$

$a = 1, \quad 1 > 0 \Leftarrow$ الفتحة للأعلى ، الرأس عنده قيمة صغرى

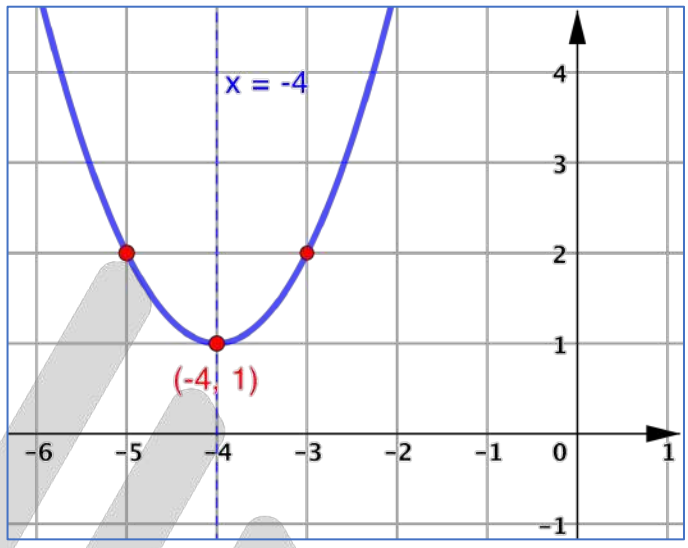
محور التماثل: $x = \hbar\ , x = -4$

نقطة أخرى: $x = -3 \Longrightarrow$

$y = \big((-3)+4\big)^2 + 1 = 2$

$\Longrightarrow (-3,2)$

انعكاس النقطة $(-3,2)$ في محور التماثل $(-5,2)$



16) $y = 3(x-2)^2 + 4$

∵شكل المعادلة: $y = a(x-\hbar)^2 + k$

∴هي تمثل قطع مكافئاً: $\hbar = 2\ ,\ k = 4$

رأسه: $V(\hbar, k) = V(2,4)$

الفتحة للأعلى $a = 3, \quad 3 > 0 \Rightarrow$

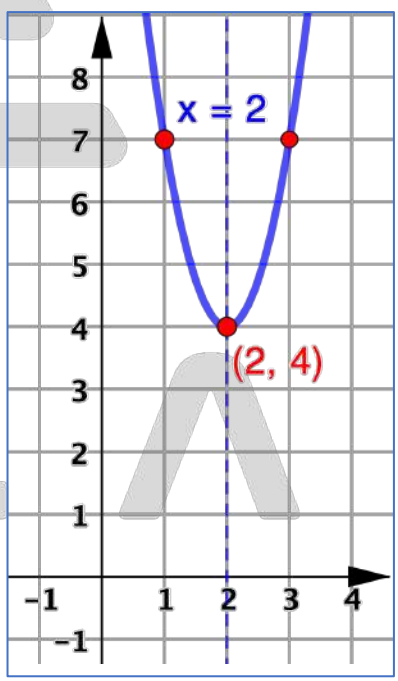
الرأس عنده قيمة صغرى

محور التماثل: $x = \hbar\ , \quad x = 2$

نقطة أخرى: $x = 1 \Longrightarrow$

$y = 3\big((1)-2\big)^2 + 4 = 7 \Longrightarrow (1,7)$

انعكاس النقطة $(1,7)$ في محور التماثل هو النقطة: $(3,7)$



صفوة معلمي الكويت

17) $y = -4(x+3)^2$

∵شكل المعادلة: $y = a(x-\hbar)^2 + k$

∴هي تمثل قطع مكافئاً: $\hbar = -3\ , k = 0$

رأسه: $V(\hbar, k) = V(-3,0)$

الفتحة للأسفل $a = -4, -4 < 0 \Rightarrow$

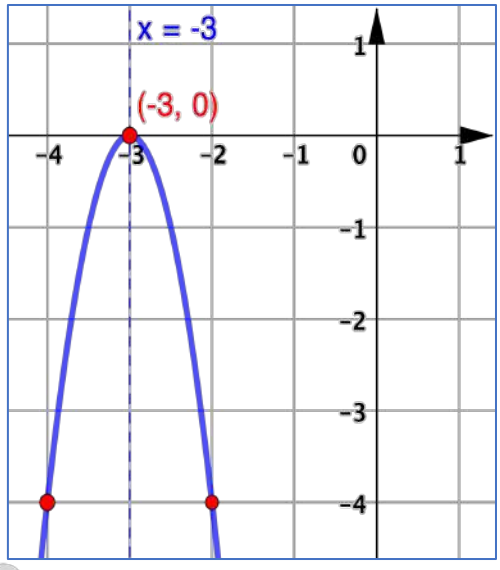
الرأس عنده قيمة عظمى

محور التماثل: $x = \hbar\ , \quad x = -3$

نقطة أخرى: $x = -2 \Longrightarrow$

$y = -4\big((-2)+3\big)^2 = -4 \Longrightarrow (-2, -4)$

انعكاس النقطة $(-2, -4)$ في محور التماثل هو النقطة: $(-4, -4)$



18) $y = -2(x+1)^2 - 4$

∵شكل المعادلة: $y = a(x-\hbar)^2 + k$

∴هي تمثل قطع مكافئاً: $\hbar = -1\ , k = -4$

رأسه: $V(\hbar, k) = V(-1, -4)$

الفتحة للأسفل $a = -2, -2 < 0 \Rightarrow$

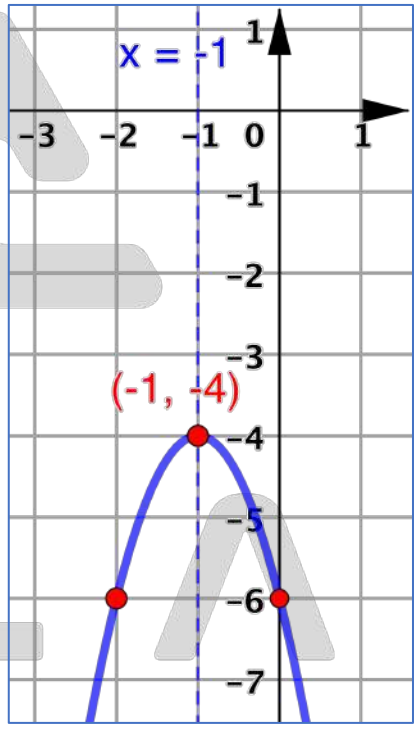
الرأس عنده قيمة عظمى

محور التماثل: $x = \hbar\ , \quad x = -1$

نقطة أخرى: $x = 0 \Longrightarrow$

$y = -2\big((0)+1\big)^2 - 4 = -6 \Longrightarrow (-2, -6)$

انعكاس النقطة $(-2, -6)$ في محور التماثل هو النقطة: $(0, -6)$



صفوة معلمي الكويت

19)صف الخطوات التي سوف تستخدمها لرسم الدالة:
$y = -2(x-3)^2 + 4$ بيانياً.

∵شكل المعادلة: $y = a(x-h)^2 + k$

∴هي تمثل قطع مكافئاً: $h = 3\ ,\ k = 4$

رأسه: $V(h,k) = V(3,4)$

معلق ⚠

الفتحة للأسفل $\Rightarrow$

الرأس عنده قيمة عظمى

محور التماثل: $x = h\ ,\quad x = 3$

نقطة أخرى: $x = 2 \Longrightarrow$

$y = -2((2)-3)^2 + 4 = 2 \Longrightarrow (2,2)$

انعكاس النقطة (2,2) في محور التماثل هو النقطة: (4,2)

ارسم كل قطع مكافئ مستخدماً المعلومات المعطاة. ثم اكتب معادلته بدلالة إحداثيات الرأس.

21)الرأس $V(0,0)$ ويمر بالنقطة $P(2,10)$

∵الرأس$V(0,0)$ ∴شكل المعادلة : $y = ax^2$

بالتعويض $P(x,y) = (2\ ,10)$

$10 = a(2)^2 \Longrightarrow a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$

∴معادلة القطع $y = 2.5x^2$

22)الرأس $V(0,0)$ ويمر بالنقطة $P(-2,-10)$

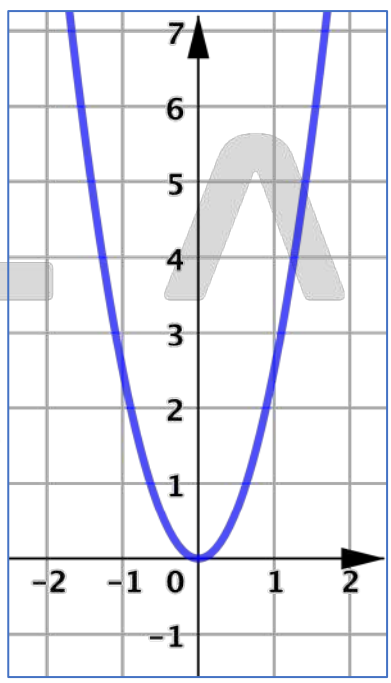
∵الرأس$V(0,0)$ ∴شكل المعادلة : $y = ax^2$

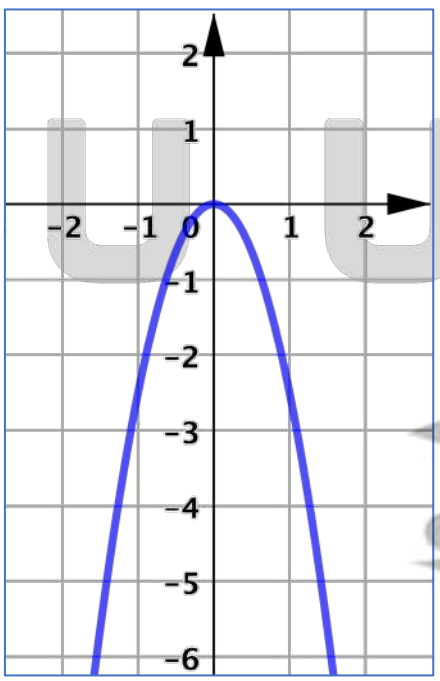
الرأس $V(h,k) = (0\ ,0)$ بالتعويض

النقطة من الرسم $P(x,y) = (-2\ ,-10)$

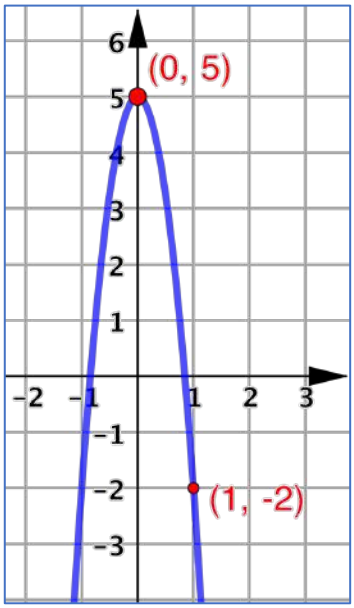
$-10 = a(-2)^2 \Longrightarrow a = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2} = -2.5$

∴معادلة القطع $\therefore y = -2.5x^2$





23) الرأس $V(0,5)$ ويمر بالنقطة $P(1,-2)$



∵ الرأس $V(0,5)$ ∴ شكل المعادلة : $y = a(x-h)^2+k$

بالتعويض الرأس $V(h,k) = (0,5)$
النقطة من الرسم $P(x,y) = (1,-2)$

$-2 = a(1-0)^2 + 5 \Longrightarrow$

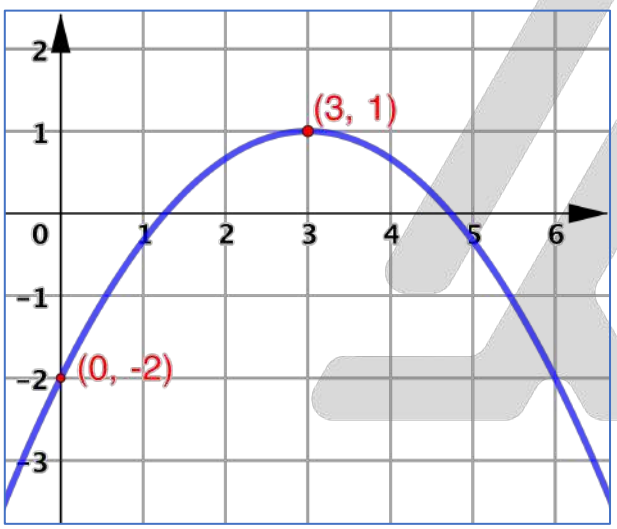
$a = -7$

∴ معادلة القطع

$y = -7(x-0)^2 + 5$

$y = -7x^2 + 5$

24) الرأس $V(3,1)$ والجزء المقطوع من محور الصادات 2-



∵ الرأس $V(3,1)$ ∴ شكل المعادلة :

$y = a(x-h)^2+k$

بالتعويض الرأس $V(h,k) = (3,1)$
النقطة من الرسم $P(x,y) = (0,-2)$

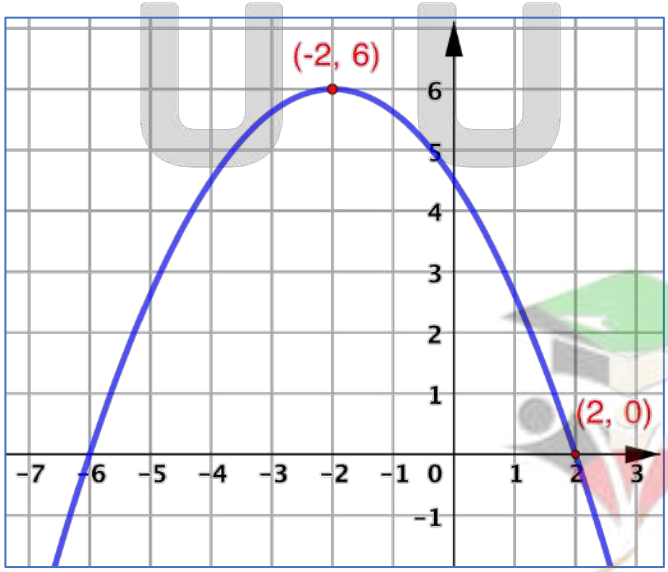
$-2 = a(0-3)^2 + 1 \Longrightarrow$

$a = \frac{-1}{3}$

∴ معادلة القطع

$y = \frac{-1}{3}(x-3)^2+1$

25) الرأس $V(-2,6)$ والجزء المقطوع من محور السينات 2



∵ الرأس $V(-2,6)$ ∴ شكل المعادلة :

$y = a(x-h)^2+k$

بالتعويض الرأس $V(h,k) = (-2,6)$
النقطة من الرسم $P(x,y) = (2,0)$

$0 = a[2-(-2)]^2 + 6 \Longrightarrow$

$a = \frac{-3}{8}$

∴ معادلة القطع

$y = \frac{-3}{8}(x+2)^2+6$

صفوة معلمي الكويت

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

في التمارين (3-1)، ارسم بيانياً الدالة المعطاة و معكوسها على محاور الإحداثيات نفسها. ثم اكتب معادلة المعكوس

1) $y = \frac{1}{2}x$

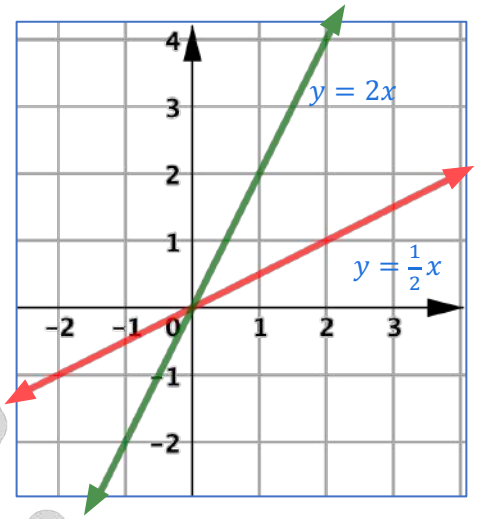
$x = \frac{1}{2}y$

$2x = y$

$\therefore y = 2x$

x	-2	0	2
y	-1	0	1

x	-1	0	1
y	-2	0	2



2) $y = \frac{x+1}{3}$

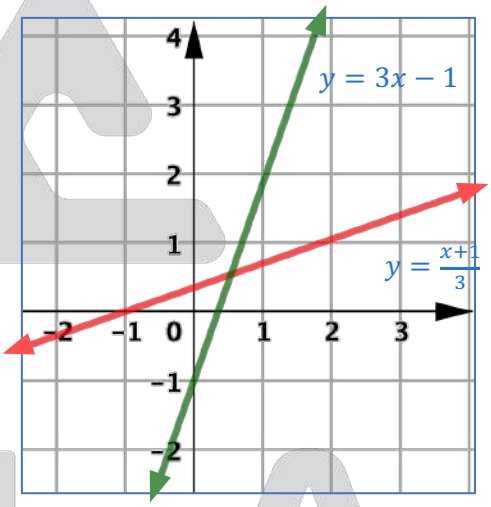
$x = \frac{y+1}{3}$

$3x = y + 1$

$y = 3x - 1$

x	-1	2
y	0	1

x	0	1
y	-1	2



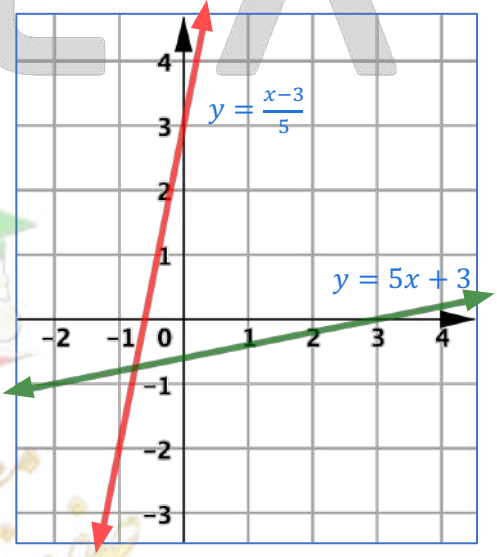
3) $y = 5x + 3$

$x = 5y + 3$

$y = \frac{x-3}{5}$

x	0	-1
y	3	-2

x	3	-2
y	0	-1



في التمارين (4-10)، اكتب معادلة المعكوس لكل دالة مما يلي:

4) $y = \frac{1}{2}x^2$

بدل x بـ y :

$x = \frac{1}{2}y^2$

حل بالنسبة لـ y :

$2x = y^2$

$y = \mp\sqrt{2x}$

5) $y = x^2 - 1$

بدل x بـ y :

$x = y^2 - 1$

حل بالنسبة لـ y :

$x + 1 = y^2$

$y = \mp\sqrt{x+1}$

معلق

6) $y = (x-2)^2 + 1$

بدل x بـ y :

$x = (y-2)^2 + 1$

حل بالنسبة لـ y :

$x - 1 = (y-2)^2$

$y - 2 = \mp\sqrt{x-1}$

$y = 2 \mp \sqrt{x-1}$

معلق

7) $y = \frac{x+5}{3}$

بدل x بـ y :

$x = \frac{y+5}{3}$

حل بالنسبة لـ y :

$3x = y + 5$

$y = 3x - 5$

8) $y = 6x + 2$

بدل x بـ y :

$x = 6y + 2$

حل بالنسبة لـ y :

$x - 2 = 6y$

$y = \frac{x-2}{6}$

9) $y = x^2 - 3$

بدل x بـ y :

$x = y^2 - 3$

حل بالنسبة لـ y :

$x + 3 = y^2$

$y = \mp\sqrt{x+3}$

معلق

10) $y = (x+5)^2 + 2$

بدل x بـ y :

$x = (y+5)^2 + 2$

حل بالنسبة لـ y :

$x - 2 = (y+5)^2$

$y + 5 = \mp\sqrt{x-2}$

$y = -5 \mp \sqrt{x-2}$

معلق

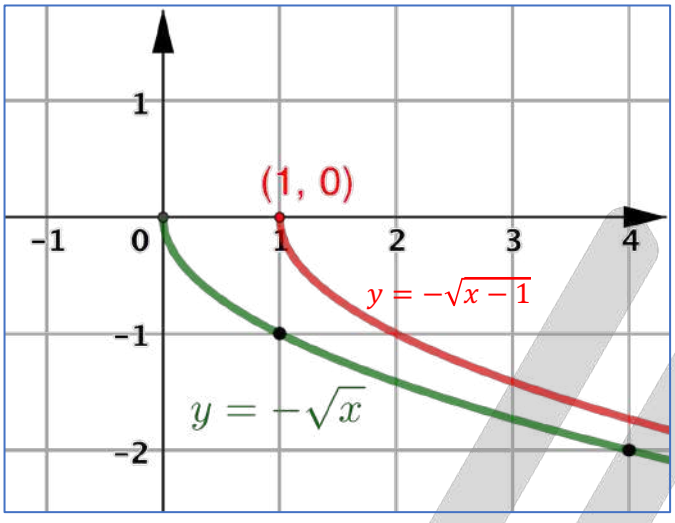
UULA
صفوة معلمي الكويت

في التمارين (11-14)، ارسم كل دالة جذر تربيعي. ثم اذكر المجال والمدى.

11) $y = -\sqrt{x-1}$

x	0	1	4
y	0	-1	-2

دالة المرجع $y = -\sqrt{x}$



$h = 1$ انسحاب دالة المرجع وحدة لليمين

$k = 0$ لا يوجد انسحاب رأسي

يبدأ بيان الدالة عند النقطة (1,0)

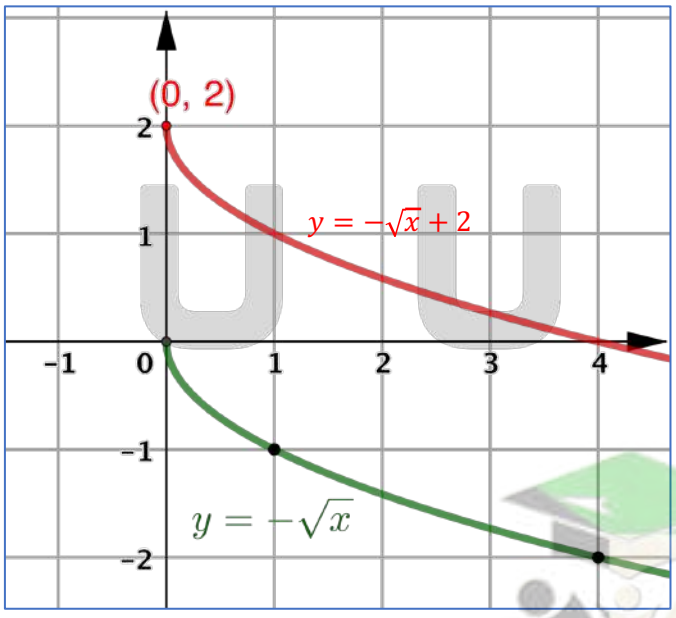
المجال= $[1,\infty)$

المدى= $(-\infty,0]$

12) $y = -\sqrt{x} + 2$

x	0	1	4
y	0	-1	-2

دالة المرجع $y = -\sqrt{x}$



$h = 0$ لا يوجد انسحاب أفقي

$k = 2$ انسحاب دالة المرجع وحدتين للأعلى

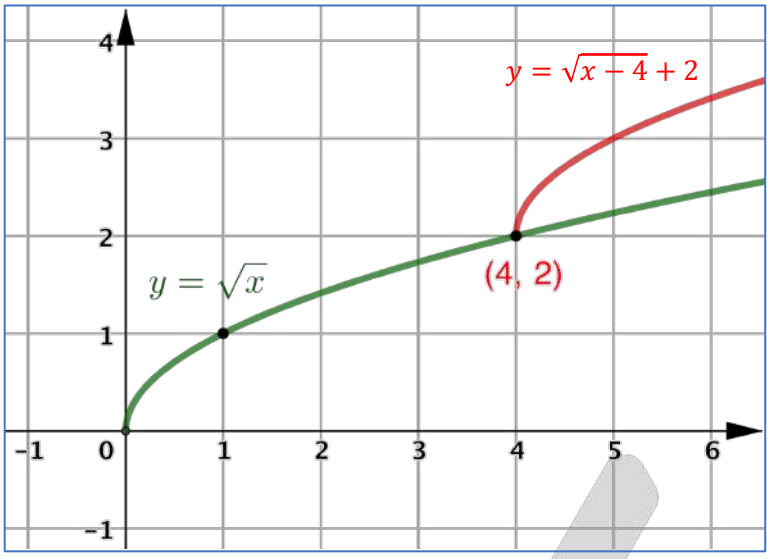
يبدأ بيان الدالة عند النقطة (0,2)

المجال= $[0,\infty)$

المدى= $(-\infty,2]$

صفوة معلمي الكويت

13) $y = \sqrt{x-4} + 2$



دالة المرجع $y = \sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2

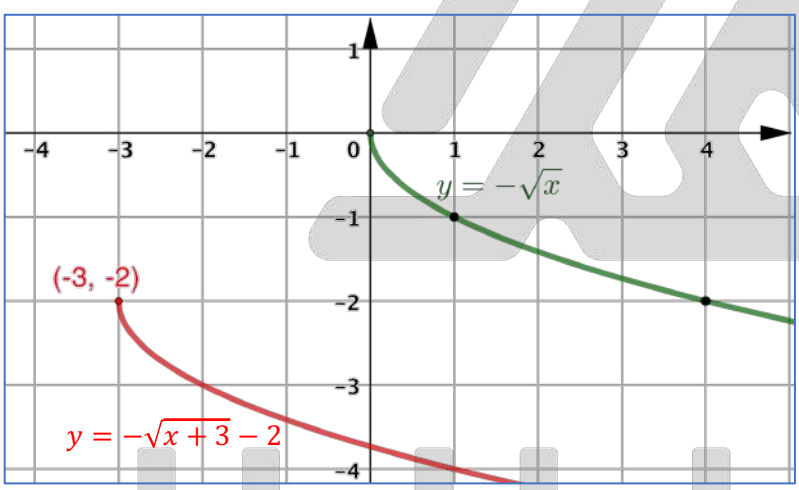
$h = 4$ انسحاب دالة المرجع 4 وحدات لليمين

$k = 2$ انسحاب دالة المرجع وحدتين للأعلى

يبدأ بيان الدالة عند النقطة (4,2)

المجال = $[4,\infty)$ المدى = $[2,\infty)$

14) $y = -\sqrt{x+3} - 2$



دالة المرجع $y = -\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	-1	-2

$h = -3$ انسحاب دالة المرجع 3 وحدات لليسار

$k = -2$ انسحاب دالة المرجع وحدتين للأسفل

يبدأ بيان الدالة عند النقطة $(-3, -2)$

المجال = $[-3,\infty)$ المدى= $(-\infty,-2]$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

حل المتباينات

1. أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

a. $(x-3)(2x+5)<0$

$(x-3)(2x+5)=0 \Rightarrow$

$x=3 \qquad x=\frac{-5}{2}$

$x-3>0\ , \qquad x>3$

$x-3<0\ , \qquad x<3$

$2x+5>0, \qquad x>\frac{-5}{2}$

$2x+5<0, \quad x<\frac{-5}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{-5}{2}$		3	∞
$x-3$	$-$	$-$	0		$+$
$2x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-3)(2x+5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

ح.م $=\left(\frac{-5}{2},3\right)$

b. $2x^2-3x-5\geq 0$

$2x^2-3x-5=0 \Rightarrow$

$(2x-5)(x+1)=0 \Rightarrow$

$x=\frac{5}{2}\ , \qquad x=-1$

$2x-5>0\ , \qquad x>\frac{5}{2}$

$2x-5<0\ , \qquad x<\frac{5}{2}$

$x+1>0, \qquad x>-1$

$x+1<0, \qquad x<-1$

x	$-\infty$	-1		$\frac{5}{2}$	∞
$2x-5$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	
$(2x-5)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

ح.م $=\left(-\infty,-1\right]\cup\left[\frac{5}{2},\infty\right)=\mathbb{R}-\left(-1,\frac{5}{2}\right)$

c. $-3x^2+2x<-1$

$-3x^2+2x+1<0 \Rightarrow$

$3x^2-2x-1>0$

$3x^2-2x-1=0 \Rightarrow$

$(x-1)(3x+1)=0 \Rightarrow$

$x=1\ , \quad x=\frac{-1}{3}$

$x-1>0\ , \qquad x>1$

$x-1<0, \qquad x<1$

$3x+1>0\ , \qquad x>\frac{-1}{3}$

$3x+1<0\ , \qquad x<\frac{-1}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1	∞
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	
$3x+1$	$-$	0	$+$	$+$	
$(x-1)(3x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

ح.م $=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,\infty)=\mathbb{R}-\left[\frac{-1}{3},1\right]$

UULA
صفوة معلمي الكويت

d. $4x^2 + 12x + 9 \geq 0$ $\Rightarrow (2x+3)^2 \geq 0$

$x \in \mathbb{R}$ محققة لكل قيم $\Rightarrow$ ح.م $= \mathbb{R}$

e. $-9x^2 + 6x < 1$

$\Rightarrow -9x^2 + 6x - 1 < 0 \Rightarrow$

$9x^2 - 6x + 1 > 0 \Rightarrow$

$(3x-1)^2 > 0$

$x = \frac{1}{3}$ ما عدا $x \in \mathbb{R}$ محققة لكل قيم $\Rightarrow$

ح.م $= \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

f. $21 + 4x > x^2$

$\Rightarrow -x^2 + 4x + 21 > 0 \Rightarrow$

$x^2 - 4x - 21 < 0$

$x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow$

$(x-7)(x+3) = 0 \Rightarrow$

$x = 7 , x = -3$

$x - 7 > 0 \ , x > 7$

$x - 7 < 0 \ , x < 7$

$x + 3 > 0 \ , x > -3$

$x + 3 < 0 \ , x < -3$

x	$-\infty$		-3		7		∞
$x-7$	$-$		$-$		0	$+$	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		
$(x-7)(x+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

ح.م $= (-3,7)$

UULA

صفوة معلمي الكويت

في التمارين (9-3)، حل المتباينات التالية:

3) $\frac{x-1}{x^2-4} < 0 \quad \Rightarrow \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} < 0$

أصفار البسط $x-1=0 \Rightarrow x=1$

أصفار المقام $(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x=2, x=-2$

$x-1>0,\ x>1$ $x-1<0,\ x<1$	$x-2>0, x>2$ $x-2<0, x<2$	$x+2>0,\ x>-2$ $x+2<0,\ x<-2$

x	$-\infty$		-2		1		2		∞
$x-1$	$-$		$-$		0	$+$		$+$	
$x-2$	$-$		0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$	$-$		0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}$	$-$	غير معرف		$+$	0	$-$	غير معرف	$+$	

م.ح $= (-\infty, -2) \cup (1,2)$

4) $\frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 0 \quad \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1} \leq 0$

أصفار البسط $(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=1, x=-1$

أصفار المقام : لا يوجد $x^2+1 \neq 0$

$x-1>0,\ x>1$ $x-1<0,\ x<1$	$x+1>0, x>-1$ $x+1<0, x<-1$	$x^2+1>0$

x	$-\infty$		-1		1		∞
$x-1$	$-$		$-$		0	$+$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		
x^2+1	$+$		$+$		$+$		
$\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1}$	$+$	0	$-$	0	$+$		

م.ح $= [-1,1]$

صفوة معلمي الكويت

5) $\frac{x^2+x-12}{x^2-4x+4} > 0$ $\frac{(x-3)(x+4)}{(x-2)^2} > 0$

أصفار البسط $(x-3)(x+4)=0 \Rightarrow x=3, x=-4$

أصفار المقام $(x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x-3>0,\ x>3$ $x-3<0,\ x<3$	$x+4>0, x>-4$ $x+4<0, x<-4$	$(x-2)^2 \geq 0$

x	$-\infty$		-4		2		3		∞
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		
$(x+2)^2$	$+$		$+$		0		$+$		
$\frac{(x-3)(x+4)}{(x-2)^2}$	$+$	0	$-$		غير معرف		0		$+$

ح.م $= (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

6) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3} \leq 0$

$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)+(x+1)}{(x+1)(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2x-2}{(x+1)(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-3)} \leq 0$

أصفار البسط $2(x-1)=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

أصفار المقام $(x+1)(x-3)=0 \Rightarrow x=-1, x=3$

$x-1>0 \quad x>1$ $x-1<0 \quad x<1$	$x+1>0 \quad x>-1$ $x+1<0 \quad x<-1$	$x-3>0 \quad x>3$ $x-3<0 \quad x<3$

معلق ⚠

x	$-\infty$		-1		1		3		∞
$2(x-1)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		
$\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-3)}$	$-$	غير معرف	$+$	0	$-$	غير معرف	$+$		

ح.م $= (-\infty, -1) \cup [1, 3)$

صفوة معلمي الكويت

7) $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-1}>0$

$\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-1}>0 \Rightarrow \frac{1(x-1)-2(x+2)}{(x+2)(x-1)}>0 \Rightarrow \frac{x-1-2x-4}{(x+2)(x-1)}>0 \Rightarrow \frac{(-x-5)}{(x+2)(x-1)}>0$

أصفار البسط $(-x-5)=0 \Rightarrow \quad x=-5$

أصفار المقام $(x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \quad x=1, x=-2$

$-x-5>0 \quad x<-5$
$-x-5<0 \quad x>-5$

$x+2>0 \quad x>-2$
$x+2<0 \quad x<-2$

$x-1>0, \quad x>1$
$x-1<0, \quad x<1$

x	$-\infty$		-5		-2		1		∞
$-x-5$	$+$	0	$-$		$-$		$-$		
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		
$\frac{(-x-5)}{(x+2)(x-1)}$	$+$	0	$-$	غير معرفة	$+$	غير معرفة	$-$		

ح.م $=(-\infty,-5)\cup(-2,1)$

معلق ⚠

8) $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}\geq 0$

$\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}\geq 0 \Rightarrow \frac{x(x-1)+2(x+1)}{(x+1)(x-1)}\geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+x+2}{(x+1)(x-1)}\geq 0$

أصفار البسط: لا يوجد $x^2+x+2\neq 0$

أصفار المقام $(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow \quad x=-1, x=1$

$x^2+x+2>0$

$x+1>0 \quad x>-1$
$x+1<0 \quad x<-1$

$x-1>0 \quad x>1$
$x-1<0 \quad x<1$

x	$-\infty$		-1		1		∞
x^2+x+2	$+$		$+$		$+$		
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		
$\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}$	$+$	غير معرفة	$-$	غير معرفة	$+$		

ح.م $=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)=\mathbb{R}-[-1,1]$

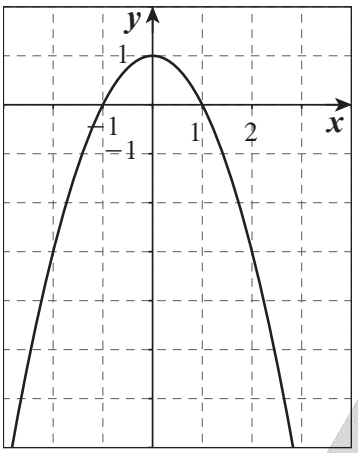
صفوة معلمي الكويت

دوال القوى ومعكوساتها

في التمارين (1-4)، الأشكال التالية تمثل دوالاً. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

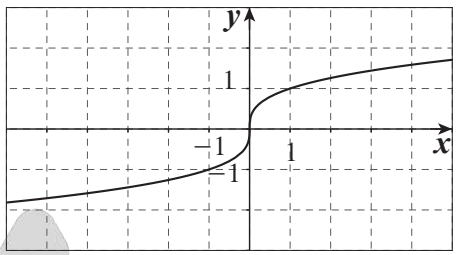
1) $y = -x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

زوجية، تماثل حول محور y



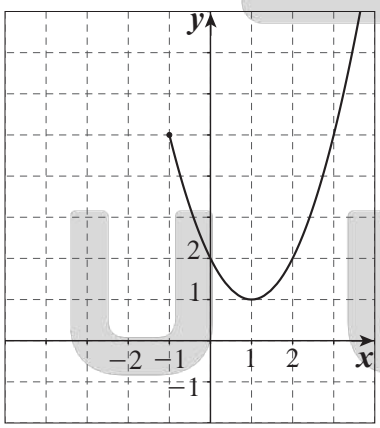
2) $y = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

دالة فردية، تماثل حول نقطة الأصل



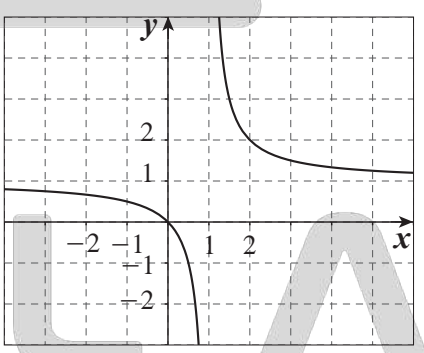
3) $y = x^2 - 2x + 2 \quad \forall x \in [-1, \infty)$

لا فردية ولا زوجية



4) $y = \frac{x}{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} / \{1\}$

لا فردية ولا زوجية



UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

في التمارين (9-5)، اذكر ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

5) $y = x^3$

بفرض: $y = f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \Rightarrow$

$\because f(-x) = -f(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ فردية

6) $y = (x-1)^3 + 2$

بفرض: $y = v(x) = (x-1)^3 + 2$

$v(-x) = (-x-1)^3 + 2$

$\because v(-x) \neq v(x) \Rightarrow$ v ليست زوجية

$\because v(-x) \neq -v(x) \Rightarrow$ v ليست فردية

7) $y = x^4$

بفرض: $y = g(x) = x^4$

$g(-x) = (-x)^4 = x^4 = g(x) \Rightarrow$

$\because g(-x) = g(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow g$ زوجية

8) $y = -x^4 + 3$

بفرض: $y = g(x) = -x^4 + 3$

$g(-x) = -(-x)^4 + 3 = -x^4 + 3 = g(x) \Rightarrow$

$\because g(-x) = g(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow g$ زوجية

9) $y = -\sqrt[4]{x}$

$D_f = [0, \infty) \Rightarrow$ ليست زوجية وليست فردية

في التمارين (15،10)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

10) $y = \frac{1}{3}x^3$

بدل: x بـ y

$x = \frac{1}{3}y^3$

حل بالنسبة لـ y

$y^3 = 3x$

المعكوس

$y = \sqrt[3]{3x}$

11) $y = 2\sqrt[4]{x} \quad : x \geq 0$

بدل: x بـ y

$x = 2\sqrt[4]{y}$

حل بالنسبة لـ y

$x^4 = 16y$

المعكوس

$y = \frac{x^4}{16} \quad : y \geq 0$

12) $y = \frac{1}{3}x^4 \quad : y \geq 0$

بدل: x بـ y

$x = \frac{1}{3}y^4$

حل بالنسبة لـ y

$y^4 = 3x$

المعكوس

$y = \pm\sqrt[4]{3x} \quad : x \geq 0$

13) $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$

بدل: x بـ y

$x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$

حل بالنسبة لـ y

$3x = \sqrt[3]{y}$

المعكوس

$y = (3x)^3$

$y = 27x^3$

14) $y = \sqrt[3]{x-1}$

بدل: x بـ y

$x = \sqrt[3]{y-1}$

حل بالنسبة لـ y

$x^3 = y - 1$

المعكوس

$y = x^3 + 1$

15) $y = (x+2)^4 - 3 \quad : y \geq -3$

بدل: x بـ y

$x = (y+2)^4 - 3$

حل بالنسبة لـ y

$x + 3 = (y+2)^4$

$y + 2 = \pm\sqrt[4]{x+3}$

المعكوس

$y = \pm\sqrt[4]{x+3} - 2$

$: x \geq -3$

معلق

صفوة معلمي الكويت

الدوال الحدودية

اكتب كل كثيرة حدود مما يلي بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود.

1. $(2x^2+9)-(3x^2-7)$

$= 2x^2+9-3x^2+7 = -x^2+16$ كثيرة حدود ثنائية من الدرجة الثانية

2. $(7x^2+8x-5)+(9x^2-9x)$

$= 7x^2+8x-5+9x^2-9x$

$= 16x^2-x-5$ كثيرة حدود ثلاثية من الدرجة الثانية

3. $(7x^3+9x^2+8x+11)-(5x^3-13x-16)$

$= 7x^3+9x^2+8x+11-5x^3+13x+16$

$= 2x^3+9x^2+21x+27$ كثيرة حدود رباعية من الدرجة الثالثة

4. $(30x^3-49x^2+7x)+(50x^3-75x-60x^2)$

$= 80x^3-109x^2-68x$ كثيرة حدود ثلاثية من الدرجة الثالثة

5. $\frac{3x^5+4x}{6}$ $= \frac{1}{2}x^5+\frac{2}{3}x$ كثيرة حدود ثنائية من الدرجة الخامسة

6. $5x^2(6x-2)$ $= 30x^3-10x^2$ كثيرة حدود ثنائية من الدرجة الثالثة

7. $(x^2+1)^2$ $= x^4+2x^2+1$ كثيرة حدود ثلاثية من الدرجة الرابعة

8. $(2c-3)(2c+4)(2c-1)$

$= (4c^2+8c-6c-12)(2c-1)$

$= (4c^2+2c-12)(2c-1)$

$= 8c^3-4c^2+4c^2-2c-24c+12$

$= 8c^3-26c+12$ كثيرة حدود ثلاثية من الدرجة الثالثة

9. $(w-1)^4$

$= (w-1)^2 \cdot (w-1)^2$

$= (w^2-2w+1)(w^2-2w+1)$

$= w^4-4w^3+6w^2-4w+1$ كثيرة حدود خماسية من الدرجة الرابعة

UULA
صفوة معلمي الكويت

عيّن سلوك النهاية لبيان كل دالة.

11. $y = 3x + 2$

المعامل الرئيسي $a = 3$ موجب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين إلى الأعلى

درجة الحدودية $n = 1$ فردي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار عكس اليمين أي إلى الأسفل

∴سلوك النهاية هو: (↙ , ↗)

12. $f(x) = -x^2 + x$

المعامل الرئيسي $a = -1$ سالب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين إلى الاسفل

درجة الحدودية $n = 2$ زوجي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار نفس اليمين أي إلى الأسفل

∴سلوك النهاية هو: (↙ , ↘)

13. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$

المعامل الرئيسي $a = \frac{1}{2}$ موجب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين إلى الأعلى

درجة الحدودية $n = 4$ زوجي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار نفس اليمين أي إلى الأعلى

∴سلوك النهاية هو: (↖ , ↗)

معلق ⚠

14. $y = -4x^4 + 5x^5$

المعامل الرئيسي $a = 5$ موجب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين إلى الأعلى

درجة الحدودية $n = 5$ فردي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار عكس اليمين أي إلى الأسفل

∴سلوك النهاية هو: (↙ , ↗)

15. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + x - 1$

المعامل الرئيسي $a = -\frac{1}{2}$ سالب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين إلى الاسفل

درجة الحدودية $n = 3$ فردي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار عكس اليمين أي إلى الأعلى

∴سلوك النهاية هو: (↖ , ↘)

صفوة معلمي الكويت

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

عيّن أصفار كل دالة وتكرارها.

1. $y = (x-1)(x+2)$

$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = 1$ صفر بسيط

$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow x = -2$ صفر بسيط

2. $y = (x+3)^3$

$x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3$ صفر مكرر 3 مرات

3. $y = x(x-2)^2(x+9)$

$x = 0$ صفر بسيط

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ صفر مكرر مرتين

$x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$ صفر بسيط

أوجد أصفار كل دالة مما يلي ثم ارسم بياناً تقريبياً لكل منها مراعياً سلوك النهاية لبيان كل دالة.

4. $y = (x-2)(x+2)$

$(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2 \, , (x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

∴أصفار الدالة هي: $\{-2, 2\}$

∵المعامل الرئيسي $a = 1$ موجب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين إلى الأعلى

∵درجة الحدودية $n = 2$ زوجي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار نفس اليمين أي إلى الأعلى

∴سلوك النهاية هو: $(\nwarrow , \nearrow)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

معلق ⚠

صفوة معلمي الكويت

5. $y = (x+1)(x-2)(x-3)$

$(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1\,,(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2, (x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$

∴أصفار الدالة هي: $\{-1,2,3\}$

المعامل الرئيسي $a = 1$ موجب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين
إلى الأعلى

درجة الحدودية $n = 3$ فردي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار عكس اليمين
أي إلى الأسفل

∴سلوك النهاية هو: $(\swarrow , \nearrow)$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-20	0	6	4	0	0	10

6. $y = x(x+2)^2$

$x = 0\,,(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$ مكرر

∴أصفار الدالة هي: $\{-2,0\}$

معلق ⚠

المعامل الرئيسي $a = 1$ موجب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين
إلى الأعلى

درجة الحدودية $n = 3$ فردي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار عكس اليمين
أي إلى الأسفل

∴سلوك النهاية هو: $(\swarrow , \nearrow)$

x	-3	-2	-1	0	1
y	-3	0	-1	0	9

صفوة معلمي الكويت

7. $y = (x+1)^2(x-2)(x-1)$

$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ مكرر, $(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$, $(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

∴أصفار الدالة هي: $\{-1,1,2\}$

المعامل الرئيسي $a = 1$ موجب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين
إلى الأعلى

درجة الحدودية $n = 4$ زوجي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار نفس اليمين
أي إلى الأعلى

∴سلوك النهاية هو: $(\nwarrow , \nearrow)$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	12	0	2	0	0	32

معلق ⚠

اكتب دالة كثيرة الحدود في الصورة العامة مستخدماً الأصفار المعطاة:

8. $1, -1$

$f(x) = (x-1)(x+1)$
$= x^2 - 1$

9. $0,1,2$

$g(x) = x(x-1)(x-2)$
$= (x^2 - x)(x-2)$
$= x^3 - 3x^2 + 2x$

10. $-4, -1, 3$

$h(x) = (x+4)(x+1)(x-3)$
$= (x+4)(x^2 - 2x - 3)$
$= x^3 - 2x^2 - 3x + 4x^2 - 8x - 12$
$= x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

11. $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 2$ (مكرر مرتين)

$m(x) = (2x-1)(2x+1)(x-2)^2$
$= (4x^2 - 1)(x^2 - 4x + 4)$
$= 4x^4 - 16x^3 + 16x^2 - x^2 + 4x - 4$
$= 4x^4 - 16x^3 + 15x^2 + 4x - 4$

UULA
صفوة معلمي الكويت

قسمة كثيرات الحدود

اقسم مستخدماً قسمة كثيرة الحدود المطولة.

1. $(x^2 - 3x - 40) \div (x + 5)$

$$\begin{array}{r|l} & \boldsymbol{x \;\; -8} \\ \hline x \;\; +5 & x^2 \;\; -3x \;\; -40 \\ & \underline{-x^2 \;\; -5x} \\ & \quad -8x \;\; -40 \\ & \quad \underline{+8x \;\; +40} \\ & \quad\quad 0 \end{array}$$

∴ الناتج $= x - 8$
الباقي $= 0$

2. $(x^3 + 3x^2 - x + 2) \div (x - 1)$

$$\begin{array}{r|l} & \boldsymbol{x^2 \;\; +4x \;\; +3} \\ \hline x \;\; -1 & x^3 \;\; +3x^2 \;\; -x \;\; +2 \\ & \underline{-x^3 \;\; +x^2} \\ & \quad 4x^2 \;\; -x \;\; +2 \\ & \quad \underline{-4x^2 \;\; +4x} \\ & \quad\quad 3x \;\; +2 \\ & \quad\quad \underline{-3x \;\; +3} \\ & \quad\quad\quad 5 \end{array}$$

∴ الناتج $= x^2 + 4x + 3$
الباقي $= 5$

3. $(x^3 - 13x - 12) \div (x - 4)$

$$\begin{array}{r|l} & \boldsymbol{x^2 \;\; +4x \;\; +3} \\ \hline x \;\; -4 & x^3 \;\; +0x^2 \;\; -13x \;\; -12 \\ & \underline{-x^3 \;\; +4x^2} \\ & \quad 4x^2 \;\; -13x \;\; -12 \\ & \quad \underline{-4x^2 \;\; +16x} \\ & \quad\quad 3x \;\; -12 \\ & \quad\quad \underline{-3x \;\; +12} \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

∴ الناتج $= x^2 + 4x + 3$
الباقي $= 0$

4. $(9x^3 - 18x^2 - x + 2) \div (3x + 1)$

$$\begin{array}{r|l} & \boldsymbol{3x^2 \;\; -7x \;\; +2} \\ \hline 3x \;\; +1 & 9x^3 \;\; -18x^2 \;\; -x \;\; +2 \\ & \underline{-9x^3 \;\; -3x^2} \\ & \quad -21x^2 \;\; -x \;\; +2 \\ & \quad \underline{+21x^2 \;\; +7x} \\ & \quad\quad 6x \;\; +2 \\ & \quad\quad \underline{-6x \;\; -2} \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

∴ الناتج $= 3x^2 - 7x + 2$
الباقي $= 0$

صفوة معلمي الكويت

بيّن ما إذا كانت كل ثنائية حداً عاملاً من عوامل $x^3 + 4x^2 + x - 6$

5. $x - 3$

	x^2	$+7x$	$+22$
x -3	x^3	$+4x^2$	$+x$ -6
	$-$ x^3	$+$ $-3x^2$	
		$7x^2$	$+x$ -6
		$-$ $7x^2$	$+$ $-21x$
			$22x$ -6
			$-$ $22x$ $+$ -66
			60

∴ الناتج $= x^2 + 7x + 22$

الباقي $= 60$, $60 \neq 0$

∴ $(x - 3)$ عاملاً من عوامل: $x^3 + 4x^2 + x - 6$

6. $x + 2$

	x^2	$+2x$	-3
x $+2$	x^3	$+4x^2$	$+x$ -6
	$-$ x^3	$+$ $2x^2$	
		$2x^2$	$+x$ -6
		$-$ $2x^2$	$-$ $+4x$
			$-3x$ -6
			$+$ $-3x$ $+$ -6
			0

∴ الناتج $= x^2 + 2x - 3$

الباقي $= 0$

∴ $(x + 2)$ عاملاً من عوامل: $x^3 + 4x^2 + x - 6$

اقسم مستخدماً القسمة التركيبية.

7. $(x^3 + 3x^2 - x - 3) \div (x - 1)$

-1	1	3	-1	-3
	$\downarrow$	1	4	3
	1	4	3	0

الباقي:

الناتج $= x^2 + 4x + 3$

الباقي $= 0$

8. $(-2x^3 + 5x^2 - x + 2) \div (x + 2)$

-2	-2	5	-1	2
	$\downarrow$	4	-18	38
	-2	9	-19	0

الباقي:

الناتج $= -2x^2 + 9x - 19$

الباقي $= 40$

9. $(2x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 45) \div (x + 3)$

-3	2	6	5	0	-45
	$\downarrow$	-6	0	-15	45
	2	0	5	-15	0

الباقي:

الناتج $= 2x^3 + 5x - 15$

الباقي $= 0$

10. $(x^3 - 3x^2 - 5x - 25) \div (x - 5)$

5	1	-3	-5	-25
	$\downarrow$	5	10	25
	1	2	5	0

الباقي:

الناتج $= x^2 + 2x + 5$

الباقي $= 0$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

11. $(2x^3 + 4x^2 - 10x - 9) \div (x - 3)$

3	2	4	−10	−9
	↓	6	30	60
	2	10	20	51

الباقي:

الناتج $= 2x^2 + 10x + 20$

الباقي $= 51$

استخدم القسمة التركيبية والعامل المعطى لتحليل كل دالة كثيرة حدود بالكامل:

12. $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \; ; \; (x + 1)$

القسمة التركيبية

−1	1	2	−5	−6
	↓	−1	−1	6
	1	1	−6	0

الباقي:

الناتج $= x^2 + x - 6$

$= (x - 2)(x + 3)$

$\therefore y = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$

13. $y = x^3 - 4x^2 - 9x + 36 \; ; \; (x + 3)$

القسمة التركيبية

−3	1	−4	−9	36
	↓	−3	21	−36
	1	−7	12	0

الباقي:

الناتج $= x^2 - 7x + 12$

$= (x - 4)(x - 3)$

$\therefore y = (x + 3)(x - 4)(x - 3)$

سؤال من المريخ:

14. يعطى حجم صندوق بالمعادلة $V(x) = x^3 + x^2 - 6x$ بالأمتار المكعبة(m^3)
ما الأبعاد الممكنة لهذا الصندوق؟ $x > 2$

$V(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$= x(x^2 + x - 6)$

$= x(x - 2)(x + 3)$

إجابة ممكنة: الطول $(x + 3)$ العرض: $(x - 2)$ الارتفاع x

صفوة معلمي الكويت

15. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 8x - 6 \;\; ; \;\; a = -2$

القسمة التركيبية

-2	1	4	-8	-6
	$\downarrow$	-2	-4	24
	1	2	-12	18

الباقي:

نظرية الباقي

$f(-2)$
$= (-2)^3 + 4(-2)^2 - 8(-2) - 6$
$= 18$

∴ الباقي $= 18$

16. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9 \;\; ; \;\; a = 3$

القسمة التركيبية

3	1	-7	15	-9
	$\downarrow$	3	-12	9
	1	-4	3	0

الباقي:

نظرية الباقي

$f(3) = (3)^3 - 7(3)^2 + 15(3) - 9$
$= 0$

∴ الباقي $=$ صفر

17. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 10x + 5 \;\; ; \;\; a = \frac{1}{2}$

القسمة التركيبية

$\frac{1}{2}$	2	-1	10	5
	$\downarrow$	1	0	5
	2	0	10	10

الباقي:

نظرية الباقي

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{2}\right) + 5$
$= 10$

∴ الباقي $= 10$

18. $f(x) = 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 45; a = -3$

القسمة التركيبية

-3	2	6	5	0	-45
	$\downarrow$	-6	0	-15	45
	2	0	5	-15	0

الباقي:

∴ الباقي $=$ صفر

نظرية الباقي

$f(-3)$
$= 2(-3)^4 + 6(-3)^3 + 5(-3)^2 - 45$
$= 0$

∴ الباقي $=$ صفر

صفوة معلمي الكويت

اقسم ما يلي:

20. $(2x^3 + 9x^2 + 14x + 5) \div (2x + 1)$

$$\frac{2x^3 + 9x^2 + 14x + 5}{2x + 1} \quad \begin{matrix} \div 2 \\ \div 2 \end{matrix}$$

$$= \frac{x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 7x + \frac{5}{2}}{x + \frac{1}{2}}$$

$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{2}$	7	$\frac{5}{2}$
	$\downarrow$	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$
	1	4	5	0
	x^2	x		

الباقي:

الناتج $= x^2 + 4x + 5$

21. $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

-1	1	0	0	0	0	1
	$\downarrow$	-1	1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	1	0
	x^4	x^3	x^2	x		

الباقي:

الناتج $= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

22. $(3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 2) \div (3x - 2)$

$$\frac{(3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 2)}{(3x - 2)} \quad \begin{matrix} \div 3 \\ \div 3 \end{matrix} = \frac{x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + x - \frac{2}{3}}{x - \frac{2}{3}}$$

$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
	$\downarrow$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
	1	-1	0	1	0
	x^3	x^2	x		

الباقي:

الناتج $= x^3 - x^2 + 1$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

أسئلة من المريخ:

اقسم ثم أوجد نمطاً في الإجابات.

23. $(x^2 - 1) \div (x - 1)$

1	1	0	−1
	↓	1	1
	1	1	0

الباقي:

x

$\text{الناتج} = x + 1$

27. $(x^3 + 1) \div (x + 1)$

−1	1	0	0	1
	↓	−1	1	−1
	1	−1	1	0

الباقي:

$x^2 \quad x$

$\text{الناتج} = x^2 - x + 1$

24. $(x^3 - 1) \div (x - 1)$

1	1	0	0	−1
	↓	1	1	1
	1	1	1	0

الباقي:

$x^2 \quad x$

$\text{الناتج} = x^2 + x + 1$

28. $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

−1	1	0	0	0	0	−1
	↓	−1	1	−1	1	1
	1	−1	1	−1	1	0

الباقي:

$x^4 \quad x^3 \quad x^2 \quad x$

$\text{الناتج} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

معلق ⚠

25. $(x^4 - 1) \div (x - 1)$

1	1	0	0	0	−1
	↓	1	1	1	1
	1	1	1	1	0

الباقي:

$x^3 \quad x^2 \quad x$

$\text{الناتج} = x^3 + x^2 + x + 1$

29. $(x^7 + 1) \div (x + 1)$

−1	1	0	0	0	0	0	0	1
	↓	−1	1	−1	1	−1	1	−1
	1	−1	1	−1	1	−1	1	0

$x^6 \quad x^5 \quad x^4 \quad x^3 \quad x^2 \quad x$

$\text{الناتج} = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

26. مستخدماً الأنماط، أوجد: $(x^5 - 1) \div (x - 1)$

$= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

30. مستخدماً الأنماط أوجد: $(x^9 + 1) \div (x + 1)$

$= x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

صفوة معلمي الكويت

حل معادلات كثيرات الحدود

حل كل معادلة مما يأتي وقرّب إجابتك لأقرب جزء من مئة عندما يكون ذلك ضرورياً.

1. $6y^2 = 48y$

$6y^2 - 48y = 0$
$6y(y-8) = 0$
$y = 0\ ,\quad y = 8$
$\{0,8\} = $ م.ج

2. $3x^3 - 6x^2 - 9x = 0$

$3x(x^2 - 2x - 3) = 0$
$3x(x-3)(x+1) = 0$
$x = 0 \quad x = 3 \quad x = -1$
$\{0,3,-1\} = $ م.ج

3. $12x^3 - 60x^2 + 75x = 0$

$3x(4x^2 - 20x + 25) = 0$
$3x(2x-5)^2 = 0$
$x = 0 \quad x = \frac{5}{2}$ مكرر
$\left\{0,\frac{5}{2}\right\} = $ م.ج

4. $4x^3 = 4x^2 + 3x$

$4x^3 - 4x^2 - 3x = 0$
$x(4x^2 - 4x - 3) = 0$
$x(2x+1)(2x-3) = 0$
$x = 0 \quad x = \frac{-1}{2}\ , \quad x = \frac{3}{2}$
$\left\{0,\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right\} = $ م.ج

5. $2a^4 - 5a^3 - 3a^2 = 0$

$a^2(2a^2 - 5a - 3) = 0$
$a^2(2a+1)(a-3) = 0$
$a = 0\ , \quad a = \frac{-1}{2}\ , a = 3$
$\left\{0,\frac{-1}{2},3\right\}$

6. $2d^4 + 18d^3 = 0$

$2d^3(d+9) = 0$
$2d^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$
$d + 9 = 0 \Rightarrow d = -9$
$\{-9,0\} = $ م.ج

7. $x^3 - 6x^2 + 6x = 0$

$x(x^2 - 6x + 6) = 0$
$x = 0\ , \quad x^2 - 6x + 6 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 36 - 24 = 12$
$x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = 3 \mp \sqrt{3}$
$\{0\ ,\ 3-\sqrt{3}\ ,\ 3+\sqrt{3}\} = $ م.ج

8. $x^3 + 13x = 10x^2$

$x^3 - 10x^2 + 13x = 0$
$x(x^2 - 10x + 13) = 0$
$x = 0\ ,\ x^2 - 10x + 13 = 0$
$\Delta = b^2 - 4a$
$= 100 - 4\times 13 = 48$
$x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \frac{10 \mp \sqrt{48}}{2} = 5 \mp 2\sqrt{3}$
$\{0\ ,5-2\sqrt{3}\ ,5+2\sqrt{3}\} = $ م.ج

9. $2x^3 - 5x^2 = 12x$

$2x^3 - 5x^2 - 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2x^2 - 5x - 12) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2x+3)(x-4) = 0$
$\Rightarrow x = 0\ , x = \frac{-3}{2}\ , x = 4$
$\left\{0,\frac{-3}{2},4\right\} = $ م.ج

استخدم التقسيم لحل كل المعادلات التالية:

10. $x^3-2x^2-3=x-5$

$x^3-2x^2-x+2=0$

$x^2(x-2)-(x-2)=0$

$(x-2)(x^2-1)=0$

$(x-2)(x-1)(x+1)=0$

$x=2\ ,\quad x=1\ ,\quad x=-1$

$\therefore$ م.ج $=\{2,1,-1\}$

11. $x^3+3x^2-4x-12=0$

$x^2(x+3)-4(x+3)=0$

$(x+3)\ (x^2-4)=0$

$(x+3)(x-2)(x+2)=0$

$x=-3\ ,\quad x=2\ ,\quad x=-2$

$\therefore$ م.ج $=\{-3,2,-2\}$

12. $x^3+2x(x-1)=1$

$x^3-1+2x(x-1)=0$

$(x-1)(x^2+x+1)+2x(x-1)=0$

$(x-1)(x^2+x+1+2x)=0$

$(x-1)(x^2+3x+1)=0$

$x-1=0$ | $x^2+3x+1=0$

$x=1$ | $\Delta=b^2-4ac=(3)^2-4(1)(1)$

$=5$

$x=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\mp\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ م.ج $=\left\{1,\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

معلق

استخدم الأصفار النسبية الممكنة لحل المعادلات التالية:

13. $x^4+2x^3+x^2=4x^2+8x+4$

$x^4+2x^3-3x^2-8x-4=0$

① عوامل الحد الثابت: (-4)

$\mp1\ ,\mp2,\mp4$

عوامل المعامل الرئيسي: (1)

∓1

الأصفار النسبية الممكنة

$\mp1\ ,\mp2,\mp4$

② لتكن: $p(x)=x^4+2x^3-3x^2-8x-4$

بالتعويض نجد: $p(-1)=$

$(-1)^4+2(-1)^3-3(-1)^2-8(-1)-4=0$

$p(2)=$

$(2)^4+2(2)^3-3(2)^2-8(2)-4=0$

$\therefore -1, 2$ من أصفار $p(x)$

$\Leftarrow (x-2),(x+1)$ من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x+1)$

-1	1	2	-3	-8	-4
	$\downarrow$	-1	-1	4	4
	1	1	-4	-4	0

الباقي:

x^3 x^2 x

الناتج: $q(x)=x^3+x^2-4x-4$

④ نقسم $q(x)$ على $(x-2)$

2	1	1	-4	-4
	$\downarrow$	2	6	4
	1	3	2	0

الباقي:

x^2 x

الناتج: x^2+x+2

$x^2+3x+2=0\Rightarrow(x+1)(x+2)=0$

$x=-1, x=-2$

$\therefore$ م.ج $=\{-2,-1\}$

15. $x^3+x^2-8x-12=0$

① عوامل الحد الثابت: (-12)

$\mp1, \mp2, \mp3, \mp4, \mp6, \mp12$

عوامل المعامل الرئيسي: (1)

∓1

الأصفار النسبية الممكنة

$\mp1, \mp2, \mp3, \mp4, \mp6, \mp12$

② لتكن:

$p(x)=x^3+x^2-8x-12$

بالتعويض نجد:

$p(-2)=(-2)^3+(-2)^2-8(-2)-12=0$

$\therefore -2$ صفر من أصفار $p(x)$

$\Leftarrow (x+2)$ من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x+2)$

-2	1	1	-8	-12
		-2	2	12
	1	-1	-6	0
	x^2	x		

الباقي:

الناتج $=x^2-x-6$

$x^2-x-6=0 \Rightarrow$

$(x-3)(x+2)=0 \Rightarrow$

$x=3\,,x=-2$

$\therefore$ م.ح$=\{3,-2\}$

14. $x^3-3x+2=0$

① عوامل الحد الثابت: (2)

$\mp1, \mp2$

عوامل المعامل الرئيسي: (1)

∓1

الأصفار النسبية الممكنة

$\mp1, \mp2$

② لتكن:

$p(x)=x^3-3x+2$

بالتعويض نجد:

$p(1)=(1)^3-3(1)+2=0$

$\therefore 1$ صفر من أصفار $p(x)$

$\Leftarrow (x-1)$ من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x-1)$

1	1	0	-3	2
		1	1	-2
	1	1	-2	0
	x^2	x		

الباقي:

الناتج $=x^2+x-2$

$x^2+x-2=0 \Rightarrow$

$(x-1)(x+2)=0 \Rightarrow$

$x=1\,,x=-2$

$\therefore$ م.ح$=\{1,-2\}$

صفوة معلمي الكويت

16. $x^3-7x+6=0$

① عوامل الحد الثابت: (6)

$\mp1 \quad \mp2 \quad \mp3 \quad \mp6$

عوامل المعامل الرئيسي: (1)

∓1

الأصفار النسبية الممكنة

$\mp1 \quad \mp2 \quad \mp3 \quad \mp6$

② لتكن:

$p(x)=x^3-7x+6$

بالتعويض نجد:

$p(1)=(1)^3-7(1)+6=0$

∴ 1 صفر من أصفار $p(x)$

⇐ $(x-1)$ من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x-1)$

1	1	0	−7	6
	↓	1	1	−6
	1	1	−6	0
	x^2	x		

الباقي:

الناتج $=x^2+x-6$

$x^2+x-6=0 \Rightarrow$

$(x+3)(x-2)=0 \Rightarrow$

$x=-3\,,x=2$

∴ م.ح$=\{-3,2,1\}$

17. $x^4+x^3-6x^2-4x+8=0$

① عوامل الحد الثابت: (8)

$\mp1 \quad \mp2 \quad \mp4 \quad \mp8$

عوامل المعامل الرئيسي: (1)

∓1

الأصفار النسبية الممكنة

$\mp1 \quad \mp2 \quad \mp4 \quad \mp8$

② لتكن:

$p(x)=x^4+x^3-6x^2-4x+8$

بالتعويض نجد:

$p(1)=(1)^4+(1)^3-6(1)^2-4(1)+8=0$

$p(2)=(2)^4+(2)^3-6(2)^2-4(2)+8=0$

∴ 1,2 من أصفار $p(x)$

⇐ $(x-2),(x-1)$ من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x-1)$

1	1	1	−6	−4	8
	↓	1	2	−4	−8
	1	2	−4	−8	0
	x^3	x^2	x		

الباقي:

الناتج: $q(x)=x^3+2x^2-4x-8$

نقسم $q(x)$ على $(x-2)$

2	1	2	−4	−8
	↓	2	8	8
	1	4	4	0
	x^2	x		

الباقي:

الناتج:

x^2+4x+4

$x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0$

$\Rightarrow x=-2$ مكرر

∴ م.ح$=\{1,2,-2\}$

استكشاف النماذج الأسية

في التمارين (1-5)، اذكر ما إذا كانت كل دالة تمثّل نمواً أسياً أو تضاؤلاً أسياً.

1. $y = 1298(1.63)^x$

$b = 1 \cdot 63$
$b > 1$
نمو أسي
$b = 1 \cdot 63$ = عامله

2. $y = 0 \cdot 65(1.3)^x$

$b = 1 \cdot 3$
$b > 1$
نمو أسي
$1 \cdot 3$ = عامله

3. $f(x) = 2(0.65)^x$

$b = 0.65$
$0 < b < 1$
تضاؤل أسي
0.65 = عامله

4. $f(t) = 0.8\left(\frac{1}{8}\right)^t$

$b = \frac{1}{8}$
$0 < b < 1$
تضاؤل أسي
$\frac{1}{8}$ = عامله

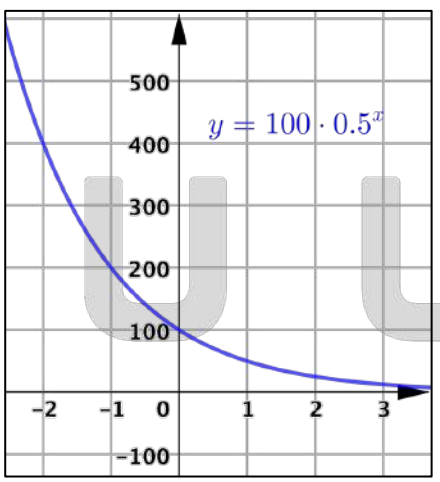
5. $y = 5(6)^x$

$b = 6$
$b > 1$
نمو أسي
6 = عامله

مثّل كل دالة بيانياً. بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نمواً أسياً أو تضاؤلاً أسياً محدداً العامل.

7. $y = 100(0 \cdot 5)^x$

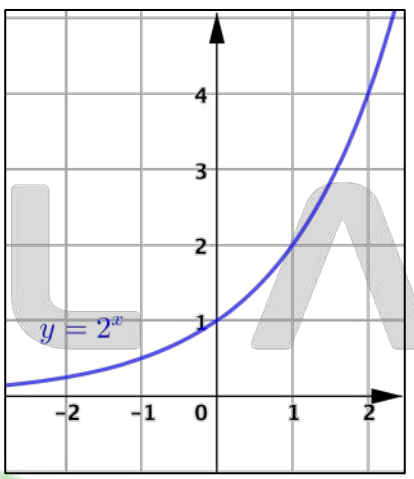
x	-2	-1	0	1	2
y	400	200	100	50	25



$\therefore b = 0.5, \quad 0 < b < 1$
دالة تضاؤل أسي معامله 0.5

8. $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	0.25	0.5	1	2	4



$\therefore b = 2, \quad 2 > 1$
دالة نمو أسي معامله 2

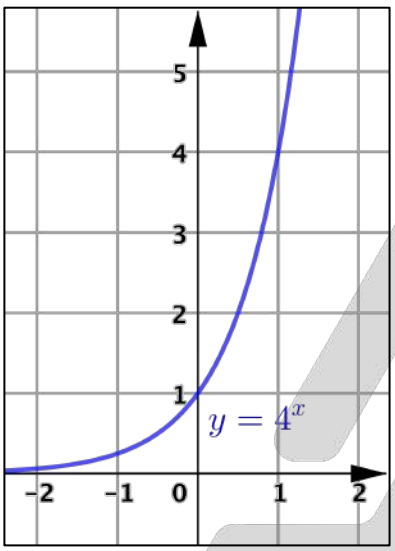
صفوة معلمي الكويت

الدوال الأسية وتمثيلها بيانياً

في التمارين (1-4)، مثّل بيانياً كلاً من الدوال الأسية التالية:

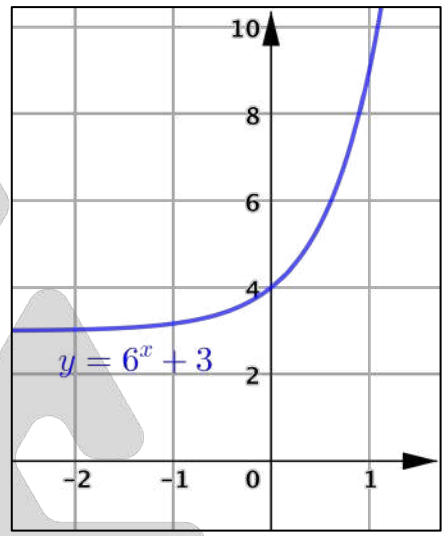
1. $y = 4^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16



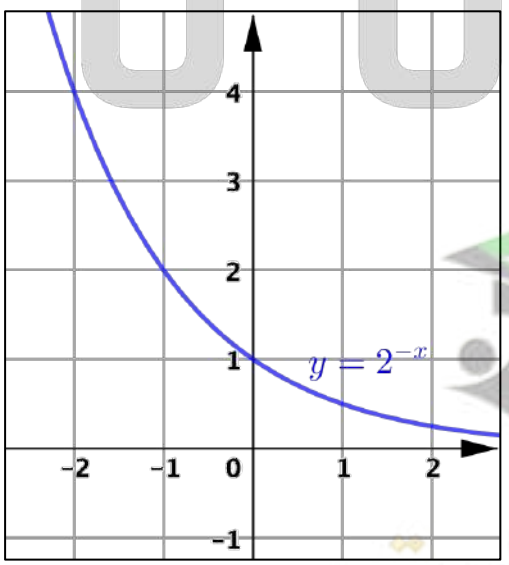
2. $y = 6^x + 3$

x	-2	-1	0	1	2
y	3.03	3.17	4	9	39



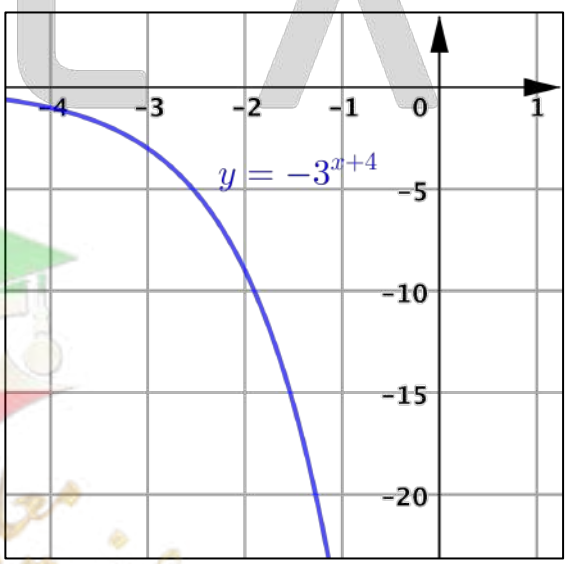
3. $y = 2^{-x}$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	0.5	0.25



4. $y = -3^{x+4}$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	-9	-27



UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

مثّل بيانياً كلاً من الدوال الأسية التالية مستخدماً دالة المرجع:

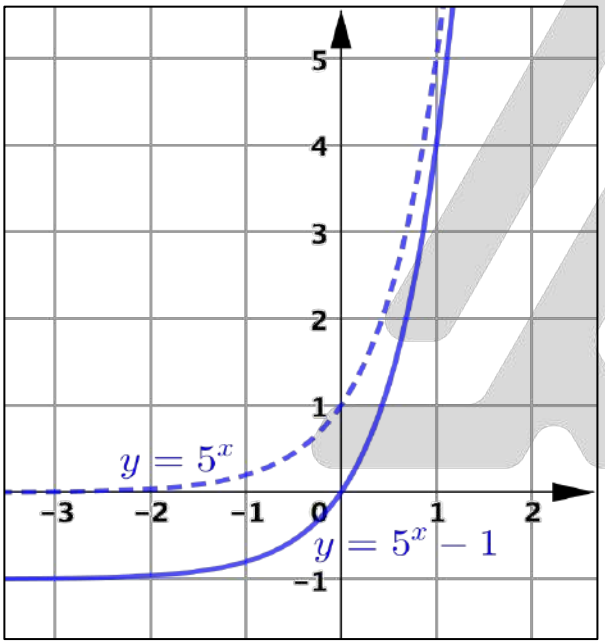
5. $y = (5)^x - 1$

دالة المرجع $y = 5^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25

$h = 0\,, k = -1$

انسحاب بيان دالة المرجع
وحدة واحدة إلى الأسفل



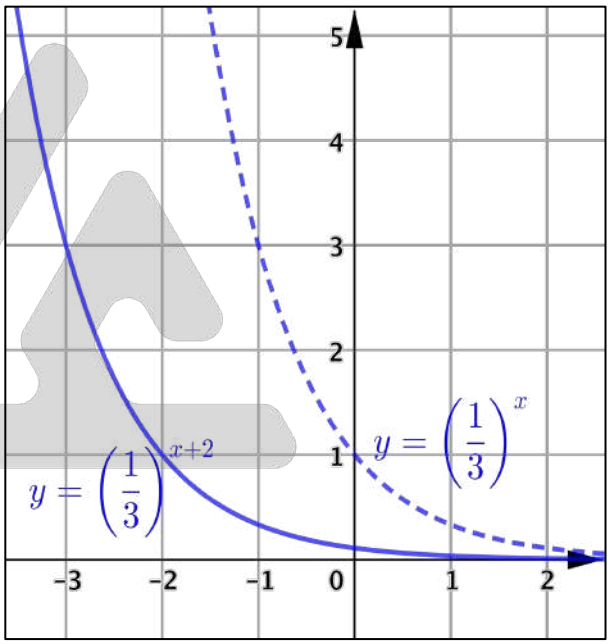
6. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

دالة المرجع : $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

$h = -2\,, k = 0$

انسحاب بيان دالة المرجع
وحدتان إلى اليسار



UULA
صفوة معلمي الكويت

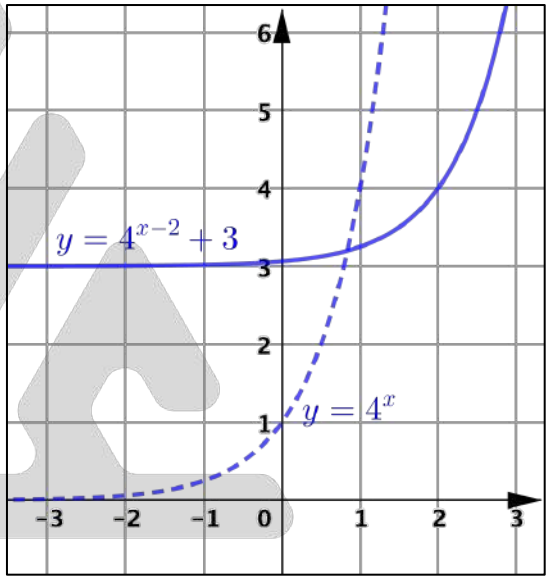
7. $y = (4)^{x-2} + 3$

دالة المرجع $y = 4^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16

$h = 2\,, k = 3$

انسحاب بيان دالة المرجع:
وحدتان إلى اليمين
ثلاث وحدات إلى الأعلى



8. $y = -2(3)^{2x} + 1$

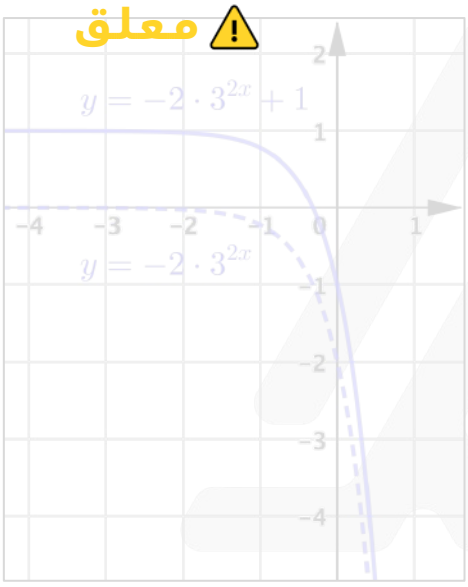
دالة المرجع $y = -2(3)^{2x}$

x	-2	-1	0	1
y	$-\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{9}$	-2	-18

$h = 0\,, k = 1$

انسحاب بيان دالة المرجع:
وحدة واحدة إلى الأعلى

معلق ⚠



استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد ناتج كل مقدار مقرّباً الناتج إلى أربعة أرقام عشرية.

9. e^3

20 · 0855

10. $5e^6$

2017 · 1440

11. $\left(\frac{5}{4}\right) e^{\frac{1}{2}}$

2 · 0609

12. $\frac{4}{e^6}$

0 · 0099

13. e^e

15 · 1543

صفوة معلمي الكويت

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانياً

في التمارين (1-8)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

1) $4^2 = 16$

$2 = \log_4 16$

2) $7^3 = 343$

$3 = \log_7 343$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

$-2 = \log_{\frac{1}{2}} 4$

4) $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

$\frac{-2}{3} = \log_8 \frac{1}{4}$

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

$3 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

6) $10^{-2} = 0 \cdot 01$

$-2 = \log_{10} 0 \cdot 01$

7) $6^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{6}$

$\frac{3}{2} = \log_6 (6\sqrt{6})$

8) $5^{-3} = \frac{1}{125}$

$-3 = \log_5 \frac{1}{125}$

في التمارين (9-14)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

9) $\log_2 128 = 7$

$128 = 2^7$

10) $\log_4 64 = 3$

$64 = 4^3$

11) $\log 100 = 2$

$100 = 10^2$

12) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

$\frac{1}{9} = 3^{-2}$

13) $\log 0.0001 = -4$

$0.0001 = 10^{-4}$

14) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$

$\frac{1}{243} = 3^{-5}$

في التمارين (15-20)، أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

15) $\log_2 4 = x$

$4 = 2^x$

$2^2 = 2^x$

$\therefore x = 2$

16) $\log_2 8 = x$

$8 = 2^x$

$2^3 = 2^x$

$x = 3$

17) $\log_8 8 = x$

$8 = 8^x$

$8^1 = 8^x$

$x = 1$

18) $\log_2 2^5 = x$

$2^5 = 2^x$

$x = 5$

19) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = x$

$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$x = 1$

20) $\log 0 \cdot 01 = x$

$0 \cdot 01 = 10^x$

$10^{-2} = 10^x$

$x = -2$

في التمارين (21-23)، أوجد مجال التعريف D لكل دالة مما يلي:

21) $y = log_6(x + 1)$

$x + 1 > 0$

$x > -1$

$D = (-1, \infty)$ المجال

22) $y = log_8(x) - 2$

$x > 0$

$D = (0, \infty)$ المجال

صفوة معلمي الكويت

23) $y = \log(x^2 - 4)$

$x^2 - 4 > 0$

المعادلة المناظرة $x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2\,, x = 2$

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ | $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$ | $x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$

x	$-\infty$		-2		2		∞
$x-2$	$-$		$-$	$\oplus$	$+$		
$x+2$	$-$	$\oplus$	$+$		$+$		
x^2-4	$+$	$\oplus$	$-$	$\oplus$	$+$		

المجال $D = (-\infty, -2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} - [-2,2]$

مثّل بيانياً كل دالة لوغاريتمية معيناً المجال والمدى.

26) $y = \log_3(x)$

x	y
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1

المجال $(0, \infty)$

المدى $\mathbb{R}$

27) $y = \log_3(x-1) + 2$

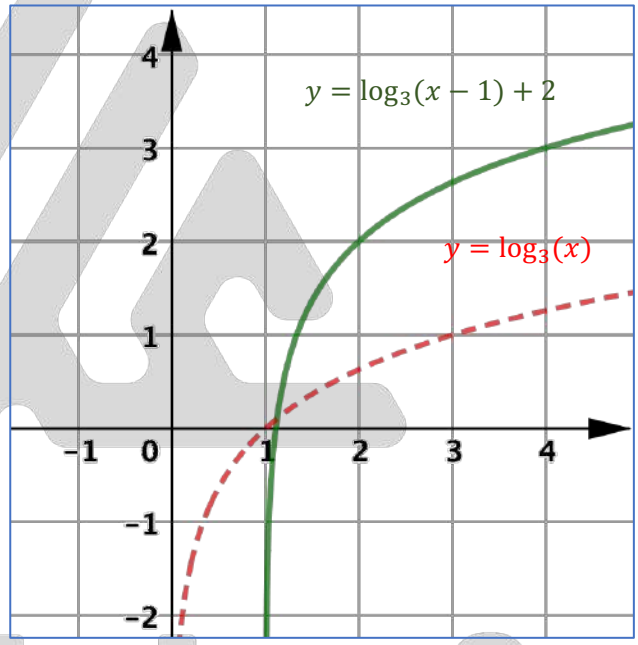
$h = 1\,, k = 2$

انسحاب بيان دالة المرجع:

- وحدة إلى اليمين
- وحدتان إلى الأعلى

المجال $(1, \infty)$

المدى $\mathbb{R}$



UULA
صفوة معلمي الكويت

خواص اللوغاريتمات

في التمارين (1-8)، اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد.

1) $\log 7 + \log 2$ $= \log(7\times2) = \log(14)$

2) $\frac{1}{2}\log_4 y - \log_4 x\,, (x>0\,, y>0)$ $= \log_4 y^{\frac{1}{2}} - \log_4 x = \log_4 \frac{\sqrt{y}}{x}$

3) $4\log M - \log N\,, (M>0\,, N>0)$ $= \log M^4 - \log N = \log\frac{M^4}{N}$

4) $\log x + \log y + \log z\,, (x>0\,, y>0, z>0\,)$ $= \log(xyz)$

5) $\log\frac{a}{4} + \log\frac{b}{3} - \log\frac{c}{2}, (a>0\,, b>0, c>0\,)$ $= \log\left(\frac{a}{4}\cdot\frac{b}{3}\div\frac{c}{2}\right) = \log\left(\frac{ab}{6c}\right)$

6) $\log a + 3\log b\,, (a>0\,, b>0)$ $= \log a + \log b^3 = \log(ab^3)$

7) $\frac{1}{2}(\log_7 x + \log_7 y) - 3\log_7 a\,, (x>0, y>0\,, a>0)$

$= \frac{1}{2}\log_7 xy - 3\log_7 a = \log_7 (xy)^{\frac{1}{2}} - \log_7 a^3 = \log_7 \frac{\sqrt{xy}}{a^3}$

8) $7\log r - \log x + \log n\,, (r>0, x>0\,, n>0)$

$= \log\ r^7 - \log x + \log n = \log(r^7 \div x\cdot n) = \log\left(\frac{r^7}{x}\cdot n\right)$

في التمارين (9-16)، أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

9) $\log_5 \frac{y}{x}, (x>0, y>0)$

$= \log_5 y - \log_5 x$

10) $\log x^3 + y^5\,, (x>0, y>0)$

$= 3\log x + y^5$

11) $\log_3 7\,(2x-3)^2\,, \left(x>\frac{3}{2}\right)$

$= \log_3 7 + \log_3 (2x-3)^2$

$= \log_3 7 + 2\log_3 (2x-3)$

12) $\log\frac{a^2b^3}{c^4}, (a>0, b>0, c>0)$

$= \log a^2 + \log b^3 - \log c^4$

$= 2\log a + 3\log b - 4\log c$

13) $\log 3M^4N^{-2}\ \,, (M>0, N>0)$

$\log 3 + 4\log M - 2\log N$

14) $\log_4 5\sqrt{x}\,, (x>0)$

$= \log_4 5 + \log_4 \sqrt{x}$

$= \log_4 5 + \log_4 x^{\frac{1}{2}}$

$= \log_4 5 + \frac{1}{2}\log_4 x$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

15) $\log(2(x+1))^3 , (x > -1)$

$= 3\log(2(x+1))$

$= 3(\log 2 + \log(x+1))$

$= 3\log 2 + 3\log(x+1)$

16) $\log\sqrt{\frac{2x}{y}} , (x > 0 , y > 0)$

$= \log\left(\frac{2x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}(\log 2 + \log x - \log y)$

$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\log y$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار.

19) $\log_2 4 - \log_2 16$

$= \log_2 2^2 - \log_2 2^4$
$= 2 - 4 = -2$

20) $\log_5 5 - \log_5 125$

$= 1 - \log_5 5^3$
$= 1 - 3 = -2$

21) $3\log_2 2 - \log_2 4$

$= 3\times 1 - \log_2 2^2$

$= 3 - 2 = 1$

22) $\log 1 + \log 100$

$= 0 + \log_{10} 10^2$

$= 0 + 2 = 2$

23) $\log 5 + \log 8 - 2\log 2$

$= \log(5\times 8) - \log 2^2 = \log\left(\frac{5\times 8}{2^2}\right)$

$= \log 10 = 1$

بفرض: $\log 4 \simeq 0.6021 , \log 5 \simeq 0.6990 , \log 6 \simeq 0.7782$.
استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار. قرّب إلى أقرب جزء من ألف.

24) $\log 20$

$= \log(4\times 5)$
$= \log 4 + \log 5$
$= 0\cdot 6021 + 0\cdot 6990$
$= 1\cdot 301$

25) $\log 16$

$= \log 4^2$
$= 2\log 4$
$= 2\times 0\cdot 6021$
$= 1\cdot 204$

26) $\log 1\cdot 25$

$= \log\frac{125}{100} =$
$= \log 125 - \log 100$
$= \log 5^3 - \log 10^2$
$= 3\log 5 - 2$
$= 3(0\cdot 6990) - 2$
$= 0\cdot 097$

27) $\log 125$

$= \log 5^3$
$= 3\log 5$
$= 3(0.6990)$
$= 2.097$

28) $\log\frac{1}{36}$

$= \log 6^{-2}$
$= 2\log 6$
$= -2(0\cdot 7782)$
$= -1\cdot 556$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

في التمارين (1-8)، حلّ كل معادلة مما يلي. اختبر صحة كل حال:

1) $9^{2y} = 66$

$\log 9^{2y} = \log 66$

$2y \log 9 = \log 66$

$y = \frac{\log 66}{2 \log 9} \approx 0.9534$

التحقق: $9^{2(0.9534)} \approx 66$

2) $12^{y-2} = 20$

$\log 12^{y-2} = \log 20$

$(y-2) \log 12 = \log 20$

$y - 2 = \frac{\log 20}{\log 12}$

$y = \frac{\log 20}{\log 12} + 2 \approx 3.2056$

التحقق: $12^{(3.2056)-2} \approx 20$

3) $5 - 3^x = -40$

$3^x = 45$

$\log 3^x = \log 45$

$x \log 3 = \log 45$

$x = \frac{\log 45}{\log 3} \approx 3.465$

التحقق: $5 - 3^{(3.465)} \approx -40$

4) $25^{2x+1} = 144$

$\log 25^{2x+1} = \log 144$

$(2x+1) \log 25 = \log 144$

$2x + 1 = \frac{\log 144}{\log 25}$

$2x = \frac{\log 144}{\log 25} - 1$

$x = \frac{\left(\frac{\log 144}{\log 25} - 1\right)}{2} \approx 0.272$

التحقق: $25^{2(0.272)+1} \approx 144$

5) $3x^{\frac{3}{2}} = 27, x > 0$

$x^{\frac{3}{2}} = 9$

$\log x^{\frac{3}{2}} = \log 9$

$\frac{3}{2} \log x = \log 9$

$\log x = \log 9^{\frac{2}{3}}$

$x = 9^{\frac{2}{3}} > 0$

التحقق: $3\left(9^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 27$

6) $2 + 8r^{\frac{5}{3}} = 26$

$8r^{\frac{5}{3}} = 24$

$r^{\frac{5}{3}} = 3$

$\frac{5}{3} \log r = \log 3$

$\log r = \frac{3}{5} \log 3$

$\log r = \log 3^{\frac{3}{5}} \Rightarrow r = 3^{\frac{3}{5}}$

التحقق: $2 + 8\left(3^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} = 26$

7) $\sqrt[7]{n^2} - 12 = 5$

$n^{\frac{2}{7}} = 17$

$\frac{2}{7}\log n = \log 17$

$\log n = \frac{7}{2}\log 17$

$\log n = \log 17^{\frac{7}{2}} \Rightarrow n = 17^{\frac{7}{2}}$

التحقق: $\sqrt[7]{(17^{\frac{7}{2}})^2} - 12 = 5$

8) $-3 + 2\sqrt[4]{x^3} = 33$

$2\sqrt[4]{x^3} = 36$

$x^{\frac{3}{4}} = 18$

$\frac{3}{4}\log x = \log 18$

$\log x = \frac{4}{3}\log 18$

$\log x = \log 18^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = 18^{\frac{4}{3}}$

التحقق: $-3 + 2\sqrt[4]{(18^{\frac{4}{3}})^3} = 33$

استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

9) $\log_2 7$

$\frac{\log 7}{\log 2} \approx 2 \cdot 8074$

10) $\log_3 33$

$\frac{\log 33}{\log 3} \approx 3 \cdot 1827$

11) $\log_{21} 0 \cdot 085$

$\frac{\log 0.085}{\log 21} \approx -0 \cdot 8097$

12) $\log_5 510$

$\frac{\log 510}{\log 5} = 3 \cdot 8737$

13) $\log_4 1 \cdot 116$

$\frac{\log 1 \cdot 116}{\log 4} \approx 0 \cdot 0792$

14) باعتبار المعادلة: $2^{\frac{x}{3}} = 80$

a. حلّ المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 2 لكل طرف.

$\log_2 2^{\frac{x}{3}} = \log_2 80$

$\frac{x}{3} = \log_2 80$

$x = 3\log_2 80 \approx 18 \cdot 9658$

معلق

b. حلّ المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 10 لكل طرف.

$\log 2^{\frac{x}{3}} = \log 80$

$\frac{x}{3}\log 2 = \log 80$

$x = 3\frac{\log 80}{\log 2} \approx 18 \cdot 9658$

صفوة معلمي الكويت

في التمارين (15-20)، حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:

15) $\log 6x - 3 = -4$

المجال
$6x > 0$
$x > 0$
$(0,\infty)$

$\log 6x = -1$

$6x = 10^{-1}$

$x = \frac{10^{-1}}{6} = \frac{1}{60} \in (0,\infty)$

16) $\log x - \log 3 = 8$

المجال
$x > 0$
$(0,\infty)$

$\log \frac{x}{3} = 8$

$\frac{x}{3} = 10^{8}$

$x = 3\times 10^{8} \in (0,\infty)$

17) $\log_2(3x - 5) = 1$

$3x - 5 > 0$
$x > \frac{5}{3}$
$\left(\frac{5}{3},\infty\right)$

$3x - 5 = 2^1$
$3x = 7$
$x = \frac{7}{3} \in \left(\frac{5}{3},\infty\right)$

18) $\log(2x) + \log(x - 3) = \log 8$

المجال
$2x > 0$ $\quad x > 0$
$x - 3 > 0$ $\quad x > 3$

$\log 2x(x - 3) = \log 8$

$2x(x - 3) = 8$

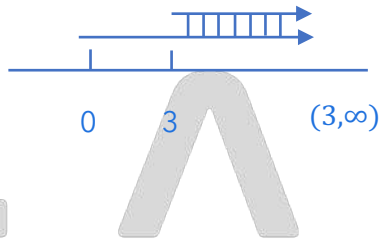
$2x^2 - 6x - 8 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$

$x = 4 \in (3,\infty)$

$x = -1 \notin (3,\infty)$



19) $\log(3x) - \log(x + 20) = -\log 2$

المجال
$3x > 0$ $\quad x > 0$
$x + 20 > 0$ $\quad x > -20$
$(0,\infty)$

$\log \frac{3x}{x+20} = \log 2^{-1}$

$\frac{3x}{x + 20} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$6x = x + 20$

$5x = 20$

$x = 4 \in (0,\infty)$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

20) $\log_{(2x-1)} 49 = 2$

$49 = (2x-1)^2$

$2x-1 = \mp\sqrt{49}$

$2x-1 = \mp 7$

$2x-1 = -7$ | $2x-1 = 7$

$2x = -6$ | $2x = 8$

$x = -3 \notin D$ | $x = 4 \in D$

المجال

$2x-1 \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$2x-1 > 0 \quad 2x-1 \neq 1$

$x > \frac{1}{2} \quad x \neq 1$

$D = \left(\frac{1}{2}, \infty\right) - \{1\}$

معلق

21) $\log_{(5x-3)} 64 = \log 4$

$\frac{\log 64}{\log(5x-3)} = \log 4$

$\log(5x-3) = \frac{\log 64}{\log 4}$

$\log(5x-3) = 3$

$5x-3 = 10^3$

$x = \frac{10^3+3}{5} = \frac{1003}{5} \in D$

المجال

$5x-3 \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$5x-3 > 0 \quad 5x-3 \neq 1$

$x > \frac{3}{5} \quad x \neq \frac{4}{5}$

$D = \left(\frac{3}{5}, \infty\right) - \left\{\frac{4}{5}\right\}$

اللوغاريتم الطبيعي

في التمارين (1-8)، اكتب كل تعبير مما يلي كلوغاريتم طبيعي واحد:

1) $3\ln 5 \quad = \ln 5^3 = \ln 125$

2) $\ln 24 - \ln 6 \quad = \ln \frac{24}{6} = \ln 4$

3) $\ln 3 - 5\ln 3 \quad = -4\ln 3 = \ln 3^{-4} = \ln \frac{1}{81}$

4) $5\ln m + 3\ln n \ , (m > 0 \ , n > 0) \quad = \ln m^5 + \ln n^3 = \ln(m^5 \cdot n^3)$

5) $2\ln 8 - 3\ln 4 \quad = \ln 8^2 - \ln 4^3 = \ln \frac{8^2}{4^3} = \ln 1$

6) $7 \quad = \ln(e^7)$

7) $\ln a - 2\ln b + \frac{1}{2}\ln c \ , (a > 0 \ , b > 0 \ , c > 0)$

$= \ln a - \ln b^2 + \ln c^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{a}{b^2} + \ln \sqrt{c} = \ln \frac{a\sqrt{c}}{b^2}$

8) $\frac{1}{3}(\ln x + \ln y) - 4\ln c \ , (x > 0 \ , y > 0 \ , c > 0)$

$= \frac{1}{3}\ln xy - 4\ln c = \ln(xy)^{\frac{1}{3}} - \ln c^4 = \ln \frac{\sqrt[3]{xy}}{c^4}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

9) أوجد قيمة Y في: $y = 15 + 3\,ln\,7 \cdot 2$

$y = 20 \cdot 922$

10) أوجد قيمة Y في: $y = 0 \cdot 05 - 10\,ln\,x\,,\ x = 0 \cdot 09$

$y = 0 \cdot 05 - 10\,ln(0 \cdot 09) = 24 \cdot 129$

في التمارين (13-18)، استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل معادلة مما يلي:

13) $3e^{2x} = 12$

$e^{2x} = 4$

$ln\,e^{2x} = ln4$

$2x = ln4$

$x = \frac{ln4}{2}$

14) $e^{x+1} = 30$

$ln\,e^{x+1} = ln30$

$x + 1 = ln30$

$x = ln(30) - 1$

15) $e^{\frac{x}{9}} - 8 = 6$

$e^{\frac{x}{9}} = 14$

$ln\ e^{\frac{x}{9}} = ln14$

$\frac{x}{9} = ln\,14$

$x = 9 \cdot ln14$

16) $4e^{x+2} = 32$

$e^{x+2} = 8$

$ln\,e^{x+2} = ln8$

$x + 2 = ln8$

$x = ln(8) - 2$

17) $2e^{3x-2} + 4 = 16$

$2e^{3x-2} = 12$

$e^{3x-2} = 6$

$ln\,e^{3x-2} = ln6$

$3x = 2 + ln6$

$x = \frac{2 + ln6}{3}$

18) $2e^{2x} = e^{x} + 6$

$2e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$

$(e^{x} - 2)(2e^{x} + 3) = 0$

$e^{x} = 2$ | $e^{x} = \frac{-3}{2}$

$x = ln2$ | $-\frac{3}{2} < 0$

$\emptyset$

في التمارين (19-28)، حلّ كل معادلة مما يلي:

19) $ln3x = 6$

المجال: $3x > 0 \Rightarrow x > 0$

$(0, \infty)$

$3x = e^{6} \Rightarrow x = \frac{e^{6}}{3} \in (0, \infty)$

20) $ln(4x - 1) = 36$

المجال: $4x - 1 > 0$

$\Rightarrow x > \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

$4x - 1 = e^{36} \Rightarrow 4x = e^{36} + 1$

$\Rightarrow x = \frac{e^{36}+1}{4} \in \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

21) $ln(x - 1)^2 = 3$

المجال: $(x - 1)^2 > 0$

$\mathbb{R} - \{1\}$

$(x - 1)^2 = e^{3} \Rightarrow x - 1 = \mp\sqrt{e^{3}} \Rightarrow$

$x = 1 + \sqrt{e^{3}} \approx 5.48 \in \mathbb{R} - \{1\}$

$x = 1 - \sqrt{e^{3}} \approx -3.48 \in \mathbb{R} - \{1\}$

22) $ln\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$

المجال: $\frac{x-1}{2} > 0 \Rightarrow$

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$(1, \infty)$

$\frac{x-1}{2} = e^{4} \Rightarrow x - 1 = 2e^{4} \Rightarrow x = 1 + 2e^{4}$

$\Rightarrow x \approx 110.196 \in (1, \infty)$

صفوة معلمي الكويت

23) $2ln2x^2 = 1$

المجال: $2x^2 > 0$ ، $\mathbb{R} - \{0\}$

$ln2x^2 = \frac{1}{2} = 0 \cdot 5 \Rightarrow 2x^2 = e^{0 \cdot 5} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} e^{0 \cdot 5}$

$x = +\sqrt{\frac{1}{2}\, e^{0 \cdot 5}} \approx 0.908 \in \mathbb{R} - \{0\}$

$x = -\sqrt{\frac{1}{2}\, e^{0 \cdot 5}} \approx -0.908 \in \mathbb{R} - \{0\}$

24) $lnx - 3ln3 = 3$

المجال: $x > 0$ ، $(0, \infty)$

$lnx = 3 + 3ln3 \Rightarrow$

$x = e^{(3+3ln3)} \approx 542.309 \in (0, \infty)$

25) $\frac{1}{2} lnx + ln2 - ln3 = 3$

المجال: $x > 0$ ، $(0, \infty)$

$\frac{1}{2} lnx = 3 + ln3 - ln2 \Rightarrow ln\, x = 6 + 2ln3 - 2ln2$

$\Rightarrow x = e^{(6+2ln3-2ln2)} \approx 907.715 \in (0, \infty)$

26) $1 \cdot 1 + lnx^2 = 6$

المجال: $x^2 > 0$ ، $\mathbb{R} - \{0\}$

$lnx^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow x^2 = e^{4 \cdot 9} \Rightarrow x = \mp\sqrt{e^{4 \cdot 9}} \Rightarrow$

$x = +\sqrt{e^{4 \cdot 9}} \approx 11.588 \in \mathbb{R} - \{0\}$

$x = -\sqrt{e^{4 \cdot 9}} \approx -11.588 \in \mathbb{R} - \{0\}$

27) $ln(2x - 1) = 0$

المجال: $2x - 1 > 0$ ، $\Rightarrow x > \frac{1}{2}$ ، $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

$2x - 1 = e^0 \Rightarrow 2x - 1 = 1$

$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

28) $ln(5x - 3)^{\frac{1}{3}} = 2$

المجال: $(5x - 3)^{\frac{1}{3}} > 0$ ، $5x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{5}$ ، $\left(\frac{3}{5}, \infty\right)$

$(5x - 3)^{\frac{1}{3}} = e^2 \Rightarrow 5x - 3 = e^6 \Rightarrow 5x = 3 + e^6 \Rightarrow$

$x = \frac{3 + e^6}{5} \approx 81.286 \in \left(\frac{3}{5}, \infty\right)$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

المتجه في المستوى

1. لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(-3,4), B(2,-1), C(3,5)$

- عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من:
$< \overrightarrow{AB} >, < \overrightarrow{BC} >, < \overrightarrow{CA} >$

$\overrightarrow{AB}$: $(x_B - x_A, y_B - y_A) = (5,-5)$
$\overrightarrow{BC}$: $(x_c - x_B, y_C - y_B) = (1,6)$
$\overrightarrow{CA}$: $(x_A - x_C, y_A - y_C) = (-6,-1)$

- إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ حيث $M(4,3)$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{BE}$
فأوجد إحداثيات E بفرض أن $E(x,y)$

$\overrightarrow{OM}$: $(4,3)$, $\overrightarrow{BE}$: $(x_E - x_B, y_E - y_B) = (x-2, y+1)$

$x - 2 = 4$ $\quad$ $y + 1 = 3$
$x = 6$ $\quad$ $y = 2$
$\therefore E(6,2)$

2. لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $E(-3,2), F(2,-1), G(4,-2)$
أوجد مركّبات كل من المتجهات التالية: $< \overrightarrow{EF} >$, $< \overrightarrow{GF} >$, $< \overrightarrow{EG} >$

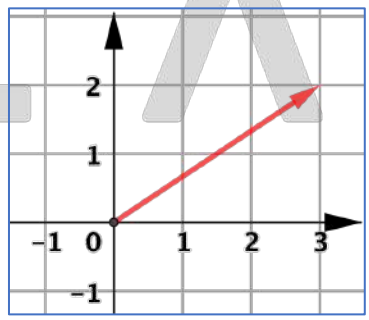
$< \overrightarrow{EF} > =< x_F - x_E, y_F - y_E > =< 5,-3 >$
$< \overrightarrow{GF} > =< x_F - x_G, y_F - y_G > =< -2,1 >$
$< \overrightarrow{EG} > =< x_G - x_E, y_G - y_E > =< 7,-4 >$

3. لكل من المتجهات التالية:
$\vec{u} =< 3,2 >, \vec{v} =< -2,4 >, \vec{w} =< -3,-2 >, \vec{t} =< 2,-3 >$

- ارسم متجه الموضع.

- أوجد طول كل متجه وقياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

$\vec{u} =< 3,2 >$
$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\frac{2}{3} \approx 33 \cdot 69°$
$x > 0, y > 0$ $\quad$ θ في الربع 1
$\theta = \propto = 33 \cdot 69°$



UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

$\vec{v} =< -2,4 >$

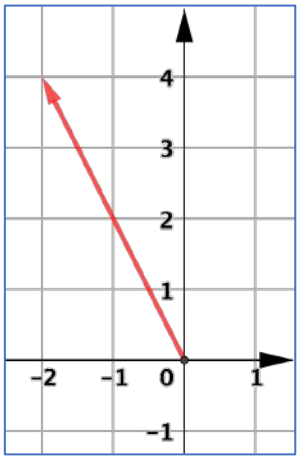
$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1} 2 = 63 \cdot 43°$

$x < 0 , y > 0$ θ في الربع 2

$\theta = 180 - \propto$

$= 180 - 63 \cdot 43 = 116 \cdot 67°$



$\vec{w} =< -3 , -2 >$

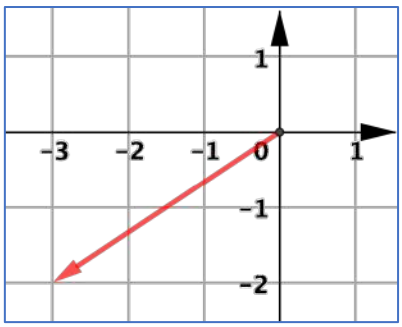
$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\frac{2}{3} \approx 33 \cdot 69°$

$x < 0 , y < 0$ θ في الربع 3

$\theta = 180 + \propto$

$= 180 + 33 \cdot 69 = 213 \cdot 69°$



$\vec{t} =< 2 , -3 >$

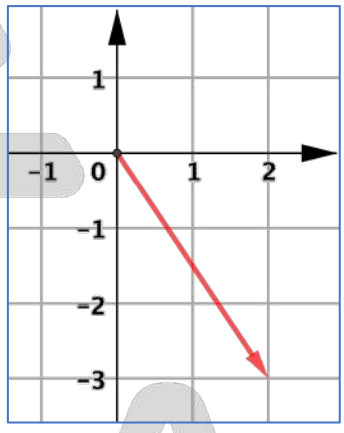
$\|\vec{t}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\frac{3}{2} \approx 56 \cdot 31°$

$x > 0 , y < 0$ θ في الربع 4

$\theta = 360 - \propto$

$= 360 - 56 \cdot 31 = 303 \cdot 69°$



4. إذا كان $\vec{u} =< x, \frac{3}{5} >$ فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

$$\|\vec{u}\| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow x = \mp\sqrt{\frac{16}{25}} = \mp\frac{4}{5}$$

5. لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(3,-1), B(5,-4), C(2,4), D(4,1)$
أثبت أن: $< \overrightarrow{AB} >=< \overrightarrow{CD} >$

$< \overrightarrow{AB} >=< x_B - x_A , y_B - y_A >=< 2,-3 >$
$< \overrightarrow{CD} >=< x_D - x_C , y_D - y_C >=< 2,-3 >$

$\therefore < \overrightarrow{AB} >=< \overrightarrow{CD} >$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

6. ليكن: $\vec{A} =< 4, -3 >, \vec{B} =< 3x-2, 4y+1 >$
أوجد قيمتي x,y بحيث يكون: $\vec{A} = \vec{B}$

$3x-2=4 \Rightarrow 3x=4+2 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$

$4y+1=-3 \Rightarrow 4y=-3-1 \Rightarrow 4y=-4 \Rightarrow y=-1$

7. لنأخذ في المستوى الإحداثي: $A(5,2), B(-2,6), C(-3,3), D(4,-1)$ أثبت أن: $< \overrightarrow{AB} >$ معاكس ل $< \overrightarrow{CD} >$

$< \overrightarrow{AB} >=< x_B - x_A \ , y_B \ - y_A >=< -7,4 >$

$< \overrightarrow{CD} >=< x_D - x_C \ , y_D \ - y_C >=< 7,-4 >$

$\therefore < \overrightarrow{AB} >=- < \overrightarrow{CD} >$

8. لنأخذ في المستوى الإحداثي: $A(2,-3), B(-1,3), C(1,-1)$
أثبت أن النقاط الثلاث على استقامة واحدة.

$< \overrightarrow{AB} >=< x_B - x_A \ , y_B \ - y_A >=< -3,6 >$

$< \overrightarrow{AC} >=< x_C - x_A \ , y_C \ - y_A >=< -1,2 >$

$\because < \overrightarrow{AB} >= 3 < \overrightarrow{AC} >$

$\therefore A, B, C$ على استقامة واحدة

9. ABC مثلث

- ارسم $< \overrightarrow{AE} >$ حيث: $< \overrightarrow{AE} >= -\frac{1}{2} < \overrightarrow{AB} >$

$\therefore \frac{-1}{2} < 0$

$\therefore$ المتجهان متعاكسان بالاتجاه

$\|\overrightarrow{AE}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$

معلق ⚠

- ارسم $< \overrightarrow{BD} >$ حيث: $< \overrightarrow{BD} >= \frac{3}{2} < \overrightarrow{BC} >$

$\frac{3}{2} > 0$ لهما نفس الاتجاه

$\|\overrightarrow{BD}\| = \frac{3}{2}\|\overrightarrow{BC}\|$

صفوة معلمي الكويت

10. لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(3,2), B(1,5), C(7,4)$

a. أوجد إحداثيات النقطة D حيث: $\langle \overrightarrow{BD} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \overrightarrow{BA} \rangle$

$$\langle x_D - x_B \, , y_D - y_B \rangle = \frac{-1}{2} \langle x_A - x_B \, , y_A - y_B \rangle$$

$$\langle x-1, y-5 \rangle = \frac{-1}{2} \langle 2, -3 \rangle = \langle -1 \, , 1 \cdot 5 \rangle$$

$$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$$

$$y - 5 = 1 \cdot 5 \Rightarrow y = 6 \cdot 5$$

$$D(0 \, , 6 \cdot 5) \therefore$$

b. أوجد إحداثيات النقطة E حيث: $\langle \overrightarrow{AE} \rangle = \frac{3}{2} \langle \overrightarrow{AC} \rangle$

$$\langle x_E - x_A \, , y_E - y_A \rangle = \frac{3}{2} \langle x_C - x_A \, , y_C - y_A \rangle$$

$$\langle x-3, y-2 \rangle = \frac{3}{2} \langle 4,2 \rangle$$

$$\langle x-3 \, , y-2 \rangle = \langle 6,3 \rangle$$

$$x - 3 = 6 \Rightarrow x = 9$$

$$y - 2 = 3 \Rightarrow y = 5$$

$$\therefore E(9,5)$$

c. أثبت أن: $\langle \overrightarrow{BC} \rangle \, , \langle \overrightarrow{DE} \rangle$ لهما الاتجاه نفسه

$$\langle \overrightarrow{DE} \rangle = \langle x_E - x_D \, , y_E - y_D \rangle = \langle 9, -1.5 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{BC} \rangle = \langle x_C - x_B \, , y_C - y_B \rangle = \langle 6, -1 \rangle$$

$$\because \langle \overrightarrow{DE} \rangle = \frac{3}{2} \langle \overrightarrow{BC} \rangle$$

بالتالي: $\langle \overrightarrow{BC} \rangle \, , \langle \overrightarrow{DE} \rangle$ لهما الاتجاه نفسه

UULA
صفوة معلمي الكويت

جمع المتجهات وطرحها

1. في المثلث ABC المقابل E منتصف $\overline{AB}$ و F منتصف $\overline{BC}$

a. عيّن النقطة M حيث $< \overrightarrow{BM} >=< \overrightarrow{BE} >+< \overrightarrow{BF} >$:

لهما نفس نقطة البداية طريقة إكمال متوازي الأضلاع

b. عيّن النقطة N حيث
$< \overrightarrow{AN} >=< \overrightarrow{AE} >+< \overrightarrow{AF} >$:

لهما نفس نقطة البداية طريقة إكمال متوازي الأضلاع

c. أثبت أن: $< \overrightarrow{AB} >=< \overrightarrow{MN} >$

$$
\begin{aligned}
< \overrightarrow{MN} > &=< \overrightarrow{MA} >+< \overrightarrow{AN} > \\
&=< \overrightarrow{MA} > + < \overrightarrow{AE} > + < \overrightarrow{AF} > \\
&=< \overrightarrow{MA} > + < \overrightarrow{AF} > + < \overrightarrow{AE} > \\
&=< \overrightarrow{MF} > + < \overrightarrow{AE} > \\
&= 2 < \overrightarrow{AE} > = < \overrightarrow{AB} >
\end{aligned}
$$

2. في المثلث ABC المقابل، M منتصف $\overline{BC}$

a. عيّن النقطة P حيث $< \overrightarrow{BP} >=< \overrightarrow{MA} >+< \overrightarrow{MC} >$:

معلق ⚠

$\overline{BC}$ منتصف M

$$
\begin{aligned}
&\therefore < \overrightarrow{BM} >=< \overrightarrow{MC} > \\
&\Rightarrow < \overrightarrow{BP} >=< \overrightarrow{MA} >+< \overrightarrow{MC} > \\
&\quad =< \overrightarrow{MA} >+< \overrightarrow{BM} > \\
&\quad =< \overrightarrow{BM} >+< \overrightarrow{MA} > \\
&\quad =< \overrightarrow{BA} > \qquad \Rightarrow P = A
\end{aligned}
$$

b. عيّن النقطة Q حيث $< \overrightarrow{BQ} >=< \overrightarrow{AC} >+< \overrightarrow{MB} >$:

$\overline{BC}$ منتصف M

$$
\begin{aligned}
&\therefore < \overrightarrow{CM} >=< \overrightarrow{MB} > \\
&\Rightarrow < \overrightarrow{BQ} >=< \overrightarrow{AC} >+< \overrightarrow{MB} > \\
&\quad =< \overrightarrow{AC} >+< \overrightarrow{CM} > \\
&\quad =< \overrightarrow{AM} >
\end{aligned}
$$

$\therefore$ نرسم من B متجه $< \overrightarrow{AM} >=< \overrightarrow{BQ} >$
لنحصل على النقطة Q المطلوبة

صفوة معلمي الكويت

3. في الشكل الرباعي $ABCD$ المقابل E منتصف $\overline{AD}$ و F منتصف $\overline{BC}$

a. عيّن النقطة P حيث $< \overrightarrow{CP} >=< \overrightarrow{CD} >+< \overrightarrow{BA} >$:

نرسم من D المتجه $< \overrightarrow{DK} >$ بحيث

$< \overrightarrow{BA} >=< \overrightarrow{DK} >$

$< \overrightarrow{CP} >=< \overrightarrow{CD} >+< \overrightarrow{BA} >$

$=< \overrightarrow{CD} >+< \overrightarrow{DK} >$

$=< \overrightarrow{CK} >\Rightarrow P = K$

معلق ⚠

b. أثبت أن: $< \overrightarrow{CP} >=< \overrightarrow{CE} >+< \overrightarrow{BE} >$

$< \overrightarrow{CE} > + < \overrightarrow{BE} >= < \overrightarrow{CD} > + < \overrightarrow{DE} > + < \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{AE} >$

$=< \overrightarrow{CD} >+< \overrightarrow{BA} >=< \overrightarrow{CP} >$

c. أثبت أن: $2 < \overrightarrow{EF} >=< \overrightarrow{AB} >+< \overrightarrow{DC} >$

$2 < \overrightarrow{EF} >=< \overrightarrow{EF} > + < \overrightarrow{EF} >$

$=< \overrightarrow{EA} > + < \overrightarrow{AB} >+< \overrightarrow{BF} > + < \overrightarrow{ED} > + < \overrightarrow{DC} >+< \overrightarrow{CF} >$

$=< \overrightarrow{AB} >+< \overrightarrow{DC} >$

4. A,B,C,D نقاط في المستوى، بسّط:

a. $2 < \overrightarrow{AB} > +4 < \overrightarrow{BC} > +2 < \overrightarrow{CD} > +2 < \overrightarrow{DA} >$

$= 2(< \overrightarrow{AB} > +2 < \overrightarrow{BC} >+< \overrightarrow{CD} >+< \overrightarrow{DA} >)$

$= 2(< \overrightarrow{AB} >+< \overrightarrow{BC} > +< \overrightarrow{BC} >+< \overrightarrow{CD} >+< \overrightarrow{DA} >)$

$= 2(< \overrightarrow{AC} >+< \overrightarrow{BA} >)$

$= 2(< \overrightarrow{BA} >+< \overrightarrow{AC} >) = 2 < \overrightarrow{BC} >$

b. $2 < \overrightarrow{AB} > -3 < \overrightarrow{AC} >+< \overrightarrow{AD} > +2 < \overrightarrow{BD} >$

$= 2 < \overrightarrow{AB} > +3 < \overrightarrow{CA} >+< \overrightarrow{AD} > +2 < \overrightarrow{BD} >$

$= 2(< \overrightarrow{AB} >+< \overrightarrow{BD} >) + 3 < \overrightarrow{CA} >+< \overrightarrow{AD} >$

$= 2 < \overrightarrow{AD} > +3 < \overrightarrow{CA} >+< \overrightarrow{AD} >$

$= 3 < \overrightarrow{CA} > +3 < \overrightarrow{AD} >$

$= 3(< \overrightarrow{CA} >+< \overrightarrow{AD} >) = 3 < \overrightarrow{CD} >$

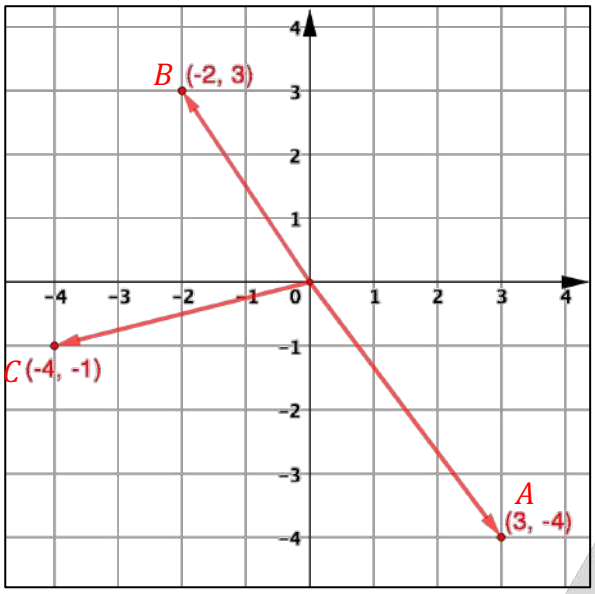
صفوة معلمي الكويت

7. مثّل النقاط التالية في المستوى الإحداثي حيث O نقطة الأصل، $\vec{i},\vec{j}$ متجهاً الوحدة الأساسيان:

$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

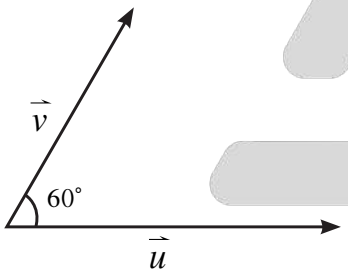
$\overrightarrow{OC} = -4\vec{i} - \vec{j}$



المتجهات

الضرب الداخلي

1. في كل شكل مما يلي أوجد: $\vec{u} \cdot \vec{v}$



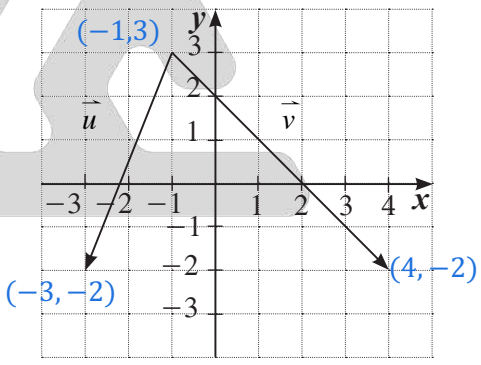
$\|\vec{u}\| = 4\ units$

$\|\vec{v}\| = 3\ units$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot cos\theta$

$= 4 \times 3 \times cos60$

$= 6$



$\vec{u} =< -3-(-1), -2-3 >=< -2, -5 >$

$\vec{v} =< 4-(-1), -2-3 >=< 5, -5 >$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

$= (-2)(5) + (-5)(-5) = 15$

2. لنأخذ: $\vec{u} =< 2, -1 >, \vec{v} =< -3,2 >, \vec{w} =< 1,2 >$ أوجد:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(-3) + (-1)(2) = -8$

b. $\vec{u} \cdot \vec{w} = (2)(1) + (-1)(2) = 0$

c. $\vec{v} \cdot \vec{w} = (-3)(1) + (2)(2) = 1$

d. $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{u} \cdot \vec{v} = -6[(2)(-3) + (-1)(2)] = 48$

e. $(-4\vec{u}) \cdot (3\vec{v}) = -12\,\vec{u} \cdot \vec{v} = -12[(2)(-3) + (-1)(2)] = 96$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

3. $\vec{u},\vec{v}$ متجهان في المستوى الإحداثي حيث: $\vec{u}\cdot\vec{v}=-6, \|v\|=5, \|u\|=4$. أوجد:

a. $(2\vec{u}+3\vec{v})^2$

$$= 4\|\vec{u}\|^2 + 12\vec{u}\cdot\vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2$$
$$= 4(4)^2 + 12(-6) + 9(5)^2 = 217$$

b. $(3\vec{u}-2\vec{v})\cdot(-2\vec{u}+\vec{v})$

$$= -6\|\vec{u}\|^2 + 3\vec{u}\cdot\vec{v} + 4\vec{v}\cdot\vec{u} - 2\|\vec{v}\|^2$$
$$= -6\|\vec{u}\|^2 + 7\vec{u}\cdot\vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2$$
$$= -6(4)^2 + 7(-6) - 2(5)^2 = -188$$

4. لنأخذ $\vec{u} =< x,4 >, \vec{v} =< 2,-3 >$

a. أوجد قيمة x بحيث يكون $\vec{u}$ متعامداً مع $\vec{v}$

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow 2x - 12 = 0 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

b. أوجد قيمة x بحيث يكون $\|\vec{u}\| = 5$ units.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+4^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{x^2+16} = 5 \Rightarrow x^2 + 16 = 25 \Rightarrow x^2 = 9$$
$$\Rightarrow x = \mp\sqrt{9} \Rightarrow x = \mp 3$$

5. لنأخذ في المستوى الإحداثي $\vec{u} =< 2,-2 >, \vec{v} =< -\sqrt{2},0 >$
أوجد $m(\vec{u},\vec{v})$

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}, \quad 0° \le m(\vec{u},\vec{v}) \le 180°$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 = -2\sqrt{2}$$
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + (0)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \therefore m(\vec{u},\vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 135°$$

6. $A(-1,3), B(-3,1), C(3-1)$ ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي

a. أوجد: $\|\overrightarrow{AB}\|, \|\overrightarrow{AC}\|, \|\overrightarrow{BC}\|$

$$< \overrightarrow{AB} >=< x_B - x_A, y_B - y_A >=< -2,-2 >$$
$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$< \overrightarrow{AC} >=< x_C - x_A, y_C - y_A >=< 4,-4 >$$
$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2+(-4)^2} = 4\sqrt{2}$$
$$< \overrightarrow{BC} >=< x_C - x_B, y_C - y_B >=< 6,-2 >$$
$$\Rightarrow \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{6^2+(-2)^2} = 2\sqrt{10}$$

b. أوجد: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = x_1x_2 + y_1y_2$$
$$= (-2)(4) + (-2)(-4) = 0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$$
$$\Rightarrow \text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A$$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة علمي الكويت

في التمارين (7-10)، أوجد $\vec{u}\cdot\vec{v}$

7) $\|\vec{u}\|=2, \|\vec{v}\|=3$
$m(\vec{v}\cdot\vec{u})=30°$

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$
$$\cos 30°=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{2\times 3}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{6}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

8) $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}, \|\vec{v}\|=5$
$m(\vec{u}\cdot\vec{v})=135°$

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$
$$\cos 135°=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{5\sqrt{2}}$$
$$\frac{-\sqrt{2}}{2}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{5\sqrt{2}}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{-\sqrt{2}\times 5\sqrt{2}}{2}=-5$$

9) $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}, \|\vec{v}\|=4$
$m(\vec{u}\cdot\vec{v})=180°$

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$
$$\cos 180°=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{4\sqrt{3}}$$
$$-1=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{4\sqrt{3}}$$
$$\therefore \vec{u}\cdot\vec{v}=-4\sqrt{3}$$

10) $\|\vec{u}\|=4\sqrt{2}, \|\vec{v}\|=7\sqrt{6}$
$m(\vec{u}\cdot\vec{v})=90°$

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$
$$\cos 90°=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{(4\sqrt{2})(7\sqrt{6})}$$
$$0=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{56\sqrt{3}}$$
$$\therefore \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

في التمارين (11-41)، استخدم الشكل لإيجاد:

$(BF)=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

11) $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}$ $= \|\overrightarrow{CF}\|\times\|\overrightarrow{DE}\|\times\cos(90°+60°)=4\times 4\times\frac{-\sqrt{3}}{2}=-4\sqrt{3}$

12) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}$ $= \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA}=\|\overrightarrow{DE}\|\times\|\overrightarrow{DA}\|\times\cos(60°)=2\times 4\times\frac{1}{2}=4$

13) $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}$ $= \|\overrightarrow{BF}\|\times\|\overrightarrow{CF}\|\times\cos(45°)=4\sqrt{2}\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=16$

14) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BF}$ $= \|\overrightarrow{AD}\|\times\|\overrightarrow{BF}\|\times\cos(45°)=4\times 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=16$

معلق ⚠

صفوة معلمي الكويت

المجتمع الإحصائي والمعاينة

1. اذكر مراحل البحث الإحصائي الأربعة مرتبة.

جميع البيانات - عرض البيانات - وصف البيانات وتحليلها - تفسير النتائج واتخاذ قرارات

2. ما هي أساليب جمع البيانات.

- المشاهدة والملاحظة
- المقابلة الشخصية
- مواقع التواصل الاجتماعي
- الهاتف المنزلي أو الجوال
- قواعد البيانات
- البريد العادي و الإلكتروني
- الأبحاث التاريخية والأرشيف
- الاستبانة
- الوثائق والسجلات

في التمارين التالية اذكر ما نوع البيانات التي تصف كلاً من الحالات التالية:

3. عدد التذاكر المباعة لإحدى المسرحيات. (كمية منقطعة)
4. أنواع منتجات معجون الأسنان المباعة للمستهلك (كيفية اسمية)

5. حدد نوع البيانات لكل مما يلي:

a. أوزان طلاب الصف الحادي عشر في مدرستك (كمية مستمرة)
b. أنواع الكتب في مكتبة المدرسة (كيفية اسمية)
c. الدخل الشهري للأسرة في دولة ما (كمية مستمرة)
d. ألوان أحذية الطلاب في صفك (كيفية اسمية)

6. عرف المجتمع المنتهي والمجتمع غير المنتهي

المجتمع المنتهي هو المجتمع الذي عدد وحداته محدودة

المجتمع غير المنتهي هو المجتمع الذي عدد وحداته غير محدودة

7. عرف كلاً مما يلي:

a. علم الإحصاء

هو علم أساسي في مجال الرياضيات التطبيقية يهتم بتفسير كمية من البيانات

b. المجتمع الإحصائي

هو مجموعة كل المفردات قيد الدراسة

c. الحصر الشامل

هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة

UULA
صفوة معلمي الكويت

العيّنات

1. أوجد كسر المعاينة عندما يكون حجم العينة 8 وحجم المجتمع 100 .

$$\frac{8}{100} = 0.08$$

2. أوجد حجم المجتمع الإحصائي إذا كان طول الفترة 5 وحجم العينة 100

$$100 \times 5 = 500$$

3. ما الفرق بين العينة البسيطة والعينة العشوائية الطبقية؟

في العينة العشوائية الطبقية مجموعات لا تتقاطع مع بعضها أما في العينة العشوائية البسيطة المفردات متجانسة

4. شركة دراسات تريد استفتاء العمال وأصحاب العمل في منطقة معينة، يبلغ عدد العمال 200 عامل وأصحاب العمل 40

a. أي نوع عينة عشوائية تستخدم في هذه الحالة؟

عينة عشوائية طبقية

b. كم يساوي كسر المعاينة إذا كنا نريد عينة من 60 شخصاً؟

$$\frac{60}{240} = 0.25$$

⚠ معلق

c. هل تستخدم جدول الأعداد العشوائية في هذه الدراسة؟

نعم

d. نرقم العمال من 1 إلي 200 وأصحاب العمل من 201 إلي 240، استخدم الصف السادس والعمود السادس وعدد أول 5 أعداد للسحب العشوائي من كل طبقة.

العمال: 80 , 4 , 187 , 191 , 8
أصحاب العمل: 201 , 202 , 217 , 209 , 225

صفوة معلمي الكويت

أساليب عرض البيانات

1. أثناء عمل الطلاب في مجموعات على نشاط معين في الصف سجل المعلم الملاحظات المبينة في الجدول التالي:

الفئة	يحاور ويناقش	يستمع فقط	يتخذ قراراً	غير مشارك	المجموع
التكرار	5	7	4	6	22

a. أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي لكل فئة.

الفئة	يحاور ويناقش	يستمع فقط	يتخذ قراراً	غير مشارك	المجموع
التكرار	5	7	4	6	22
التكرار النسبي	$\frac{5}{22}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{4}{22}$	$\frac{6}{22}$	$\frac{22}{22}$
التكرار المئوي	$\frac{5}{22}\times100\%$ $= 22.72\%$	$\frac{7}{22}\times100\%$ $= 31.8\%$	$\frac{4}{22}\times100\%$ $= 18.18\%$	$\frac{6}{22}\times100\%$ $= 27.27\%$	100%

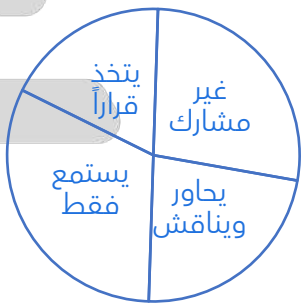
b. اعرض هذه البيانات باستخدام القطاعات الدائرية.

يحاور ويناقش: $\frac{5}{22}\times360° \backsimeq 81.82°$

يستمع فقط: $\frac{7}{22}\times360° \backsimeq 114.55°$

يتخذ قراراً: $\frac{4}{22}\times360° \backsimeq 65.45°$

غير مشارك: $\frac{6}{22}\times360° \backsimeq 98.18°$



2. يبين الجدول التالي وقت خروج السيارات من أحد المنتجعات السياحية بعد ظهر أحد الأيام

الفئة	4-	5-	6-	7-	8-	9-	المجموع
التكرار	17	31	25	14	7	6	100

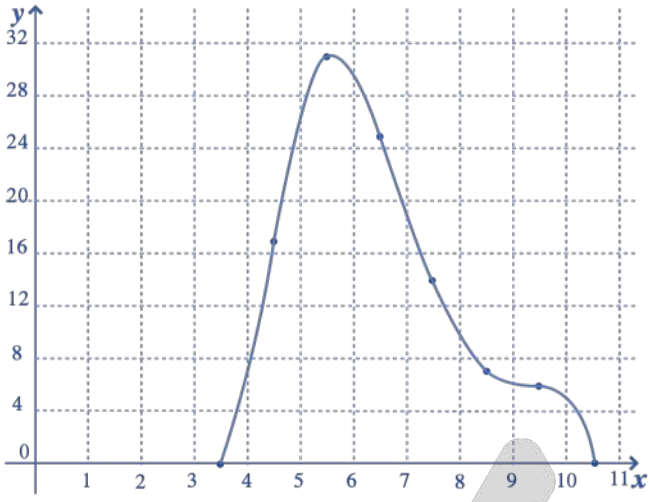
a. أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات

الفئة	4-	5-	6-	7-	8-	9-	المجموع
التكرار	17	31	25	14	7	6	100
مركز الفئة	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	

صفوة معلمي الكويت

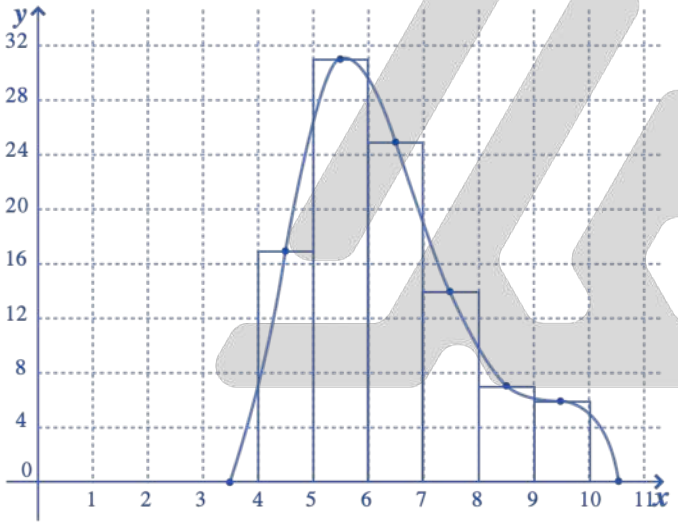
b. ارسم المنحنى التكراري

(b)



c. ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري

(c)



3. يعرض مدير أحد مطاعم الوجبات السريعة في الجدول التالي عدد الوجبات المرسلة إلي المنازل خلال أحد الأسابيع . وبُعد هذه المنازل عن المطعم.

البعد(km)	0-	4-	8-	12-	16-	20-	24-	**المجموع**
التكرار	12	25	21	20	12	8	4	102

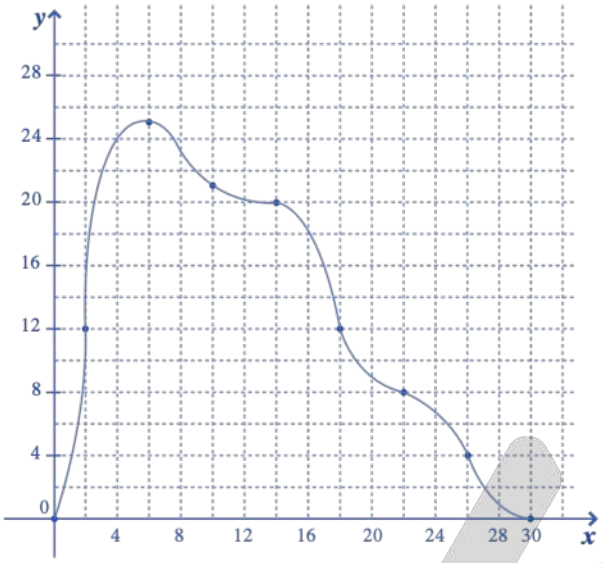
a. أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات

البعد(km)	0-	4-	8-	12-	16-	20-	24-	**المجموع**
التكرار	12	25	21	20	12	8	4	102
مركز الفئة	2	6	10	14	18	22	26	

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

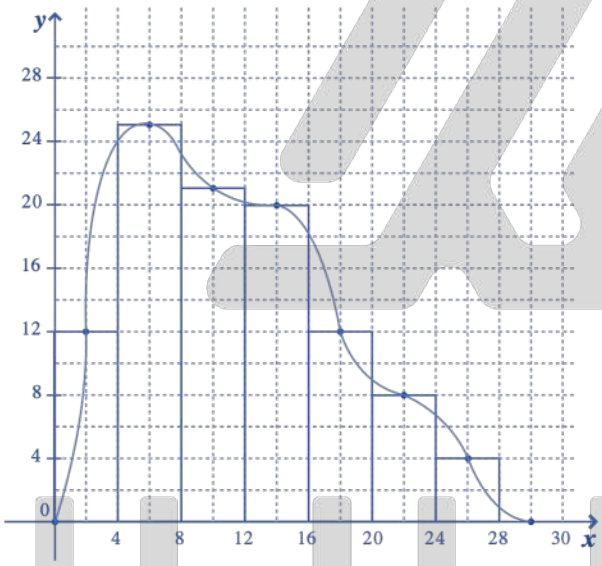
b. ارسم المنحنى التكراري

(b)



c. ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري

(c)



UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

القاعدة التجريبية

1. ما هو التوزيع الطبيعي

هو توزيع البيانات بشكل متماثل حول المتوسط الحسابي والمنحنى التكراري الذي يمثل هذه البيانات

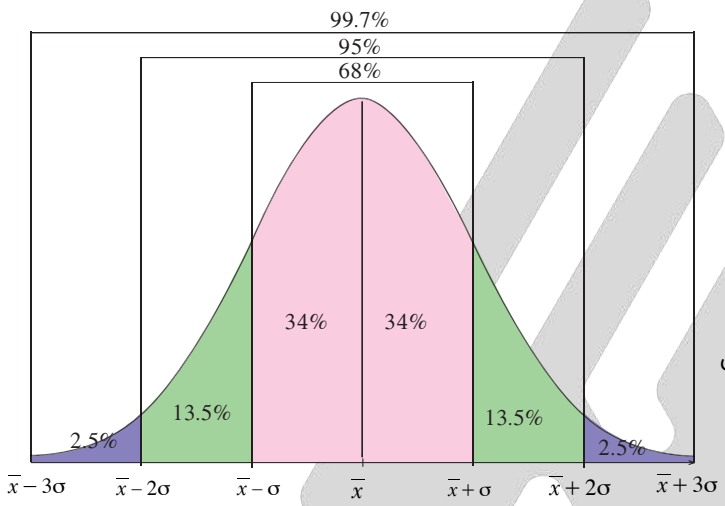
2. ما هي خصائص التوزيع الطبيعي

- يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي
- تتساوي فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال
- ينحدر طرفاه تدريجيا ويمتدان إلى ما لا نهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبداً

3. ما الشكل الذي يأخذه التوزيع الطبيعي

شكل الناقوس أو الجرس

4. أكمل الرسم :



5. تبين لاحدى المؤسسات الصناعية أن المتوسط الحسابي لأرباحها الشهرية 1250 ديناراً بانحراف معياري 225 ديناراً وأن المنحنى التكراري لهذه الأرباح هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي)

a. طبق القاعدة التجريبية

$\bar{x} = 1250\ ,\ \sigma = 225$

حوالي 68% من الأرباح تقع على الفترة $[\bar{x}-\sigma\ ,\ \bar{x}+\sigma]$

$[1250-225\ ,\ 1250+225] = [1025\ ,\ 1475]$

حوالي 95% من الأرباح تقع على الفترة $[\bar{x}-2\sigma\ ,\ \bar{x}+2\sigma]$

$[1250-450\ ,\ 1250+450] = [800\ ,\ 1700]$

حوالي 99.7% من الأرباح تقع على الفترة $[\bar{x}-3\sigma\ ,\ \bar{x}+3\sigma]$

$[1250-675\ ,\ 1250+675] = [575\ ,\ 1925]$

b. هل وصلت أرباح هذه المؤسسة إلي 2000 دينار؟

نلاحظ أن المبلغ 2000 يقع خارج الفترة الأخيرة [575 ,1925] التي تناظر 99.7% من الأرباح لذلك من غير المتوقع أن تصل أرباح الشركة إلى 2000 دينار.

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

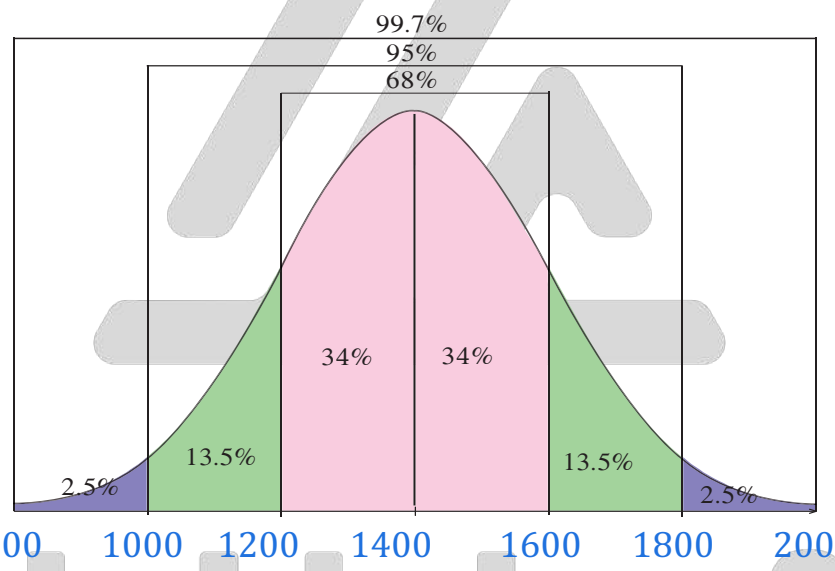
6. يعلن مصنع لإنتاج الأسلاك المعدنية أن متوسط تحمل السلك هو 1400 kg بانحراف معياري 200 kg على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع تحمل الأسلاك المعدنية يقترب كثيراً من التوزيع الطبيعي:

a. طبق القاعدة التجريبية

$\bar{x} = 1400\ ,\ \sigma = 200$
حوالي 68% من الأسلاك المعدنية المصنعة تقع على الفترة $[\bar{x} - \sigma\ ,\ \bar{x} + \sigma]$
$[1400\ -\ 200\ ,\ 1400 + 200] = [1200\ ,\ 1600]$
حوالي 95% من الأسلاك المعدنية المصنعة تقع على الفترة
$[\bar{x} - 2\sigma\ ,\ \bar{x} + 2\sigma]$
$[1400\ -\ 400\ ,\ 1400 + 400] = [1000\ ,\ 1800]$
حوالي 99.7% من الأسلاك المعدنية المصنعة تقع على الفترة
$[\bar{x} - 3\sigma\ ,\ \bar{x} + 3\sigma]$
$[1400\ -\ 600\ ,\ 1400 + 600] = [800\ ,\ 2000]$

b. أوجد النسبة المئوية للأسلاك المعدنية التي يزيد متوسط تحملها عن 1000 kg

نستنتج أن النسبة المئوية هي:
$13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% + 2.5\% = 97.5\%$



UULA
صفوة معلمي الكويت

القيمة المعياريّة

1. أكمل الجملة التالية: القيمة المعيارية هي مؤشر يدل على **انحراف** قيمة مفردة من بيانات عن **الانحراف المعياري** وذلك باستخدام **المتوسط الحسابي** لقيم هذه البيانات.

2. في أحد الاختبارات حيث الدرجة العظمى 20، جاءت درجة أحد الطلاب 15 مع متوسط حسابي 14 وانحراف معياري 4. ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة ببقية درجات هذا الاختبار؟

$$z = \frac{15-14}{4} = 0.25$$

4. في المدينة A يزن أحد الرجال 75 kg مع متوسط حسابي للرجال 70 kg وانحراف معياري 5 kg وفي المدينة B يزن أحد الرجال 80 kg مع متوسط حسابي للرجال 76 kg وانحراف معياري 8 kg . أوجد القيمة المعيارية z_1 لوزن 75 kg في المدينة A والقيمة المعيارية z_2 لوزن 80 kg في المدينة B

$$z_1 = \frac{75-70}{5} = 1$$

$$z_2 = \frac{80-76}{8} = 0.5$$

صفوة معلمي الكويت