الرياضيات

الكورس الأول

١١

UULA.COM 2023–2022

UULA

الرياضيات

الكورس الأول

11

UULA.COM 2023–2022

شلون تتفوق بدراستك

منصة علا تخلي المذكرة أقوى

تبي أعلى الدرجات؟ لا تعتمد على المذكرة بروحها
ادرس صح من الفيديوهات و الاختبارات في منصة علا

اختبارات ذكية تدربك

حل الاختبارات الإلكترونية أول بأول
عشان ترفع مستواك

فيديوهات تشرح لك

تابع الفيديوهات و اسأل المعلم في علا وأنت
تدرس من المذكرة عشان تضبط الدرس

اكتشف عالم التفوق مع منصة علا

لتشترك بالمادة و تستمتع بالشرح
المميز صور أو اضغط على الQR

UULA

المعلق

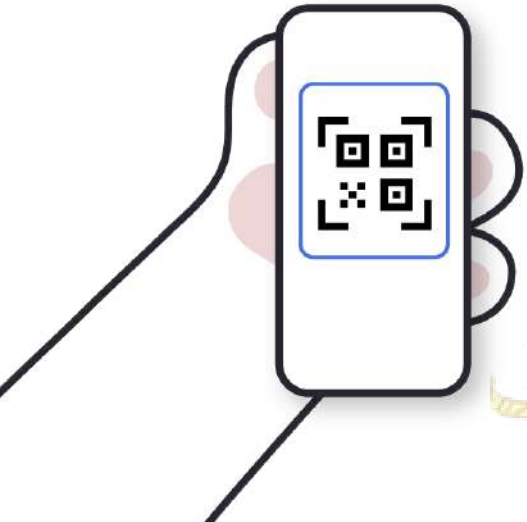
هذه المذكرة تغطي المادة كاملة.

في حال وجود أي تغيير للمنهج أو تعليق جزء منه يمكنكم مسح رمز QR للتأكد من المقرر.

المنقذ

أول ما تحتاج مساعدة بالمادة ، المنقذ موجود!

صور الQR بكاميرا التلفون أو اضغط عليه إذا كنت تستخدم المذكرة من جهازك و يطلع لك فيديو يشرح لك.



قائمة المحتوى

الجذور والتعبيرات الجذرية

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب أي إذا كان $A^2 = x$ فإن $A = \pm\sqrt{x}$ حيث $x > 0$
- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي واحد أي إذا كان $A^3 = x$ فإن $A = \sqrt[3]{x}$
- $(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x ,\forall x \in \mathbb{R}$

أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلة الحاسبة:

-8 $\qquad$ $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

125 $\qquad$ $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

$-\frac{375}{24}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-\frac{375}{24}} = \sqrt[3]{-\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{5^3}{2^3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{5}{2}\right)^3} = -\frac{5}{2}$

0.064 $\qquad$ $\sqrt[3]{0.064} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{5^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{2}{5}$

-27 $\qquad$ $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

64 $\qquad$ $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

-0.008 $\qquad$ $\sqrt[3]{-0.008} = \sqrt[3]{-\frac{1}{125}} = \sqrt[3]{-\frac{1^3}{5^3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{5}\right)^3} = -\frac{1}{5}$

$\frac{343}{216}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{343}{216}} = \sqrt[3]{\frac{7^3}{2^3 \times 3^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{7}{2 \times 3}\right)^3} = \frac{7}{6}$

تبسيط الجذور:

- يكون التعبير الجذري في أبسط صورة في الحالات التالية:
- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لأس أكبر أو يساوي دليل الجذر
- ألا يكون المقام جذراً
- ألا يكون المجذور كسر
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن

بسط كلاً من التعبيرات الجذرية التالية حيث x,y عددان حقيقيان:

$\sqrt{4x^6}$ $\qquad$ $= \sqrt{(2x^3)^2} = 2|x^3| = \begin{cases} 2x^3 & : x \geq 0 \\ -2x^3 & : x < 0 \end{cases}$

$\sqrt[3]{8x^3} + 3x \qquad = \sqrt[3]{(2x^3)^3} + 3x = 2x + 3x = 5x$

$\sqrt{9x^2y^4} \qquad = \sqrt{(3xy^2)^2} = 3|x\,y^2| = 3y^2|x| = \begin{cases} 3y^2\,x & : x \geq 0 \\ -3y^2\,x & : x < 0 \end{cases}$

$\sqrt[3]{-27x^6} + 3x \qquad = \sqrt[3]{(-3x^2)^3} + 3x^2 = -3x^2 + 3x^2 = 0$

$\sqrt{x^8y^6} \qquad = \sqrt{(x^4y^3)^2} = |x^4\,y^3| = x^4|y^3| = \begin{cases} x^4\,y^3 & : y \geq 0 \\ -x^4\,y^3 & : y < 0 \end{cases}$

جمع و طرح التعبيرات الجذرية

التعبيرات الجذرية المتشابهة:

يكون التعبيران الجذريان متشابهين إذا كان لهما نفس الدليل والمجذور

مثال:

$2\sqrt{3} \quad , 5\sqrt{3}$	$2\sqrt{3} \quad , 5\,\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{5} \quad , \sqrt{3}$
متشابهان	غير متشابهين	غير متشابهين

أوجد الناتج في أبسط صورة:

$2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{375}$

$= 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{5^3\times3}$

$= 2\sqrt[3]{3} + 5\times5\,\sqrt[3]{3}$

$= 2\sqrt[3]{3} + 25\sqrt[3]{2} \qquad = 27\,\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

$= \sqrt[3]{2^6\times2} + \sqrt[3]{3^3\times2} - 2\sqrt[3]{5^3\times2}$

$= 2^2\,\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 2\times5\,\sqrt[3]{2} \;= -3\sqrt[3]{2}$

$2\sqrt{75} - \sqrt{48}$

$= 2\sqrt{5^2\cdot3} - \sqrt{2^4\cdot3} \qquad = 2\times5\sqrt{3} - 2^2\,\sqrt{3}$

$= 10\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \qquad = 6\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$

$= \sqrt[3]{2^6\times5} + \sqrt[3]{2^3\cdot5} - \sqrt[3]{3^3\cdot5}$

$= 2^2\,\sqrt[3]{5} + 2\,\sqrt[3]{5} - 3\,\sqrt[3]{5} = 3\,\sqrt[3]{5}$

$3\sqrt{32} - \sqrt{98}$

$= 3\sqrt{2^4\times2} - \sqrt{7^2\times2}$

$= 3\times2^2\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$

$= 12\sqrt{2} - 7\sqrt{2} \qquad = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$

$=\sqrt{3^2\times2} + \sqrt{5^2\times2} - \sqrt{3^2\times2^2\times2}$

$= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\times2\sqrt{2} \qquad = 2\sqrt{2}$

$4\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{128}$

$=4\sqrt[3]{2^3} + 2\sqrt[3]{2^6\cdot2}$

$= 4\times2 + 2\times2^2\,\cdot\sqrt[3]{2} \;= 8 + 8\sqrt[3]{2}$

$\sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{27}$

$=\sqrt{2^2\cdot3} + \sqrt{7^2\cdot3} - \sqrt{3^2\cdot3}$

$= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

تمارين مشابهة من الكراسة

4. بسط كلاً مما يلي:

i. $3\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$

j. $\sqrt{75} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32}$

k. $4\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{54}$

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = x$ $(\sqrt{x}\ )^2 = x$ $\sqrt{x.y} = \sqrt{x}\ .\sqrt{y}$ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\ : y \neq 0$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\sqrt[3]{x^3} = x$ $(\sqrt[3]{x}\ )^3 = x$ $\sqrt[3]{x.y} = \sqrt[3]{x}\ .\sqrt[3]{y}$ $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}\ : y \neq 0$

بسط كلاً من التعبيرات الجذرية التالية:

$\sqrt[3]{80n^5}$

$= \sqrt[3]{2^3 \times 2 \times 5\ n^3 . n^2} = 2n\sqrt[3]{10\ n^2}$

$\sqrt[3]{18x^3}$

$= \sqrt[3]{18}\ \ x$

$\sqrt{72x^3}\ \ ,\ \ x \geq 0$

$= \sqrt{2^2 \times 2 \times 3^2 . x^2 . x}$

$= 2 \times 3\ \lvert x \rvert \sqrt{2x} = 6x\sqrt{2x} \qquad , \lvert x \rvert = x : x \geq 0$

$\sqrt{50x^4}$

$= \sqrt{2 \times 5^2 x^4}\ \ = 5\lvert x^2 \rvert \sqrt{2} = 5x^2\ \sqrt{2}$

بسط كلاً من التعبيرات الجذرية التالية:

$3\sqrt{7x^3} \times 2\sqrt{x^3 y^2}\ \ ,\ \ x \geq 0$

$$= 6\sqrt{7x^3 \times x^3 y^2} = 6\sqrt{7x^6 y^2} = 6\lvert x^3 y \rvert \sqrt{7} = 6x^3 \lvert y \rvert \sqrt{7} = \begin{cases} 6x^3 y\sqrt{7} & y \geq 0 \\ -6x^3 y\sqrt{7} & y < 0 \end{cases}$$

$4\sqrt[3]{x^4 y} \times 3\sqrt[3]{x^2 y} \qquad = 12\sqrt[3]{x^4 y \times x^2 y} = 12\sqrt[3]{x^6 y^2} = 12x^2\ \sqrt[3]{y^2}$

$\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x}\ \ ,\ \ x \geq 0 \qquad = \sqrt{5x^3 \times 40x} = \sqrt{200x^4} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 5^2 x^4}$

$= 2 \times 5\ \lvert x^2 \rvert\ \sqrt{2} = 10x^2\ \sqrt{2}$

$\sqrt[3]{5x^3y^4}\times\ \sqrt[3]{64x^2y^3}$ $\quad = \sqrt[3]{5x^3y^4\times64x^2y^3} = \sqrt[3]{320x^5y^7}$

$= \sqrt[3]{2^6\times5x^3x^2y^6y} = 2^2xy^2\sqrt[3]{5x^2y} = 4xy^2\sqrt[3]{5x^2y}$

بسط كلاً من التعبيرات الجذرية التالية:

$\dfrac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}}\ ,\ x \neq 0$ $\quad = \sqrt[3]{\dfrac{162x^5}{3x^2}} = \sqrt[3]{54x^3} = \sqrt[3]{3^3\cdot 2x^3} = 3\,x\,\sqrt[3]{2}$

$\dfrac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}}\ ,\ x \neq 0\ ,\ y \neq 0$ $\quad = \sqrt[3]{\dfrac{250x^7y^3}{2x^2y}} = \sqrt[3]{125x^5y^2} = \sqrt[3]{5^3\cdot x^3\cdot x^2\cdot y^2} = 5x\,\sqrt[3]{x^2y^2}$

$\dfrac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$ $\quad = \sqrt{\dfrac{243}{27}} = \sqrt{9} = 3$

$\dfrac{\sqrt{12x^4}}{\sqrt{3x}}\ ,\ x > 0$ $\quad = \sqrt{\dfrac{12x^4}{3x}} = \sqrt{4x^3} = \sqrt{2^2x^2\cdot x} = 2|x|\sqrt{x} = 2x\sqrt{x} \quad : \ |x| = x\ , x > 0$

$\dfrac{\sqrt[3]{128x^{15}}}{\sqrt[3]{2x^2}}\ ,\ x \neq 0$ $\quad = \sqrt[3]{\dfrac{128x^{15}}{2x^2}} = \sqrt[3]{64x^{13}} = \sqrt[3]{2^6\cdot x^{12}\cdot x} = 2^2x^4\sqrt[3]{x} = 4x^4\sqrt[3]{x}$

تمارين مشابهة من الكراسة

3. بسط كلاً من التعبيرات الجذرية التالية:

j. $\sqrt[3]{49x^2}\times\sqrt[3]{56xy^3}$

k. $\sqrt[3]{256u^5v}\ \div\ \sqrt[3]{4u^2v^{10}}\quad ,\quad u \neq 0, v\ \neq 0$

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذراً

يكون التعبيران الجذريان مترافقين إذا كان ناتج ضربهما عدداً نسبياً، مثال:

- $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ مترافقان لأن ناتج ضربهما عدد نسبي $\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 3$
- $\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5^2}$ مترافقان لأن ناتج ضربهما عدد نسبي $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5^2} = 5$
- $(2+\sqrt{2})$ ، $(2-\sqrt{2})$ مترافقان لأن ناتج ضربهما عدد نسبي:

$$(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2}) = (2)^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2$$

اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عدداً نسبياً:

$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $= \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{6}}{3}$

$\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ $= \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}} \times \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{7}$

$\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$ $= \frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}+2-3-\sqrt{2}}{(3)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}$

$\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ $= \frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{6+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2}{(2)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$

$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}$, $x > 1$, $x \in \mathbb{Q}$ $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x} \times \frac{\sqrt{x}+9x}{\sqrt{x}+9x} = \frac{x\sqrt{x}+9x^2+x+9x\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2-(9x)^2}$

$= \frac{9x^2+x+10x\sqrt{x}}{x-81x^2} = \frac{x(9x+1+10\sqrt{x})}{x(1-81x)} = \frac{9x+1+10\sqrt{x}}{1-81x}$

معلق ⚠

$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $(x > 1$, $x \in \mathbb{Q})$ $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x\sqrt{x}+x+x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2-(1)^2} = \frac{2x+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x-1}$

💡 تمارين مشابهة من الكراسة

6. اكتب كلاً مما يلي بحيث يكون المقام عدداً نسبياً

c. $\frac{4}{3\sqrt{3}-2}$

d. $\frac{3+\sqrt{8}}{2-2\sqrt{8}}$

e. $\frac{5+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$

f. $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}-(9-4\sqrt{5})$

g. $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

معلق ⚠

h. $\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

i. $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}, x \in \mathbb{Z}^+, x \neq 1$

7. أوجد قيمة التعبير: $x^2 - 6$ إذا كان، $x = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$

8. أوجد قيمة التعبير: $x^2 - x + 1$ إذا كان، $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

الجذور والتعبيرات الجذرية-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\sqrt[3]{-64x^3}+4x=0$ [✓ a] ⓑ

2. $\frac{8-\sqrt{7}}{3}+\frac{3}{4-\sqrt{7}}\in\mathbb{Z}$ [✓ a] ⓑ

3. $(3-2\sqrt{2})^{27}\times(3+2\sqrt{2})^{27}=1$ [✓ a] ⓑ

4. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{5}$ ⓐ [✓ b]

5. $|m|\times\sqrt{m^2}=m^2\ ,\forall m\in\mathbb{R}$ [✓ a] ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. التعبير الجذري الذي في أبسط صورة هو:

ⓐ $\sqrt[3]{216}$ ⓑ $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ [✓ c] $\sqrt[3]{9}$ ⓓ $\sqrt{\frac{2}{3}}$

7. لوضع التعبير الجذري $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}$ في أبسط صورة نضرب كلاً من البسط والمقام في:

ⓐ $\sqrt{2}$ [✓ b] $\sqrt[3]{2}$ ⓒ 2 ⓓ 4

8. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ يساوي:

ⓐ $2-\sqrt{3}$ [✓ b] $2+\sqrt{3}$ ⓒ $3-\sqrt{2}$ ⓓ $3+\sqrt{2}$

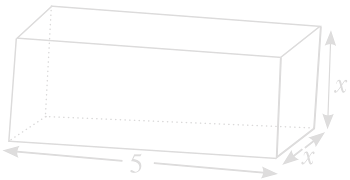
9. إذا كان $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فإن:

ⓐ $\varphi^2+\varphi=1$ [✓ b] $\varphi^2=\varphi+1$ ⓒ $\varphi+\varphi^2+1=0$ ⓓ $\varphi^2+1=\varphi$

10. إذا كان $x\in\mathbb{R}^-$ فإن $|x|\cdot\frac{1}{x}$ يساوي:

[✓ a] -1 ⓑ $-x$ ⓒ 1 ⓓ x

11. إذا كان حجم شبه المكعب المقابل يساوي $40\ \text{cm}^3$ ، فإن x تساوي:



ⓐ $2\ \text{cm}$ ⓑ $2\sqrt{2}\ \text{cm}$ ⓒ $-2\sqrt{2}\ \text{cm}$ ⓓ 4cm

⚠ معلق

12. إذا كان حجم إسطوانة ارتفاعها h وطول نصف قطرها r يعطي بالعلاقة $V = \pi r^2 h$ حيث الحجم (V) بدلالة كل من ارتفاع ونصف قطر الإسطوانة، فأي من العلاقات التالية صحيحة؟

معلق ⚠

ⓐ $h = \pi r^2 V$ ⓑ $h = \frac{\pi}{r^2} \cdot V$ ⓒ $r = \sqrt{\pi h V}$ ⓓ $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

🎯 **تدرب و تفوق**

اختبارات الكترونية ذكية

الوحدة 1/ الأعداد الحقيقية

الأسس النسبية

بسط كل عدد من الأعداد التالية مستخدماً الصورة الجذرية:

- $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$
- $(5^{\frac{1}{2}})(5^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{5}\times\sqrt{5} = 5$
- $(10^{\frac{1}{3}})(100^{\frac{1}{3}}) = \sqrt[3]{10}\times\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{10\times100} = \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$
- $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$
- $(2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2$
- $(8^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{8}\times\sqrt{2} = \sqrt{8\times2} = \sqrt{16} = 4$

اكتب بالصورة الجذرية كلاً من :

- $25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = (\sqrt{25})^3$
- $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2} = (\sqrt[5]{x})^2$
- $x^{0.4} = x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2} = (\sqrt[5]{x})^2$
- $y^{\frac{3}{8}} : y \geq 0 = \sqrt[8]{y^3} = (\sqrt[8]{y})^3 \quad : \forall y \geq 0$
- $64^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{64^4} = (\sqrt[3]{64})^4$
- $y^{-2.5} : y > 0 = y^{\frac{-5}{2}} = \frac{1}{y^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^5}} \quad : \forall y > 0$

اكتب بالصورة الأسية كلاً من :

- $(\sqrt[5]{y})^2 = y^{\frac{2}{5}}$
- $\sqrt{b^3} : b \geq 0 = b^{\frac{3}{2}} \quad : \forall b \geq 0$
- $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$
- $(\sqrt{y})^3 : y \geq 0 = y^{\frac{3}{2}} \quad : \forall y \geq 0$

قوانين الأسس النسبية

قوانين الأسس النسبية

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}\ , b \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ , b \neq 0$$

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

$$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}\ , b \neq 0$$

بسط كل عدد من الأعداد التالية مستخدماً قوانين الأسس:

Q $(-32)^{\frac{3}{5}}$ $= (-2^5)^{\frac{3}{5}} = (-2)^{5\times\frac{3}{5}} = (-2)^3 = -8$

Q $\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}\right) \div x^{\frac{2}{3}}, \ x > 0$ $= \left(x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}\right) \div x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}} \div x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

Q $25^{-\frac{3}{2}}$ $= (5^2)^{-\frac{3}{2}} = 5^{2\times(\frac{-3}{2})} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

Q $(-32)^{\frac{4}{5}}$ $= (-2^5)^{\frac{4}{5}} = (-2)^{5\times\frac{4}{5}} = (-2)^4 = 16$

Q $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}, \ x \geq 0\ , \ y > 0$ $= \left(\frac{2^4 \quad x^{14}}{3^4 \quad y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2^{4\times\frac{1}{2}} \quad x^{14\times\frac{1}{2}}}{3^{4\times\frac{1}{2}} \quad y^{18\times\frac{1}{2}}} = \frac{2^2 \quad x^7}{3^2 \quad y^9} = \frac{4 \quad x^7}{9 \quad y^9}$

قوانين الجذور النونية

قوانين الجذور النونية

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}\ , y \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

بسط كلاً من التعبيرات الجذرية التالية:

Q $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7}$ $= \sqrt[4]{35}$

Q $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ $= \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

Q $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$ $= \sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2$

Q $((\sqrt{x^3y^3})^{\frac{1}{3}})^{-1}$ $= \left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}\times -1} = (\sqrt{x^3y^3})^{-\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$= x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{3}} \cdot y^{\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{3}} = x^{\frac{-1}{2}}\ y^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{xy}$

Q $\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{27}$ $= \sqrt[5]{9\times27} = \sqrt[5]{3^2\times3^3} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

Q $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}}$ $= \sqrt[3]{\frac{243}{3}} = \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3\cdot 3} = 3\cdot\sqrt[3]{3}$

Q $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$ $= \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

Q $(\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{y^3})^{-12}$, $x, y \in \mathbb{Q}^+$ $= \left(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\right)^{-12} = x^{\frac{1}{4}\times -12} \cdot y^{\frac{3}{4}\times -12}$ $= x^{-3}\cdot y^{-9} = \frac{1}{x^3y^9}$

💡 تمارين مشابهة من الكراسة

5. بسّط كلاً مما يلي:

g. $\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}$ $: x > 0, y > 0$

h. $\left(\left(3^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}$ $x > 0$

i. $\left(\frac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^2}}\right)^{-12}$ $t > 0$

6. بسّط كلاً مما يلي:

a. $\sqrt{\sqrt[3]{64x^6}}$

b. $5^{\frac{2}{3}}\times25^{-\frac{1}{3}}$

c. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\times\sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}$

e. $\frac{(32)^{\frac{1}{2}}\times(16)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{64}}$

f. $(2-\sqrt[3]{8})(2+\sqrt[3]{8})$

الأسس النسبية-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. $16^{-\frac{3}{4}} = 32^{-\frac{3}{5}}$	● a	○ b
2. $x^{\frac{1}{2}} \div x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{3}}$	○ a	● b
3. $x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{6}}$	● a	○ b
4. $\sqrt[4]{\sqrt{x}} = x$, $x > 0$	○ a	● b
5. $\sqrt{32} = \sqrt{16^{-1}} = 4$	○ a	● b

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. إذا كان $n > 0$, فإن التعبير الذي لا يكافئ $\sqrt[4]{4n^2}$

ⓐ $(4n^2)^{\frac{1}{4}}$ [✓ ⓑ $2n^{\frac{1}{2}}$] ⓒ $(2n)^{\frac{1}{2}}$ ⓓ $\sqrt{2n}$

7. إذا كان: $y > 0$ ، فإن التعبير $\frac{56^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{5}{3}}}{(7y^2)^{\frac{1}{3}}}$ يساوي:

ⓐ $14y$ ⓑ $\frac{1}{7}y$ [✓ ⓒ $2y$] ⓓ $\frac{8}{7}y$

8. $\left(\sqrt[4]{x^{-2}y^4}\right)^{-2} = \quad : x \neq 0 \ , \quad y \neq 0$

ⓐ $|x^{-1}|y^2$ [✓ ⓑ $|x|y^{-2}$] ⓒ xy^2 ⓓ $x^{-2}y^2$

9. $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}} =$

[✓ ⓐ $5^{-\frac{1}{2}}$] ⓑ $\frac{1}{5}$ ⓒ $5^{\frac{1}{2}}$ ⓓ $5^{\frac{2}{3}}$

10. إذا كان: $x + y = 2 \ , \ x^2 - xy + y^2 = 4$ ، فإن $\sqrt[6]{x^3 + y^3}$ يساوي:

[✓ ⓐ $\sqrt{2}$] ⓑ $\sqrt[3]{2}$ ⓒ $\sqrt[3]{6}$ ⓓ 2

12. إن قيمة التعبير $\frac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[4]{x^5}}{x^3 \cdot \sqrt[8]{x^2}}$ تساوي:

ⓐ x ⓑ $\frac{1}{x}$ [✓ ⓒ 1] ⓓ $\sqrt{x}$

حل المعادلات

أولاً: المعادلات الجذرية

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

Q $\sqrt{5x+4}-7=0$

$\sqrt{5x+4}=7$

$\left(\sqrt{5x+4}\right)^2=7^2$

$5x+4=49$

$5x=49-4$

$5x=45$

$x=\frac{45}{5}=9\in\left[\frac{-4}{5},\infty\right)$

$\therefore$ م.ح $=\{9\}$

شرط الحل

$5x+4\geq0$

$5x\geq-4$

$x\geq\frac{-4}{5}$

$x\in\left[\frac{-4}{5},\infty\right)$

Q $2+\sqrt{3x-2}=6$

$\sqrt{3x-2}=4$

$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2=4^2$

$3x-2=16$

$3x=16+2$

$3x=18$

$x=\frac{18}{3}=6\in\left[\frac{2}{3},\infty\right)$

$\therefore$ م.ح $=\{6\}$

شرط الحل

$3x-2\geq0$

$3x\geq2$

$x\geq\frac{2}{3}$

$x\in\left[\frac{2}{3},\infty\right)$

Q $\sqrt{x-2}+9=0$

$\sqrt{x-2}=-9$

$\therefore$ م.ح $=\emptyset$ لأن -9 سالب

Q $6+\sqrt{x-1}=3$

$\sqrt{x-1}=-3$

$\therefore$ م.ح $=\emptyset$ لأن -3 سالب

أوجد مجموعة الحل:

Q $2(x+3)^{\frac{3}{2}}=54$

$(x+3)^{\frac{3}{2}}=27$

$\left[(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}=[27]^{\frac{2}{3}}$

$x+3=9$

$x=6\quad,6\in[-3,\infty)$

$\therefore$ م.ح $=\{6\}$

شرط الحل

$x+3\geq0$

$x\geq-3$

$x\in[-3,\infty)$

Q $2(2x+4)^{\frac{3}{4}}=16$

$(2x+4)^{\frac{3}{4}}=8$

$\left[(2x+4)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}}=[8]^{\frac{4}{3}}$

$2x+4=16$

$2x=12$

$x=6\quad,6\in[-2,\infty)$

$\therefore$ م.ح $=\{6\}$

شرط الحل

$2x+4\geq0$

$2x\geq-4$

$x\geq-2$

$x\in[-2,\infty)$

Q $2(x-2)^{\frac{2}{3}}=50 \Rightarrow (x-2)^{\frac{2}{3}}=25 \Rightarrow \left[(x-2)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}=(25)^{\frac{3}{2}}$

$$|x-2|=125$$

$x-2=125$ | $x-2=-125$

$x=127$ | $x=-123$

$\{127,-123\}=$ م.ح ∴

Q $(1-x)^{\frac{2}{5}}-4=0 \quad \Rightarrow (1-x)^{\frac{2}{5}}=4 \quad \Rightarrow \left[(1-x)^{\frac{2}{5}}\right]^{\frac{5}{2}}=4^{\frac{5}{2}}$

$$|1-x|=32$$

$1-x=-32$ | $1-x=32$

$-x=-32-1=-33$ | $-x=32-1=31$

$x=33$ | $x=-31$

$\{33,-31\}=$ م.ح ∴

أوجد مجموعة الحل:

Q $5+\sqrt{x-3}=x$

$\sqrt{x-3}=x-5$

$(\sqrt{x-3})^2=(x-5)^2$

$x-3=x^2-10x+25$

$x^2-10x+25-x+3=0$

$x^2-11x+28=0$

$(x-4)(x-7)=0$

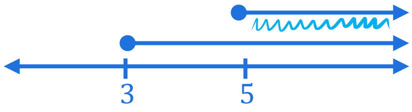
$x=4\notin[5,\infty), x=7\in[5,\infty)$

$\{7\}=$ م.ح ∴

شرط الحل

$x-3\geq 0$ | $x-5\geq 0$

$x\geq 3$ | $x\geq 5$



$x\in[5,\infty)$

Q $\sqrt{5x-1}+3=x$

$\sqrt{5x-1}=x-3$

$\left(\sqrt{5x-1}\right)^2=(x-3)^2$

$5x-1=x^2-6x+9$

$x^2-6x+9-5x+1=0$

$x^2-11x+10=0$

$(x-1)(x-10)=0$

$x=1\notin[3,\infty) \quad x=10\in[3,\infty)$

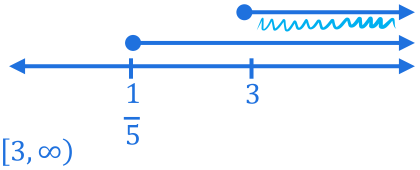
$\{10\}=$ م.ح ∴

شرط الحل

$5x-1\geq 0$ | $x-3\geq 0$

$5x\geq 1$

$x\geq\frac{1}{5}$ | $x\geq 3$



$x\in[3,\infty)$

أوجد مجموعة الحل:

$\sqrt{8x} - 2\sqrt{4x-16} = 0$

$\sqrt{8x} = 2\sqrt{4x-16}$

$(\sqrt{8x})^2 = (2\sqrt{4x-16})^2$

$8x = 4(4x-16)$

$8x = 16x - 64$

$8x - 16x = -64$

$-8x = -64$

$\frac{-8x}{-8} = \frac{-64}{-8} \Rightarrow x = 8 \in [4, \infty)$

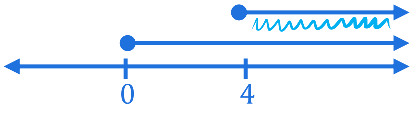
∴ م.ح = $\{8\}$

شرط الحل

$8x \geq 0$ | $4x - 16 \geq 0$

$x \geq 0$ | $4x \geq 16$

$x \geq 4$



$x \in [4, \infty)$

$\sqrt{5x} - \sqrt{2x+9} = 0$

$\sqrt{5x} = \sqrt{2x+9}$

$(\sqrt{5x})^2 = (\sqrt{2x-9})^2$

$5x = 2x + 9$

$5x - 2x = 9$

$3x = 9$

$x = 3 \in [0, \infty)$

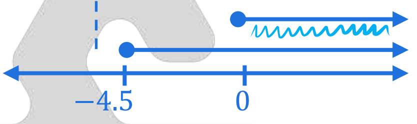
∴ م.ح = $\{3\}$

شرط الحل

$5x \geq 0$ | $2x + 9 \geq 0$

$2x \geq -9$

$x \geq 0$ | $x \geq -4.5$



$x \in [0, \infty)$

أوجد مجموعة الحل:

$\sqrt{x} + \sqrt{2x-4} = 0$

$\sqrt{x} = -\sqrt{2x-4}$

هذا لا يتحقق إلا إذا كان:

$\sqrt{x} = 0$

$\boxed{x = 0}$

$\sqrt{2x-4} = 0$

$2x - 4 = 0 \Longrightarrow 2x = 4 \Longrightarrow \boxed{x = 2}$

∴ م.ح = $\emptyset$

$\sqrt{x-7} + \sqrt{3x-21} = 0$

$\sqrt{x-7} = -\sqrt{3x-21}$

هذا لا يتحقق إلا إذا كان:

$\sqrt{x-7} = 0$

$x - 7 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 7}$

$\sqrt{3x-21} = 0$

$3x - 21 = 0 \Longrightarrow 3x = 21 \Longrightarrow \boxed{x = 7}$

∴ م.ح = $\{7\}$

تمارين مشابهة من الكراسة

①

a. $3\sqrt{x} + 3 = 15$

b. $\sqrt{x+3} = 5$

c. $(x+5)^{\frac{2}{3}} = 4$

d. $(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2 = 25$

e. $\sqrt{3-4x} - 2 = 0$

f. $2(2x+4)^{\frac{3}{4}} = 16$

g. $(5-3x)^{\frac{3}{2}} + 4 = 3$

③

a. $\sqrt{11x+3} - 2x = 0$

b. $\sqrt{3x+13} - 5 = x$

c. $\sqrt{-3x-5} = x+3$

d. $(x+3)^{\frac{1}{2}} - 1 = x$

e. $x + 8 = (x^2+16)^{\frac{1}{2}}$

f. $\sqrt{10x} - 2\sqrt{5x-25} = 0$

g. $(3x+2)^{\frac{1}{2}} - (2x+7)^{\frac{1}{2}} = 0$

معلق ⚠

i. $(2x+3)^{\frac{3}{4}} - 3 = 5$

j. $2(x-1)^{\frac{4}{3}} + 4 = 36$

معلق ⚠

l. $(2x+1)^{\frac{1}{3}} = (3x+2)^{\frac{1}{3}}$

معلق ⚠

ثانياً: المعادلات الأسية

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

Q $3^x = 243$

$3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$

$\therefore$ م.ح $= \{5\}$

Q $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$

$\left(\frac{1^2}{2^2}\right)^x = \frac{1^7}{2^7}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} = 3.5$

$\therefore$ م.ح $= \left\{\frac{7}{2}\right\}$

Q $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3^4}{2^4}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \Longrightarrow x = -4$

$\therefore$ م.ح $= \{-4\}$

Q $2^x = 64$

$2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$

$\therefore$ م.ح $= \{6\}$

Q $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \Rightarrow x = 1$

$\therefore$ م.ح $= \{1\}$

Q $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{64}{27}\right)$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4^3}{3^3}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \Rightarrow x = -3$

$\therefore$ م.ح $= \{-3\}$

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

$2^{x^2-4} = 32 \quad = 2^5$

$\Rightarrow x^2 - 4 = 5$

$x^2 - 9 = 0$

$(x-3)(x+3) = 0$

$x = 3 \qquad x = -3$

$\therefore$ م.ح $= \{-3,3\}$

$3^{x^2-1} = 27 \quad = 3^3$

$\Longrightarrow x^2 - 1 = 3$

$x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x = 2 \qquad x = -2$

$\therefore$ م.ح $= \{-2,2\}$

$3^{x^2+5x} = \frac{1}{81} \quad = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

$\Rightarrow x^2 + 5x = -4$

$x^2 + 5x + 4 = 0$

$(x+4)(x+1) = 0$

$x = -4 \qquad x = -1$

$\therefore$ م.ح $= \{-4,-1\}$

$7^{x^2-3x} = \frac{1}{49} \quad = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$

$\Rightarrow x^2 - 3x = -2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

$x = 1 \qquad x = 2$

$\therefore$ م.ح $= \{1,2\}$

$5^{x^2-4} = 1 \quad = 5^{\circ}$

$\Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x = 2 \qquad x = -2$

$\therefore$ م.ح $= \{-2\,,2\}$

$6^{2x-8} = 1 \quad = 6^{\circ}$

$\Rightarrow 2x - 8 = 0$

$2x = 8$

$x = 4$

$\therefore$ م.ح $= \{4\}$

تمارين مشابهة من الكراسة

⑦

a. $5^{2x-3} = 125$

b. $3^{x+1} = 1$

c. $3^{x^2+5} = 3^9$

d. $3^{x^2-5x} = \frac{1}{9^2}$

e. $4^x = 2^x$

f. $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.25$

g. $5^x = 125\sqrt{5}$

h. $5^{x^2-3x} = 1$

i. $(3^x - 27).(2^x - 1) = 0$

j. $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^x$

حل المعادلات - التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. مجموعة حل $7^{3-x} = 1$ هي $\{3\}$ — [✓ ⓐ] ⓑ
2. مجموعة حل $\sqrt{1-x} = \sqrt{x-1}$ هي $\{0\}$ — ⓐ [✓ ⓑ]
3. إذا كان $\sqrt[3]{9+x^2} = 3$ فإن $x = 3\sqrt{2}$ — ⓐ [✓ ⓑ]
4. $x = -1$ حلاً للمعادلة $2^{x^2-4} = \frac{1}{32}$ — ⓐ [✓ ⓑ]
5. مجموعة حل $5^{1-2x} = 25^{|x|+\frac{1}{2}}$ هي $\mathbb{R}^-$ — ⓐ [✓ ⓑ]

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. مجموعة حل $\left(\sqrt{x^{20}}\right)^{\frac{1}{5}} - x^2 = 0$ هي:

ⓐ $\{0\}$ ⓑ $\mathbb{R}^+$ ⓒ $\mathbb{R}^-$ [✓ ⓓ] $\mathbb{R}$

7. مجموعة حل $\sqrt{x-2} = \sqrt[3]{x-2}$ هي:

ⓐ $\{2\}$ ⓑ $\{1,2\}$ ⓒ $\{1,2,3\}$ [✓ ⓓ] $\{2,3\}$

8. مجموعة حل $\sqrt[3]{3-x} = \sqrt[3]{2x^2+2}$ هي:

[✓ ⓐ] $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$ ⓑ $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ⓒ $\left\{-1,\frac{-1}{2}\right\}$ ⓓ $\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$

9. مجموعة حل $|x| = x^2$ هي:

[✓ ⓐ] $\{-1,0,1\}$ ⓑ $\{0,1\}$ ⓒ $\{0\}$ ⓓ $\{1\}$

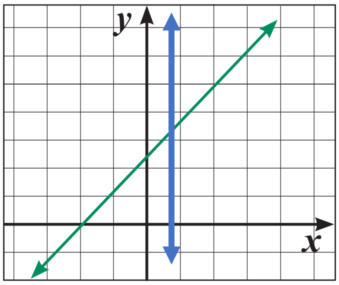
10. إذا كان $3^{2-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}$ فإن x تساوي:

ⓐ -2 ⓑ 2 [✓ ⓒ] -4 ⓓ 4

مجال الدالة

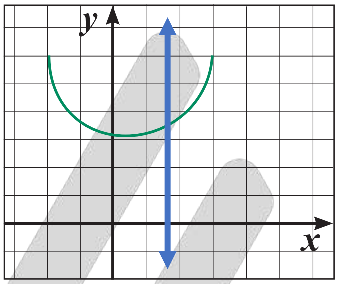
اختبار المستقيم الرأسي:
إذا تقاطع كل مستقيم رأسي مع بيان علاقة ما بنقطة واحدة على الأكثر، فإن هذه العلاقة تكون دالة.

استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل دالة أم لا:



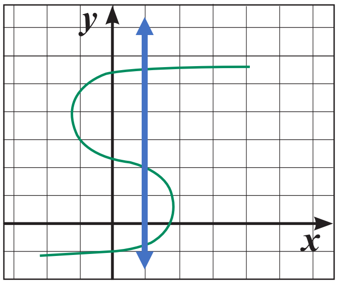
دالة

كل مستقيم رأسي يقطع منحنى الدالة بنقطة واحدة على الأكثر



دالة

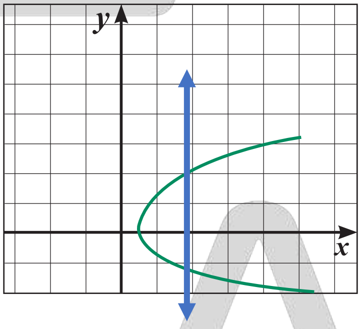
كل مستقيم رأسي يقطع منحنى الدالة بنقطة واحدة على الأكثر



ليست دالة

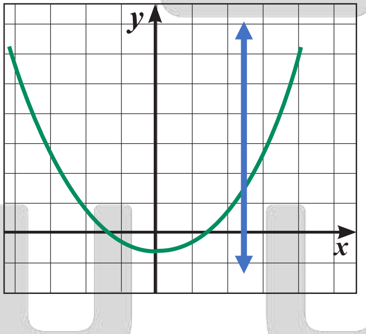
يمكن رسم على الأقل مستقيم رأسي يقطع منحنى الدالة بأكثر من نقطة واحدة

استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل دالة أم لا:



ليست دالة

يمكن رسم على الأقل مستقيم رأسي يقطع منحنى الدالة بأكثر من نقطة واحدة



دالة

كل مستقيم رأسي يقطع منحنى الدالة بنقطة واحدة على الأكثر

مجال الدالة:

1. مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

$g(x) = x^2 + 3x + 1$ دالة كثيرة حدود

$\mathcal{D}_{\mathcal{G}} = \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 1$ دالة كثيرة حدود

$\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \mathbb{R}$

2. مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ما عدا مجموعة أصفار المقام.

$h(x) = \frac{3x-1}{5-2x}$ دالة حدودية نسبية

أصفار المقام

$5 - 2x = 0$

$-2x = -5$

$x = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

$\therefore \mathcal{D}_h = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

$h(x) = \frac{x+2}{x-4}$ دالة حدودية نسبية

أصفار المقام

$x - 4 = 0$

$x = 4$

$\therefore \mathcal{D}_h = \mathbb{R} - \{4\}$

3. مجال الدالة $f(x) = |x|$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

4. مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x) \geq 0$

$g(x) = \sqrt{3x - 7}$ دالة جذر تربيعي

$3x - 7 \geq 0$

$3x \geq 7$

$x \geq \frac{7}{3}$

$\therefore \mathcal{D}_g = \left[\frac{7}{3}, \infty\right)$

$t(x) = \sqrt{3x - 4}$ دالة جذر تربيعي

$3x - 4 \geq 0$

$3x \geq 4$

$x \geq \frac{4}{3}$

$\therefore \mathcal{D}_t = \left[\frac{4}{3}, \infty\right)$

5. مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي هو مجال الدالة g

$w(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2}$

$\mathcal{D}_w = \mathbb{R}$ دالة جذر تكعيبي لكثيرة حدود

$u(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$

$\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$ دالة جذر تكعيبي لكثيرة حدود

6. مجال الدالة $f(x) = g(x) \pm h(x)$
مجال f = مجال g ∩ مجال h

$D_f = D_g \cap D_h$

7. مجال الدالة $f(x) = g(x) \cdot h(x)$
مجال f = مجال g ∩ مجال h

$D_f = D_g \cap D_h$

أوجد مجال كل دالة مما يلي :

$$f(x) = \underbrace{2x^3 - 4x}_{h(x)} - \underbrace{\sqrt{2x-6}}_{g(x)}$$

دالة جذر تربيعي $g(x) = \sqrt{2x-6}$

$2x - 6 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$

$\mathcal{D}_g = [3\,,\infty)$

$h(x) = 2x^3 - 4x$

h دالة كثيرة حدود

$\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$

$\therefore \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \cap [3\,,\infty) = [3\,,\infty)$

$$g(x) = \underbrace{(2x^2 + x)}_{a(x)}\ \underbrace{\sqrt{8-2x}}_{b(x)}$$

دالة جذر تربيعي $b(x) = \sqrt{8-2x}$

$8 - 2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -8 \Rightarrow x \leq 4$

$\mathcal{D}_b = (-\infty, 4]$

$a(x) = 2x^2 + x$

a دالة كثيرة حدود

$\mathcal{D}_a = \mathbb{R}$

$\therefore \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \cap (-\infty, 4] = (-\infty, 4]$

8. مجال الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
مجال f = (مجال g ∩ مجال h عدا مجموعة أصفار المقام)

$D_f = (D_g \cap D_h)$ ∕{ أصفار المقام }

$$h(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-1}$$

أصفار المقام	المقام	البسط
$x^2 - 1 = 0$	$b(x) = x^2 - 1$	$a(x) = \sqrt[3]{1+x}$
$(x-1)(x+1) = 0$	دالة كثيرة حدود	دالة جذر تكعيبي لكثيرة حدود
$x = 1\,, x = -1$	$D_b = \mathbb{R}$	$D_a = \mathbb{R}$

$\therefore D_h = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{-1{,}1\} = \mathbb{R} - \{-1{,}1\}$

$u(x)=\frac{4}{\sqrt{-x}}$

أصفار المقام	المقام	البسط
$\sqrt{-x}=0$	$g(x)=\sqrt{-x}$	$h(x)=4$
$-x=0\Rightarrow x=0$	$-x\geq 0\Rightarrow x\leq 0$	دالة ثابتة (كثيرة حدود)
	$D_g=(-\infty,0]$	$D_h=\mathbb{R}$

$$\therefore D_u=(\mathbb{R}\cap(-\infty,0])\ -\{0\}=(-\infty,0)$$

$f_1(x)=\frac{2x+5}{x-4}$

f_1 حدودية نسبية

أصفار المقام : $x-4=0\Rightarrow x=4$

$\therefore D_{f_1}=\mathbb{R}-\{4\}$

$$f_2(x)=\underbrace{x^3-4x^2-4}\ +\ \underbrace{\sqrt{x-9}}$$

$h(x)=x^3-4x^2-4$

h دالة كثيرة حدود

$\mathcal{D}_h=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{x-9}$

$x-9\geq 0\Rightarrow x\geq 9$

$\mathcal{D}_g=[9,\infty)$

$\mathcal{D}_{f_2}=\mathbb{R}\cap[9,\infty)=[9,\infty)$

$f_3(x)=\frac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

أصفار المقام	المقام	البسط
$x^2+4\neq 0$	$g(x)=x^2+4$	$h(x)=\sqrt{5-4x}$
لا يوجد	دالة كثيرة حدود	$5-4x\geq 0\Rightarrow$
	$\mathcal{D}_g=\mathbb{R}$	$-4x\geq -5\Rightarrow x\leq\frac{5}{4}$
		$\mathcal{D}_h=\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$

$$\therefore \mathcal{D}_{f_3}=\mathbb{R}\cap\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]=\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$$

$f_4(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x}}$

دالة جذر تكعيبي مجالها هو مجال الدالة $g(x)=\frac{x^2-5x}{x}$

$g(x)=\frac{x^2-5x}{x}$ حدودية نسبية

أصفار المقام $x=0$

$\therefore \mathcal{D}_{f_4}=\mathcal{D}_g=\mathbb{R}-\{0\}$

تمارين مشابهة من الكراسة

في التمارين حدد مجال كل من الدوال التالية:

7) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 - 1$

8) $g(x) = \sqrt{3x - 7} + 2$

9) $t(x) = \frac{\sqrt{-2x}+3}{x-1}$

10) $h(x) = -\frac{3x-1}{5-2x}$

11) $u(x) = \sqrt[3]{7 - 5x}$

12) $v(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{3+x}}$

13) $h(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{5+\sqrt{2x-1}}$

14) $u(x) = \frac{\sqrt{3+4x}-3}{25-9x^2}$

15) $v(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$

16) $w(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2}(\sqrt{2x - 3})$

مجال الدالة-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. مجال الدالة $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$ هو $\mathbb{R}$ [✓ a] b

2. مجال الدالة $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-6}}$ هو $[3, \infty)$ a [✓ b]

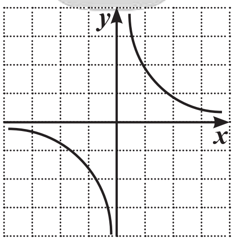
3. مجال الدالة $f(x) = \sqrt{-x}$ هو $(-\infty, 0]$ [✓ a] b

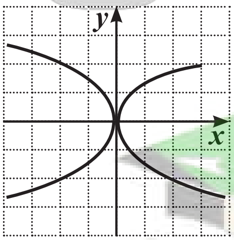
4. مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}\sqrt{x+3}$ هو $[-3, \infty)$ a [✓ b]

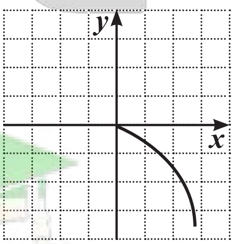
5. مجال الدالة $f(x) = |x| - 2$ هو $\mathbb{R}$ [✓ a] b

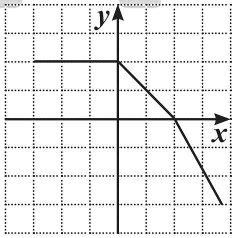
ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. أي مما يلي لا يمثل بيان دالة:

a


[✓ b]


c


d


7. مجال الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ هو:

a $\mathbb{R}$ b $\mathbb{R}/\{1\}$ c $\mathbb{R}/\{-1, 1\}$ [✓ d] $\mathbb{R}/\{-1\}$

8. مجال الدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ هو:

[✓ a] $\mathbb{R}/\{0\}$ ⓑ $[0\,,\,\infty)$ ⓒ $(-\infty, 0)$ ⓓ $(0\,,\infty)$

9. مجال الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}$ هو:

ⓐ $\mathbb{R}/\{1\}$ ⓑ $\mathbb{R}/\{0,1\}$ ⓒ $\mathbb{R} - \{0\}$ [✓ d] $(0\,,\infty)/\{1\}$

10.مجال الدالة $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ هو:

ⓐ $(0\,,\infty)$ ⓑ $[1\,,\,\infty)$ ⓒ $(-1\,,\infty)$ [✓ d] $[-1\,,\,\infty)/\{0\}$

11.لتكن $g(x) = x^2$, $g: [-2\,,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x}$ فإن مجال الدالة $f \cdot g$ هو:

ⓐ $[-2\,,2]$ [✓ b] $[0\,,2]$ ⓒ $(0\,,2)$ ⓓ ليس أياً مما سبق

🎯 تدرب و تفوق

اختبارات الكترونية ذكية

الدوال التربيعية ونمذجتها

حدد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية:

- $f(x) = 2x(x-3)$

  $f(x) = 2x^2 - 6x \rightarrow$ دالة تربيعية

- $f(x) = (x-2)(2x+1) \rightarrow$

  $f(x) = 2x^2 + x - 4x - 2 \quad = 2x^2 - 3x - 2$ دالة تربيعية

- $f(x) = (2x+3)^2 - 4x^2 - 7x \rightarrow$

  $f(x) = 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 - 7x \quad = 5x + 9$ دالة خطية

- $f(x) = 3(x^2 - 4x) - 3x^2 + 4$

  $f(x) = 3x^2 - 12x - 3x^2 + 4 \quad = -12x + 4$ دالة خطية

الدوال التربيعية ونمذجتها-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. الدالة $f(x) = kx^2 + x - 3 \, , k \in \mathbb{Z}$ يمكن أن تكون دالة خطية. [✓ a] ⓑ
2. الدالة $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ هو دالة خطية. ⓐ [✓ b]
3. النقطة $A(1\,,6)$ تنتمي إلى منحنى الدالة: $f(x) = (3x)(2x) + 6$ ⓐ [✓ b]
4. الدالة $y = x(1-x) - (1-x^2)$ هي دالة خطية. [✓ a] ⓑ
5. الدالة $f(x) = \pi^2 - x$ هي دالة تربيعية ⓐ [✓ b]

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. الدالة التربيعية التي حدها الثابت يساوي -3 فيما يلي:

[✓ a] $y = (3x+1)(-x-3)$
ⓑ $y = x^2 - 3x + 3$
ⓒ $f(x) = (x-3)(x-3)$
ⓓ $y = -3x^2 + 3x + 9$

7. أي دالة مما يلي ليست دالة تربيعية:

ⓐ $y = (x-1)(x-2)$
ⓑ $y = x^2 + 2x - 3$
ⓒ $y = 3x - x^2$
[✓ d] $y = -x^2 + x(x-3)$

8. أي نقطة مما يلي تنتمي إلى منحنى دالة $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ ؟

ⓐ $(3\,,12)$
ⓑ $(-1\,,-1)$
[✓ c] $(2\,,3)$
ⓓ $(-2\,,22)$

9. تكون الدالة $f(x) = (a^2-4)x^2 - (a-2)x + 5$ دالة تربيعية لكل a تنتمي إلى:

ⓐ $\mathbb{R}$
[✓ b] $\mathbb{R} - \{-2\,,2\}$
ⓒ $\mathbb{R} - \{-2\}$
ⓓ $\mathbb{R} - \{2\}$

الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

معادلة الدالة التي تمثل قطعاً مكافئاً رأسه $(0,0)$ هي: $y = ax^2$

كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل، أوجد معادلته وحدد ما إذا كان بيانه مفتوحاً للأعلى أم للأسفل

$H(-4,-8)$

∵الرأس $V(0,0)$

∴شكل المعادلة : $y = ax^2$

بالتعويض $H(-4,-8)$

$-8 = a(-4)^2 \Rightarrow a = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2$

∴الفتحة للأسفل $\because a = \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2} < 0$

$D(1,-5)$

∵الرأس $V(0,0)$

∴شكل المعادلة : $y = ax^2$

بالتعويض $D(1,-5)$

$-5 = a(1)^2 \Rightarrow a = -5$

$\therefore y = -5x^2$

∴الفتحة للأسفل $\because a = -5, \ -5 < 0$

$F(-1,6)$

∵الرأس $V(0,0)$

∴شكل المعادلة : $y = ax^2$

بالتعويض $F(-1,6)$

$6 = a \cdot (-1)^2 \Rightarrow a = 6$

$\therefore y = 6x^2$

∴الفتحة للأعلى $\because a = 6, \ \ 6 > 0$

$E(4,2)$

∵الرأس $V(0,0)$

∴شكل المعادلة : $y = ax^2$

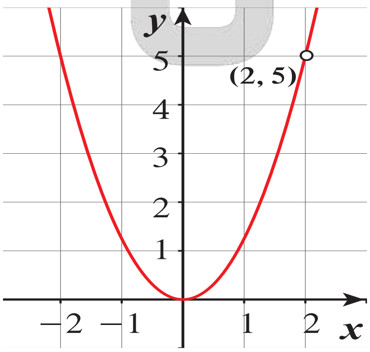
بالتعويض $E(4,2)$

$2 = a \cdot (4)^2 \Rightarrow a = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$\therefore y = \frac{1}{8}x^2$

∴الفتحة للأعلى $\because a = \frac{1}{8}, \ \frac{1}{8} > 0$

البيان المقابل يمثل دالة: $y = ax^2$ أوجد معادلة هذه الدالة.



∵الرأس $V(0,0)$ ∴شكل المعادلة : $y = ax^2$

بالتعويض $(2,5)$

$5 = a \cdot (2)^2 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$

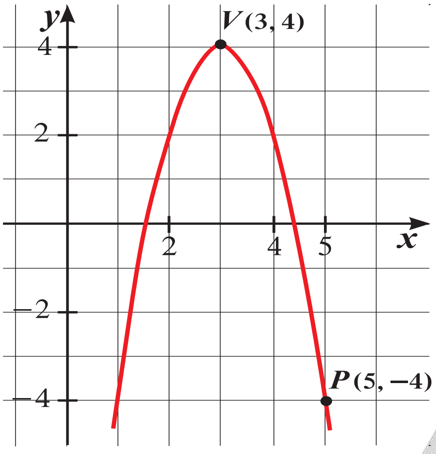
$\therefore y = \frac{5}{4}x^2$

معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه (h,k).

$y = a(x-h)^2+k, a \neq 0, h, k \in \mathbb{R}$

- رأسه (h,k) ومحور تماثله هو الخط $x = h$
- تكون فتحة القطع لأعلى إذا كانت a موجبة ولأسفل إذا كانت a سالبة
- إذا كان $|a| < 1$ فإن الرسم سيكون أوسع من رسم الدالة $y = x^2$
- إذا كان $|a| > 1$ فإن الرسم سيكون أضيق من رسم الدالة $y = x^2$

في الشكل المقابل اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $V(3,4)$ ويمر بالنقطة $P(5,-4)$



الرأس∵ $V(h,k) = V(3,4)$

المعادلة من الصورة $y = a(x-h)^2+k$

بالتعويض: $h = 3,\ k = 4,\ x = 5,\ y = -4$

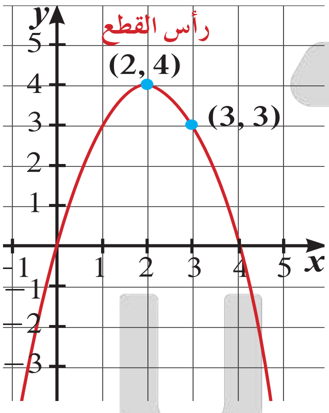
$-4 = a(5-3)^2 + 4$

$-4 = 4a + 4$

$-8 = 4a \Longrightarrow a = -2$

معادلة القطع : $\therefore y = -2(x-3)^2 + 4$

أوجد معادلة القطع المكافئ في الرسم المقابل



الرأس∵ $V(h,k) = V(2,4)$

المعادلة من الصورة $y = a(x-h)^2+k$

بالتعويض : $h = 2,\ k = 4,\ x = 3,\ y = 3$

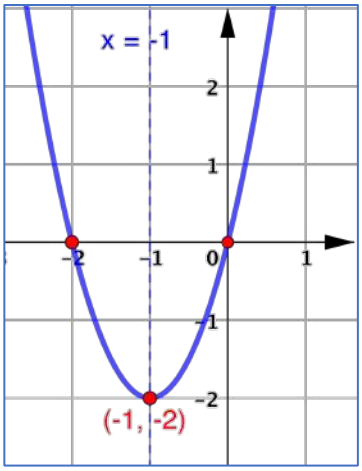
$3 = a(3-2)^2 + 4$

$3 = a + 4 \Longrightarrow a = -1$

معادلة القطع : $\therefore y = -1(x-2)^2 + 4$

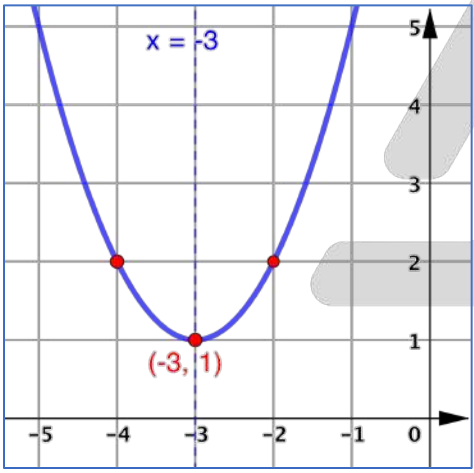
ارسم منحنى الدالة $y = 2(x+1)^2 - 2$ مستخدماً خواص القطوع المكافئة.

- شكل المعادلة: $y = a(x-h)^2 + k$ تمثل قطع مكافئ: $h = -1 , k = -2$
  رأسه: $V(h,k) = V(-1,-2)$
- الفتحة للأعلى $a = 2, \quad 2 > 0 \Rightarrow$
  الرأس عنده قيمة صغرى
- محور التماثل: $x = h , \quad x = -1$
- نقطة أخرى: $x = 0 \Rightarrow$
  $y = 2((0)+1)^2 - 2 = 0 \Rightarrow (0,0)$
- انعكاس النقطة $(0,0)$ في محور التماثل هي النقطة: $(-2,0)$



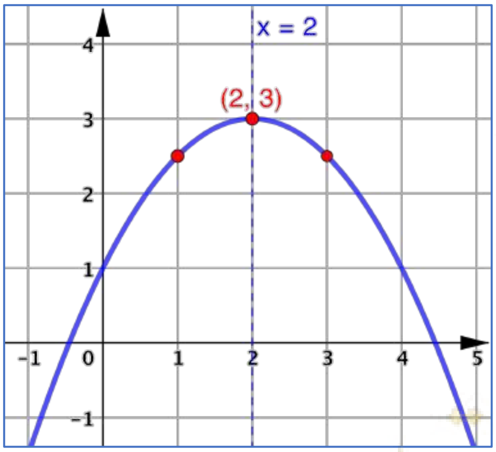
ارسم منحنى الدالة $y = (x+3)^2 + 1$.

- شكل المعادلة: $y = a(x-h)^2 + k$ تمثل قطع مكافئ: $h = -3 , k = 1$
  رأسه: $V(h,k) = V(-3,1)$
- الفتحة للأعلى $a = 1, 1 > 0 \Rightarrow$
  الرأس عنده قيمة صغرى
- محور التماثل: $x = h , x = -3$
- نقطة أخرى: $x = -2 \Rightarrow$
  $y = ((-2)+3)^2 + 1 = 2 \Rightarrow (-2,2)$
- انعكاس النقطة $(-2,2)$ في محور التماثل هي النقطة: $(-4,2)$



ارسم منحنى الدالة $y = -0.5(x-2)^2 + 3$.

- شكل المعادلة: $y = a(x-h)^2 + k$ تمثل قطع مكافئ: $h = 2 , k = 3$
  رأسه: $V(h,k) = V(2,3)$
- الفتحة للأسفل $a = -0.5, -0.5 < 0 \Rightarrow$
  الرأس عنده قيمة عظمى
- محور التماثل: $x = h , \quad x = 2$
- نقطة أخرى: $x = 1 \Rightarrow$
  $y = -0.5((1)-2)^2 + 3 = 2.5 \Rightarrow (1 , 2.5)$
- انعكاس النقطة $(1 , 2.5)$ في محور التماثل هي النقطة: $(3 , 2.5)$



Q ارسم منحنى الدالة $y = -2(x-3)^2 - 1$.

- شكل المعادلة: $y = a(x-h)^2 + k$ تمثل قطع مكافئ: $h = 3 \,, k = -1$

رأسه: $V(h,k) = V(3,-1)$

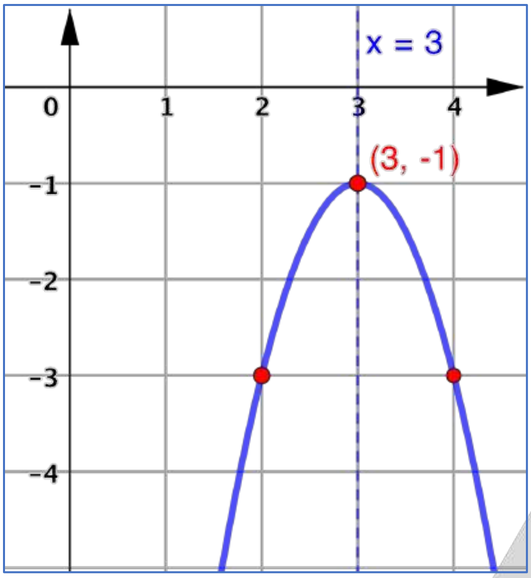
- الفتحة للأسفل $-2 < 0 \Rightarrow$ $a = -2 \,,$

الرأس عنده قيمة عظمى

- محور التماثل: $x = 3$ $x = h \,,$
- نقطة أخرى: $x = 2 \Longrightarrow$

$y = -2((2)-3)^2 - 1 = -3 \Longrightarrow (2\,,-3)$

- انعكاس النقطة (2 , – 3) في محور التماثل هي النقطة: (4 , – 3)



💡 تمارين مشابهة من الكراسة

Q ارسم منحنى كل دالة من الدوال التالية:

12) $y = (x-2)^2$

11) $y = (x+3)^2$

14) $y = -x^2 + 3$

13) $y = -(x+1)^2$

16) $y = 3(x-2)^2 + 4$

15) $y = (x+4)^2 + 1$

18) $y = -2(x+1)^2 - 4$

17) $y = -4(x+3)^2$

الدوال التربيعية والقطوع المكافئة - التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. المعادلة $y = 2x^2 - 2(3-x)^2$ تمثل معادلة قطع مكافئ. ⓐ [✓ ⓑ]
2. القطع المكافئ $y = -\frac{1}{3}(x+2)^2 - 3$ فتحته إلى الأعلى. ⓐ [✓ ⓑ]
3. المعادلة $y = 2(x-1)^2 + 2$ يكون بيانها أكثر اتساعاً من بيان الدالة $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ ⓐ [✓ ⓑ]
4. توجد عند رأس منحنى الدالة $y = -(x-3)^2 - 2$ قيمة عظمى [✓ ⓐ] ⓑ
5. منحنى القطع المكافئ $y = (-x+2)^2 + 3$ يمر بالنقطة $P(2\,,3)$ [✓ ⓐ] ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

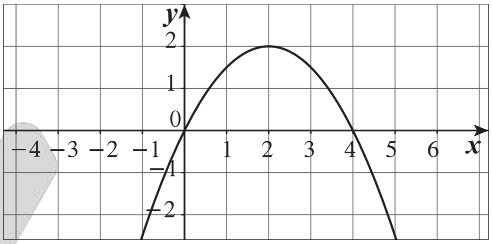
6. الدالة $y = a(3-x)^2-2$ يكون رسمها أوسع من رسم بيان الدالة $y = -2x^2$ إذا كان:

ⓐ $|a| = 2$ ⓑ $|a| > 2$ ⓒ $a < 2$ [✓ ⓓ] $|a| < 2$

7. معادلة القطع المكافئ $y = 2x^2$ الذي تم إزاحة رأسه وحدتين يساراً و 4 وحدات لأعلى هي:

ⓐ $y = (2x+2)^2 + 4$
ⓑ $y = 2(x-2)^2 + 4$
[✓ ⓒ] $y = 2(x+2)^2 + 4$
ⓓ $y = 2(x+2)^2 - 4$

8. الشكل أدناه يمثل منحنى قطع مكافئ معادلته هي:



ⓐ $y = (x-2)^2 + 2$
ⓑ $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$
ⓒ $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$
[✓ ⓓ] $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

9. القطع المكافئ $y = a(x-h)^2+k$ يقطع المحورين على الأكثر في :

ⓐ نقطة ⓑ نقطتين [✓ ⓒ] 3 نقاط ⓓ 4 نقاط

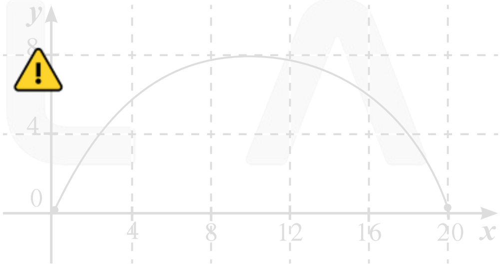
10. القيمة الصغرى للدالة $y = \frac{1}{3}(3-x)^2 - 2$ هي عند النقطة:

[✓ ⓐ] $(3\,,-2)$ ⓑ $(-3\,,2)$ ⓒ $(-3\,,-2)$ ⓓ $(3\,,2)$

11. يقع جسر على شكل قطع مكافئ فوق نهر يبلغ البعد بين قاعدتيه 20 m وارتفاعه الأقصى 8 m
معادلة القطع المكافئ هي:

ⓐ $y = 0.08(x-10)^2 + 8$
[✓ ⓑ] $y = -0.08(x-10)^2 + 8$
ⓒ $y = -0.08(x-20)^2 + 8$
ⓓ $y = -0.08(x+10)^2 + 8$

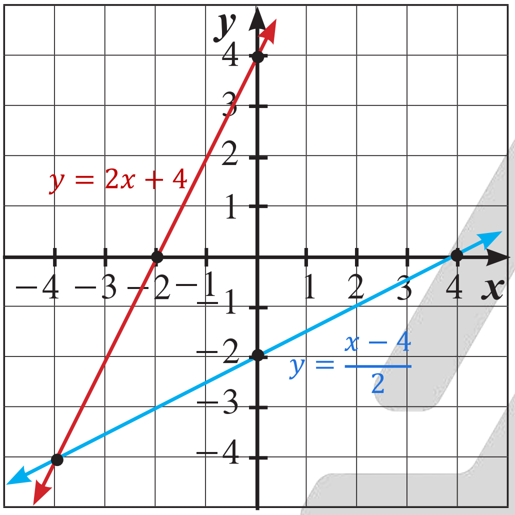
⚠ معلق



المعكوسات و دوال الجذر التربيعي

- إذا كان (a,b) زوجاً مرتباً من علاقة r فإن (b,a) هو زوجاً مرتباً من معكوس هذه العلاقة r^{-1}
- إذا كانت النقطة (a,b) تنتمي لبيان دالة $f(x)$ فإن النقطة (b,a) تنتمي لبيان معكوس هذه الدالة $f^{-1}(x)$
- معكوس الدالة الخطية هو دالة خطية أيضاً

ارسم الدالة $y = \frac{x-4}{2}$ و معكوسها, ثم اكتب معادلة المعكوس



الدالة الأصلية:

x	0	2	4
y	-2	-1	0

المعكوس:

x	-2	-1	0
y	0	2	4

ميل المعكوس:

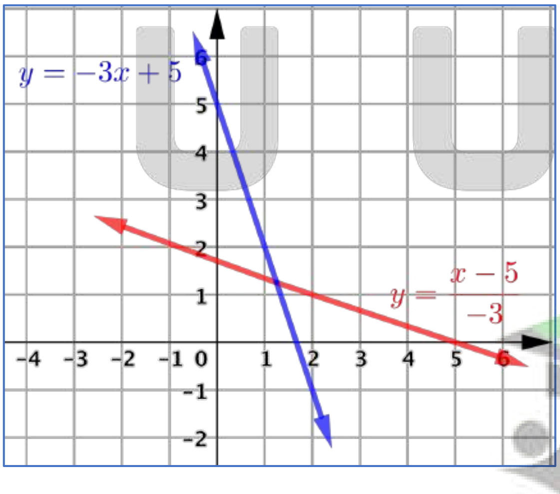
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(2)-(0)}{(-1)-(-2)} = 2$$

معادلة المعكوس.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 2(x+2) \Rightarrow y = 2x + 4$$

ارسم الدالة $y = -3x + 5$ و معكوسها, ثم اكتب معادلة المعكوس



الدالة الأصلية:

x	0	1	2
y	5	2	-1

المعكوس:

x	5	2	-1
y	0	1	2

ميل المعكوس:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{2-5} = \frac{-1}{3}$$

معادلة المعكوس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-1}{3}(x-5) \Rightarrow y = \frac{x-5}{-3} \Rightarrow y = \frac{-x+5}{3}$$

يمكن إيجاد معكوس دالة جبرياً من خلال التبديل بين المتغيرين x,y ثم الحل بالنسبة لـ y

أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

$y = 2(x+1) - 3$

$x = 2(y+1) - 3$

$x + 3 = 2(y+1)$

$y + 1 = \dfrac{x+3}{2}$

$y = \dfrac{x+3}{2} - 1$

$y = \frac{2x-1}{3}$

$x = \dfrac{2y-1}{3}$

$3x = 2y - 1$

$3x + 1 = 2y$

$y = \dfrac{3x+1}{2}$

$y = 5x - 4$

$x = 5y - 4$

$x + 4 = 5y$

$y = \dfrac{x+4}{5}$

أوجد معكوس الدالة $f(x) = x^2 + 3$ وناقش الحلول.

$y = x^2 + 3$ بدل x بـ y : $x = y^2 + 3$

حل بالنسبة لـ y : $\Leftarrow y^2 = x - 3$ $y = \mp\sqrt{x-3}$

المناقشة: $x \le 0$ المعكوس هو: $y = -\sqrt{x-3}$ دالة

⚠ معلق

$x \ge 0$ المعكوس هو: $y = \sqrt{x-3}$ دالة

أوجد معكوس الدالة $f(x) = (x+3)^2 - 4$ وناقش الحلول.

$y = (x+3)^2 - 4$ بدل x بـ y : $x = (y+3)^2 - 4$

حل بالنسبة لـ y :

$(y+3)^2 = x + 4$

$y + 3 = \mp\sqrt{x+4}$

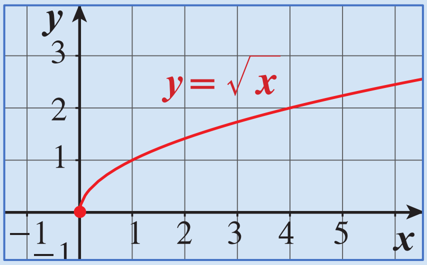
$y = -3 \mp \sqrt{x+4}$

المناقشة $x \le -3$ المعكوس هو: $y = -3 - \sqrt{x+4}$ دالة

⚠ معلق

$x \ge -3$ المعكوس هو: $y = -3 + \sqrt{x+4}$ دالة

دوال الجذر التربيعي

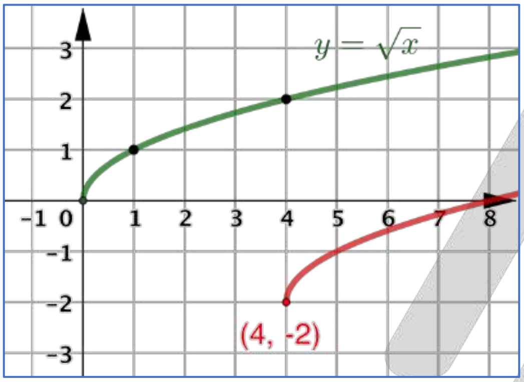


المعادلة $y=\sqrt{x}$ دالة جذر تربيعي

مجالها $[0,\infty)$. والمدى هو $[0,\infty)$

$y=\sqrt{x-h}+k$ ينتج من إزاحة لبيان دالة المرجع $y=\sqrt{x}$

ارسم الدالة $y=\sqrt{x-4}-2$, وعين المجال والمدى للدالة.



دالة المرجع $y=\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2

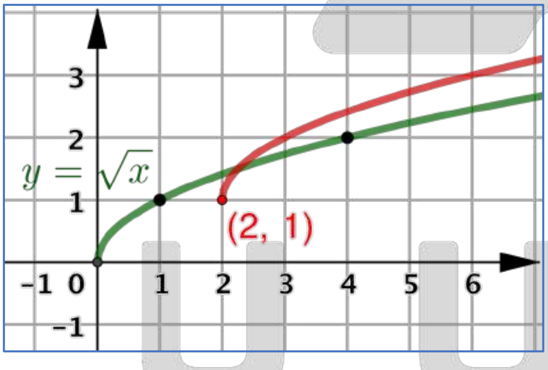
$h=4$ انسحاب دالة المرجع 4 وحدات لليمين

$k=-2$ انسحاب دالة المرجع وحدتين للأسفل

يبدأ بيان الدالة عند النقطة $(4,-2)$

المجال = $[4,\infty)$ المدى = $[-2,\infty)$

ارسم بيانيا: $y=\sqrt{x-2}+1$ عين المجال والمدى للدالة.



x	0	1	4
y	0	1	2

دالة المرجع $y=\sqrt{x}$

$h=2$ انسحاب دالة المرجع وحدتين لليمين

$k=1$ انسحاب دالة المرجع وحدة للأعلى

يبدأ بيان الدالة عند النقطة $(2,1)$

المجال = $[2,\infty)$ المدى = $[1,\infty)$

تمارين إضافية من الكراسة

في التمارين ارسم كل دالة جذر تربيعي. ثم اذكر المجال والمدى.

11) $y=-\sqrt{x-1}$

12) $y=-\sqrt{x}+2$

13) $y=\sqrt{x-4}+2$

14) $y=-\sqrt{x+3}-2$

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت النقطة $M(x , y)$ تنتمي لبيان الدالة f فإن النقطة $N(y , x)$ تنتمي لبيان معكوس هذه الدالة [✓ ⓐ] ⓑ
2. إذا كانت $f(x) = x + 1 , g(x) = x - 1$ فإن الدالتين كل منها معكوس للأخرى [✓ ⓐ] ⓑ
3. المستقيم $y = x$ هو خط انعكاس لبيان دالة f وبيان معكوسها [✓ ⓐ] ⓑ
4. إذا مر بيان دالة بنقطة الأصل فإن بيان معكوسها يمر أيضاً بنقطة الأصل [✓ ⓐ] ⓑ
5. لا يتغير مجال دالة الجذر التربيعي بعد إزاحه بيانها 3 وحدات يميناً ⓐ [✓ ⓑ]

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. إذا انتمت النقطة $A(2 ,3)$ إلى بيان دالة فإن النقطة التي تنتمي إلى بيان معكوس تلك الدالة هي:

ⓐ $(-2 , 3)$ ⓑ $(2 , -3)$ ⓒ $(3 , -2)$ [✓ ⓓ] $(3 , 2)$

7. بيان الدالة $y = \sqrt{x+2} - 2$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = \sqrt{x}$:

ⓐ وحدتين إلى اليسار ووحدتين لأعلى
[✓ ⓑ] وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأسفل
ⓒ وحدتين إلى اليمين ووحدتين لأعلى
ⓓ وحدتين إلى اليمين ووحدتين للأسفل

⚠ معلق

8. معكوس الدالة $y = x^2 + 2$ هو:

ⓐ $y = \sqrt{x-2}$ ⓑ $y = -\sqrt{x-2}$ [✓ ⓒ] $y = \pm\sqrt{x-2}$ ⓓ ليس أياً مما سبق

9. معكوس الدالة $y = 5x - 1$ هو:

ⓐ $y = 5x + 1$ [✓ ⓑ] $y = \frac{x+1}{5}$ ⓒ $y = \frac{x}{5} + 1$ ⓓ $y = \frac{x}{5} - 1$

10. مجال معكوس الدالة $y = \sqrt{x+3} - 1$ هو:

ⓐ $\mathbb{R}$ ⓑ $(-1 , \infty)$ ⓒ $(-\infty , 1)$ [✓ ⓓ] $[-1 , \infty)$

حل المتباينات

أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 - x - 6 < 0$.

المعادلة المناظرة:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0 \Longrightarrow x = -2\,,\ x = 3$$

$x + 2 > 0 \Longrightarrow x > -2$

$x + 2 < 0 \Longrightarrow x < -2$

$x - 3 > 0 \Longrightarrow x > 3$

$x - 3 < 0 \Longrightarrow x < 3$

x	$-\infty$		-2		3		∞
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-3)$		$+$	0	▨ $-$	0	$+$	

م.ح= $(-2,3)$

أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 + 4x + 3 \le 0$.

المعادلة المناظرة:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x+1)(x+3) = 0 \Longrightarrow x = -1\,, x = -3$$

$x + 1 > 0 \Longrightarrow x > -1$

$x + 1 < 0 \Longrightarrow x < -1$

$x + 3 > 0 \Longrightarrow x > -3$

$x + 3 < 0 \Longrightarrow x < -3$

x	$-\infty$		-3		-1		∞
$(x+1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)(x+3)$		$+$	0	▨ $-$	0	$+$	

∴ م.ح = $[-3\,,-1]$

أوجد مجموعة حل المتباينة: $-x^2 + 7x - 10 \le 0$

$x^2 - 7x + 10 \ge 0 \Longrightarrow$

المعادلة المناظرة: $x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-2)(x-5) = 0 \Longrightarrow x = 2\,,\ x = 5$

$x - 2 > 0 \Longrightarrow x > 2$
$x - 2 < 0 \Longrightarrow x < 2$

$x - 5 > 0 \Longrightarrow x > 5$
$x - 5 < 0 \Longrightarrow x < 5$

x	$-\infty$		2		5		∞
$(x-2)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-5)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

م.ح $= (-\infty, 2] \cup [5, \infty) = \mathbb{R} - (2,5) = \mathbb{R}/(2,5)$

أوجد مجموعة قيم x التى تحقق المتباينة: $-2x^2 + 5x - 3 > 0$.

$2x^2 - 5x + 3 < 0 \Longrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0$

المعادلة المناظرة:

$(2x-3)(x-1) = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}\,,\ x = 1$

$2x - 3 > 0 \Longrightarrow x > \frac{3}{2}$

$2x - 3 < 0 \Longrightarrow x < \frac{3}{2}$

$x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1$

$x - 1 < 0 \Longrightarrow x < 1$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		∞
$(2x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

م.ح= $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

تمارين مشابهة من الكراسة

1. أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

a. $(x-3)(2x+5) < 0$

b. $2x^2 - 3x - 5 \ge 0$

c. $-3x^2 + 2x < -1$

d. $4x^2 + 12x + 9 \ge 0$

e. $-9x^2 + 6x < 1$

f. $21 + 4x > x^2$

تطبيق على مجال الدالة

أوجد مجال الدالة:

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

المعادلة المناظرة:

$$x^2 - 4 \geq 0 \Longrightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$\Longrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Longrightarrow x = -2 \,, x = 2$$

$x - 2 > 0 \Longrightarrow x > 2$

$x - 2 < 0 \Longrightarrow x < 2$

$x + 2 > 0 \Longrightarrow x > -2$

$x + 2 < 0 \Longrightarrow x < -2$

x	$-\infty$		-2		2		∞
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$D_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty) = \mathbb{R} - (-2, 2)$$

أوجد مجال الدالة:

- $g(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

المعادلة المناظرة:

$$-x^2 + 4x - 3 \geq 0 \;\Longrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

$$\Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Longrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 1 \,, x = 3$$

$x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1$

$x - 1 < 0 \Longrightarrow x < 1$

$x - 3 > 0 \Longrightarrow x > 3$

$x - 3 < 0 \Longrightarrow x < 3$

x	$-\infty$		1		3		∞
$(x-1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$D_g = [1, 3]$$

أوجد مجال الدالة:

- $h(x) = \sqrt{x^2 - x}$

المعادلة المناظرة:

$$x^2 - x \geq 0 \Longrightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Longrightarrow x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0\,,\ x = 1$$

$x > 0$ | $x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1$

$x < 0$ | $x - 1 < 0 \Longrightarrow x < 1$

x	$-\infty$		0		1		∞
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\therefore D_h = (-\infty, 0] \cup [1, \infty) = \mathbb{R} - (0,1)$$

أوجد مجال الدالة:

- $q(x) = \sqrt{9 - x^2}$

المعادلة المناظرة:

$$9 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Longrightarrow x^2 - 9 = 0$$

$$\Longrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Longrightarrow x = -3\,, x = 3$$

$x - 3 > 0 \Longrightarrow x > 3$ | $x + 3 > 0 \Longrightarrow x > -3$

$x - 3 < 0 \Longrightarrow x < 3$ | $x + 3 < 0 \Longrightarrow x < -3$

x	$-\infty$		-3		3		∞
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\therefore D_q = [-3,3]$$

Q أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$

$$\frac{(3x+7)}{(x+2)} - \frac{2}{1} \geq 0 \Rightarrow \frac{(3x+7)-(2x+4)}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{3x+7-2x-4}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x+2} \geq 0$$

أصفار البسط $x+3=0 \;\Rightarrow\; x=-3$

أصفار المقام $x+2=0 \;\Rightarrow\; x=-2$

$x+2>0 \Longrightarrow x>-2$

$x+2<0 \Longrightarrow x<-2$

$x+3>0 \Longrightarrow x>-3$

$x+3<0 \Longrightarrow x<-3$

x	$-\infty$		-3		-2		∞
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+3}{x+2}$		▨ $+$	0	$-$	غير معرف	▨ $+$	

م.ح $= (-\infty,-3] \cup (-2,\infty) = \mathbb{R} - (-3,-2]$

Q أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$

أصفار البسط $3x-5=0 \;\rightarrow\; x=\frac{5}{3}$

أصفار المقام $-2x+3=0 \;\rightarrow\; x=\frac{3}{2}$

$-2x+3>0 \Longrightarrow x<\frac{3}{2}$

$-2x+3<0 \Longrightarrow x>\frac{3}{2}$

$3x-5>0 \Longrightarrow x>\frac{5}{3}$

$3x-5<0 \Longrightarrow x<\frac{5}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		∞
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+3$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{3x-5}{-2x+3}$		$-$	غير معرف	▨ $+$	0	$-$	

م.ح $= \left(\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-5x+3}{x+4} < 3$

$$\frac{x^2-5x+3}{x+4} - \frac{3}{1} < 0 \Rightarrow \frac{(x^2-5x+3)-(3x+12)}{x+4} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-5x+3-3x-12}{x+4} < 0 \Rightarrow \frac{x^2-8x-9}{x+4} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x-9)}{x+4} < 0$$

أصفار البسط: $x+1=0\,,\ x=-1$, $x-9=0\,,\ x=\ 9$

أصفار المقام: $x+4=0\,,\ x=-4$

$x+1>0 \Rightarrow x>-1$	$x-9>0 \Rightarrow x>9$	$x+4>0 \Rightarrow x>-4$
$x+1<0 \Rightarrow x<-1$	$x-9<0 \Rightarrow x<9$	$x+4<0 \Rightarrow x<-4$

x	$-\infty$	-4		-1		9	∞
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-9$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{(x+1)(x-9)}{x+4}$	$-$	غير معرف	$+$	0	$-$	0	$+$

م.ح $= (-\infty,-4)\ \cup\ (-1,9)$

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2+5x}{x+3} > -2$.

$$\frac{x^2+5x}{x+3} + \frac{2}{1} > 0 \Rightarrow \frac{(x^2+5x)+(2x+6)}{x+3} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+5x+2x+6}{x+3} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+7x+6}{x+3} > 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x+6)}{x+3} > 0$$

أصفار البسط $x+1=0 \Rightarrow\ x=-1$, $x+6=0 \Rightarrow\ x=-6$

أصفار المقام $x+3=0 \Rightarrow\ x=-3$

$x+1>0 \Rightarrow x>-1$	$x+6>0 \Rightarrow x>-6$	$x+3>0 \Rightarrow x>-3$
$x+1<0 \Rightarrow x<-1$	$x+6<0 \Rightarrow x<-6$	$x+3<0 \Rightarrow x<-3$

x	$-\infty$	-6		-3		-1	∞
$x+1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+6$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{(x+1)(x+6)}{x+3}$	$-$	0	$+$	غير معرف	$-$	0	$+$

م.ح $= (-6,-3)\ \cup\ (-1,\infty)$

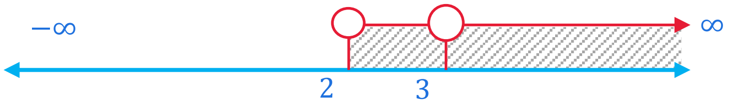
أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-5x+6}{x-3} > 0$.

التحليل: $\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} > 0$

أصفار المقام $x-3=0 \Rightarrow x=3$

التبسيط: $\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} > 0 \quad : x \neq 3 \Rightarrow x-2 > 0$

$\Rightarrow x > 2$



م.ح $= (2,\infty) - \{3\} = (2,3) \cup (3,\infty)$

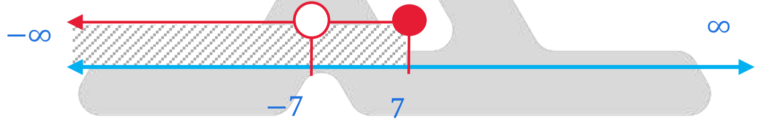
أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-49}{x+7} \leq 0$.

التحليل: $\frac{(x-7)(x+7)}{x+7} \leq 0$

أصفار المقام $x+7=0 \Rightarrow x=-7$

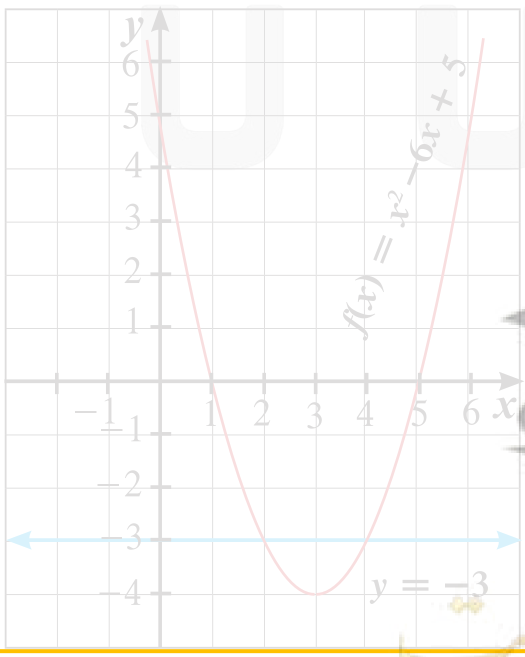
التبسيط: $\frac{(x-7)\cancel{(x+7)}}{\cancel{x+7}} \leq 0 \quad : x \neq -7 \Rightarrow x-7 \leq 0$

$\Rightarrow x \leq 7$



م.ح $= (-\infty,7] - \{-7\} = (-\infty,-7) \cup (-7,7]$

يبين الرسم البياني التالي منحنى الدالة $f(x)$ ادرس بيانيا كل من المتباينات:



- $f(x) = y$

$f(x) = y \quad : x = 2, x = 4$

- $f(x) < y$

$f(x) < y \quad : x \in (2,4)$

- $f(x) \geq y$

$f(x) \geq y \quad : x \in (-\infty,2] \cup [4,\infty) \;= \mathbb{R} - (2,4)$

تمارين مشابهة من الكراسة

أوجد مجموعة حل المتباينة:

3) $\frac{x-1}{x^2-4}<0$ 4) $\frac{x^2-1}{x^2+1}\le 0$ 5) $\frac{x^2+x-12}{x^2-4x+4}>0$

6) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}\le 0$ 7) $\frac{1}{x}+\frac{2}{}>$ 8) $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}\ge 0$

معلق

حل المتباينات-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. مجموعة هل المتباينة $(x+3)^2>0$ هي $\mathbb{R}$ — ⓐ [✓ b]
2. كل x ينتمي للفترة $(0\,,\infty)$ هو حل للمتباينة $\frac{x-1}{x^2-x}\ge 0$ — ⓐ [✓ b]
3. مجموعة حل المتباينة $(x+3)^2+2<1$ هي المجموعة الخالية $\emptyset$ — [✓ a] ⓑ
4. مجموعة حل المتباينة $\frac{x+2}{x+1}\ge 1$ هي $(-1\,,\infty)$ — [✓ a] ⓑ
5. مجموعة حل المتباينة $(-x-3)^2<0$ هي $\{3\}$ — ⓐ [✓ b]

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. المعادلة المناظرة للمتباينة $-3(x+1)(x+\frac{1}{3})\le 2$ هي:

ⓐ $-3x^2+2x-\frac{5}{3}=0$ $x^2+\frac{4}{3}x+1=0$

ⓒ $-3x^2+4x-3=0$ ⓓ $-3x^2+2x+1=0$

معلق

7. إن مجموعة حل المتباينة $(1-2x)(4+5x)<0$ هي:

ⓐ $(-\frac{4}{5}\,,\frac{1}{2})$ [✓ b] $(-\infty,\frac{-4}{5})\cup(\frac{1}{2}\,,\infty)$

ⓒ $(-\infty\,,-\frac{1}{2})\cup(\frac{4}{5}\,,\infty)$ ⓓ $(-\infty\,,-\frac{4}{5})\cup(-\frac{1}{2}\,,\infty)$

8. إن مجموعة حل المتباينة $\frac{(x^2+1)(x-3)}{x-3}>0$ هي:

ⓐ $\mathbb{R}$ ⓑ $\mathbb{R}^*$ [✓ c] $\mathbb{R}-\{3\}$ ⓓ $\mathbb{R}-\{0\,,3\}$

9. المتباينة التي مجموعة حلها $[-2\,,3]$ هي:

ⓐ $x^2-x-6<0$ [✓ b] $x^2-x-6\le 0$

ⓒ $x^2-x-6>0$ ⓓ $x^2-x-6\ge 0$

10.مجموعة حل المتباينة $x^2+|x|>0$ هي:

⚠ **معلق**

ⓐ $\mathbb{R}$

ⓑ $(0\,,\infty)$

ⓒ $\mathbb{R}-\{0\}$

ⓓ ليس أياً مما سبق

11.إذا كانت $f(x)=\frac{x(x+1)}{(2x-3)(3x+2)}$ فإن قيم x التي تجعل f غير معرفة هي:

ⓐ $\left\{\frac{2}{3}\,,-\frac{3}{2}\right\}$

ⓑ $\left\{\frac{-2}{3}\,,\frac{3}{2}\right\}$

ⓒ $\left\{\frac{2}{3}\,,\frac{3}{2}\right\}$

ⓓ $\left\{\frac{-2}{3}\,,-\frac{3}{2}\right\}$

12.مجموعة حل المعادلة $x^2+|x|-2=0$ هي:

ⓐ $\{1\,,-2\}$

ⓑ $\{-1\,,2\}$

ⓒ $\{-1\,,1\}$

ⓓ $\{-2\,,2\}$

⚠ **معلق**

13.إذا كانت $f(x)=-3x^2+x-\frac{1}{12}$ فإن قيم x التي تجعل $f(x)$ غير موجبة ولا تساوي الصفر هي:

ⓐ $\{-\infty\,,0\}$

ⓑ $\{0\,,\infty\}$

ⓒ $\left\{\frac{1}{6}\right\}$

ⓓ $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{6}\right\}$

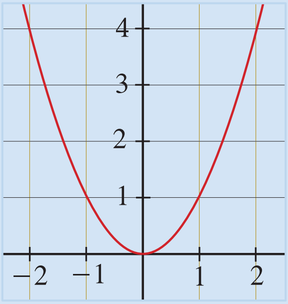
دوال القوى ومعكوساتها

الدوال الزوجية والدوال الفردية

تعريف

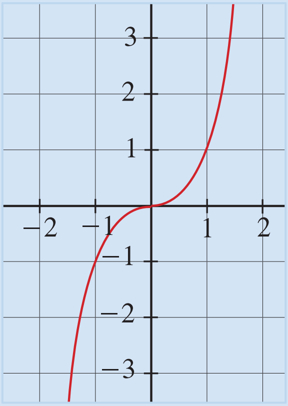
1. تكون الدالة $y = f(x)$ التى مجالها D دالة زوجية إذا وفقط إذا كان:
   - $\forall x \in D \,, -x \in D$
   - $f(-x) = f(x)$

   المحور الصادى هو محور تماثل (تناظر) لبيان كل دالة زوجية.



2. تكون الدالة $y = f(x)$ التى مجالها D دالة فرديةإذا وفقط إذا كان:
   - $\forall x \in D \,, -x \in D$
   - $f(-x) = -f(x)$

   نقطة الأصل هى نقطة تماثل (تناظر) لبيان كل دالة فردية.



بين ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

- $f(x) = 2x^7$

$f(-x) = 2(-x)^7 = -2x^7 = -f(x) \Rightarrow$

$\because f(-x) = -f(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\therefore$ f فردية

- $y = -x^8$

بفرض: $y = g(x) = -x^8$

$g(-x) = -(-x)^8 = -x^8 = g(x) \Rightarrow$

$\because g(-x) = g(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\therefore$ g زوجية

- $y = (x+2)^2$

بفرض: $y = v(x) = (x+2)^2$

$v(-x) = (-x+2)^2$

$\because v(-x) \neq v(x). \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ v ليست زوجية

$\because v(-x) \neq -v(x). \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ v ليست فردية

$h(x) = 4$

$h(-x) = 4 = h(x) \Rightarrow$

$\because h(-x) = h(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ زوجية h $\therefore$

$f_1(x) = x^5$

$f_1(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f_1(x) \Rightarrow$

$\because f_1(-x) = -f_1(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ فردية f_1 $\therefore$

$f_2(x) = x$

$f_2(-x) = -x = -f_2(x) \Rightarrow$

$\because f_2(-x) = -f_2(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ فردية f_2 $\therefore$

$f_3(x) = 2x^4$

$f_3(-x) = 2(-x)^4 = 2x^4 = f_3(x) \Rightarrow$

$\because f_3(-x) = f_3(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ زوجية f_3 $\therefore$

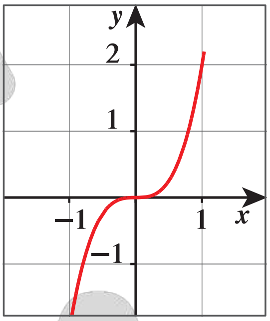
$f_4(x) = (x+3)^3$

$f_4(-x) = (-x+3)^3$

$\because f_4(-x) \neq f_4(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ليست زوجية f_4 $\therefore$

$\because f_4(-x) \neq -f_4(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ليست فردية f_4 $\therefore$

الأشكال التالية تمثل دوالاً. صف تماثل كل ثم وضح هل هى فرديه أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

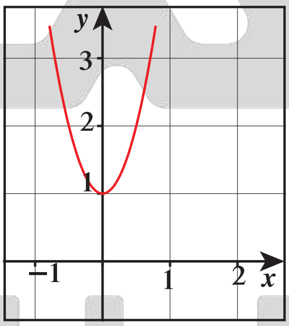


- $y = 2x^3$

∵ نقطة الأصل هي

نقطة تماثل "تناظر"

∴ الدالة فردية

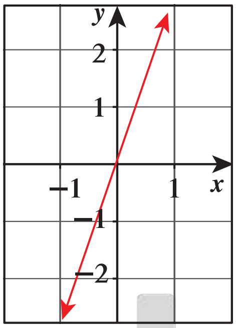


- $y = 4x^2 + 1$

∵ محور y هو

محور تماثل "تناظر"

∴ الدالة زوجية



- $y = 3x$

∵ نقطة الأصل هي

نقطة تماثل "تناظر"

∴ الدالة فردية

أوجد معكوس الدالة:

Q $y = 2x^4$

لاحظ: $y \geq 0$

بدل: y بـ x $\qquad x = 2y^4$

حل بالنسبة لـ y $\qquad y^4 = \frac{x}{2}$

$y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$

$\therefore$ معكوس $y = 2x^4$ هو: $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$

Q $y = 5x^3$

بدل: y بـ x $\qquad x = 5y^3$

حل بالنسبة لـ y $\qquad \frac{x}{5} = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x}{5}}$

$\therefore$ معكوس $y = 5x^3$ وهو $y = \sqrt[3]{\frac{x}{5}}$

Q $f(x) = \sqrt{x+2}$

$y = \sqrt{x+2} \; : \; x \geq -2 \,, \; y \geq 0$

بدل: y بـ x $\qquad x = \sqrt{y+2}$

حل بالنسبة لـ y $\qquad x^2 = y + 2$

$y = x^2 - 2$

$\therefore$ معكوس $f(x) = \sqrt{x+2}$ هو:

$f^{-1}(x) = x^2 - 2 \quad , \quad x \geq 0$

Q $f(x) = \sqrt{x-4}$

$y = \sqrt{x-4} \; : \; x \geq 4 \,, \; y \geq 0$

بدل: y بـ x $\qquad x = \sqrt{y-4}$

حل بالنسبة لـ y $\qquad x^2 = y - 4$

$y = x^2 + 4$

$\therefore$ معكوس $f(x) = \sqrt{x-4}$ هو:

$f^{-1}(x) = x^2 + 4 \quad , \quad x \geq 0$

دوال القوى ومعكوساتها-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. $y = \sqrt{x^4}$ دالة قوى $\qquad$ [✓ ⓐ] ⓑ
2. $f: [-3\,,3] \to \mathbb{R}\,, f(x) = x^5$ دالة فردية $\qquad$ [✓ ⓐ] ⓑ
3. $y = x\sqrt{x}$ دالة زوجية $\qquad$ ⓐ [✓ ⓑ]
4. $y = (x+4)^2$ دالة زوجية $\qquad$ ⓐ [✓ ⓑ]
5. المستقيم الذي معادلته $y = x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها $\qquad$ [✓ ⓐ] ⓑ

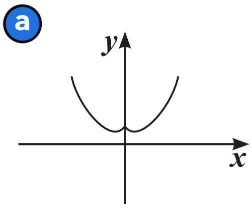
ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. معكوس دالة القوى $y = 0.2x^4$ هو:

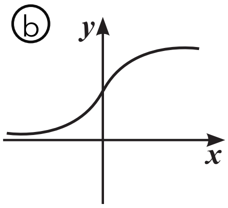
ⓐ $y = \sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$ $\qquad$ [✓ ⓑ $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$] $\qquad$ ⓒ $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$ $\qquad$ ⓓ $y = -\sqrt[4]{5x}$

7. أي مما يلي تمثل دالة زوجية:

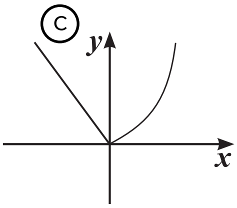
[✓ ⓐ]



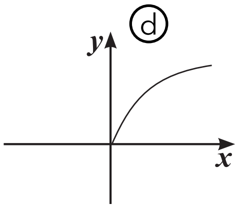
ⓑ



ⓒ



ⓓ



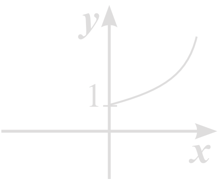
8. الدالة $y = 4.9t^2$ دالة زوجية إذا كان مجالها:

ⓐ $[-4\,,4)$ ⓑ $[-4\,,2)$ [✓ ⓒ] $[-2\,,2]$ ⓓ $[0,\infty)$

9. إذا كانت $f(x) = \frac{x^3}{64}$، $f: [-4\,,4] \to \mathbb{R}$ فإن مجال f^{-1} هو:

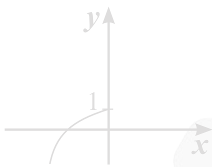
ⓐ $\mathbb{R}$ ⓑ $\mathbb{R}^+$ ⓒ $[-4\,,4]$ [✓ ⓓ] $[-1\,,1]$

10. ليكن بيان f^{-1} كما هو موضح في الشكل المقابل بيان f يمكن أن يكون:



⚠ معلق

ⓐ



[✓ ⓑ]

ⓒ

ⓓ

اختر من القائمة (2) ما يناسب السؤال في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)		القائمة (2)
11. بيان دالة زوجية متماثل حول:	[✓ ⓐ]	ⓐ المستقيم الذي معادلته $x = 0$
		ⓑ المستقيم الذي معادلته $y = 0$
12. بيان دالة فردية متماثل حول:	[✓ ⓓ]	ⓒ المستقيم الذي معادلته $y = x$
		ⓓ نقطة الأصل

الدوال الحدودية

الحدودية	الدرجة	الاسم باستخدام الدرجة	عدد الحدود	الاسم باستخدام عدد الحدود
6	الصفرية	ثابتة	1	أحادية
$x+3$	الأولى	خطية	2	ثنائية
$3x^2+5x-2$	الثانية	تربيعية	3	ثلاثية
$2x^3+5x^2$	الثالثة	تكعيبية	2	ثنائية
$-x^4+x^3-1$	الرابعة	ذات القوة الرابعة	3	ثلاثية

اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعا للدرجة وعدد الحدود.

$4x-6x+5$ $=-2x+5$ دالة خطية من الدرجة الأولى , حدودية ثنائية

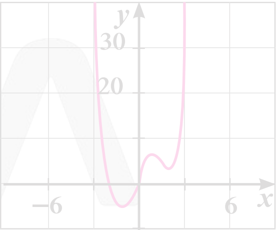
$3x^3+x^2-(4x+2x^3)$ $=3x^3+x^2-4x-2x^3=x^3+x^2-4x$

دالة حدودية من الدرجة الثالثة تكعيبية , حدودية ثلاثية

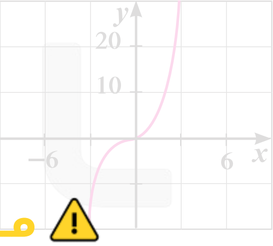
$6-2x^5$ $=-2x^5+6$ دالة حدودية من الدرجة الخامسة , حدودية ثنائية

سلوك النهاية

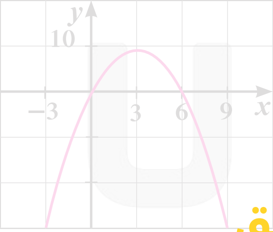
سلوك النهاية لمنحنى دالة يصف امتداد طرفيه الأيمن والأيسر



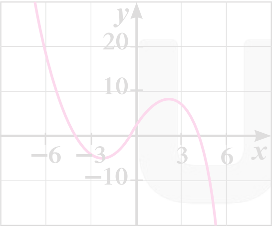
سلوك النهاية (↖ , ↗)



سلوك النهاية (↙ , ↗)



سلوك النهاية (↙ , ↘)



سلوك النهاية (↖ , ↘)

وضح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

$y=4x^3-3x$

المعامل الرئيسي $a=4$ موجب

درجة الحدودية $n=3$ فردي

∴ سلوك النهاية من جهة اليمين إلى الأعلى

∴ سلوك النهاية من جهة اليسار عكس اليمين أي إلى الأسفل

∴ سلوك النهاية هو: (↙ , ↗)

$f(x) = -2x^4 + 8x^3 - 8x^2$

المعامل الرئيسي $a = -2$ سالب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين
إلى الاسفل

درجة الحدودية $n = 4$ زوجي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار نفس اليمين أي
إلى الأسفل

∴سلوك النهاية هو: (↙ , ↘)

$g(x) = x^2 - 4x + 3$

المعامل الرئيسي $a = 1$ موجب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين
إلى الأعلى

درجة الحدودية $n = 2$ زوجي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار
نفس اليمين أي إلى الأعلى

∴سلوك النهاية هو: (↖ , ↗)

$h(x) = -x^3 + 2x + 2$

المعامل الرئيسي $a = -1$ سالب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين
إلى الاسفل

درجة الحدودية $n = 3$ فردي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار عكس اليمين
أي إلى الأعلى

∴سلوك النهاية هو: (↖ , ↘)

$y = -x^3 + 2x^2 + 6$

المعامل الرئيسي $a = -1$ سالب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين
إلى الاسفل

درجة الحدودية $n = 3$ فردي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار عكس اليمين
أي إلى الأعلى

∴سلوك النهاية هو: (↖ , ↘)

$y = 4x^4 - 3x$

المعامل الرئيسي $a = 4$ موجب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين
إلى الأعلى

درجة الحدودية $n = 4$ زوجي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار نفس اليمين
أي إلى الأعلى

∴سلوك النهاية هو: (↖ , ↗)

$f(x) = 2x^3 - x$

المعامل الرئيسي $a = 2$ موجب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين
إلى الأعلى

درجة الحدودية $n = 3$ فردي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار عكس اليمين
أي إلى الأسفل

∴سلوك النهاية هو: (↙ , ↗)

$h(x) = x - x^4 = -x^4 + x$

المعامل الرئيسي $a = -1$ سالب

∴سلوك النهاية من جهة اليمين
إلى الاسفل

درجة الحدودية $n = 4$ زوجي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار نفس اليمين
أي إلى الأسفل

∴سلوك النهاية هو: (↙ , ↘)

الدوال الحدودية-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. كثيرة الحدود $f(x) = ax^3 + (a+2)x^2 + 5 , \forall a \in \mathbb{R}$ هي من الدرجة الثالثة — ⓐ [✓ ⓑ]
2. المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود $f(x) = 2x^5 - 3x^3(1 - x^2)$ هو 2 — ⓐ [✓ ⓑ]
3. كثيرة الحدود $(1 - x^2)^3(x + 1)$ هي من الدرجة السابعة — [✓ ⓐ] ⓑ
4. إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة n فإن لها n حداً. — ⓐ [✓ ⓑ]

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

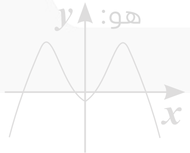
5. $(x+1)^3$ يساوي:

- ⓐ $x^3 + 1$
- ⓑ $(x+1)(x^2+x+1)$
- [✓ ⓒ] $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- ⓓ $x^3 + x^2 + x + 1$

6. أي مما يلي يساوي $2x^4 - 3x + 6$ ؟

- ⓐ $(x^4 - 2x^2 + 3) - (x^4 - x^2 - 9)$
- ⓑ $2x^4 - 3(x + 6)$
- [✓ ⓒ] $(3x^4 - x + 3) + (3 - 2x - x^4)$
- ⓓ $x(2x^3 - 3x) + 6$

7. سلوك نهاية الدالة هو:



- ⓐ $(\nwarrow , \nearrow)$
- [✓ ⓑ] $(\swarrow , \searrow)$
- ⓒ $(\swarrow , \nearrow)$
- ⓓ $(\nwarrow , \searrow)$

8. سلوك نهاية الدالة: $f(x) = x^4 - 2x^5$

- ⓐ $(\nwarrow , \nearrow)$
- ⓑ $(\swarrow , \searrow)$
- ⓒ $(\swarrow , \nearrow)$
- [✓ ⓓ] $(\nwarrow , \searrow)$

⚠ معلق

9. سلوك نهاية الدالة: $x) = 2x + x^3 + 5$

- ⓐ $(\nwarrow , \nearrow)$
- ⓑ $(\swarrow , \searrow)$
- [✓ ⓒ] $(\swarrow , \nearrow)$
- ⓓ $(\nwarrow , \searrow)$

10. سلوك نهاية الدالة: $f(x) = -x^6 + 7x$

- ⓐ $(\nwarrow , \nearrow)$
- [✓ ⓑ] $(\swarrow , \searrow)$
- ⓒ $(\swarrow , \nearrow)$
- ⓓ $(\nwarrow , \searrow)$

11. سلوك نهاية الدالة: $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$

- [✓ ⓐ] $(\nwarrow , \nearrow)$
- ⓑ $(\swarrow , \searrow)$
- ⓒ $(\swarrow , \nearrow)$
- ⓓ $(\nwarrow , \searrow)$

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

اكتب التعبير $(x+1)(x+2)(x+5)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة

$$(x+1)(x+2)(x+5) = (x+1)(x^2+5x+2x+10)$$
$$= (x+1)(x^2+7x+10)$$
$$= x^3+7x^2+10x+x^2+7x+10$$
$$= x^3+8x^2+17x+10$$

اكتب التعبير $(x+1)(x+1)(x-2)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة

$$(x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)(x^2-2x+x-2)$$
$$= (x+1)(x^2-x-2)$$
$$= x^3-x^2-2x+x^2-x-2$$
$$= x^3-3x-3$$

حلل كثيرة الحدود: $2x^3+10x^2+12x$ إلى عوامل ثم تحقق

التحليل:

$$2x^3+10x^2+12x$$
$$= 2x\,(x^2+5x+6)$$
$$= 2x\,(x+2)(x+3)$$

التحقق:

$$2x\,(x+2)(x+3)$$
$$= 2x\,(x^2+5x+6)$$
$$= 2x^3+10x^2+12x$$

حلل كثيرة الحدود: $12x^3-12x^2+3x$ إلى عوامل ثم تحقق

التحليل:

$$12x^3-12x^2+3x$$
$$= 3x\,(4x^2-4x+1)$$
$$= 3x\,(2x-1)^2$$

التحقق:

$$3x\,(2x-1)^2$$
$$= 3x\,(4x^2-4x+1)$$
$$= 12x^3-12x^2+3x$$

أوجد أصفار $y = (x-2)(x+1)(x+3)$ ، ثم ارسم بيانا تقريبيا للدالة مراعيا سلوك نهاية الدالة.

الحل $(x-2)=0 \Rightarrow x=2\ ,(x+1)=0 \Rightarrow x=-1, (x+3)=0 \Rightarrow x=-3$

∴أصفار الدالة هي: $\{2,-1,-3\}$

المعامل الرئيسي $a=1$ موجب

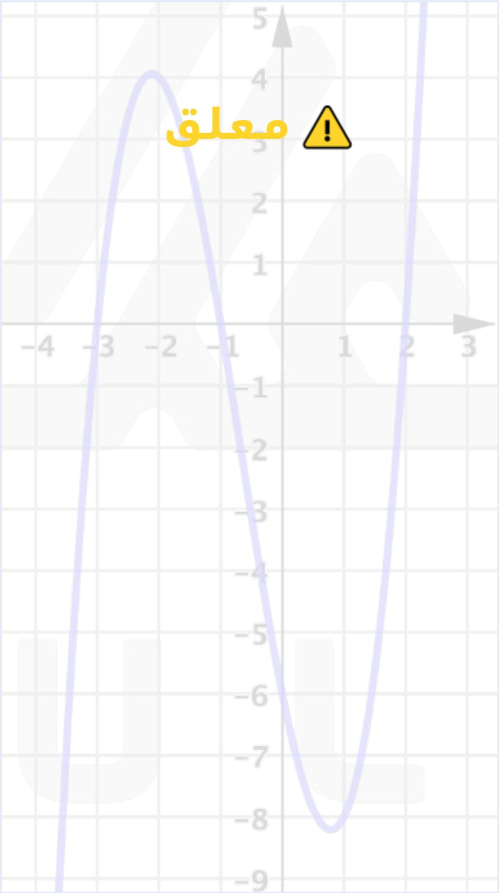
∴سلوك النهاية من جهة اليمين
إلى الأعلى

درجة الحدودية $n=3$ فردي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار عكس اليمين
أي إلى الأسفل

∴سلوك النهاية هو: $(\swarrow , \nearrow)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	0	4	0	-6	-8	0	24



أوجد أصفار الدالة $y=(x-7)(x-5)(3-x)$ ، ثم ارسم بيانا تقريبيا للدالة مراعيا سلوك نهاية الدالة.

الحل $(x-7)=0 \Rightarrow x=7\,,(x-5)=0 \Rightarrow x=5,(3-x)=0 \Rightarrow x=3$

∴أصفار الدالة هي: $\{3,5,7\}$

المعامل الرئيسي $a=-1$ سالب

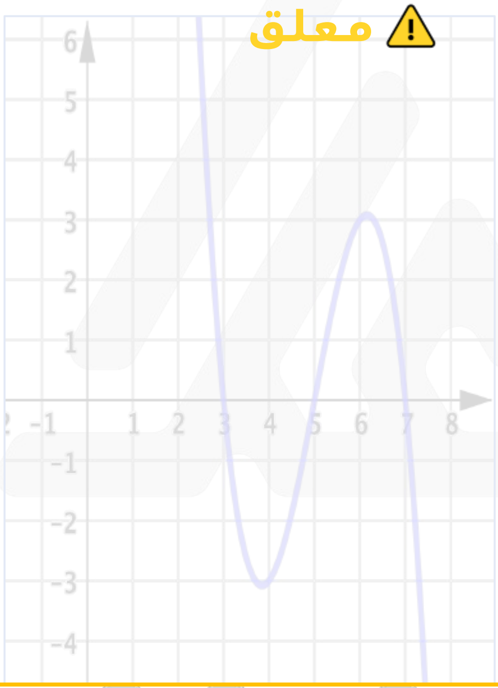
∴سلوك النهاية من جهة اليمين إلى الأسفل

درجة الحدودية $n=3$ فردي

∴سلوك النهاية من جهة اليسار عكس اليمين أي إلى الأعلى

∴سلوك النهاية هو: (↘ , ↖)

x	2	3	4	5	6	7	8
y	15	0	−3	0	3	0	−15



نظرية العامل

المقدار$(x-a)$هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Leftrightarrow a$ صفراً من أصفار كثيرة الحدود.

اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: $-4\,,-2\,,1$

$$f(x)=(x+4)(x+2)(x-1)$$
$$=(x+4)(x^2-x+2x-2)$$
$$=(x+4)(x^2+x-2)$$
$$=x^3+x^2-2x+4x^2+4x-8$$
$$=x^3+5x^2+2x-8$$

اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: $-4\,,-2\,,0$

$$f(x)=(x+4)(x+2)\cdot x$$
$$=(x+4)(x^2+2x)$$
$$=x^3+2x^2+4x^2+8x$$
$$=x^3+6x^2+8x$$

اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث 3 صفر مكرر مرتين و -1 صفر بسيط.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-3)^2 \\ &= (x+1)(x^2-6x+9) \\ &= x^3-6x^2+9x+x^2-6x+9 \\ &= x^3-5x^2+3x+9 \end{aligned}$$

العوامل الخطية لكثيرات الحدود-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت f تقبل القسمة على $(2x+3)$ فإن $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$ ⓐ [✓ ⓑ]

2. إذا كانت $(x+2)$ عامل من عوامل الحدودية g فإن $g(-2)=0$ [✓ ⓐ] ⓑ

3. إذا قبلت $f(x)=x^4-2x^2+k+1$ القسمة على x فإن $k=-1$ [✓ ⓐ] ⓑ

4. باقي قسمة حدودية من الدرجة n على حدودية من الدرجة الأولى هو عدد ثابت [✓ ⓐ] ⓑ

5. $(x+1)$ عامل من عوامل الحدودية $P(x)=x^3-x^2-2x$ [✓ ⓐ] ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

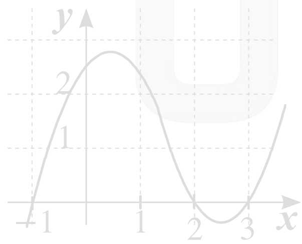
6. إذا كان $x=-2a$ صفراً من أصفار كثيرة حدود فإن أحد عوامها هو:

ⓐ $(x-2a)$ ⓑ $(2x+a)$ ⓒ $(2x-a)$ [✓ ⓓ] $(x+2a)$

7. أي من المقادير التالية إذا ضرب في $(x-1)$ يصبح الناتج كثيرة حدود تكعيبية ثلاثية

ⓐ $(x-1)^2$ [✓ ⓑ] x^2-x ⓒ x^2-1 ⓓ x^2+1

8. ليكن بيان f كما في الشكل المرسوم فإن مجموعة حل المعادلة $f(x)=0$ هي:



[✓ ⓐ] $\{-1, \quad 2, \quad 3\}$ ⓑ $\{1, \quad -2, \quad -3\}$

ⓒ $\{-1, \quad 0, \quad ,2,3\}$ ⓓ $\{0\}$

9. شبه مكعب أبعاده $2x+3 , 2x-3 , 3x$ فتكون دالة الحجم $f(x)$ تساوي:

ⓐ $4x^2-9$ ⓑ $3x(4x^2+9)$ ⓒ $12x^2-9x$ [✓ ⓓ] $12x^3-27x$

10. قيمة k التي تجعل $(x-1)$ عاملاً من عوامل $f(x)=(x^2+x-2)+2k$ هي:

ⓐ 1 ⓑ 2 [✓ ⓒ] 0 ⓓ $\frac{1}{2}$

11. $f(x)=x^3-x$ تقبل القسمة على $x-k$ إذا كان k ينتمي إلى المجموعة:

[✓ d] $\{0\,,-1\,,1\}$ (c) $\{1\}$ (b) $\{-1\}$ (a) $\{0\}$

12. إذا كانت $f(x)$ تقبل القسمة على $(x-2)^2$ فإن: ⚠ **معلق**

(a) $x=2$ صفراً من أصفار الدالة f

[✓ b] $x=2$ صفر مكرر من أصفار الدالة f

(c) $x=-2$ صفراً من أصفار الدالة f

(d) $x=-2$ صفر مكرر من أصفار الدالة f

13. $x+m$ عامل من عوامل:

(b) $f(x)=x^3+mx$ (a) $f(x)=x^2+m$

(d) $f(x)=x^2+m^2$ [✓ c] $f(x)=x^3+mx^2$

قسمة كثيرات الحدود

القسمة المطولة:

أوجد ناتج كل مما يلي.

$$\begin{array}{r|lll}
 & x & +3 & \\ \hline
x \quad +2 & x^2 & +5x & +6 \\
 & \overset{-}{x^2} & \overset{-}{+2x} & \\ \hline
 & & 3x & +6 \\
 & & \overset{-}{3x} & \overset{-}{+6} \\ \hline
 & & 0 &
\end{array}$$

$\therefore$ الناتج $= x + 3$

الباقي $= 0$

$$\begin{array}{r|lll}
 & 2x & -3 & \\ \hline
x \quad -8 & 2x^2 & -19x & +24 \\
 & \overset{-}{2x^2} & \overset{+}{-16x} & \\ \hline
 & & -3x & +24 \\
 & & \overset{+}{-3x} & \overset{-}{+24} \\ \hline
 & & 0 &
\end{array}$$

$\therefore$ الناتج $= 2x - 3$

الباقي $= 0$

تحقق ما إذا كان كل مقسوم عليه هو من عوامل المقسوم.

$(x^3 - x + 1) \div (x + 1)$

$$\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & -x & & \\ \hline
x \quad +1 & x^3 & +0x^2 & -x & +1 \\
 & \overset{-}{x^3} & \overset{-}{+x^2} & & \\ \hline
 & & -x^2 & -x & +1 \\
 & & \overset{+}{-x^2} & \overset{+}{-x} & \\ \hline
 & & & & 1
\end{array}$$

$\therefore$ الناتج $= x^2 - x$

الباقي $= 1$ $1 \neq 0$,

$\therefore$ $(x + 1)$ليس من عوامل $(x^3 - x + 1)$

$(x^3 + 4x^2 + x - 6) \div (x + 2)$

$$\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & +2x & -3 & \\ \hline
x \quad +2 & x^3 & +4x^2 & +x & -6 \\
 & \overset{-}{x^3} & \overset{-}{+2x^2} & & \\ \hline
 & & 2x^2 & +x & -6 \\
 & & \overset{-}{2x^2} & \overset{-}{+4x} & \\ \hline
 & & & -3x & -6 \\
 & & & \overset{+}{-3x} & \overset{+}{-6} \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

$\therefore$ الناتج $= x^2 + 2x - 3$

الباقي $= 0$

$\therefore$ $(x + 2)$هو من عوامل

$(x^3 + 4x^2 + x - 6)$

استخدم القسمة التركيبية

استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3-3x^2-6x+8 على $(x+2)$
أوجد باقي العوامل.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & \downarrow & -2 & 10 & -8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & \boxed{0} \\ & x^2 & x & & \end{array}$$

الباقي:

الناتج= x^2-5x+4

$=(x-1)(x-4)$

∴باقي العوامل هي:

$(x-1)\,,(x-4)$

استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3-2x^2-5x+6 على $(x+2)$
استخدم الإجابة لتحليل x^3-2x^2-5x+6 إلى عوامل.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & \downarrow & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} \\ & x^2 & x & & \end{array}$$

الباقي:

الناتج= x^2-4x+3

$=(x-3)(x-1)$

التحليل: $\therefore x^3-2x^2-5x+6=$
$(x-3)(x-1)(x+2)$

استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3+2x^2+x-5 على $(x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 2 & 1 & -5 \\ & \downarrow & -3 & 3 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & \boxed{-17} \\ & x^2 & x & & \end{array}$$

الباقي:

الناتج: x^2-x+4 الباقي: -17

استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3+4x^2+x-6 على $(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & \downarrow & -1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & \boxed{-4} \\ & x^2 & x & & \end{array}$$

الباقي:

الناتج: x^2+3x-2 الباقي: -4

Q مبنى على شكل شبه مكعب , يعطى حجمه بالعلاقة $V = x^3 + 4x^2 - x - 4$

a. إذا كان: $(x + 4)$أحد أبعاد المبنى. فأوجد البعدين الآخرين.

$(x^3 + 4x^2 - x - 4) \div (x + 4)$

-4	1	4	-1	-4	
	↓	-4	0	4	
	1	0	-1	0	الباقي:
	x^2	x			

⚠ **معلق**

الناتج$= x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

الأبعاد: $(x + 1)$,$(x - 1)$,$(x + 4)$

b. إذا كان أصغر أبعاد المبنى يساوي $10m$ فأوجد البعدين الآخرين.

الأبعاد: $(x + 1)$,$(x - 1)$,$(x + 4)$

أصغر أبعاد المبنى يساوي 10 بالتالي $x - 1 = 10$ بالتالي $x = 11$

الأبعاد: $(11 + 1 = 12\text{m})$,$(11 - 1 = 10\text{m})$,$(11 + 4 = 14\text{ m})$

نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$
على $(x - a)$حيث a ثابت ,فإن باقي القسمة هو $f(a)$

Q استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $\mathbf{f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12}$
على $(x + 4)$ ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

نظرية الباقي

$f(-4)$

$= (-4)^4 - 5(-4)^2 + 4(-4) + 12$

$= 172 \Rightarrow$

∴الباقي= 172

القسمة التركيبية.

-4	1	0	-5	4	12	
	↓	-4	16	-44	160	
	1	-4	11	-40	172	الباقي:

Q استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $\boldsymbol{f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 60}$
على $(x + 1)$ ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

نظرية الباقي

$f(-1)$

$= 2(-1)^4 + 6(-1)^3 - 5(-1)^2 - 60$

$= -69 \Rightarrow$

∴الباقي= -69

القسمة التركيبية.

-1	2	6	-5	0	-60	
	↓	-2	-4	9	-9	
	2	4	-9	9	-69	الباقي:

قسمة كثيرات الحدود-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x+a)$ يساوي صفراً فإن a عامل من عوامل f
ⓐ [✓ ⓑ]

2. الدالة $f(x)=(x-2)^2-1$ تقبل القسمة على $(x-1)$
[✓ ⓐ] ⓑ

3. باقي قسمة (x^3+a^3) على $(x-a)$ هو $2a^3$
[✓ ⓐ] ⓑ

4. ناتج قسمة حدودية من الدرجة n حيث $n \geq 2$ على حدودية من الدرجة الثانية تكون حدودية من الدرجة $(n-2)$
[✓ ⓐ] ⓑ

5. ناتج قسمة حدودية من الدرجة السادسة على حدودية من الدرجة الثالثة تكون حدودية من الدرجة الثانية.
ⓐ [✓ ⓑ]

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. باقي قسمة $f(x)$ على $g(x)=x-k$ هو:
ⓐ $g(k)$ [✓ ⓑ $f(k)$] ⓒ $f(-k)$ ⓓ $-k$

7. باقي قسمة (x^4+2) على $(x-3)$ هو:
ⓐ 3 ⓑ 27 ⓒ 81 [✓ ⓓ 83]

8. ناتج قسمة $(2x^4-8x^2)$ على $(x+2)$ هو:
[✓ ⓐ $2x^3-4x^2$] ⓑ $2x^3-8x^2$ ⓒ x^3-4x^2 ⓓ $2x^3-4x^2+2x$

9. إذا كان 0 هو باقي قسمة $f(x)=2x^3-4x^2+kx-1$ على$(x+1)$ فإن $k=$
ⓐ 7 [✓ ⓑ -7] ⓒ -3 ⓓ 3

10. إذا كان باقي قسمة $f(x)=x^4-kx^2+x-k$ على $(x-1)$ هو 3 فإن $k=$
ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ 3 [✓ ⓒ $-\frac{1}{2}$] ⓓ $\frac{5}{2}$

11. إذا كان $f(-1)=f(0)=f(3)=-2$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون:
ⓐ x^3-x^2+3x-2
ⓑ x^3-2x^2-3x
ⓒ $2x^3-2x^2-3x-2$
[✓ ⓓ $2x^3-4x^2-6x-2$]

حل معادلات كثيرات الحدود

حل المعادلات بالتحليل

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

Q $4x^3 - 16x^2 - 20x = 0$

$4x(x^2 - 4x - 5) = 0$

$4x(x - 5)(x + 1) = 0$

$4x = 0 \Rightarrow \quad x = 0$

$x - 5 = 0 \Rightarrow \quad x = 5$

$x + 1 = 0 , \quad x = -1$

$\therefore$ م.ح $= \{0 ,5 , -1\}$

Q $3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$

$3x(x^2 + 2x - 3) = 0$

$3x(x + 3)(x - 1) = 0$

$3x = 0 \Rightarrow \quad x = 0$

$x + 3 = 0 \Rightarrow \quad x = -3$

$x - 1 = 0 \Rightarrow \quad x = 1$

$\therefore$ م.ح $= \{0 , -3 ,1\}$

Q $2x^3 = 3x - 5x^2$

$2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$

$x(2x^2 + 5x - 3) = 0$

$x(2x - 1)(x + 3) = 0$

$x = 0$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow \quad 2x = 1 , \Rightarrow \; x = \frac{1}{2}$

$x + 3 = 0 \Rightarrow \quad x = -3$

$\therefore$ م.ح $= \{0 , \frac{1}{2}, -3\}$

حل المعادلات باستخدام المميّز:

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

Q $x^3 - x^2 - 3x = 0$

$x(x^2 - x - 3) = 0$

$x = 0$ أو $x^2 - x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1 - 4\times1\times(-3) = 13$

$x = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 \mp \sqrt{13}}{2}$

$\therefore$ م.ح $= \{0 , \frac{1+\sqrt{13}}{2} , \frac{1-\sqrt{13}}{2}\}$

Q $2x^3 - 4x^2 = 10x$

$2x^3 - 4x^2 - 10x = 0$

$2x(x^2 - 2x - 5) = 0$

$2x = 0$ أو $x^2 - 2x - 5 = 0$

$x = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4\times1\times(-5) = 24$

$x = \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)\pm\sqrt{24}}{2(1)} = 1 \pm \sqrt{6}$

$\therefore$ م.ح $= \{0 , 1+\sqrt{6}, 1-\sqrt{6}\}$

حل المعادلات بالتقسيم:

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

Q $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

$$\underbrace{x^3 + 2x^2} \underbrace{- 3x - 6} = 0$$

$$x^2(x+2) - 3(x+2) = 0$$

$$(x+2)(x^2-3) = 0$$

$$(x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$

$$(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$(x-\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$(x+\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$$

∴ م.ح $= \{-2\ ,\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\}$

Q $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

$$\underbrace{x^3 + 2x^2} \underbrace{- 4x - 8} = 0$$

$$x^2(x+2) - 4(x+2) = 0$$

$$(x+2)(x^2-4) = 0$$

$$(x+2)(x-2)(x+2) = 0$$

$x + 2 = 0 \ \Rightarrow x = -2$ مكرر

$$x - 2 = 0 \ \Rightarrow x = 2$$

∴ م.ح$=\{-2,2\}$

الحل باستخدام الأصفار النسبية الممكنة

أوجد مجموعة حل المعادلة:

Q $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$$

① عوامل الحد الثابت (-8) $\qquad \mp1 , \mp2 , \mp4 , \mp8$

عوامل المعامل الرئيسي (1) $\qquad \mp1$

الأصفار النسبية الممكنة $\qquad \mp1 , \mp2 , \mp4 , \mp8$

②لتكن: $\qquad p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

بالتعويض نجد: $\qquad p(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 4(2) - 8 = 0$

∴ 2 صفراً من أصفار$p(x)$ بالتالي $(x-2)$ عامل من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x-2)$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 2 & -4 & -8 \\ & \downarrow & 2 & 8 & 8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \\ & x^2 & x & & \end{array}$$

الباقي:

الناتج$= x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

$$(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

∴ $x = -2$ هو حل مكرر للمعادلة

∴ م.ح$=\{-2,2\}$

أوجد مجموعة حل المعادلة:

- $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

① عوامل الحد الثابت: (3)

$\mp 1 , \mp 3$

عوامل المعامل الرئيسي: (1)

∓ 1

الأصفار النسبية الممكنة

$\mp 1 , \mp 3$

② لتكن:

$p(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

بالتعويض نجد:

$p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 3 = 0$

∴ 1 صفراً من أصفار $p(x)$

بالتالي $(x-1)$ عامل من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x-1)$

1	1	−4	0	3	
	↓	1	−3	−3	
	1	−3	−3	0	الباقي:
	x^2	x			

الناتج= $x^2 - 3x - 3$

$x^2 - 3x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-3)^2 - 4(1)(-3) = 21$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$

∴ م.ح= $\left\{1, \frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right\}$

أوجد مجموعة حل المعادلة:

- $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

① عوامل الحد الثابت: (-4)

$\mp 1 , \mp 2 , \mp 4$

عوامل المعامل الرئيسي: (1)

∓ 1

الأصفار النسبية الممكنة

$\mp 1 , \mp 2 , \mp 4$

② لتكن:

$p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

بالتعويض نجد:

$p(-1) =$
$(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) - 4 = 0$

∴ -1 صفراً من أصفار $p(x)$

بالتالي $(x+1)$ عامل من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x+1)$

−1	1	1	−4	−4	
	↓	−1	0	4	
	1	0	−4	0	الباقي:
	x^2	x			

الناتج= $x^2 - 4$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow$

$x = -2 , x = 2$

∴ م.ح= $\{-1, -2, 2\}$

أوجد مجموعة حل المعادلة:

a $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$

$x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

① عوامل الحد الثابت (-2) $\qquad \mp 1 , \mp 2$

عوامل المعامل الرئيسي (1) $\qquad \mp 1$

الأصفار النسبية الممكنة $\qquad \mp 1 , \mp 2$

② لتكن: $\qquad p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

بالتعويض نجد:

$p(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1) - 2 = 0$

$p(1) = (1)^4 - 3(1)^3 + (1)^2 + 3(1) - 2 = 0$

∴ $1, -1$ من أصفار $p(x)$

بالتالي $(x-1) , (x+1)$ من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x+1)$

-1	1	-3	1	3	-2
	↓	-1	4	-5	2
	1	-4	5	-2	0
	x^3	x^2	x		

الباقي:

الناتج: $\qquad q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

④ نقسم $q(x)$ على $(x-1)$

1	1	-4	5	-2
	↓	1	-3	2
	1	-3	2	0
	x^2	x		

الباقي:

الناتج: $\qquad x^2 - 3x + 2$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$

∴ م.ح=$\{-1,1,2\}$

أوجد مجموعة حل المعادلة:

Q $x^4-3x^3-7x^2+27x=18$

$x^4-3x^3-7x^2+27x-18=0$

① عوامل الحد الثابت (-18) $\quad \mp1\,,\mp2\,,\mp3\,,\mp6\,,\mp9\,,\mp18$

عوامل المعامل الرئيسي (1) $\quad \mp1$

الأصفار النسبية الممكنة $\quad \mp1\,,\mp2\,,\mp3\,,\mp6\,,\mp9\,,\mp18$

② لتكن: $\quad p(x)=x^4-3x^3-7x^2+27x-18$

بالتعويض نجد:

$p(1)=(1)^4-3(1)^3-7(1)^2+27(1)-18=0$

$p(2)=(2)^4-3(2)^3-7(2)^2+27(2)-18=0$

∴ 1,2 من أصفار $p(x)$ بالتالي $(x-1)\,,(x-2)$ من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x-1)$

1	1	−3	−7	27	−18	
	↓	1	−2	−9	18	
	1	−2	−9	18	0	الباقي:
	x^3	x^2	x			

الناتج: $q(x)=x^3-2x^2-9x+18$

④ نقسم $q(x)$ على $(x-2)$

2	1	−2	−9	18	
	↓	2	0	−18	
	1	0	−9	0	الباقي:
	x^2	x			

الناتج: x^2-9

$x^2-9=0 \Rightarrow (x-3)(x+3)=0 \Rightarrow x=3, x=-3$

∴ م.ح=$\{-3\ ,3,1,2\}$

حل معادلات كثيرات الحدود-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. مجموعة حل المعادلة $9x^2+16=0$ هي $\left\{-\frac{4}{3}\,,\frac{4}{3}\right\}$ $\quad$ ⓐ ● b

2. مجموعة حل المعادلة $2x^3+2=0$,$x\in\mathbb{R}$ هي مجموعة أحادية $\quad$ ● a ⓑ

3. إذا كانت $2k$ تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة $(4x^2+1)\left(\frac{x^2}{4}-1\right)=0$ فإن $k\in\{-1\,,1\}$ $\quad$ ● a ⓑ

4. إن $\{1\}$ هي مجموعة حل المعادلة $3x^4 + 12x^2 - 15 = 0$

ⓐ [✓ b]

5. $\frac{2}{3}$ يمكن أن يكون صفراً للحدودية $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx - 3$ حيث $b , c \in \mathbb{R}$

[✓ a] ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. 5 يمكن أن يكون صفراً من أصفار الحدودية $f(x)$ تساوي:

[✓ a] $ax^3 + x^4 + 5$

ⓑ $x^5 - 1$

ⓒ $5x^3 + 6x - 1$

ⓓ $(x+5)(x^2+25)$

7. أي قيمة مما يلي **ليست** حلاً للمعادلة $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

ⓐ -1

ⓑ -3

ⓒ 3

[✓ d] 2

8. إذا كان $f(m) = f(n) = f(-1) = 0$ فإن f ممكن أن تكون:

ⓐ $f(x) = (x-1)(x+m)(x+n)$

ⓑ $f(x) = (x-1)(x-m)^2(x-n)$

[✓ c] $f(x) = (x+1)(x-m)(x-n)^2$

ⓓ $f(x) = (x+1)(x-mn)$

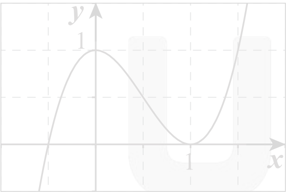
اختر من ما يناسب كل تمرين في القائمة لتحصل على إجابة صحيحة.

9. مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{-1 ,2 ,3\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون: [✓ b]

10. مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{-1 ,2\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون [✓ c]

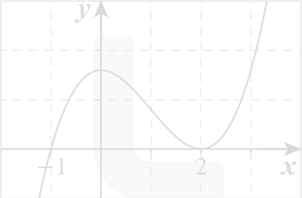
11. مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{1 , -2 , -3\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون [✓ d]

ⓐ

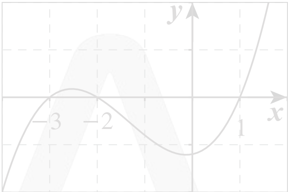


ⓑ

ⓒ



ⓓ

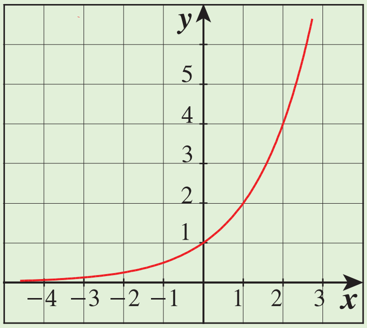


استكشاف النماذج الأسية

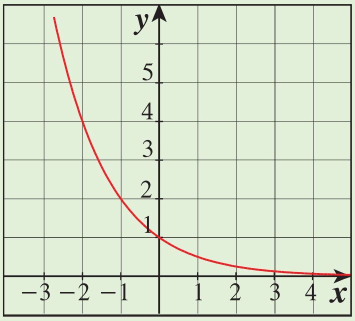
الدالةالأسية تكون من الشكل:

$b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ الأساس , $a \in \mathbb{R}^*$ عدد ثابت , $\forall x \in \mathbb{R}$: $y = a(b)^x$

- عندما تكون $b > 1$
- فإن الدالة تمثل نمواً أسياً
- ويكون b هو عامل النمو



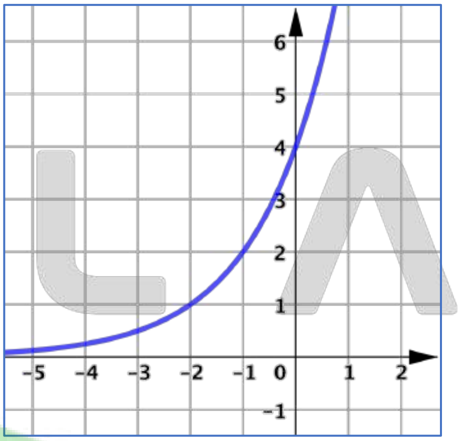
- عندما تكون $0 < b < 1$
- فإن الدالة تمثل تضاؤلاً أسياً
- ويكون b هو عامل التضاؤل



مثل بيانيا كلا من الدوال التالية, ثم بين ما إذا كانت تمثل نموا أسيا أو تضاؤلا أسيا وحدد العامل.

$y = 4(2)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	1	2	4	8	16



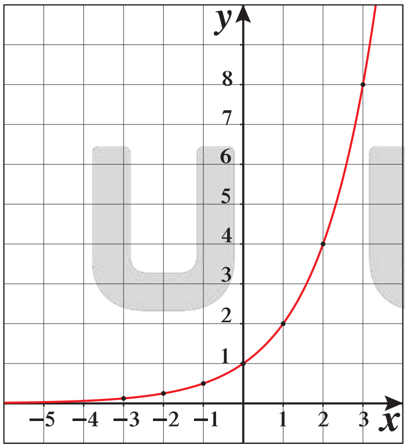
$\because b = 2$, $2 > 1$

$\therefore$ دالة نمو أسي

عامل النمو : $b = 2$

$y = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	0.25	0.5	1	2	4



$\because b = 2$, $2 > 1$

$\therefore$ دالة نمو أسي

عامل النمو : $b = 2$

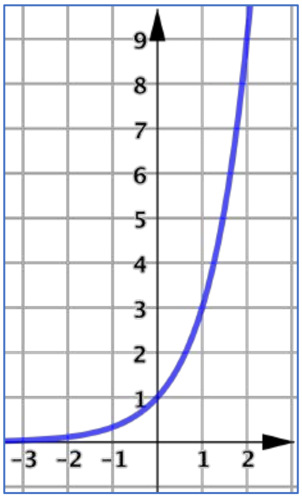
$y = 3^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

$\because b = 3 \quad , 3 > 1$

∴ دالة نمو أسي

عامل النمو : $b = 3$



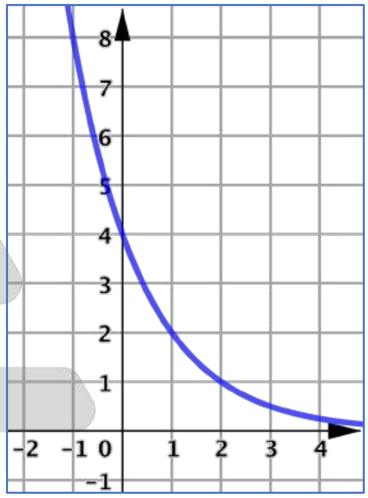
$y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	16	8	4	2	1	0.5

$\because b = \frac{1}{2} \qquad 0 < \frac{1}{2} < 1$

∴ دالة تضاؤل أسي

عامل التضاؤل : $b = \frac{1}{2}$



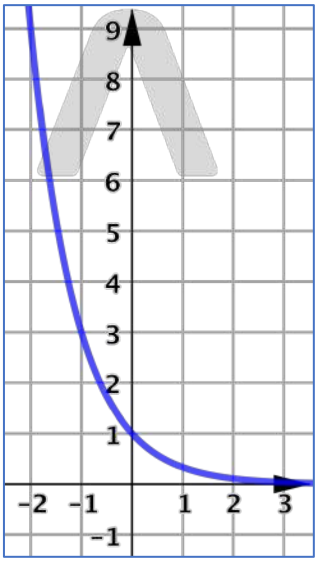
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

$\because b = \frac{1}{3} \qquad 0 < \frac{1}{3} < 1$

∴ دالة تضاؤل أسي

عامل التضاؤل : $b = \frac{1}{3}$



$y = 2(0.1)^x$

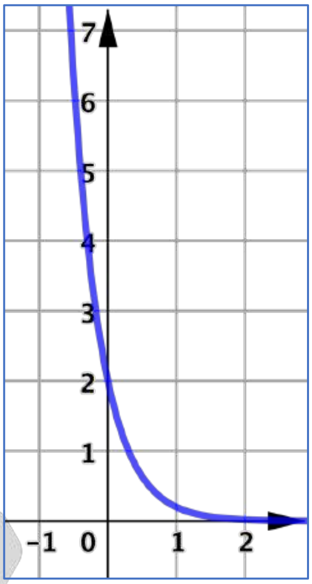
x	-2	-1	0	1	2
y	200	20	2	0.2	0.02

$\because b = 0.1$

$0 < 0.1 < 1$

∴ دالة تضاؤل أسي

عامل التضاؤل : $b = 0.1$



اكتب دالة أسية بالصورة $y = ab^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $H(2,4)\,,S(3,16)$

$y = ab^x$

$H(2,4)$

$4 = a\cdot b^2$ ①

$S(3,16)$

$16 = a\cdot b^3$ ②

نقسم المعادلتين طرفاً إلى طرف:

$$\frac{16}{4} = \frac{a.b^3}{a.b^2}$$

$4 = b$

نعوض في المعادلة ①

$4 = a\cdot b^2 \Rightarrow 4 = a\,.(4)^2$

$\Rightarrow a = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

∴المعادلة المطلوبة

$y = ab^x$

$\therefore y = \frac{1}{4}(4)^x$

اكتب دالة أسية : $y = ab^x$, يمر بيانها بالنقطتين: $P(2,2)\,,Q(3,4)$

$y = ab^x$

$P(2,2)$

$2 = a\cdot b^2$ ①

$Q(3,4)$

$4 = a\cdot b^3$ ②

نقسم المعادلتين طرفاً إلى طرف:

$$\frac{4}{2} = \frac{a.b^3}{a.b^2}$$

$2 = b$

نعوض في المعادلة ①

$2 = a\cdot b^2 \Rightarrow 2 = a\,.(2)^2$

$\Rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

∴المعادلة المطلوبة

$y = ab^x$

$\therefore y = \frac{1}{2}(2)^x$

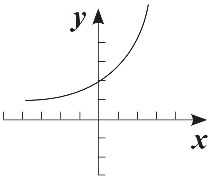
استكشاف النماذج الأسية-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. الدالة $y = 3(2)^2$ تمثل تضاؤلاً أسياً   a [✓ b]

2. الدالة $y = 2(\frac{1}{3})^{-x}$ تمثل نمواً أسياً   [✓ a] b

3. عامل النمو للدالة $y = \frac{1}{3}(2)^{2x}$ هو 2   a [✓ b]

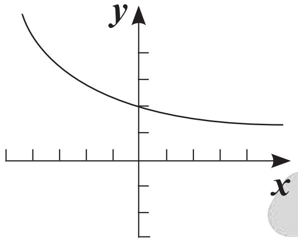


4. إذا كان بيان الدالة $y = b^x$ كما في الشكل المقابل فإن $b > 1$ [✓ a] b

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

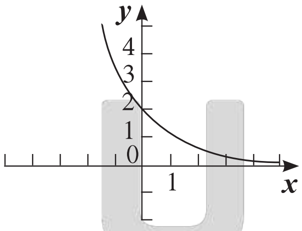
5. عامل النمو للدالة $y = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^x$

a $\frac{1}{3}$ b $\frac{1}{9}$ c 3   [✓ d] 9



6. ليكن بيان الدالة: $y = 2b^x$ كما في الشكل المقابل فإن b يمكن أن تساوي:

a -2 b 0
[✓ c] $\frac{1}{2}$ d 2



8. أي من الدوال الأسية التالية يمكن أن يمثلها الرسم البياني المقابل

a $y = \frac{1}{3}(2)^x$ [✓ b] $y = 2(\frac{1}{3})^x$
c $y = -3(2)^x$ d $y = -2(3)^x$

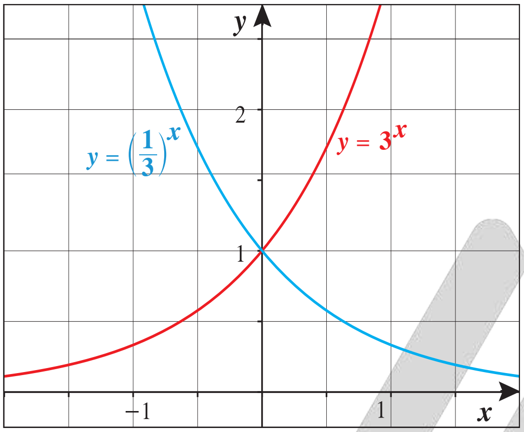
تدرب و تفوق

اختبارات الكترونية ذكية

الدوال الأسية و تمثيلها بيانيا

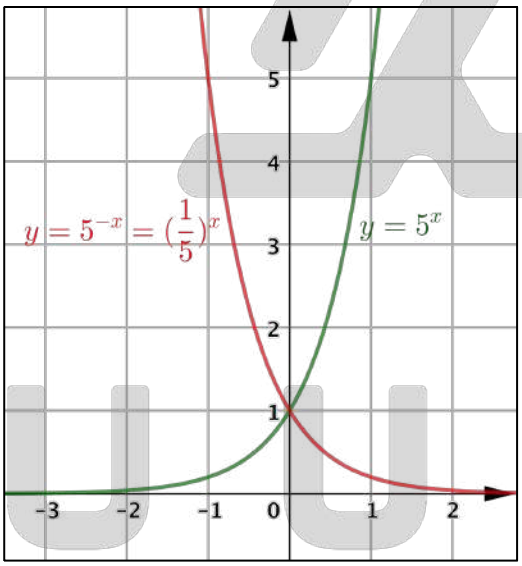
مثل بيانيا كلا من: $y = 3^x , y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

x	3^x	3^{-x}
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$



مثل بيانيا كلا من: $y = 5^x , y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

x	5^x	5^{-x}
-2	$\frac{1}{25}$	25
-1	$\frac{1}{5}$	5
0	1	1
1	5	$\frac{1}{5}$
2	25	$\frac{1}{25}$



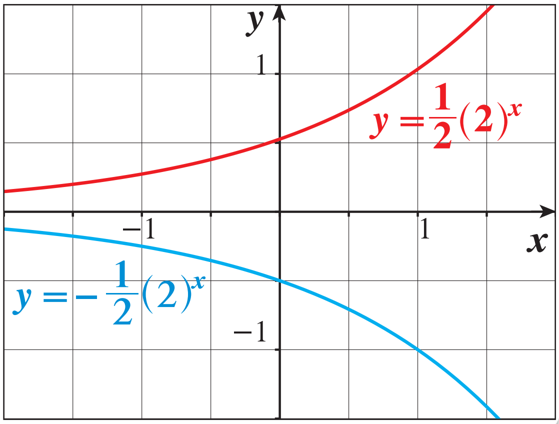
نتيجة: بيان الدالة $y = b^{-x}$

ينتج من انعكاس بيان الدالة $y = b^x$ في المحور الصادي $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

مثل بيانيا في نفس المستوي الإحداثي.

a $y=-\frac{1}{2}(2)^x$ $\quad$ $y=\frac{1}{2}(2)^x$

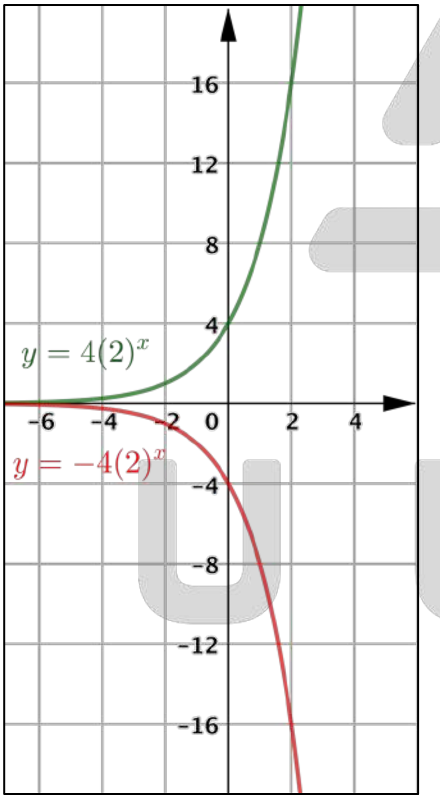
$-\frac{1}{2}(2)^x$	$\frac{1}{2}(2)^x$	x
$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	-2
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
-1	1	1
-2	2	2
-4	4	3



مثل بيانيا في نفس المستوي الإحداثي.

a $y=-4(2)^x$ $\quad$ $y=4(2)^x$

$-4(2)^x$	$4(2)^x$	x
-1	1	-2
-2	2	-1
-4	4	0
-8	8	1
-16	16	2



نتيجة: بيان الدالة $y=-b^x$
ينتج من انعكاس بيان الدالة $y=b^x$ في المحور السيني $\quad$ $b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$

التمثيل البياني للدالة: $y = a(b)^{x-h} + k$ هو انسحاب لبيان دالة المرجع
$y = a(b)^x$ بمقدار h وحدة أفقياً , k وحدة رأسياً. $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

مثل كل دالة مما يلي وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع: $y = 2(3)^x$

- $y_1 = 2(3)^{x+1}$
- $y_2 = 2(3)^x - 4$
- $y_3 = 2(3)^{x-3}+1$

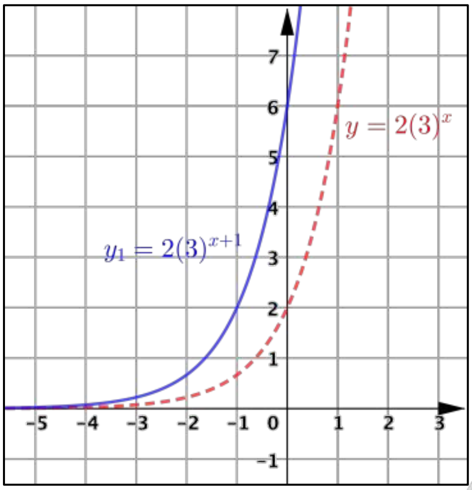
دالة المرجع $y = 2(3)^x$

y	x
$\frac{2}{9}$	-2
$\frac{2}{3}$	-1
2	0
6	1
18	2

- $y_1 = 2(3)^{x+1}$

$h = -1 , k = 0$

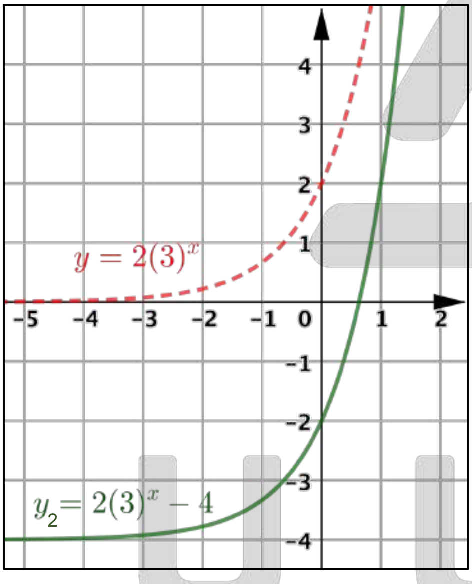
إزاحة بيان دالة المرجع وحدة إلى اليسار



- $y_2 = 2(3)^x - 4$

$h = 0 , k = -4$

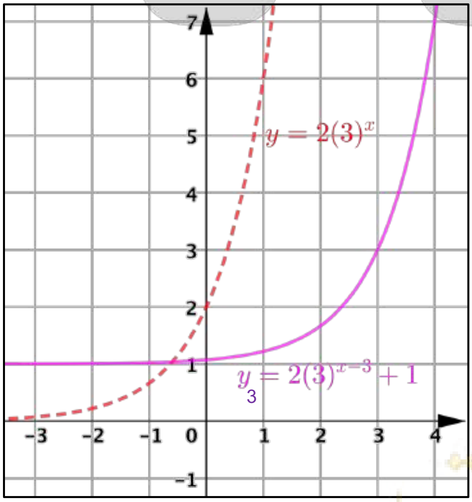
إزاحة بيان دالة المرجع
أربع وحدات إلى الأسفل



- $y_3 = 2(3)^{x-3}+1$

$h = 3 , k = 1$

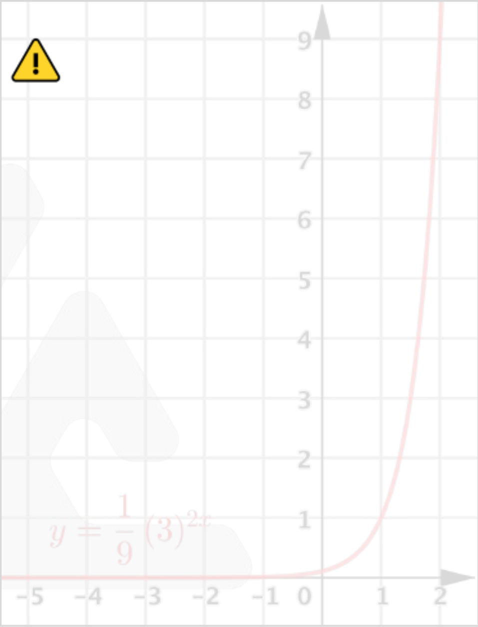
إزاحة بيان دالة المرجع
ثلاث وحدات إلى اليمين
وحدة واحدة إلى الأعلى



▪ التمثيل البياني للدالة: $y = a(b)^{rx}$ ▪ $a \in \mathbb{R}^*, r \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

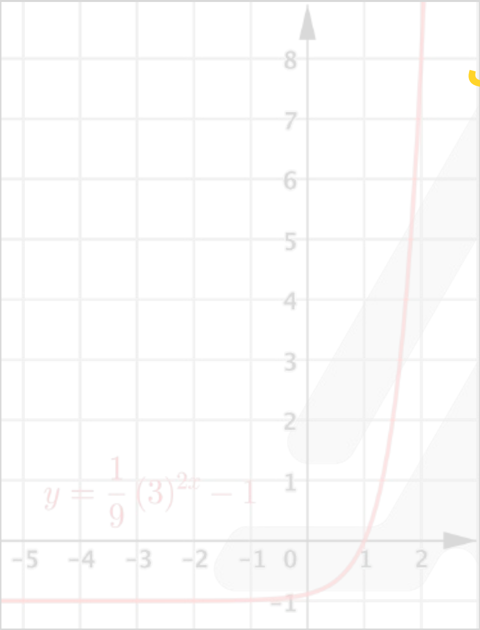
مثل بيانيا الدالة: $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

x	-1	0	1	2
y	0.01	$\frac{1}{9}$	1	9



مثل بيانيا الدالة: $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x} - 1$

x	-1	0	1	2
y	-0.98	-0.88	0	8



⚠ معلق

الدوال الأسية وتمثيلها بيانياً - التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. جميع الدوال الأسية على الصورة: $y = ab^x\ a \neq 0 , b > 0 , b \neq 1$ متقاطعة — a [✓ b]
2. بيان الدالة $y = -2^x$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة $y = 2^x$ — [✓ a] b
3. بيان الدالة $y = -(3)^x$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة $y = -(3)^{-x}$ — [✓ a] b
4. بيان الدالة $y = 3(5)^{x-2}$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = 3(5)^x$ بمقدار وحدتين جهة اليمين — [✓ a] b
5. بيان الدالة $y = 3(2)^x$ يقطع جزءاً من محور الصادات قدره 3 — [✓ a] b

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

.6 لتكن $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 5$ فإن دالة المرجع لها يمكن أن تكون:

ⓐ $y = 3(2)^x$
[✓ ⓑ] $y = 3(2)^{-x}$
ⓒ $y = 3(\frac{1}{2})^{x+1}$
ⓓ $y = (\frac{1}{2})^x$

.7 باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{3}(4)^x$ كدالة مرجع يمكن رسم بيان الدالة:

ⓐ $y = 3(4)^x$
ⓑ $y = 3(4)^{-x}$
[✓ ⓒ] $y = \frac{1}{3}(2)^{2x} + 1$
ⓓ $y = \frac{1}{3}(2)^{3x}$

.8 قيمة a التي تجعل بيان الدالة $y = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{(a+2)x} + 3$ خطاً أفقياً هي:

ⓐ -3
[✓ ⓑ] -2
ⓒ -8
ⓓ 0

.9 بيان الدالة $f(x) = 3(5)^x - 1$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة : $g(x) =$

ⓐ $3(5)^x + 1$
[✓ ⓑ] $3(5)^{-x} - 1$
ⓒ $3(5)^x + 1$
ⓓ $3(5)^{-x} + 1$

.10يمكن رسم بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^{x+2} - 3$ باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^x$ بانسحاب

[✓ ⓐ] وحدتين لليسار و 3 وحدات لأسفل
ⓑ وحدتين لليمين و 3 وحدات لأسفل
ⓒ 3 وحدات لليمين ووحدتين لأعلى
ⓓ وحدتين لليمين و 3 وحدات لأعلى

.11معادلة الدالة الأسية التي على الصورة $y = a(b)^x$ حيث الأساس يساوي 0.6 ويمر رسمها البياني بالنقطة (2 ,1.8) هي:

ⓐ $y = 1.8(2)^x$
ⓑ $y = 0.2(1.8)^x$
ⓒ $y = 2(0.6)^x$
[✓ ⓓ] $y = 5(0.6)^x$

الدوال اللوغاريتمية و تمثيلها بيانيا

$\forall y \in R^{+} \quad , \quad b \in R^{+} - \{1\}$

$y = b^{x} \Leftrightarrow log_{b}\, y = x$

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$x^3 = 8$	$3 = \log_x 8$
$7^2 = 49$	$2 = \log_7 49$
$x = 3^5$	$\log_3 x = 5$
$8 = 2^3$	$\log_2 8 = 3$

أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

Q $\log_{10} 100$

$\log_{10} 100 = y$

$100 = 10^y$

$10^2 = 10^y$

$\therefore y = 2$

$\log_{10} 100 = 2$

Q $\log_8 16$

$\log_8 16 = x$

$16 = 8^x$

$2^4 = 2^{3x}$

$\therefore 4 = 3x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$\therefore \log_8 16 = \frac{4}{3}$

Q $\log_{64} \frac{1}{32}$

$\log_{64} \frac{1}{32} = x$

$\frac{1}{32} = 64^x$

$2^{-5} = 2^{6x}$

$-5 = 6x$

$\log_{64} \frac{1}{32} = x = \frac{-5}{6}$

Q $\log_9 27$

$\log_9 27 = n$

$27 = 9^n$

$3^3 = 3^{2n}$

$3 = 2n$

$\log_9 27 = n = \frac{3}{2}$

تنبيه مهم

ملاحظة: اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم الذي أساسه = 10 : $\log_{10} x = \log x$

التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية

أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

$f(x) = \log(3 - x)$

$3 - x > 0$

$-x > -3 \quad \Rightarrow x < 3$

∴المجال : $D_f = (-\infty, 3)$

$h(x) = 4\log_3(5 - 3x)$

$5 - 3x > 0$

$-3x > -5 \Rightarrow x < \frac{5}{3}$

∴المجال : $D_h = (-\infty, \frac{5}{3})$

$y = \log_5(6x)$

$6x > 0$

$x > 0$

∴المجال : $D = (0, \infty)$

$g(x) = \log_2(x^2)$

$x^2 > 0$

$|x| > 0$

∴المجال : $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

$g(x) = \log_7(1 - x)$

$1 - x > 0$

$-x > -1 \quad \Rightarrow x < 1$

∴المجال : $D_g = (-\infty, 1)$

$f(x) = \log_4(x^2 + 1)$

$x^2 + 1 > 0$

∴المجال : $D_f = \mathbb{R}$

$y = 2 + \log_5(x - 2)$

$x - 2 > 0$

$x > 2$

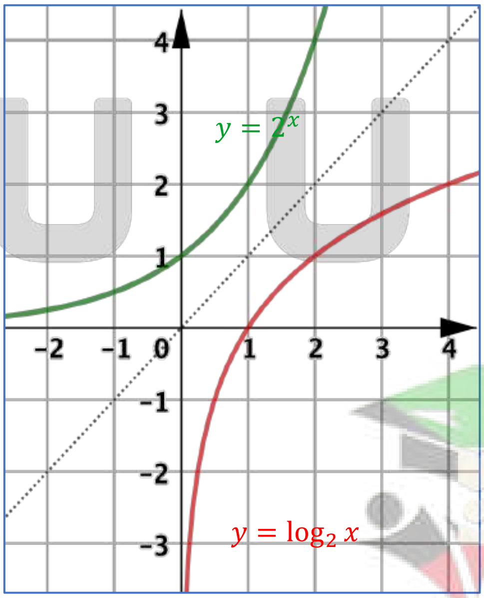
∴المجال : $D = (2, \infty)$

استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_2 x$ ومعكوسها.

$y = \log_2 x$ هي معكوس لـ $y = 2^x$

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2

x	$y = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

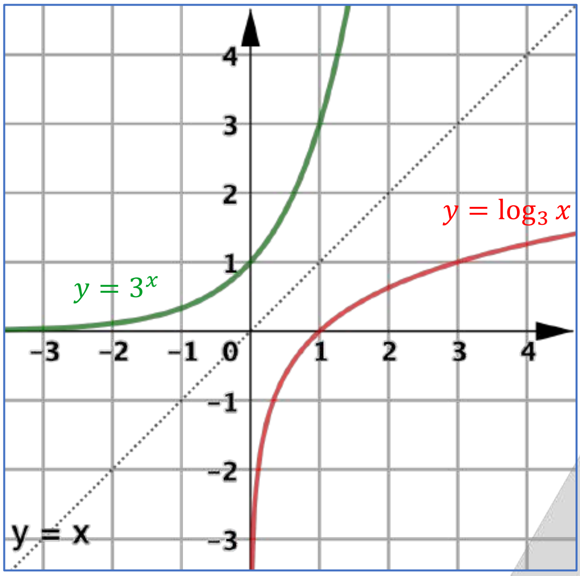


استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_3 x$ ومعكوسها.

$y = \log_3 x$ هي معكوس لـ $y = 3^x$

$y = \log_3 x$	x
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9

$y = 3^x$	x
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2



انسحاب الدوال اللوغاريتمية:

التمثيل البياني للدالة: $y = \log_b (x - h) + k$ هو انسحاب لبيان دالة المرجع $y = \log_b x$ بمقدار h وحدة أفقياً و k وحدة رأسياً.

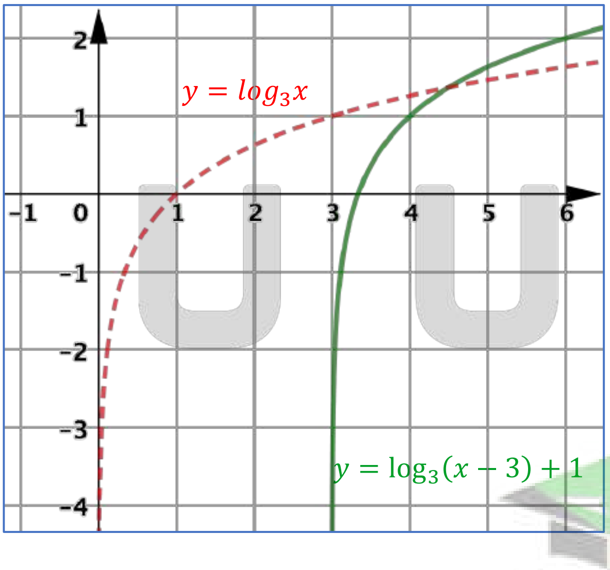
ارسم بيان الدالة: $y = \log_3 (x - 3) + 1$ مستخدماً دالة المرجع.

دالة المرجع $h = 3 , k = 1$

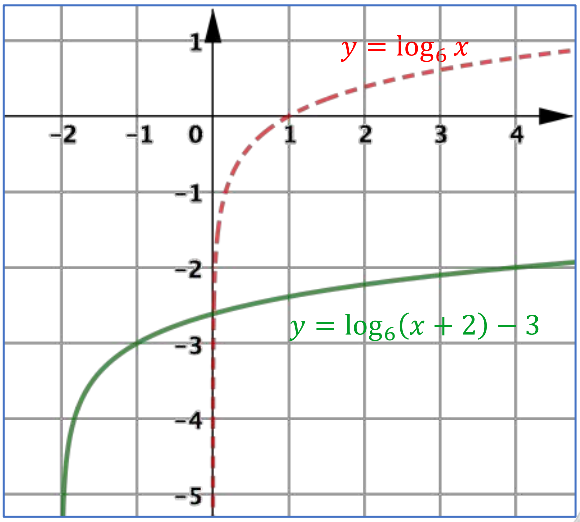
$y = \log_3 x$ انسحاب بيان دالة المرجع:

- 3 وحدات يميناً
- وحدة للأعلى

y	x
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3



Q ارسم بيان الدالة: $y = \log_6(x+2) - 3$ مستخدماً دالة المرجع.



دالة المرجع $h = -2 , k = -3$

$y = \log_6 x$

انسحاب بيان دالة المرجع:

- وحدتين يساراً
- 3 وحدات للأسفل

y	x
-1	$\frac{1}{6}$
0	1
1	6

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانياً - التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كانت $y = x^3$ فإن $x = \log y$ ⓐ [✓ ⓑ]
2. إذا كانت $\log_2(-y) = x$ فإن $y = 2^{-x}$ ⓐ [✓ ⓑ]
3. إذا كانت $4^x = 5$ فإن $2x = \log_2 5$ [✓ ⓐ] ⓑ
4. مجال الدالة $f(x) = \log(x^2)$ هو $\mathbb{R}$ ⓐ [✓ ⓑ]
5. بيان الدالة $y = \log_3 x$ هو انعكاس في المستقيم $y - x = 0$ لبيان الدالة $y = 3^x$ [✓ ⓐ] ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. معكوس الدالة $y = \log_2 x$ هو:

ⓐ $y = \log_x 2$ ⓑ $y = x^2$ [✓ ⓒ] $y = 2^x$ ⓓ $y = \log 2^x$

7. مجال الدالة $y = \log|x - 1|$ هو:

ⓐ $\mathbb{R}$ ⓑ $\mathbb{R}^+$ ⓒ $(1 , \infty)$ [✓ ⓓ] $\mathbb{R}/\{1\}$

8. مجال الدالة $y = \log(x^2 + 1)$ هو:

[✓ ⓐ] $\mathbb{R}$ ⓑ $\mathbb{R}^+$ ⓒ $[1, \infty)$ ⓓ $(1 , \infty)$

.9 باستخدام دالة المرجع $y = \log_5 x$ يمكن تمثيل الدالة:

ⓐ $y = \log(x-1) - 1$

ⓑ $y = \log_5(5x)$

[✓ ⓒ] $y = \log_5(x-1) - 1$

ⓓ $y = \log_5(x^2+1)$

.10 يمكن رسم بيان الدالة $y = \log(x+1) - 2$ معتبراً دالة المرجع $y = \log x$ بانسحاب

[✓ ⓐ] وحدة للیسار ووحدتين لأسفل

ⓑ وحدة لليمين ووحدتين لأسفل

ⓒ وحدتين لليمين ووحدة لأعلى

ⓓ وحدتين لليسار ووحدة لأعلى

اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة

.12 معكوس الدالة: $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ هو [✓ ⓐ]

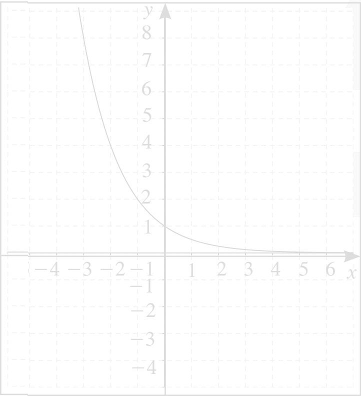
.13 معكوس الدالة: $y = \log_4 x$ هو [✓ ⓒ]

ⓓ $y = (-4)^{-x}$	ⓒ $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$	ⓑ $y = \left(\frac{-1}{4}\right)^{-x}$	ⓐ $y = 4^{x}$

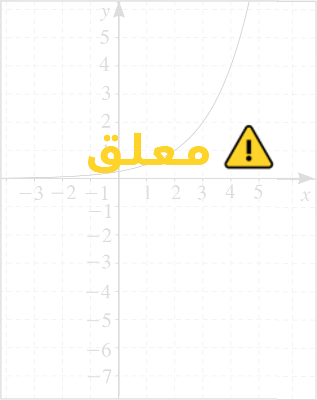
.14 بيان معكوس الدالة $y = \log_3(x)$ هو: [✓ ⓒ]

.15 بيان معكوس الدالة $y = \log_2(4x)$ هو: [✓ ⓑ]

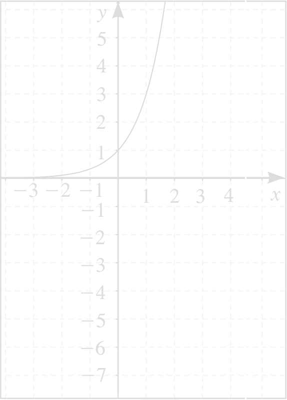
ⓐ



ⓑ



ⓒ



خواص اللوغاريتمات

خواص اللوغاريتمات

$\forall m,n,b \in \mathbb{R}^+ , b \neq 1$

خاصية الضرب	$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$
خاصية القوى	$\log_b m^k = k \log_b m , k \in \mathbb{R}$

أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد.

Q $\log_2 8 - \log_2 4$

$$= \log_2 \left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 2$$

Q $3 \log_b x + \log_b y$

$$= \log_b x^3 + \log_b y = \log_b (x^3 y)$$

Q $3 \log_5 2 + \log_5 4 - \log_5 16$

$$= \log_5 2^3 + \log_5 4 - \log_5 16$$

$$= \log_5 (2^3 \times 4) - \log_5 16$$

$$= \log_5 \left(\frac{2^3 \times 4}{16}\right) = \log_5 (2)$$

Q $\log_5 2 + \log_5 6$

$$= \log_5 (2 \times 6) = \log_5 (12)$$

Q $3\log_b 4 - 3\log_b 2$

$$= \log_b 4^3 - \log_b 2^3 = \log_b \frac{4^3}{2^3} = \log_b 8$$

Q $4\log_3 2 - \log_3 5 + \log_3 10$

$$= \log_3 \frac{2^4}{5} + \log_3 10 = \log_3 (\frac{2^4}{5} \times 10) = \log_3 (32)$$

أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث c,b,a أعداد حقيقية موجبة.

Q $\log_5 \left(\frac{x}{y}\right)$

$$= \log_5 x - \log_5 y$$

Q $\log (3x^4)$

$$= \log 3 + \log x^4 = \log 3 + 4 \log x$$

Q $\log \sqrt{\frac{25}{x}}$

$$= \log \left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right) = \log 5 - \log \sqrt{x} = \log 5 - \log x^{\frac{1}{2}} = \log 5 - \frac{1}{2} \log x$$

Q $\log_2 (7b)$

$$= \log_2 7 + \log_2 b$$

Q $\log_b (\frac{c}{3})^2$

$$= 2 \log \frac{c}{3} = 2(\log c - \log 3) = 2 \log c - 2 \log 3$$

Q $\log_7 (a^3 b^4)$

$$= \log_7 a^3 + \log_7 b^4 = 3 \log_7 a + 4 \log_7 b$$

تنبيه مهم

$\forall m,b \in \mathbb{R}^+ , b \neq 1$

$\log_b 1 = 0 \quad , \quad \log_b b = 1 \quad , \quad \log_b(b^m) = m$

إذا كان $\log 5 \approx 0.699$, $\log 3 \approx 0.477$, $\log 2 \approx 0.301$ **استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة (قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف)**

Q $\log 4.5$

$= \log\frac{9}{2} \quad = \log 9 - \log 2$

$= \log 3^2 - \log 2 \quad = 2\log 3 - \log 2$

$= 2(0.477) - 0.301 = 0.653$

Q $\log 1200$

$= \log(2^2 \times 3 \times 10^2)$

$= \log 2^2 + \log 3 + \log 10^2$

$= 2\log 2 + \log 3 + 2\log 10$

$= 2(0.301) + 0.477 + 2(1) = 3.079$

Q $\log 30$

$= \log(3\times10)$

$= \log 3 + \log 10$

$= 0.477 + 1 \quad = 1.477$

Q $\log\frac{1}{25}$

$= \log 1 - \log 25$

$= 0 - \log 5^2$

$= -2\log 5$

$= -2(0.699) \ = -1.398$

خواص اللوغاريتمات-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

.1 $\log(x-1)^2 = 2\log|x-1|$ [✓ ⓐ] ⓑ

.2 $\log\frac{1}{x^2} = -2\log x \ , x > 0$ [✓ ⓐ] ⓑ

.3 $\log\left(\frac{\sqrt{m}}{n}\right) = \frac{1}{2}\log m - \log n \ , m > 0 \ , n > 0$ [✓ ⓐ] ⓑ

.4 $\log_2 16 - \log_2 2 = \log_2 8$ [✓ ⓐ] ⓑ

.5 $\log(x-y) = \frac{\log x}{\log y} \ , x , y \in \mathbb{R}^+/\{1\}$ ⓐ [✓ ⓑ]

.6 $\log_6 4 + \log_6 9 = 2$ [✓ ⓐ] ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

7. المقدار $2\log_4 8 + \log_5 125$ يساوي:

ⓐ 4 ⓑ 5 [✓ ⓒ] 6 ⓓ 15

8. إذا كان $\log 3 = x$, $\log 5 = y$ فإن $\log 45$ تساوي:

ⓐ $x + y$ [✓ ⓑ] $2x + y$ ⓒ $2y + x$ ⓓ x^2y

9. $x > 0$, $\log_2 x + \log_2 2x + \log_2 \frac{1}{x^2}$ يساوي:

[✓ ⓐ] 1 ⓑ 2 ⓒ x ⓓ $2x$

10. إذا كان $\log 2 = m , \log 3 = n$ فإن المقدار $m + n - 1$ يساوي:

ⓐ $\log 0.06$ [✓ ⓑ] $\log 0.6$ ⓒ $\log 6$ ⓓ $\log 60$

11. عندما $m = 3 , n = 2$ فإن المقدار الأكبر قيمة فيما يلي هو:

ⓐ $\log n^2 - \log m^3$ [✓ ⓑ] $\log m^2 - \log n^2$
ⓒ $3\log n - 2\log m$ ⓓ $2\log m - 3\log n$

12. مفكوك المقدار $\log\left(\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}}\right)$ هو:

ⓐ $3\log\frac{8}{x^3}$ ⓑ $\frac{1}{3}(\log(8 - x^3))$
[✓ ⓒ] $\log 2 - \log x$ ⓓ $\log 2 - 3\log x$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

حل معادلات أسية

حل كل معادلة مما يلي مقرباً إجابتك إلى أقرب جزء من ألف.

$3^x = 4$

$\log 3^x = \log 4$

$x \log 3 = \log 4$

$x = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262$

$3^{x+4} = 101$

$\log 3^{x+4} = \log 101$

$(x+4)\log 3 = \log 101$

$x + 4 = \frac{\log 101}{\log 3}$

$x = \frac{\log 101}{\log 3} - 4 \approx 0.201$

$7^x = 20$

$\log 7^x = \log 20$

$x \log 7 = \log 20$

$x = \frac{\log 20}{\log 7} \approx 1.539$

$6^x = 21$

$\log 6^x = \log 21$

$x \log 6 = \log 21$

$x = \frac{\log 21}{\log 6} \approx 1.699$

حل كل معادلة مما يلي:

$\sqrt{m^5} = 32 \quad , \quad m > 0$

$m^{\frac{5}{2}} = 2^5$

$\log\left(m^{\frac{5}{2}}\right) = \log(2^5)$

$\frac{5}{2}\log m = 5 \log 2$

$\log m = \frac{2}{5} \times 5 \log 2$

$\log m = 2 \log 2$

$\log m = \log(2^2)$

$\therefore m = 2^2$

$m = 4 \in (0, \infty)$

$x^{\frac{2}{3}} = 25 \, , x > 0$

$\log x^{\frac{2}{3}} = \log 5^2$

$\frac{2}{3}\log x = 2 \log 5$

$\log x = \frac{3}{2} \times 2 \log 5$

$\log x = 3 \log(5)$

$\log x = \log(5^3)$

$\therefore x = 5^3$

$x = 125 \in (0, \infty)$

Q $\sqrt[3]{u^4} - 5 = 11 \quad , \quad u > 0$

$u^{\frac{4}{3}} = 11 + 5 = 16$

$\log u^{\frac{4}{3}} = \log 2^4$

$\frac{4}{3} \log u = 4 \log 2$

$\log u = \frac{3}{4} \times 4 \log 2$

$\log u = 3 \log 2$

$\log u = \log 2^3$

$u = 2^3$

$u = 8 \in (0, \infty)$

Q $t^{\frac{7}{2}} = 128 \quad , \quad t > 0$

$\log t^{\frac{7}{2}} = \log 2^7$

$\frac{7}{2} \log t = 7 \log 2$

$\log t = \frac{2}{7} \times 7 \log 2$

$\log t = 2 \log 2$

$\log t = \log 2^2$

$t = 2^2$

$t = 4 \in (0, \infty)$

قاعدة تغيير الأساس

$\forall m,b,c \in \mathbb{R}^+, b \neq 1, c \neq 1 \quad \log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$

Q أوجد قيمة $\log_3 15$ ثم حولها إلى لوغاريتم للأساس 2

$\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2.465$

$\log_3 15 = \log_2 x$

$2.465 \approx \log_2 x$

$2^{2.465} \approx x$

$x \approx 5.521$

$\therefore \log_3 15 = \log_2 5.521$

Q أوجد قيمة $\log_3 400$ ثم حولها إلى لوغاريتم للأساس 8

$\log_3 400 = \frac{\log 400}{\log 3} \approx 5.454$

$\log_3 400 = \log_8 x$

$5.454 \approx \log_8 x$

$x \approx 8^{5.454}$

$x \approx 84227.28$

$\therefore \log_3 400 \approx \log_8 84227.28$

استخدم قاعدة تغيير الأساس لحل المعادلة:

Q $7^{5x} = 3000$

$\log_7 7^{5x} = \log_7 3000$

$5x = \frac{\log 3000}{\log 7}$

$x = \frac{1}{5} \times \frac{\log 3000}{\log 7} \approx 0.8229$

Q $2^{3x} = 172$

$\log_2 2^{3x} = \log_2 172$

$3x = \log_2 172 = \frac{\log 172}{\log 2}$

$x = \frac{1}{3} \times \frac{\log 172}{\log 2} \approx 2.4754$

حل معادلات لوغاريتمية

حل المعادلة: $\log(3x+1) = 5$

المجال

$3x + 1 > 0$

$3x > -1$

$x > \frac{-1}{3}$

$\left(\frac{-1}{3}, \infty\right)$

$3x + 1 = 10^5$

$3x = 10^5 - 1$

$x = \frac{10^5 - 1}{3}$

$x = 33333 \in (\frac{-1}{3}, \infty)$

∴حل المعادلة $x = 33333$

حل المعادلة: $\log(7-2x) = -1$

المجال

$7 - 2x > 0$

$-2x > -7$

$x < \frac{-7}{-2}$

$x > 3.5$

$(-\infty, 3.5)$

$7 - 2x = 10^{-1}$

$-2x = 10^{-1} - 7$

$x = \frac{10^{-1} - 7}{-2} = 3.45$

$x = 3.45 \in (-\infty, 3.5)$

∴حل المعادلة $x = 3.45$

حل المعادلة: $2\log x - \log 3 = 2$

المجال

$x > 0$

$(0, \infty)$

$\log x^2 - \log 3 = 2$

$\log \frac{x^2}{3} = 2$

$\frac{x^2}{3} = 10^2$

$x^2 = 3 \times 10^2$

$x^2 = 300$

$x = \pm\sqrt{300} \Rightarrow x = \pm 10\sqrt{3}$

$-10\sqrt{3} \notin (0, \infty)$ $\qquad$ $10\sqrt{3} \in (0, \infty)$

∴حل المعادلة $x = 10\sqrt{3}$

حل المعادلة: $\log 6 - \log 3x = -2$

المجال

$3x > 0$

$x > 0$

$(0, \infty)$

$\log \frac{6}{3x} = -2$

$\frac{6}{3x} = 10^{-2}$

$\frac{2}{x} = \frac{1}{100}$

$x = 200 \qquad \in (0, \infty)$

∴حل المعادلة $x = 200$

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

$\log_4(x+6) - \log_4 12 = \log_4 2 - \log_4(x-4)$, $x \in (4, \infty)$

$\log_4 \frac{x+6}{12} = \log_4 \frac{2}{x-4} \Rightarrow \frac{(x+6)}{12} = \frac{2}{x-4} \Rightarrow$

$(x+6)(x-4) = 24$

$x^2 + 2x - 48 = 0$

$(x-6)(x+8) = 0 \Rightarrow x = 6 \in (4, \infty)$

$x = -8 \notin (4, \infty)$

∴ م.ح = $\{6\}$

$\log x^2 - \log(x^2 - x) = 1$, $x \in (1, \infty)$

$\log \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 - x} = \frac{10}{1}$

$10x^2 - 10x = x^2$

$9x^2 - 10x = 0$

$x(9x - 10) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \notin (1, \infty)$

$9x - 10 = 0 \Longrightarrow x = \frac{10}{9} \in (1, \infty)$

∴م.ح = $\left\{\frac{10}{9}\right\}$

Q $\log_{x+1}32 = 5\ ,\ x \in (0,\infty)$

$32 = (x+1)^5$

$2^5 = (x+1)^5$ لاحظ الأس عدد فردي

$x + 1 = 2$

$x = 2 - 1 = 1\ ,1 \in (0\ ,\infty)$

م.ح∴ $= \{1\}$

Q $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)\ ,\quad x \in (1,\infty)$

$\log_2\frac{x-1}{x+3} = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$

$\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{x}$

$x^2 - x = x + 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow$

$x = -1 \notin (1\ ,\infty)$

$x = 3 \in (1\ ,\infty)$

م.ح∴ $= \{3\}$

⚠ معلق

Q $\log x(x+1) = \log 2$

المجال: $x(x+1) > 0$

$x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$

$x > 0\ ,x + 1 > 0\ \Rightarrow\ x > -1$

$x < 0\ ,x + 1 < 0\ \Rightarrow x < -1$

x	$-\infty$		-1		0		∞
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

المجال $= (-\infty,-1) \cup (0,\infty)$

$= \mathbb{R} - [-1\ ,0]$

$x(x+1) = 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$

$x = 1 \in \mathbb{R} - [-1\ ,0]$

$x = -2 \in \mathbb{R} - [-1\ ,0]$

م.ح $= \{-2,1\}$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. حل المعادلة $9^x = 3$ هو $x = \frac{1}{2}$ [✓ a] b
2. حل المعادلة $2\log x = -1$ هو $x = 10^{-0.5}$ [✓ a] b
3. إذا كان $\log(x+6) = 0$ فإن $x = -5$ [✓ a] b
4. حل المعادلة $14^{9x} = 146$ هو $x = \frac{\log 146}{\log 14}$ a [✓ b]
5. حل المعادلة $3\log x - \log 6 + \log 2.4 = 9$ هو $5{\times}10^4$ a [✓ b]

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. إذا كان $(1.5)^x = 356$ فإن:

ⓐ $x \approx 15$
[✓ ⓑ] $x \approx 14.5$
ⓒ $x \approx 15.3$
ⓓ $x \approx 16.3$

7. حل المعادلة $8 + 10^x = 1008$

ⓐ $x = 6$
ⓑ $x \approx 3.5$
[✓ ⓒ] $x = 3$
ⓓ $x = 2$

8. إذا كان $2^{x^2} = 512$ فإن:

ⓐ $x = 3$
ⓑ $x = 9$
[✓ ⓒ] $x = \pm 3$
ⓓ $x = -9$

9. إذا كان $2 \log x = -2$ فإن:

[✓ ⓐ] $x = 10^{-1}$
ⓑ $x = 10^{0.5}$
ⓒ $x = 10^{-2}$
ⓓ $x = 10^{-0.5}$

10. مجموعة حل المعادلة: $\log(x^2 + 2) = \log(5x - 4)$

ⓐ $\{2\}$
ⓑ $\{3\}$
[✓ ⓒ] $\{2 , 3\}$
ⓓ $\{-2 , -3\}$

11. مجموعة حل المعادلة: $\log_2(x^2 - x) = 1$ هي:

ⓐ $\{-1\}$
ⓑ $\{1 , 2\}$
[✓ ⓒ] $\{-1 , 2\}$
ⓓ $\{-1 , -2\}$

12. حل المعادلة $\log(x + 21) + \log x = 2$ هو:

[✓ ⓐ] 4
ⓑ $-25 , 4$
ⓒ 25
ⓓ $4 , 25$

13. يكون $x = 3$ حلاً للمعادلة:

ⓐ $\log_3(6 - x^2) = 1$
ⓑ $\log_x 9 = \frac{2}{3}$
ⓒ $\log_3(x^2 + 1) = 2$
[✓ ⓓ] $\log_3 x^3 + \log_3 x = 4$

14. حل المعادلة $\log_x 81 - \log_x 9 = 2$ هو:

ⓐ -3
ⓑ $\frac{1}{3}$
[✓ ⓒ] 3
ⓓ 9

اللوغاريتم الطبيعي

اللوغاريتم الطبيعي هو اللوغاريتم الذي أساسه e ويرمز له بـ ln

$$y = log_e x = ln\, x$$

$k\,, m\,, n \in \mathbb{R}^+$

- $ln(mn) = ln\, m + ln\, n$
- $ln\frac{m}{n} = ln\, m - ln\, n$
- $ln\, e = 1$
- $ln\, e^k = k$
- $e^{ln\, k} = k$

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل:

$e^{4(x+1)} = 32$

$\ln e^{4(x+1)} = \ln 32$

$4(x+1) = \ln 32$

$x + 1 = \frac{\ln 32}{4}$

$x = \frac{\ln 32}{4} - 1 \approx -0.134$

$8e^{2x} = 20$

$e^{2x} = 2.5$

$\ln e^{2x} = \ln 2.5$

$2x = \ln 2.5$

$x = \frac{\ln 2.5}{2} \approx 0.458$

حل المعادلة: $ln(3x+5) = 4$

المجال $3x + 5 > 0$

$3x > -5$

$x > \frac{-5}{3}$

$\left(\frac{-5}{3}, \infty\right)$

$\ln(3x+5) = 4$

$3x + 5 = e^4$

$3x = e^4 - 5$

$x = \frac{e^4 - 5}{3}$

$\approx 16.533 \in \left(\frac{-5}{3}, \infty\right)$

حل كلا من المعادلات التالية:

$5 + ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 7$

المجال $\frac{x+2}{3} > 0$

$x + 2 > 0$

$x > -2$

$(-2, \infty)$

$\ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 7 - 5$

$\ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 2$

$\frac{x+2}{3} = e^2$

$x + 2 = 3e^2$

$x = 3e^2 - 2$

$\approx 20.167 \in (-2, \infty)$

$e^{\frac{2x}{5}} + 7.2 = 9.1$

$e^{\frac{2x}{5}} = 9.1 - 7.2 = 1.9$

$\ln e^{\frac{2x}{5}} = \ln 1.9$

$\frac{2x}{5} = \ln 1.9$

$x = \frac{5}{2}\ln 1.9$

≈ 1.605

Q $2^{2x-3}+4=7$

$2^{2x-3}=3$

$\ln 2^{2x-3}=\ln 3$

$(2x-3)\ln 2=\ln 3$

$2x-3=\frac{\ln 3}{\ln 2}$

$2x=\frac{\ln 3}{\ln 2}+3$

$x=\frac{\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}+3\right)}{2}\approx 2.292$

Q $e^{x+1}=30$

$\ln e^{x+1}=\ln 30$

$x+1=\ln 30$

$x=\ln(30)-1$

$x\approx 2.401$

اللوغاريتم الطبيعي-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. $\log_4(lne^4)=1$ [✓ a] ⓑ
2. $4ln8+ln10=4ln80$ ⓐ [✓ b]
3. $lne^2=2$ [✓ a] ⓑ
4. حل المعادلة $lnx=-2$ هو e^2 ⓐ [✓ b]
5. حل المعادلة: $e^{\frac{x}{5}}+4=7$ هو $5ln3$ [✓ a] ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. $3ln4-5ln2$ على شكل لوغاريتم واحد تكتب:

ⓓ $ln32$ [✓ c] $ln2$ ⓑ $ln(\frac{6}{5})$ ⓐ $ln(-18)$

7. e^{ln10} تساوي:

ⓓ $\frac{1}{10}$ ⓒ 0 ⓑ e^{10} [✓ a] 10

8. حل المعادلة $ln(2m+3)=8$ هو:

ⓓ e^4-3 [✓ c] $\frac{e^8-3}{2}$ ⓑ $\frac{e^8}{2}-3$ ⓐ e^8-3

9. حل المعادلة $ln4r^2=3$ هو:

ⓓ $e^{\frac{3}{2}},-e^{\frac{3}{2}}$ ⓒ $\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2}$ [✓ b] $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2},\frac{-e^{\frac{3}{2}}}{2}$ ⓐ $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$

10. حل المعادلة: $e^{2x} = 10$ هو:

[✓ a] $x = \frac{\ln 10}{2}$

ⓑ $ln5$

ⓒ $\frac{5}{e}$

ⓓ $2ln10$

11. $\{e^2\}$ هي مجموعة حل المعادلة:

[✓ a] $lnx = 2$

ⓑ $lnx^2 = 2$

ⓒ $lnx^2 = 4$

ⓓ $lnx = 4$

12. حل المعادلة $e^{x+1} = 13$ هو:

ⓐ $x = ln13 + 1$

[✓ b] $x = ln13 - 1$

ⓒ $x = ln13$

ⓓ $x = ln12$

13. حل المعادلة $ln(x-2)^2 = 6$ هو:

ⓐ $2 + e^3$

ⓑ $2 - e^3$

[✓ c] $2 \pm e^3$

ⓓ $2 \pm e^6$

14. حل المعادلة $e^{\frac{x}{2}+1} + 3 = 8$ هو:

ⓐ $x = 2ln5 - 1$

[✓ b] $x = 2ln5 - 2$

ⓒ $x = 2ln4$

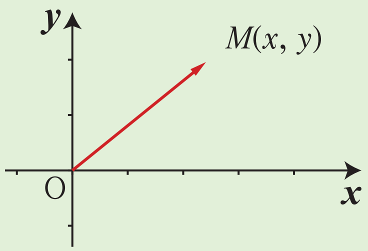
ⓓ $x = \frac{1}{2}(ln5 - 1)$

🎯 **تدرب و تفوق**

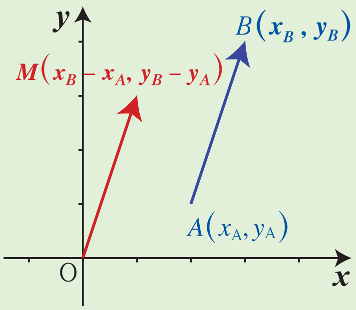
اختبارات الكترونية ذكية

المتجه في المستوي

- القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة ونهايتها M(x,y) تسمى (متجه الموضع) ويمثلها الزوج المرتب(x,y)



- $\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة في المستوى الإحداثي، متجه الموضع لهذه القطعة هو $\overrightarrow{OM}$ حيث
- M$(x_B - x_A \quad , \quad y_B - y_A)$



ليكن: $A(1, -3), B(2,2), C(2,3), D(-2, -1)$

عين الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AB}\ : (x_B - x_A\ , y_B - y_A) = (2 - 1\ , 2 - (-3)) = (1{,}5)$$

$$\overrightarrow{BD}\ : (x_D - x_B\ , y_D - y_B) = (-2 - 2\ , -1 - 2) = (-4, -3)$$

متجه الموضع $\overrightarrow{OC}$ يمثل القطعة الموجهة $\overrightarrow{KD}$ أوجد إحداثيات K

بفرض: $K(x\ , y)$

$$\overrightarrow{KD}\ : (x_D - x_K\ , y_D - y_K) = (-2 - x\ , -1 - y)$$

$$\overrightarrow{OC}\ : (x_C - x_O\ , y_C - y_O) = (2 - 0\ , 3 - 0) = (2{,}3)$$

$$\therefore -2 - x = 2 \Rightarrow -x = 2 + 2 = 4 \Rightarrow x = -4$$

$$\therefore -1 - y = 3 \Rightarrow -y = 3 + 1 = 4 \Rightarrow y = -4$$

$$\therefore K(-4\ , -4)$$

إذا كانت: $F(5{,}13), E(3{,}11), D(-2, -7)$ فأوجد :

مركبات كل من المتجهات التالية: $< \overrightarrow{DE} >\ , < \overrightarrow{ED} >\ , < \overrightarrow{EF} >$

$$\langle\overrightarrow{EF}\rangle = \langle x_F - x_E\ , y_F - y_E\rangle = \langle 5 - 3\ , 13 - 11\rangle = \langle 2\ , 2\rangle$$

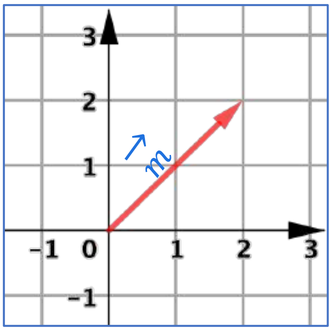
$$\langle\overrightarrow{ED}\rangle = \langle x_D - x_E\ , y_D - y_E\rangle = \langle -2 - 3\ , -7 - 11\rangle = \langle -5\ , -18\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{DE}\rangle = \langle x_E - x_D\ , y_E - y_D\rangle = \langle 3 - (-2), 11 - (-7)\rangle = \langle 5\ , 18\rangle$$

لكل من المتجهات التالية ارسم متجه الموضع ثم أوجد معيار المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

$\vec{m} =< 2,2 >$

$\|\vec{m}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ units



$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| \Rightarrow$ زاوية الاسناد α

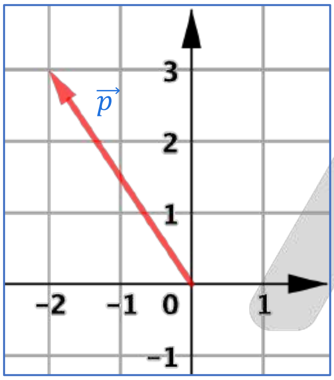
$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{2}{2}\right| = \tan^{-1}(1) = 45°$

$\because x > 0 , y > 0 \Rightarrow$ θ في الربع 1

$\theta = \alpha = 45°$

$\vec{p} =< -2,3 >$

$\|\vec{p}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ units



$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| \Rightarrow$ زاوية الاسناد α

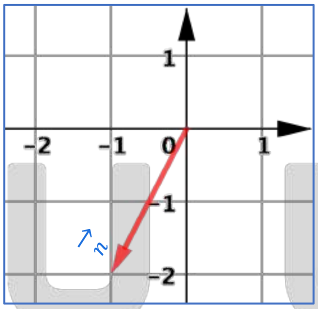
$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{3}{-2}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56.31°$

$\because x < 0 , y > 0 \Rightarrow$ θ في الربع 2

$\theta = 180° - \propto = 180° - 56.31° \approx 123.69°$

$\vec{n} =< -1, -2 >$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ units



$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| \Rightarrow$ زاوية الاسناد α

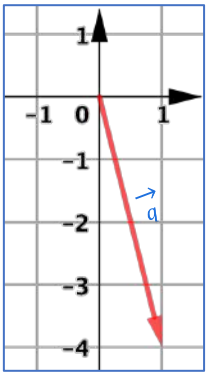
$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-2}{-1}\right| = \tan^{-1}(2) \approx 63.43°$

$x < 0, \ y < 0 \Rightarrow$ θ في الربع 3

$\theta = 180° + \propto \approx 180° + 63.43° \approx 243.43°$

$\vec{q} =< 1, -4 >$

$\|\vec{q}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$ units



$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| \Rightarrow$ زاوية الاسناد α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-4}{1}\right| = \tan^{-1}(4) \approx 75.96°$

$x > 0, \ y < 0 \Rightarrow$ θ في الربع 4

$\theta = 360° - \propto \approx 360° - 75.96° \approx 284.04°$

متجه الوحدة

- المتجه $\vec{U} =< x,y >$ هو متجه وحدة إذا كان معياره يساوي الواحد أي:
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

إذا كان $\vec{u} =< \frac{2}{\sqrt{5}},y >$ فأوجد قيمة y بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

$\because$ $\vec{u}$ متجه وحدة

$$\therefore \|\vec{u}\| = 1$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + y^2} = 1$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{4}{5} + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore y = \mp\sqrt{\frac{1}{5}} = \mp\frac{\sqrt{5}}{5}$$

إذا كان $\vec{v} =< x,\frac{12}{13} >$ فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\vec{v}$ متجه وحدة.

$\because$ $\vec{v}$ متجه وحدة

$$\therefore \|\vec{v}\| = 1$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$\sqrt{x^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = 1$$

$$x^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{144}{169} = 1$$

$$x^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$$

$$\therefore x = \mp\sqrt{\frac{25}{169}} = \mp\frac{5}{13}$$

تساوي متجهين

ليكن: $\vec{A} =< x_A, y_A >, \vec{B} =< x_B, y_B >$

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow x_A = x_B\ , y_A = y_B$$

إذا كانت $A(0,1), B(1,3), C(3,6), D(4,8)$ في المستوي الإحداثي فأثبت أن: $< \overrightarrow{AB} >=< \overrightarrow{CD} >$

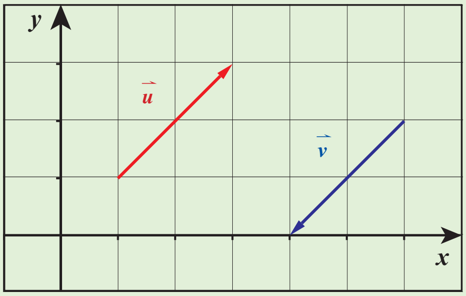
$$\left.\begin{aligned}\langle\overrightarrow{AB}\rangle &= \langle x_B - x_A, y_B - y_A\rangle = \langle 1-0\ ,3-1\rangle = \langle 1\ ,2\rangle\\ \langle\overrightarrow{CD}\rangle &= \langle x_D - x_C, y_D - y_C\rangle = \langle 4-3\ ,8-6\rangle = \langle 1\ ,2\rangle\end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle\overrightarrow{CD}\rangle$$

ليكن المتجهان $\vec{A} =< -2x + 3,4y - 1 >, \vec{B} =< -1,3 >$ حيث x,y عددان حقيقيان . أوجد قيمتي x,y اللتين تحققان $\vec{A} = \vec{B}$

$$\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 3 = -1 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2 \\ 4y - 1 = 3 \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore x = 2\ , y = 1$$

- إذا كان $\vec{u} =< a,b >$ فإن المتجه
- $\vec{v} =< -a, - b >$ هو المتجه المعاكس لـ$\vec{u}$
- $< \overrightarrow{AB} >$ هو المتجه المعاكس لـ $< \overrightarrow{BA} >$
- $< \overrightarrow{AB} > =-< \overrightarrow{BA} >$



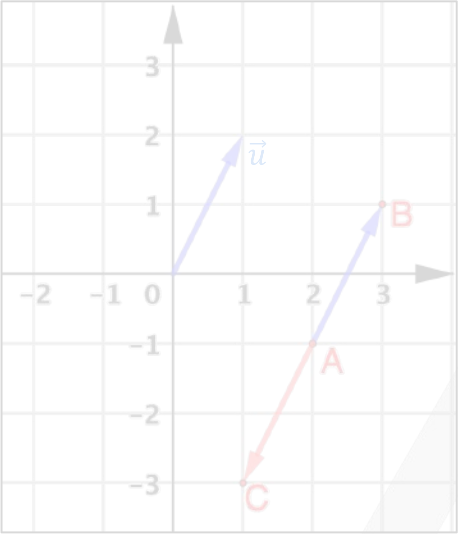
ارسم متجه الموضع للمتجه $\vec{u}$ حيث مركباته $.< 1,2 >$

من النقطة $A(2, - 1)$ ارسم متجهاً مساوياً للمتجه $\vec{u}$ ومتجهاً معاكساً للمتجه $\vec{u}$ واكتب مركباتها.

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \vec{u} = \langle 1,2\rangle$$

معلق

$$\langle\overrightarrow{AC}\rangle -\vec{u} = \langle -1,-2\rangle$$



ضرب متجه بعدد حقيقي:

- ليكن $\vec{u} =< x,y >$ متجه غير صفري و$k \neq 0$ فإن $k.\vec{u} = < kx ,ky >$
- إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $k = 0$ فإن: $k.\vec{u} = \vec{0}$ والعكس صحيح
- إذا كان $k > 0$ فإن المتجهين $\vec{u}$ و $k.\vec{u}$ في الاتجاه نفسه
- إذا كان $k < 0$ فإن $k.\vec{u}$ في الاتجاه المعاكس للمتجه $\vec{u}$
- $\|k\vec{u}\| = |k| \, \|\vec{u}\|$

- يكون المتجهان $< \overrightarrow{CD} > , < \overrightarrow{AB} >$ غير الصفريين في نفس الاتجاه ⇔ يوجد k عدد حقيقي موجب يحقق $< \overrightarrow{AB} > = k < \overrightarrow{CD} >$
- يكون المتجهان $< \overrightarrow{CD} > , < \overrightarrow{AB} >$ غير الصفريين في اتجاهين متعاكسين ⇔ يوجد k عدد حقيقي سالب يحقق $< \overrightarrow{AB} > = k < \overrightarrow{CD} >$
- تكون النقاط A,B,C على استقامة واحدة ⇔ يوجد k عدد حقيقي غير صفري يحقق $< \overrightarrow{AB} > = k < \overrightarrow{AC} >$

إذا كان $\vec{B} = < 3, -2 >$ فأوجد:

- $3\vec{B} \quad = 3\langle 3,-2\rangle = \langle 9,-6\rangle$
- $-5\vec{B} \quad = -5\langle 3,-2\rangle = \langle -15,10\rangle$
- $\frac{3}{2}\vec{B} \quad = \frac{3}{2}\langle 3,-2\rangle = \langle \frac{9}{2},-3\rangle$

- باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط
$K(0,-1), L(2,3), M(-2,-5)$ على استقامة واحدة.

$\langle\overrightarrow{KL}\rangle = \langle x_L - x_K\,,\ y_L - y_K\rangle = \langle 2\,,4\rangle$

$\langle\overrightarrow{LM}\rangle = \langle x_M - x_L,\ y_M - y_L\rangle = \langle -4,-8\rangle$

$\Big\}\ \langle\overrightarrow{LM}\rangle = -2\langle\overrightarrow{KL}\rangle$

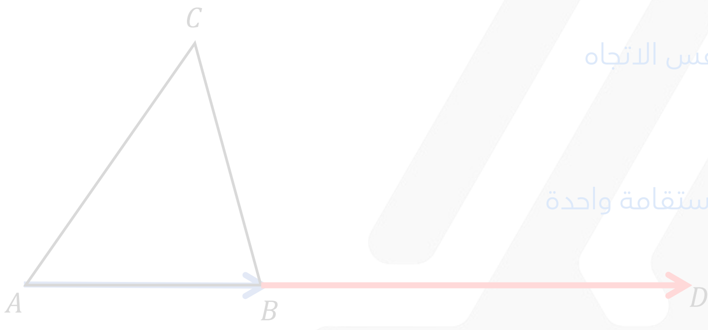
بالتالي: K,L,M على استقامة واحدة

- ABC مثلث, ارسم $< \overrightarrow{AD} >$ بحيث $< \overrightarrow{AB} > 3 = < \overrightarrow{AD} >$,

$\because$ 3 عدد موجب $\qquad \therefore$ $\langle\overrightarrow{AD}\rangle,\langle\overrightarrow{AB}\rangle$ لهما نفس الاتجاه

$\|\overrightarrow{AD}\| = 3\|\overrightarrow{AB}\|$

$\because$ A نقطة مشتركة $\qquad \therefore$ A,B,D على استقامة واحدة



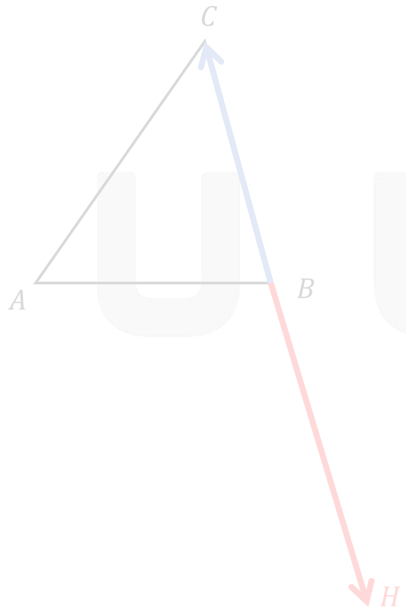
- ثم ارسم $< \overrightarrow{BH} >$ بحيث $< \overrightarrow{BC} > -\frac{3}{2} = < \overrightarrow{BH} >$,

$\because \frac{-3}{2} < 0 \qquad \therefore$ $\langle\overrightarrow{BH}\rangle,\langle\overrightarrow{BC}\rangle$ متعاكسين في الاتجاه

$\|\overrightarrow{BH}\| = \frac{3}{2}\|\overrightarrow{BC}\|$

$\because$ B نقطة مشتركة

$\therefore$ B,H,C على استقامة واحدة



المتجه في المستوي-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

لنأخذ في المستوي الإحداثي النقاط التالية: $A(2\,,1), B(-3\,,0), C(3\,,-4), D(x\,,y)$

1. الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضوع لـ $\overrightarrow{BA}$: هو $(-5\,,-1)$ ⓐ [✓ ⓑ]
2. مركبات $\overrightarrow{BC}$ هي $\langle 6,4\rangle$ ⓐ [✓ ⓑ]
3. المثلث ABC هو متطابق الضلعين [✓ ⓐ] ⓑ
4. إذا كان $\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle\overrightarrow{CD}\rangle$ فإن: $x = -2\,, y = -5$ [✓ ⓐ] ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. في المستوي الإحداثي إذا كان $\vec{u} = \langle -2,2\rangle$
فإن قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{u}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي:

ⓐ 45°
ⓑ −45°
[✓ ⓒ] 135°
ⓓ 225°

6. لنأخذ في المستوي الإحداثي $\vec{u} = \left\langle \frac{12}{13}\,, y\right\rangle$ إذا كان $\vec{u}$ متجه وحدة فإن y يساوي:

ⓐ $\frac{1}{13}$
ⓑ $\frac{\sqrt{13}}{13}$
ⓒ $\frac{5}{13}$
[✓ ⓓ] $\pm\frac{5}{13}$

7. لتكن في المستوي الإحداثي النقاط: $A(1\,,3), B(3\,,2), C(0\,,-1), D(-4\,,1)$ فيكون:

ⓐ $\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle\overrightarrow{CD}\rangle$
ⓑ $\langle\overrightarrow{AB}\rangle = -\langle\overrightarrow{CD}\rangle$
[✓ ⓒ] $\langle\overrightarrow{CD}\rangle = -2\langle\overrightarrow{AB}\rangle$
ⓓ $\langle\overrightarrow{AB}\rangle = -2\langle\overrightarrow{CD}\rangle$

8. لنأخذ في المستوي الإحداثي النقاط: $E(2\,,4), F(-1\,,-5), G(x\,,y)$ إذا كان: $\langle\overrightarrow{EF}\rangle = \langle\overrightarrow{EG}\rangle$ فإن $(x\,,y)$
يساوي:

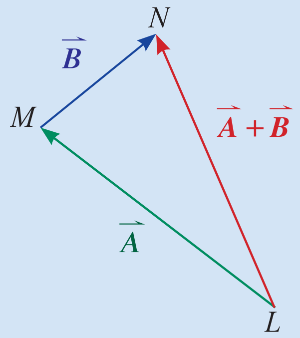
[✓ ⓐ] $(-1\,,-5)$
ⓑ $(-5\,,-13)$
ⓒ $(5\,,13)$
ⓓ $(1\,,5)$

جمع المتجهات وطرحها

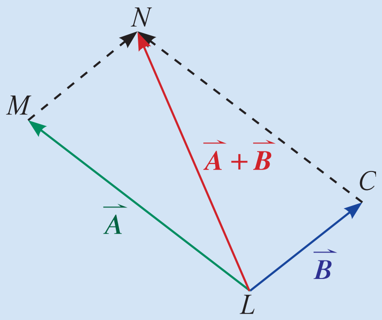
جمع المتجهات هندسياً:

علاقة شال

$< \overrightarrow{LN} > = < \overrightarrow{LM} > + < \overrightarrow{MN} >$



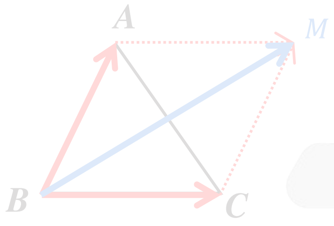
إكمال متوازي الأضلاع



في المثلث: ABC, عيّن :

- M حيث $< \overrightarrow{BM} > = < \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{BC} >$,

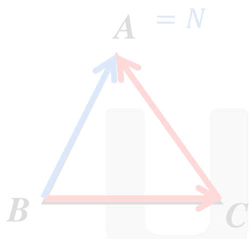
للمتجهين نقطة بداية مشتركة B نستخدم إكمال متوازي الأضلاع



- N حيث $< \overrightarrow{BN} > = < \overrightarrow{BC} > + < \overrightarrow{CA} >$,

علاقة شال: $\langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle = \langle\overrightarrow{BA}\rangle = \langle\overrightarrow{BN}\rangle$

$\therefore A = N$



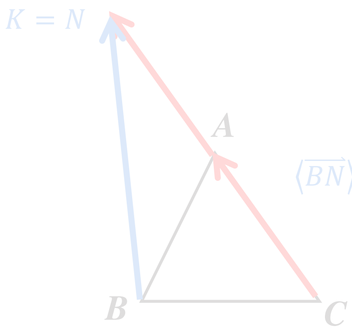
معلق

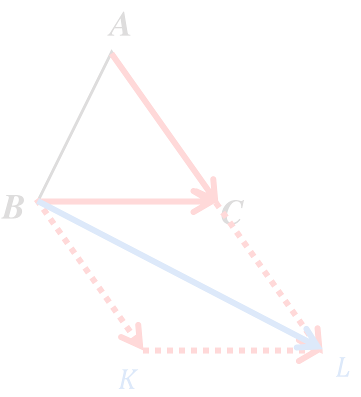
- في المثلث: ABC, عين N بحيث $< \overrightarrow{BN} > = < \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{CA} >$

نرسم $\langle\overrightarrow{AK}\rangle$ بحيث يكون $\langle\overrightarrow{CA}\rangle = \langle\overrightarrow{AK}\rangle$

علاقة شال $\langle\overrightarrow{BN}\rangle = \langle\overrightarrow{BA}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle = \langle\overrightarrow{BA}\rangle + \langle\overrightarrow{AK}\rangle = \langle\overrightarrow{BK}\rangle$

$\therefore N = K$





في المثلث: ABC, عين L بحيث $<\overrightarrow{BL}> = <\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{BC}>$

نرسم $<\overrightarrow{BK}>$ بحيث يكون: $<\overrightarrow{AC}> = <\overrightarrow{BK}>$

$<\overrightarrow{BL}> = <\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{BC}>$

$= <\overrightarrow{BK}> + <\overrightarrow{BC}> = <\overrightarrow{BL}>$

لهما نفس نقطة البداية ، نستخدم إكمال متوازي الأضلاع

خواص جمع المتجهات

الإبدال	$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
المحايد	$\vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$
التجميع	$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$
المعكوس الجمعي	$\vec{A}+(-\vec{A})=(-\vec{A})+\vec{A}=\vec{0}$
الحذف	$\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{C}\Rightarrow\vec{A}=\vec{B}$
التوزيع مع عدد حقيقي غير الصفر	$k(\vec{A}+\vec{B})=k\vec{A}+k\vec{B}$

$ABCD$ مضلع. أوجد:

$<\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{CD}> + <\overrightarrow{BC}>$

خاصية الإبدال	$=\langle\overrightarrow{AB}\rangle+\langle\overrightarrow{BC}\rangle+\langle\overrightarrow{CD}\rangle$
علاقة شال	$=\langle\overrightarrow{AD}\rangle$

$<\overrightarrow{AD}> + <\overrightarrow{CA}> + <\overrightarrow{BC}> + <\overrightarrow{DB}>$

خاصية الإبدال	$=\langle\overrightarrow{AD}\rangle+(\langle\overrightarrow{BC}\rangle+\langle\overrightarrow{CA}\rangle)+\langle\overrightarrow{DB}\rangle$
علاقة شال	$=\langle\overrightarrow{AD}\rangle+\langle\overrightarrow{BA}\rangle+\langle\overrightarrow{DB}\rangle$
خاصية الإبدال	$=\langle\overrightarrow{AD}\rangle+\langle\overrightarrow{DB}\rangle+\langle\overrightarrow{BA}\rangle$
علاقة شال	$=\langle\overrightarrow{AA}\rangle=\vec{0}$

إذا كان $\vec{B} =< -7,5 >$, $\vec{A} =< 4, -2 >$ فأوجد.

$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ $\quad = \langle 4,-2\rangle + \langle -7,5\rangle = \langle -3,3\rangle$

$\overrightarrow{3A} + \overrightarrow{5B}$ $\quad = 3\langle 4,-2\rangle + 5\langle -7,5\rangle = \langle 12,-6\rangle + \langle -35,25\rangle = \langle -23,19\rangle$

إذا كان $\vec{A} =< 2,3 > ,\vec{B} =< -1,5 >$ فأوجد.

$\vec{A} + \vec{B} \quad = \langle 2,3\rangle + \langle -1,5\rangle = \langle 1,8\rangle$

$\overrightarrow{2A} + \overrightarrow{3B} \quad = 2\langle 2,3\rangle + 3\langle -1,5\rangle = \langle 4,6\rangle + \langle -3,15\rangle = \langle 1,21\rangle$

طرح المتجهات

$ABCD$ مضلع في المستوي .أوجد:

$< \overrightarrow{AB} >+< \overrightarrow{CD} > -< \overrightarrow{AD} > -< \overrightarrow{CB} >$

$= \langle\overrightarrow{AB}\rangle + (\langle\overrightarrow{CD}\rangle + \langle\overrightarrow{DA}\rangle) + \langle\overrightarrow{BC}\rangle$ علاقة شال

$= \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle$ خاصية الإبدال

$= \langle\overrightarrow{CA}\rangle + \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle = \langle\overrightarrow{CC}\rangle = \vec{0}$ علاقة شال

$< \overrightarrow{AB} > -< \overrightarrow{AC} > +< \overrightarrow{BC} > +< \overrightarrow{AD} >$

$= \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle$ خاصية الإبدال

$= \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{CA}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle = \langle\overrightarrow{AD}\rangle$ علاقة شال

ABC مثلث. أثبت أن:

- $< \overrightarrow{AB} > -< \overrightarrow{AC} > =< \overrightarrow{CB} >$

$< \overrightarrow{AB} > -< \overrightarrow{AC} > =< \overrightarrow{AB} > +< \overrightarrow{CA} >$ طرح المتجهات

$=< \overrightarrow{CA} > +< \overrightarrow{AB} > =< \overrightarrow{CB} >$ علاقة شال

إذا كان $\vec{A} =< -3,0 > , \vec{B} =< 5,-9 >$ فأوجد:

$\vec{A} - \vec{B} \quad = \langle -3,0\rangle - \langle 5,-9\rangle = \langle -8,9\rangle$

$-3\vec{A} + 4\vec{B} \quad = -3\langle -3,0\rangle + 4\langle 5,-9\rangle = \langle 9,0\rangle + \langle 20,-36\rangle = \langle 29,-36\rangle$

إذا كان $\vec{A} =< 5,12 > , \vec{B} =< 11,7 >$ فأوجد:

$\vec{A} - \vec{B} \quad = \langle 5,12\rangle - \langle 11,7\rangle = \langle 5-11, 12-7\rangle = \langle -6,5\rangle$

$4\vec{A} - 6\vec{B} \quad = 4\langle 5,12\rangle - 6\langle 11,7\rangle = \langle 20,48\rangle - \langle 66,42\rangle = \langle -46,6\rangle$

لتكن النقاط: $A(3,4), B(-2,5), C(-4,-1)$ اكتب كلا من المتجهات $< \overrightarrow{OA} > , < \overrightarrow{OB} > , < \overrightarrow{OC} >$: بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i}, \vec{j}$

$\langle\overrightarrow{OA}\rangle = \langle 3,4\rangle = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

$\langle\overrightarrow{OB}\rangle = \langle -2,5\rangle = -2\vec{i} + 5\vec{j}$

$\langle\overrightarrow{OC}\rangle = \langle -4,-1\rangle = -4\vec{i} - \vec{j}$

جمع المتجهات وطرحها-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

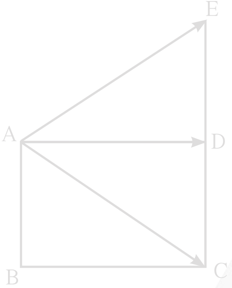
1. إذا كان $\langle\overrightarrow{AC}\rangle = \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{AB}\rangle$ فإن: $AB + BC = AC$ — ⓐ [✓ ⓑ]

2. $\langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{BA}\rangle + \langle\overrightarrow{CB}\rangle = \vec{0}$ — [✓ ⓐ] ⓑ

3. $ABCF$ متوازي أضلاع حيث: $\overrightarrow{BA} = \langle -2,3\rangle , \overrightarrow{BF} = \langle 1,4\rangle$ $\therefore \langle\overrightarrow{BC}\rangle = \langle 3,1\rangle$ — [✓ ⓐ] ⓑ

⚠ معلق

4. في المستطيل $ABCD$ $\langle\overrightarrow{AE}\rangle = \langle\overrightarrow{BD}\rangle$ إذا $\langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle = \langle\overrightarrow{AE}\rangle$ — ⓐ [✓ ⓑ]



5. في المثلث ABC : $\langle\overrightarrow{AB}\rangle - \langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle - \langle\overrightarrow{BA}\rangle = \langle\overrightarrow{AB}\rangle$ — [✓ ⓐ] ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. إذا كان $\vec{L} = \langle\overrightarrow{AC}\rangle + 2\langle\overrightarrow{AB}\rangle - \langle\overrightarrow{BC}\rangle$ فإن:

ⓐ $\vec{L} = \frac{1}{2}\langle\overrightarrow{AB}\rangle$ ⓑ $\vec{L} = -\frac{1}{2}\langle\overrightarrow{AB}\rangle$ [✓ ⓒ] $\vec{L} = 3\langle\overrightarrow{AB}\rangle$ ⓓ $\vec{L} = -3\langle\overrightarrow{AB}\rangle$

7. إذا كان $\langle\overrightarrow{AM}\rangle = 2(3\vec{\imath} - \vec{\jmath}\,) + 3(-2\vec{\imath}\,) - 2\vec{\jmath}$ فإن $\langle\overrightarrow{AM}\rangle$ يساوي:

ⓐ $2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ ⓑ $3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ [✓ ⓒ] $-4\vec{\jmath}$ ⓓ $6\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}$

8. $ABCD$ متوازي أضلاع حيث: $A(-2\,,1), B(0\,,-2), C(3\,,-1)$. إذاً إحداثيات D هي:

ⓐ $(2\,,2)$ ⓑ $(-1\,,2)$ [✓ ⓒ] $(1\,,2)$ ⓓ $(1\,,-2)$

9. $\vec{U} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\,, \vec{V} = x\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ هما متجهان متوازيان. قيمة x هي:

[✓ ⓐ] 2 ⓑ -2 ⓒ 8 ⓓ -8

اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة

من الشكل :

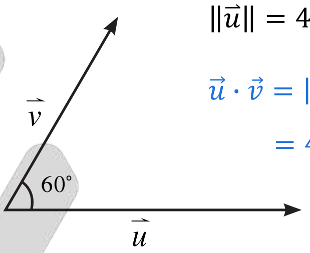
القائمة (1)		القائمة (2)
.10 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$	b	ⓐ $\overrightarrow{BD}$
.11 $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=$	c	ⓑ $\overrightarrow{AC}$
		ⓒ $\vec{O}$
		ⓓ $\overrightarrow{DB}$

⚠ معلق

القائمة (1)		القائمة (2)
.12 $\overrightarrow{EA}=$	a	ⓐ $2\overrightarrow{BA}$
.12 $2\ \overrightarrow{OC}=$	c	ⓑ $2\overrightarrow{BE}$
		ⓒ $-\overrightarrow{CA}$
		ⓓ $\overrightarrow{CA}$

الضرب الداخلي

- $\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\times\|\vec{B}\|\times\cos(\vec{A},\vec{B})$, $0° \le m(\vec{A},\vec{B}) \le 180°$
- إذا كان $\vec{A} =< x_1,y_1 >$,$\vec{B} =< x_2,y_2 >$
- بالتالي: $\vec{A}.\vec{B} = x_1x_2 + y_1y_2$



$\|\vec{v}\| = 3units$

$\|\vec{u}\| = 4units$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$

$= 4\times3\times\cos60° = 6$

إذا كان $\vec{v} =< 2,2 >$ ، $\vec{u} =< 0,2 >$ فأوجد $\vec{u}\cdot\vec{v}$

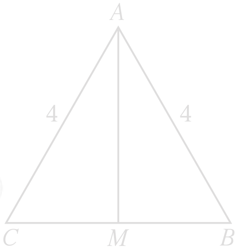
$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0\times2 + 2\times2 = 4$

إذا كان $\vec{v} =< 3,3 >$ ، $\vec{u} =< 3,0 >$ فأوجد $\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 = 3\times3 + 0\times3 = 9$

ABC مثلث متطابق الأضلاع. M منتصف $\overline{BC}$ أوجد:

⚠ معلق



- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AC}\|\cdot\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = 4\times4\times\cos60° = 8$
- $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = \|\overrightarrow{MB}\|\cdot\|\overrightarrow{MC}\|\cdot\cos(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) = 2\times2\times\cos180° = -4$
- $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CM}\|\cdot\|\overrightarrow{CB}\|\cdot\cos(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{CB}) = 2\times4\times\cos0° = 8$

التعامد:

- $\vec{A}\perp\vec{B} \Leftrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ حيث $\vec{A}\ne\vec{0}\,,\,\vec{B}\ne\vec{0}$

إذا كان $\vec{B} =< x,-2 >$ ، $\vec{A} =< 3,-1 >$ وكان $\vec{A}\perp\vec{B}$ فأوجد قيمة x

$\because \vec{A}\perp\vec{B} \quad \therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow x_1\,x_2 + y_1\,y_2 = 0$

$3x + (-1)\cdot(-2) = 0$

$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

إذا كان $\vec{B} =< 1,y >$ ، $\vec{A} =< -2,3 >$ وكان $\vec{A}\perp\vec{B}$ فأوجد قيمة y

$\because \vec{A}\perp\vec{B} \quad \therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow x_1\,x_2 + y_1\,y_2 = 0$

$-2\times1 + 3y = 0$

$3y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

إذا كانت النقاط $A(6,-1), B(3,2), C(2,1)$

a) اكتب كلاً من المتجهين $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{i}, \vec{j}$

$$\langle\overrightarrow{BA}\rangle = \langle x_A - x_B , y_A - y_B\rangle = \langle 3 , -3\rangle = 3\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\langle\overrightarrow{BC}\rangle = \langle x_C - x_B , y_C - y_B\rangle = \langle -1 , -1\rangle = -\vec{i} - \vec{j}$$

b) أوجد قيمة $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = x_1x_2 + y_1y_2 = 3(-1) + (-3)(-1) = 0$$

c) أثبت أن المثلث ABC *قائم في* $\hat{B}$

$\because \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \therefore \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ المثلث قائم في $\hat{B}$

التوازي:

- $\vec{A} \neq \vec{0}, \vec{B} \neq \vec{0}$ حيث $\vec{A} \,//\, \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} = k\vec{B}$

ملاحظة: $\vec{A} \,//\, \vec{B} \Leftrightarrow x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

حيث: $\vec{A} =< x_1, y_1 > \ , \vec{B} =< x_2 , y_2 >$

Q أثبت أن : $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ حيث $\vec{A} =< 3, -2 > , \vec{B} =< 6, -4 >$

طريقة 1

$$\frac{y_B}{y_A} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad \frac{x_B}{x_A} = \frac{6}{3} = 2$$

$\therefore \vec{A} \,//\, \vec{B} \qquad \because \vec{B} = 2\vec{A}$

طريقة 2

$$x_1\, y_2 - x_2\, y_1 = 3(-4) - 6(-2) = 0$$

$\therefore \vec{A} \,//\, \vec{B}$

Q إذا كان $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ حيث $\vec{A} =< \frac{7}{3}, \frac{2}{3} > , \vec{B} =< x, \frac{4}{5} >$, فأوجد x

$\because \vec{A} \,//\, \vec{B} \qquad \therefore x_1y_2 - x_2y_1 = 0 \quad \Rightarrow \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{5} - x \cdot \frac{2}{3} = 0$

$$\Rightarrow \frac{28}{15} = \frac{2}{3}x \Rightarrow x = \frac{28}{15} \times \frac{3}{2} = \frac{14}{5}$$

Q إذا كان $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ حيث $\vec{A} =< 6, -8 > , \vec{B} =< 2, y >$ فأوجد y

$\because \vec{A} \,//\, \vec{B} \qquad \therefore x_1y_2 - x_2y_1 = 0 \quad \Rightarrow 6y - 2(-8) = 0$

$$\Rightarrow 6y + 16 = 0 \Rightarrow y = \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3}$$

خواص الضرب الداخلي: بفرض $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ثلاثة متجهات غير صفرية في المستوي ، k عدد حقيقي

- الإبدال: $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
- التجميع: $\vec{A}.(k\vec{B}) = (k\vec{A}).\vec{B} = k(\vec{A}.\vec{B})$
- االتوزيع: $\vec{A}.(\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} \pm \vec{A}.\vec{C}$

Q $\vec{A}, \vec{B}$ متجهان في المستوى , حيث $\|\vec{A}\| = 3 , \|\vec{B}\| = 4 , \vec{A} \cdot \vec{B} = 5$

أوجد قيمة $(3\vec{A} - 2\vec{B}) \cdot (-\vec{A} + 3\vec{B})$

$$(3\vec{A} - 2\vec{B}) \cdot (-\vec{A} + 3\vec{B}) = -3\vec{A} \cdot \vec{A} + 9\vec{A} \cdot \vec{B} + 2\vec{B} \cdot \vec{A} - 6\vec{B} \cdot \vec{B}$$

$$= -3\|\vec{A}\|^2 + 11\vec{A} \cdot \vec{B} - 6\|\vec{B}\|^2 = -3(3)^2 + 11(5) - 6(4)^2 = -68$$

قياس الزاوية بين متجهين

قانون

إذا كان $\overrightarrow{A}\,,\overrightarrow{B}$ متجهين وكان $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}\,,\ \overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$ فإن:

$$\cos\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\|\cdot\|\overrightarrow{B}\|}\ ,0^\circ \leq m\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) \leq 180^\circ$$

إذا كان $\|\overrightarrow{A}\| = 3, \|\overrightarrow{B}\| = 2, \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = -3\sqrt{3}$

فأوجد قياس الزاوية $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$

$$\cos\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\|\cdot\|\overrightarrow{B}\|}\ ,0^\circ \leq m\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) \leq 180^\circ$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{3\times 2} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore m\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ$$

أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين:

$\overrightarrow{A} =< 6{,}3 >\ ,\overrightarrow{B} =< 3, -1 >$

$$\cos\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\|\cdot\|\overrightarrow{B}\|}\ ,0^\circ \leq m\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) \leq 180^\circ$$

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$= 6\times 3 + 3\times(-1) = 15$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \cos\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) = \frac{15}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore m\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

إذا كان $\|\overrightarrow{A}\| = 5, \|\overrightarrow{B}\| = 6, \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = 15$

فأوجد قياس الزاوية $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$

$$\cos\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\|\cdot\|\overrightarrow{B}\|}\ ,\ 0^\circ \leq m\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) \leq 180^\circ$$

$$= \frac{15}{5\times 6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين:

$\overrightarrow{A} =< 2{,}2\sqrt{3} >\ ,\overrightarrow{B} < -4{,}4\sqrt{3} >$

$$\cos\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\|\cdot\|\overrightarrow{B}\|}\ ,0^\circ \leq m\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) \leq 180^\circ$$

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$= 2(-4) + 2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3} = 16$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{(-4)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 8$$

$$\therefore \cos\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) = \frac{16}{4\times 8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m\left(\overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

الضرب الداخلي-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ، فإن: $\vec{u}\perp\vec{v}$ ⓐ [✓ ⓑ]

2. إذا كان $\vec{u}\perp\vec{v}$, $\vec{v}=\langle 5,1\rangle$, $\vec{u}=\langle -2,x\rangle$ فإن $x=-10$ ⓐ [✓ ⓑ]

3. إذا كان $\vec{v}\cdot\vec{w}=3$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=-5$ فإن $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w}=-8$ [✓ ⓐ] ⓑ

4. إذا كانت $A(-1\,,2), B(2\,,3), C(-4\,,5)$ فإن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$ [✓ ⓐ] ⓑ

5. إذا كانت $L(-3\,,4), M(0\,,5)$ ، فإن $\|\overrightarrow{LM}\|=10$ ⓐ [✓ ⓑ]

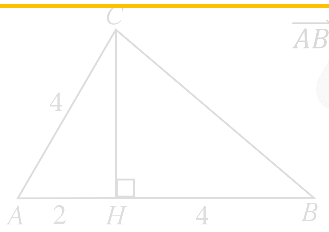
6. $\vec{A}\,,\vec{B}$ متجهان في المستوى حيث $\vec{A}=\langle 2\,,-3\rangle\,,\vec{B}=\langle 1\,,0\rangle$ فإن : $\cos(\vec{A}\,,\vec{B})=2\frac{\sqrt{13}}{13}$ [✓ ⓐ] ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

7. إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, $\vec{v}=\langle -1\,,m\rangle$, $\vec{u}=\langle 2\,,-2\rangle$ ، فإن m تساوي:

[✓ ⓐ] $-\frac{5}{2}$ ⓑ $\frac{5}{2}$ ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ $-\frac{1}{2}$

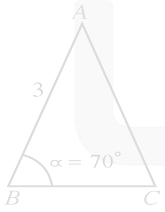
8. في مثلث ABC , H هو المسقط العمودي لـ C على $\overrightarrow{AB}$ بالتالي: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$



ⓐ -6 [✓ ⓑ] 12

ⓒ -12 ⓓ 6

9. في الشكل المقابل $AB=AC=3cm\,,m(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA})=70^\circ$
يساوي تقريباً: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

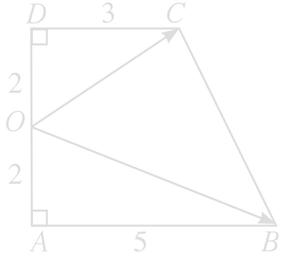


⚠ معلق

ⓐ 2.3 [✓ ⓑ] 6.89

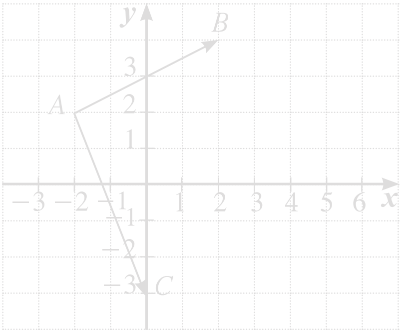
ⓒ 3 ⓓ -2.3

10. ABCD شبه منحرف قائم حيث:
$AB=5cm$, $AO=2cm$, $OD=2cm$, $CD=3cm$
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ يساوي:



[✓ ⓐ] 11 ⓑ -11

ⓒ 12 ⓓ -12

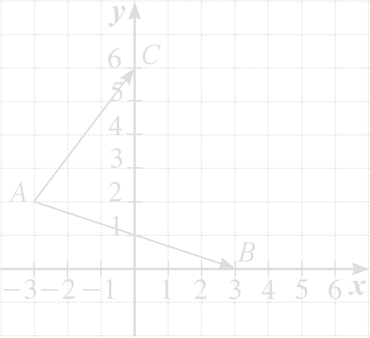


.11 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$

ⓐ 2 [✓ ⓑ] -2

ⓒ 18 ⓓ 0

⚠ معلق



.12في الشكل المقابل: $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) =$

ⓐ 0 ⓑ $\frac{3}{5}$

ⓒ $\frac{1}{2}$ [✓ ⓓ] $\frac{1}{\sqrt{10}}$

.13إذا كان: $\vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{v} = \langle 2,3 \rangle$, $\vec{u} = \langle -5,m \rangle$ فإن m تساوي:

ⓓ $\frac{15}{2}$ ⓒ $\frac{-10}{3}$ ⓑ $\frac{-10}{3}$ [✓ ⓐ] $\frac{10}{3}$

.14 إذا كان $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -2$ فإن $m(\overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC})$ **لا يمكن** أن يساوي:

ⓓ 50° [✓ ⓒ] 122° ⓑ 28° ⓐ 60°

المجتمع الإحصائي والمعاينة

المجتمع الإحصائي: هو مجموعة كل المفردات قيد الدراسة، يمكن أن يكون منتهياً أو غير منتهٍ

في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منتهياً أو غير منتهٍ) ووحدة الدراسة

طلاب الصف الحادي عشر في مدارس الكويت	مجتمع منتهٍ / طالب
الطيور على سطح الأرض	مجتمع غير منتهٍ / طير
لاعبو فريق كرة السلة في دولة الكويت.	مجتمع منتهٍ / لاعب
مجتمع الأسماك في مياه الخليج العربي.	مجتمع غير منتهٍ / سمكة

المتغير: هو الصفة محور الدراسة في مجتمع إحصائي معين

أساليب جمع البيانات:

- **الحصر الشامل:** جمع بيانات جميع مفردات المجتمع، من إيجابيات الحصر الشامل هو دقة النتائج ، ومن سلبياته هو الحاجة إلى الوقت والجهد الكبيرين ولا يمكن إجراؤه في المجتمعات غير المنتهية
- **المعاينة:** اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدراسة

هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟

دراسة كمية الدهون الموجودة في الدم.	لا يمكن
دراسة نسبة عدد الطلاب الذين لون عيونهم أزرق إلى عدد طلاب صفك.	يمكن

أنواع البيانات:		**أمثلة:**
بيانات كيفية	اسمية	لون العيون - أنواع السيارات ...
	مرتبة	الترتيب العلمي - ترتيب السباق ...
بيانات كمية	متقطعة (منفصلة)	عدد طلاب الفصل- عدد أهداف مباراة
	مستمرة (متصلة)	الطول- الوزن- درجات الحرارة

حدد نوع البيانات في كل مما يأتي:

▪ عدد أهداف الدوري العام لكرة القدم في أحد المواسم.	كمية متقطعة
▪ ترتيب الدول بحسب الميداليات في إحدى دورات الألعاب	كيفية مرتبة
▪ درجات الحرارة في شهر سبتمبر في مطار الكويت	كمية مستمرة
▪ لون سيارات معلمي المدرسة	كيفية اسمية
▪ عدد أعضاء فريق كرة القدم.	كمية متقطعة
▪ الوظيفة (ضابط، محاسب، محام، تاجر،مدرس، ...)	كيفية اسمية
▪ أطول قامات طلاب الصف الحادي عشر.	كمية مستمرة
▪ تقديرات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية في جامعة الكويت	كيفية مرتبة

المجتمع الإحصائي والمعاينة-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. المواليد في العالم سنة 2010 عبارة عن [illegible] ⚠ معلق — ⓑ ⓐ

2. وحدة الدراسة لعدد زوار مركز علمي في يوم واحد هي أي زائر — ⓑ [✓ a]

3. عند ترتيب الأشياء نستخدم بيانات كيفية مرتبة — ⓑ [✓ a]

4. يمكن استخدام الحصر الشامل قي دراسة أنواع السمك الموجودة في أحد المحيطات — [✓ b] ⓐ

5. عدد الصفحات في كتاب ما هو بيانات كم [illegible] ⚠ معلق — ⓑ ⓐ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. البيانات الكيفية تكون:

[✓ a] اسمية أو مرتبة
ⓑ مرتبة فقط
ⓒ متقطعة
ⓓ اسمية فقط

7. البيانات المستمرة هي بيانات:

ⓐ اسمية
ⓑ مرتبة
[✓ c] كمية
ⓓ كيفية

8. عند إجراء تحاليل الدم نستخدم:

ⓐ الحصر الشامل
[✓ b] المعاينة
ⓒ الحصر الشامل والمعاينة
ⓓ ليس أياً مما سبق

9. البيانات الكمية تكون:

ⓐ اسمية أو مرتبة
ⓑ مرتبة فقط
[✓ c] متقطعة أو مستمرة
ⓓ مستمرة فقط

10.عدد المشاهدين في مباراة كرة قدم هو عبارة عن بيانات:

ⓐ كيفية اسمية

ⓑ كيفية مرتبة

[✓ ⓒ كمية متقطعة]

ⓓ كمية مستمرة

تدرب و تفوق

اختبارات الكترونية ذكية

الوحدة 6 / الإحصاء

العينات

العينة العشوائية البسيطة:

- إذا تضمن المجتمع الإحصائي عدد nمن المفردات المتجانسة وأردنا أخذ عينة عشوائية بسيطة
- الشيء الأساس في العينة العشوائية البسيطة هو أن يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع الإحصائي الفرصة نفسها لتكون ضمن العينة

a عدد العاملين في مؤسسة هو 90 موظفاً مرقمين من 1 إلى90 يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود الرابع.

من جدول الأعداد العشوائية نجد أن العينة هي:

10 , 70 , 77 , 24 , 3 , 61 , 59

العينة العشوائية الطبقية:

عندما يكون المجتمع مكوناً من مجموعات لا تتقاطع مع بعضها، نأخذ عينة عشوائية بسيطة من كل مجموعة، فنحصل على عينة عشوائية طبقية

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع}}$$

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد من 35 موظفاً موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	مستخدمون	محاسبون و مدققون	مدراء أقسام
35	5	20	10

- ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة

كسر المعاينة = $\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع}} = \frac{7}{35} = 0.2$

حجم عينة المدراء= $10\times0.2 = 2$

حجم عينة المحاسبين والمدققين= $20\times0.2 = 4$

حجم عينة المستخدمين= $5\times0.2 = 1$

في إحدى المستشفيات يوجد 80 إدارياً مرقمين من 1 إلى80، 140 طبيباً مرقمين من 81 إلى220 ، 240 ممرضاً مرقماً من 221 إلى460 ، 40 عاملاً مرقمين من 461 إلى 500 . المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فرداً لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

كسر المعاينة = $\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع}} = \frac{25}{500} = 0.05$

- 80 إداريا مرقمين من 1 إلى 80

حجم عينة الإداريين= $80\times0.05 = 4$

من الجدول: 59, 79, 1, 28

- 140 طبيبا مرقمين من 81 إلى 220

حجم عينة الأطباء= $140\times0.05 = 7$

من الجدول: 96, 135, 161, 212, 85, 209, 201

- 240 ممرضين مرقمين من 221 إلى 460

حجم عينة الممرضين= $240\times0.05 = 12$

من الجدول: 415, 444, 274, 280, 234, 414, 359, 360, 227, 315, 412, 281

- 40 عاملا مرقماً من 461 إلى 500

حجم عينة العمال= $40\times0.05 = 2$

من الجدول: 468, 462

العينة العشوائية المنتظمة:

يتم سحب مفرداتها وفق نظام ثابت ومنتظم

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}}$$

في أحد المصانع حيث عدد العمال 900 مرقمين من 1 إلى900، أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج.
المطلوب ما العينة العشوائية المنتظمة إذا أراد صاحب المصنع تشكيلها على أن يكون حجمها 10، مستخدماً جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن عشر والعمود السابع؟

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{900}{10} = 90$$

من جدول الأعداد العشوائية الصف 18 العمود 7
نختار أول عدد مؤلف من منزلتين بحيث لا يزيد عن طول الفترة 90 وهو 75

+90

75 ,165 ,255 ,345 ,435 ,525 ,615 ,705 ,795 ,885

يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالباً مرقمين من 1 إلى140. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم الهدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود التاسع.

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{140}{7} = 20$$

من جدول الأعداد العشوائية الصف 6 العمود 9
نختار أول عدد مؤلف من منزلتين بحيث لا يزيد عن طول الفترة 20 وهو 15

+20

15 ,35 ,55 ,75 ,95 ,115 ,135

العيّنات-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. للحصول على أفضل تمثيل للمجتمع نختار العينة بطريقة عشوائية ⓑ [✓ ⓐ]

2. لا يوجد فرق بين العينة العشوائية البسيطة والعينة العشوائية الطبقية [✓ ⓑ] ⓐ

3. حجم المجتمع = $\frac{\text{كسر المعاينة}}{\text{حجم العينة}}$ [✓ ⓑ] ⓐ

4. حجم المجتمع الإحصائي= طول الفترة × حجم العينة ⓑ [✓ ⓐ]

5. إذا كان طول الفترة يساوي 70، والمفردة الأولى تساوي 43، فالمفردة الخامسة تساوي 322 [✓ ⓑ] ⓐ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

6. يتوافر في العينة العشوائية البسيطة:

ⓐ شرط التحيز
[✓ ⓑ] الإتاحة لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور
ⓒ شرط العشوائية والانتظام
ⓓ كل مما سبق

7. يتوفر في العينة المنظمة:

[✓ ⓐ] شرط العشوائية والانتظام
ⓑ شرط الانتظام فقط
ⓒ شرط العشوائية فقط
ⓓ ليس أياً مما سبق

8. عند استخدام العينة الطبقية يفضل أن:

ⓐ تكون عشوائية ومنتظمة
[✓ ⓑ] تكون طبقات المجتمع متجانسة بداخلها مختلفة فيما بينها
ⓒ لا تتيح لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور
ⓓ ليس أياً مما سبق

9. إذا كان حجم العينة يساوي 100 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 2000، فكسر المعاينة يساوي:

ⓓ 0.02 [✓ ⓒ] 0.05 ⓑ 0.5 ⓐ 0.3

10. إذا كان طول الفترة يساوي 40 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 1000، فحجم العينة يساوي:

ⓓ 30 ⓒ 40 [✓ ⓑ] 25 ⓐ 35

أساليب عرض البيانات

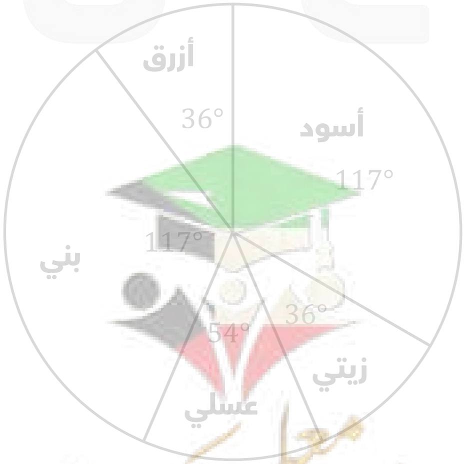
القطاعات الدائرية

يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لألوان العيون لدي 40 طالباً ثانوياً:

المجموع	زيتي	عسلي	بني	أزرق	أسود	الفئة
40	4	6	13	4	13	التكرار

- أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي.
- مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

المجموع	زيتي	عسلي	بني	أزرق	أسود	الفئة
40	4	6	13	4	13	**التكرار**
$\frac{40}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{13}{40}$	**التكرار النسبي**
100%	10%	$\left(\frac{6}{40}\times100\right)\%$ $=15\%$	32.5%	$\left(\frac{4}{40}\times100\right)\%$ $=10\%$	$\left(\frac{13}{40}\times100\right)\%$ $=32.5\%$	**التكرار المئوي**
360°	36°	$\left(\frac{6}{40}\times360^\circ\right)$ $=54^\circ$	117°	$\left(\frac{4}{40}\times360^\circ\right)$ $=36^\circ$	$\left(\frac{13}{40}\times360^\circ\right)$ $=117^\circ$	**التكرار الزاوية**



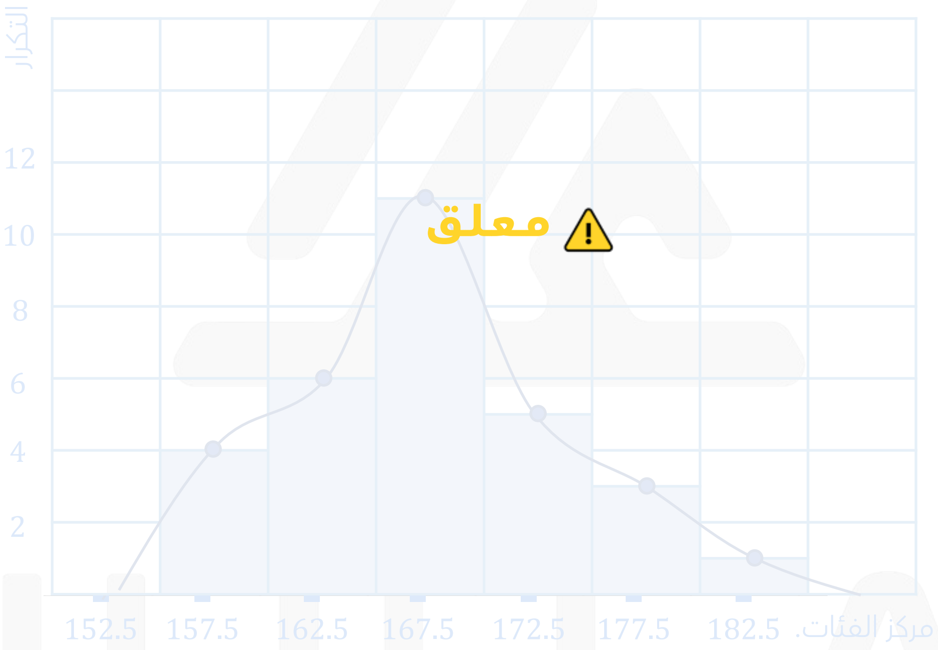
المنحنى التكراري والمدرج التكراري

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال 30 طالباً بالسنتيمتر (cm)

المجموع	180-	175-	170-	165-	160-	155-	الفئة
30	1	3	5	11	6	4	التكرار

أوجد مركز الفئات ، ارسم المدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري

المجموع	180-	175-	170-	165-	160-	155-	الفئة
30	1	3	5	11	6	4	التكرار
▨	182.5	177.5	172.5	167.5	162.5	157.5	مركز الفئات



أساليب عرض البيانات-التمارين الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

1. التكرار النسبي يساوي: قياس الزاوية المركزية لقطاع ×360° a [✓ b]

2. التكرار النسبي = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{\text{تكرار القيمة}}$ a [✓ b]

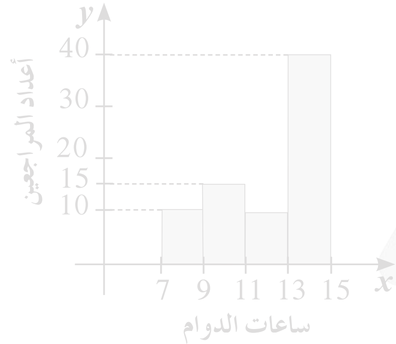
3. مركز فئة 20- طولها 10 يساوي 30 a [✓ b]

4. لا يمكن رسم المنحنى التكراري قبل المدرج التكراري a [✓ b]

5. يمكن تمثيل بيانات كمية مستمرة بالقطاعات الدائرية a [✓ b]

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

في التمرينين التاليين استخدم المدرج التكراري المقابل الذي يمثل أعداد المراجعين في إحدى الوزارات خلال ساعات الدوام اليومي في دولة ما.



6. إجمالي عدد المراجعين هو:

a 80 b 65 c 70 [✓ d] 75

7. طول الفترة يساوي:

a 4 b 3 [✓ c] 2 d 1

في التمارين التالية استخدم الشكل البياني المقابل الذي يمثل المواد الاختيارية المفضلة لدي طلاب إحدى المدارس البالغ عددهم 200 طالب.

8. كم يساوي قياس الزاوية المركزية لقطاع التربية البدنية؟

a 120° b 45° [✓ c] 180° d 90°

9. كم يبلغ عدد الطلاب المسجلين باللغة الإنجليزية؟

a 30 [✓ b] 25 c 35 d 40

10. كم يبلغ عدد الطلاب المسجلين بالمواد اللغوية؟

[✓ a] 50 b 40 c 55 d 60

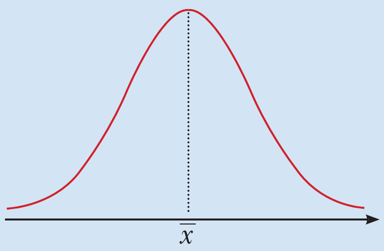
تدرب و تفوق

اختبارات الكترونية ذكية

القاعدة التجريبية

خواص التوزيع الطبيعي:

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال
- المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $\infty, -\infty$



القاعدة التجريبية : نستخدمها لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة محددة

لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها 475 ديناراً بانحراف معياري 115ديناراً.
طبق القاعدة التجريبية.
هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى750 ديناراً؟ فسر ذلك

القاعدة التجريبية.

- حوالى 68% من الأرباح تقع على الفتره. $[\overline{x} - \sigma ,\overline{x} + \sigma]$

$$[475 - 115 ,475 + 115] = [360 ,590]$$

- حوالى 95% من الأرباح تقع على الفتره. $[\overline{x} - 2\sigma ,\overline{x} + 2\sigma]$

$$[475 - 2\times115 ,475 + 2\times115] = [245 ,705]$$

- حوالى 99.7% من الأرباح تقع على الفتره $[\overline{x} - 3\sigma ,\overline{x} + 3\sigma]$

$$[475 - 3\times115 ,475 + 3\times115] = [130 ,820]$$

من المتوقع وصول الارباح إلى 750 لأنه $750 \in [130 ,820]$

يعلن مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية أن متوسط عمر المصباح الكهربائي من النوع (A) هو $700h$ بانحراف معياري $100h$ على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصابيح يقترب كثيراً من التوزيع الطبيعي.
طبق القاعدة التجريبية.

- حوالى 68% من القيم تقع على الفتره. $[\overline{x} - \sigma ,\overline{x} + \sigma]$

$$[700 - 100 ,700 + 100] = [600 ,800]$$

- حوالى 95%من القيم تقع على الفتره $[\overline{x} - 2\sigma ,\overline{x} + 2\sigma]$

$$[700 - 200 ,700 + 200] = [500 ,900]$$

- حوالى 99.7% من القيم تقع على الفتره $[\overline{x} - 3\sigma ,\overline{x} + 3\sigma]$

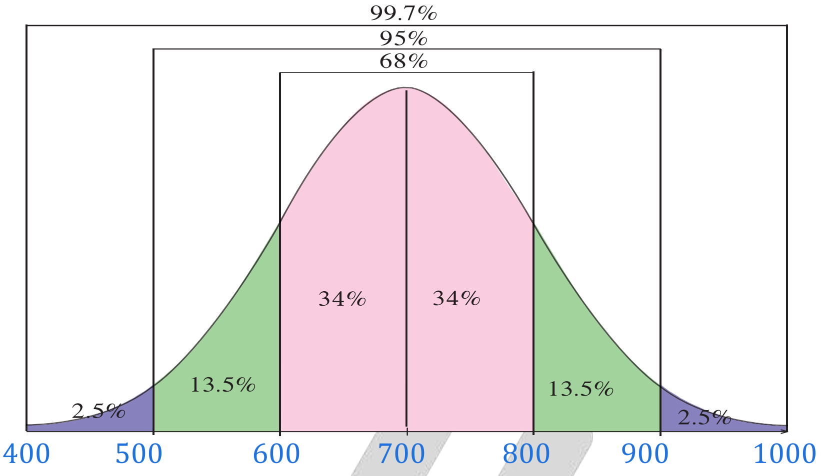
$$[700 - 300 ,700 + 300] = [400 ,1000]$$

Q أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يزيد عمرها $500h$

$13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% + 2.5\% = 97.5\%$

Q أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يقل عمرها $400h$

0%تقريبا



القاعدة التجريبية-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. يمكن أن يكون شكل التوزيع الطبيعي جرساً غير متماثل — a [✓ b]
2. في التوزيع الطبيعي المنوال والوسيط غير متساويين — a [✓ b]
3. في التوزيع الطبيعي الفترة $[\bar{x}-\sigma , \bar{x}+\sigma]$ تحتوي على 95% من البيانات — a [✓ b]
4. في التوزيع الطبيعي 99.7% من البيانات توجد في الفترة$[\bar{x}-3\sigma ,\bar{x}+3\sigma]$ — [✓ a] b
5. تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة. — [✓ a] b

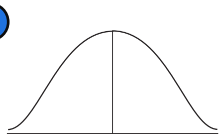
⚠ معلق

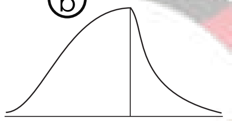
ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

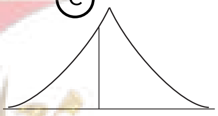
6. تزعم شركة أن متوسط عمر منتجها هو 50 شهراً مع انحراف معياري 5 أشهر. النسبة المئوية للمنتجات التي يزيد عمرها عن 50 شهراً هي:

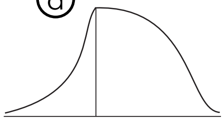
[✓ a] 50% ⓑ 55% ⓒ 45% ⓓ 40%

7. التمثيل الأفضل للتوزيع الطبيعي هو:

[✓ a]


ⓑ


ⓒ


ⓓ


8. الفترة $[\bar{x} - 2\sigma , \bar{x} + 2\sigma]$ تحتوي على:

ⓐ 68% من البيانات

ⓑ 99.7% من البيانات

ⓒ 90% من البيانات

[✓ ⓓ 95% من البيانات]

تدرب و تفوق

اختبارات الكترونية ذكية

الوحدة 6 / الإحصاء

القيمة المعيارية

القيمة المعيارية هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء **15** حيث المتوسط الحسابي **14** والانحراف المعياري **3.8** وفي مادة الكيمياء **15** حيث المتوسط الحسابي **13** والانحراف المعياري **7.8**.
ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل

مادة الفيزياء

$x = 15 , \bar{x} = 14 , \sigma = 3.8$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{15 - 14}{3.8}$$

$z_1 = 0.263$

مادة الكيمياء

$x = 15 , \bar{x} = 13 , \sigma = 7.8$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{15 - 13}{7.8}$$

$z_2 = 0.256$

$\because z_1 > z_2 \Rightarrow$ درجة الطالب في الفيزياء أفضل

يسكن خالد في مدينة $\boldsymbol{A}$ حيث إن طول قامته **180cm** والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة **174cm** مع انحراف معياري **12cm**. أما صالح فيسكن في المدينة $\boldsymbol{B}$ حيث إن طول قامته **172 cm** والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة **165cm** مع انحراف معياري **15**.
أي منهما طول قامته أفضل من الآخر مقارنة مع أطوال الرجال في كل مدينة

خالد

$x = 180 , \bar{x} = 174 , \sigma = 12$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{180 - 174}{12}$$

$$z_1 = \frac{6}{12} = 0.5$$

صالح

$x = 172 , \bar{x} = 165 , \sigma = 15$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{172 - 165}{15}$$

$z_2 = 0.47$

$\because z_1 > z_2 \Rightarrow$ طول خالد هو الأفضل

القيمة المعيارية-التمارين الموضوعية

ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

1. القيمة المعيارية=$\frac{x-x}{\sigma}$

ⓐ [✓ ⓑ]

2. القيمة المعيارية تؤشر إلى تشتت قيمة عن بقية قيم البيانات ⚠ معلق

ⓐ ⓑ

3. في بيانات حيث المتوسط الحسابي $\bar{x} = 14$ والانحراف المعياري $\sigma = 4$ فإن القيمة المعيارية للمفردة $x = 16$ هي: $z = 0.5$

[✓ ⓐ] ⓑ

4. في بيانات حيث المتوسط الحسابي $\bar{x} = 12$ والقيمة المعيارية للمفردة $x = 15$ هي: $z = 0.4$ فإن الانحراف المعياري $\sigma = 7.5$

[✓ ⓐ] ⓑ

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

5. القيمة المعيارية للمفردة 14 مقارنة بقيم بيانات حيث المتوسط الحسابي 12.5 والانحراف المعياري 6 هي:

ⓐ -0.25 [✓ ⓑ 0.25] ⓒ 2.5 ⓓ -2.5

6. القيمة المعيارية لمفردة من بيانات هي 0.625 والمتوسط الحسابي 12 والانحراف المعياري 8 فإن هذه المفردة تساوي:

ⓐ 7 ⓑ -7 [✓ ⓒ 17] ⓓ -17

7. القيمة المعيارية للمفردة 14 من بيانات هي 0.6 والمتوسط الحسابي 11 فإن الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات هو:

ⓐ 0.2 ⓑ -0.2 ⓒ -5 [✓ ⓓ 5]

8. القيمة المعيارية للمفردة 18 من بيانات هي 0.75 والانحراف المعياري 8 فإن المتوسط الحسابي هو:

ⓐ 24 [✓ ⓑ 12] ⓒ -12 ⓓ -24