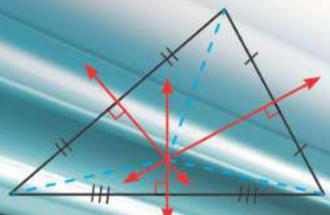
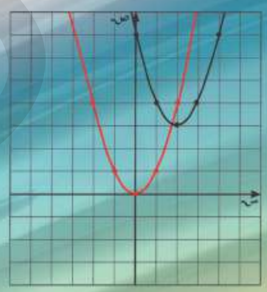
مع تحيات
مجموعة قنوات
MidNight

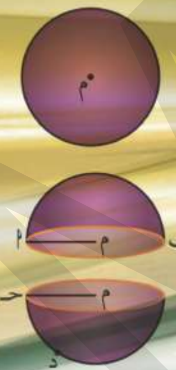
وزارة التربية

الرياضيات

الصف التاسع - الجزء الثاني







كتاب الطالب

المرحلة المتوسطة

٩

الطبعة الأولى

KuwaitTeacher.Com

دولة الكويت

وزارة التربية

كويت جديدة
NEWKUWAIT

الرياضيات

الصف التاسع - الجزء الثاني

لجنة تأليف كتاب الرياضيات للصف التاسع

أ. سارة مهدي براك هادي (رئيسًا)

أ. جمال عبد الناصر أحمد السبال
أ. عماد إبراهيم عبد القادر عامر
أ. جيهان عبد الشافي محمد أحمد
أ. محاسن حسين نوري عطية
أ. فهيد سعود ناصر العجمي
أ. مريم عفّاس سعود الشحومي
أ. عيد عشوي عايد الكهيدي
أ. عائشة سالم عبدالله البالول

الطبعة الأولى

١٤٤٠ - ١٤٤١ هـ

٢٠١٩ - ٢٠٢٠ م

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية - قطاع البحوث التربوية والمناهج

إدارة تطوير المناهج

KuwaitTeacher.Com

الطبعة الأولى ٢٠١٩م

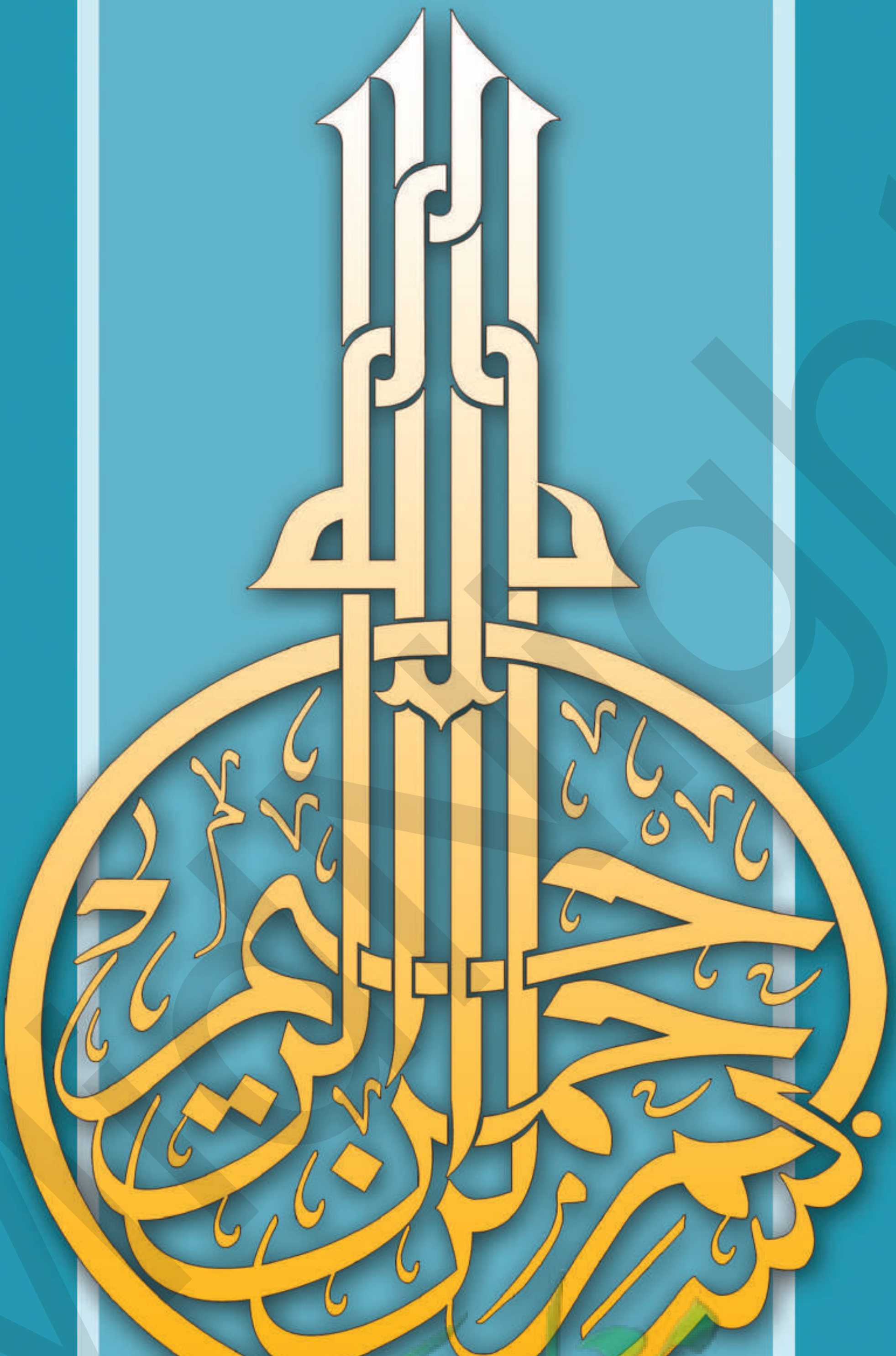
المراجعة العلمية
أ. مريم عفّاس سعود الشحومي
المتابعة الفنية
قسم إعداد وتجهيز الكتب المدرسية

شاركنا بتقييم مناهجنا

ذات السلاسل - الكويت

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٨٤) بتاريخ ٢٢/ ١٢/ ٢٠١٩م

KuwaitTeacher.Com



صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

اشكر لكم حسن متابعتكم لقنوات MidNight
واقدم لكم هذه الهدية البسيطة

حل كتاب الصف التاسع للفصل الدراسي الثاني

مع العلم انه بمجهود ذاتي ويحتمل الخطأ
ولم يتم مراجعته من قبل أي
معلم او رئيس قسم او موجه فني

لذا اتمنى المراجعة منكم والتواصل معي
لتصحيح الخطأ

وأشكركم مقدما على مجهوداتكم معنا

MidNight

صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

MidNight
KuwaitTeacher.Com

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

MidNight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

المحتويات

MidNight Documents
MidNight الوثائقية
قناة الرياضيات الوثائقية
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

محتوى الجزء الثاني

الوحدة السادسة : المجموعات والدوالّ

الموضوع : وطني الكويت

MidNight

صفوة معلمي الكويت

KuwaitTeacher.Com

الوحدة السابعة : المعادلات الخطّية والمتباينات الخطّية
الموضوع : المنحدرات

MidNight Documents
MidNight
الوثائقية
قناة الرياضيات الوثائقية
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

الوحدة الثامنة : هندسة المثلّث
الموضوع : العلوم الهندسية والجسور

MidNight
KuwaitTeacher.Com

الوحدة التاسعة : النسبة المئوية

الموضوع : التجارة

MidNight Documents
MidNight
الوثائقية
قناة الرياضيات الوثائقية
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

الوحدة العاشرة : الهندسة والقياس

الموضوع : تصاميم هندسية

MidNight

MidNight Math

MidNight الرياضيات

الرياضيات للمرحلة المتوسطة

6789

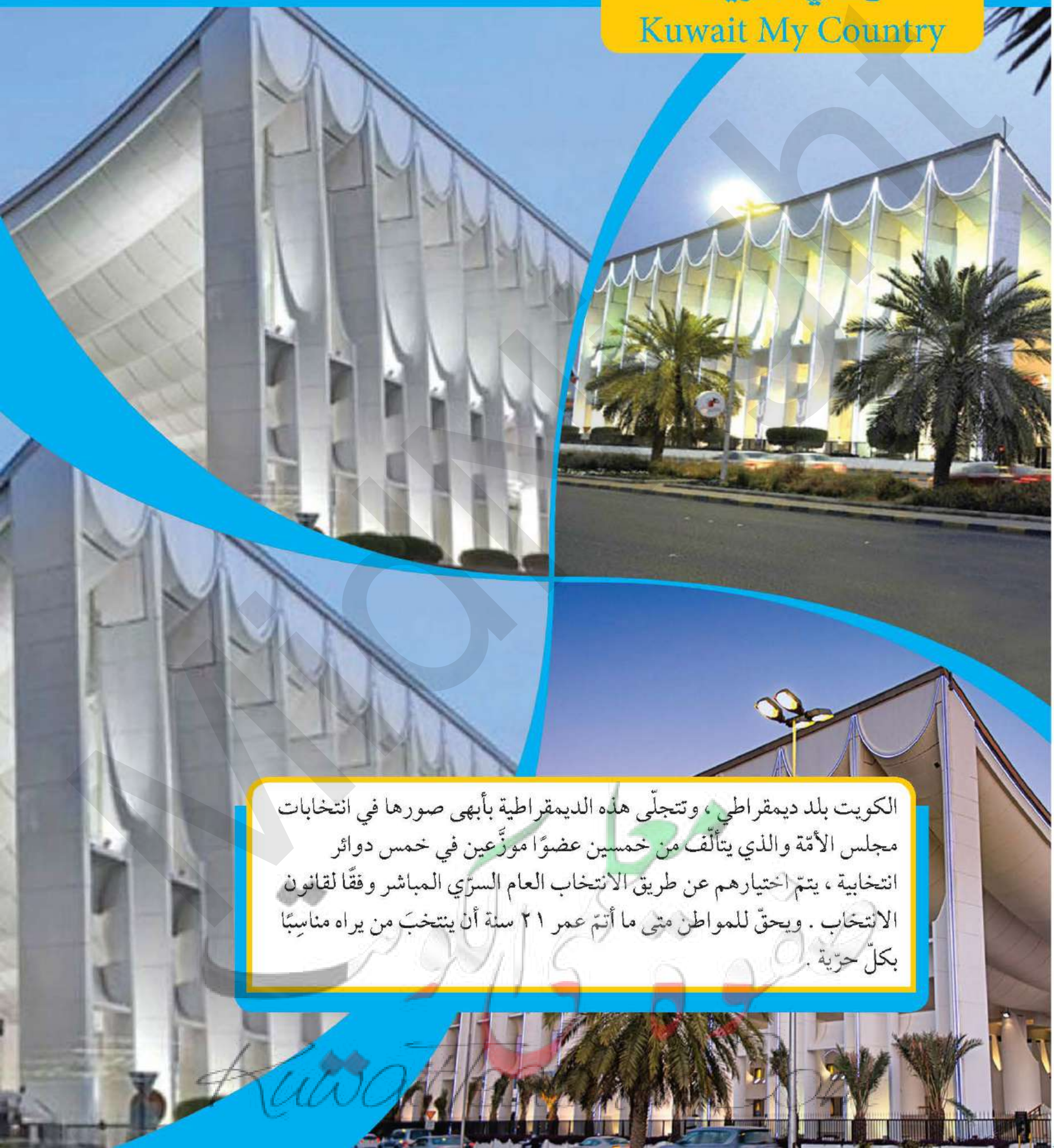
صفوة معلمي الكويت

KuwaitTeacher.Com

الوحدة السادسة

المجموعات والدوالّ
Sets & Functions

وطني الكويت
Kuwait My Country



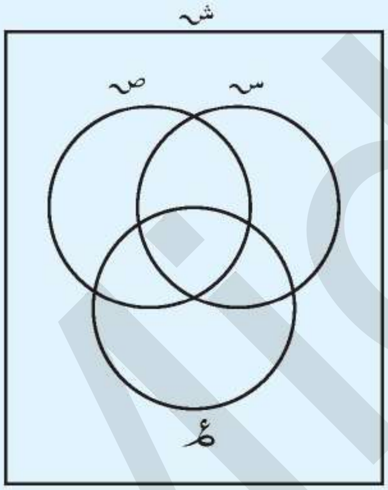
الكويت بلد ديمقراطي ، وتتجلّى هذه الديمقراطية بأبهى صورها في انتخابات مجلس الأمّة والذي يتألّف من خمسين عضوًا موزّعين في خمس دوائر انتخابية ، يتمّ اختيارهم عن طريق الانتخاب العام السرّي المباشر وفقًا لقانون الانتخاب . ويحقّ للمواطن متى ما أتمّ عمر ٢١ سنة أن ينتخبَ من يراه مناسِبًا بكلّ حرّية .

مشروع الوحدة : (مجلس الطلبة)

تعزّز دولة الكويت روح الديمقراطية لدى المتعلّمين منذ الصغر، وذلك من خلال إجراء انتخابات داخل أروقة المدارس لاختيار أعضاء مجلس الطلبة وتحت إشراف الإدارة المدرسية ، وذلك لتهيئة النشء لممارسة حقيقية للحياة الديمقراطية.

خطّة العمل :

إذا كانت مجموعة متعلّمي فصلك (ش) وليكن عددهم ٢٠ متعلّمًا. تمّ اختيار ١٠ متعلّمين منهم لتشكيل اللجان التالية: مجموعة اللجنة الثقافية (س) ومجموعة اللجنة الرياضية (ص) ومجموعة لجنة النظام (ع).



خطوات تنفيذ المشروع :

- أُكتب مجموعة أسماء متعلّمي فصلك.
- قسِّم اللجان وفق الشروط التالية:
  - كل لجنة تتكوّن من ٥ متعلّمين.
  - متعلّم واحد فقط مشترك في جميع اللجان.
  - متعلّمان فقط على الأكثَر مشتركان في لجنتين مختلفتين.
- أُكتب مجموعة أسماء المتعلّمينَ في اللجان السابقة.
- أُكتب مجموعة أسماء المتعلّمين الذين لم يتمّ اختيارهم في أيّ من اللجان الثلاث السابقة.
- مثّل عناصر كلّ مجموعة في شكل ڤن المجاورِ.

علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات العمل وتتأكّد من صحّة التنفيذ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

KuwaitTeacher.Com

مخطَّط تنظيمي للوحدة السادسة

- المجموعات والدوالّ
  - المجموعات
    - مجموعة الفرق
    - المجموعة الشاملة
    - المجموعة المتمِّمة
  - الدوالّ
    - التطبيق وأنواعه
    - الدالّة الخطّية
    - الدالّة التربيعية

اِستعِدَّ للوحدة السادسة

١ إذا كانت سـ = {-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، صـ = {-١ ، ٠ ، ٢} ،
ضَعِ الرمز ∈ أو ∉ أو ⊆ أو ⊈ لتحصل على عبارة صحيحة .

أ ٢ ∈ سـ	**ب** {٢} ⊆ سـ	**جـ** {٠ ، -١} ⊆ سـ
د ٣ ∉ صـ	**هـ** {-١ ، ٠ ، ٢} ⊆ صـ	**و** {٢٠} ⊈ صـ
ز سـ ⊈ صـ	**ح** صـ ⊆ سـ	**ط** ∅ ⊆ صـ

٢ أُكتب كلًّا من المجموعات التالية بذكر العناصر ، ثمّ حدِّد ما إذا كانت المجموعة منتهية أو غير منتهية . (حيث صـ مجموعة الأعداد الصحيحة)

أ سـ = {ب : ب ∈ صـ ، ب عامل من عوامل العدد ٦}

سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، -١ ، -٢ ، -٣ ، -٦}

منتهية

ب ع = {جـ : جـ ∈ صـ ، -٢ < جـ ≤ ٥}

ع = {-١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

منتهية

جـ ل = {ب : ب ∈ صـ ، ب < -٤}

ل = {-٤ ، -٥ ، -٦ ، ...}

غير منتهية

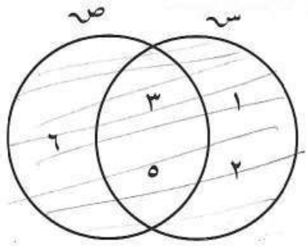
د م = مجموعة العوامل الأوّلية للعدد ٣٠

م = {٢ ، ٣ ، ٥}

منتهية

Midlight
KuwaitTeacher.Com

٣ من شكل ڤن المقابِل ، أكمِل بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



أ س = {١، ٢، ٣، ٥}

ب ص = {٣، ٥، ٦}

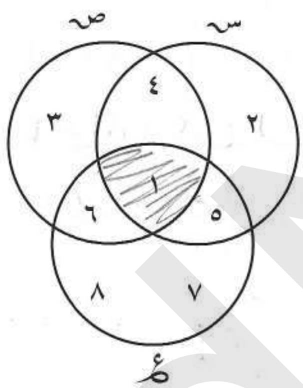
جـ س ∩ ص = {٣، ٥}

د س ∪ ص = {١، ٢، ٣، ٥، ٦}

ثم ظلِّل المنطقة التي تمثّل س ∪ ص .

---

٤ من شكل ڤن المقابِل ، أكمِل بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



أ س = {٢، ٥، ١، ٤}

ب ص = {١، ٤، ٣، ٦}

جـ س ∩ ص = {١، ٤}

د ع ∪ ص = {١، ٤، ٦، ٣، ٥، ٧، ٨}

هـ س ∩ ص ∩ ع = {١}

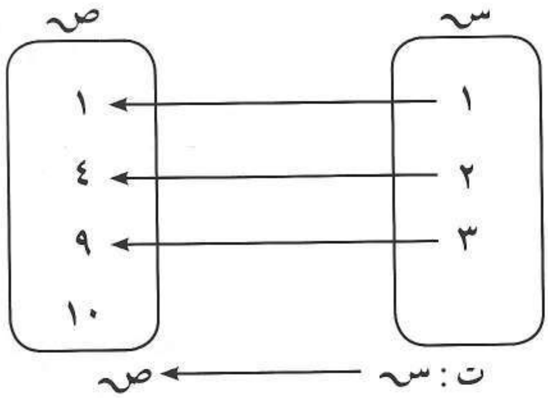
و س ∪ ص ∪ ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

ثم ظلِّل المنطقة التي تمثّل (س ∩ ص ∩ ع).

KuwaitTeacher.Com

٥ الشكل أدناه يمثّل المخطَّط السهمي للتطبيق ت : س ← ص .

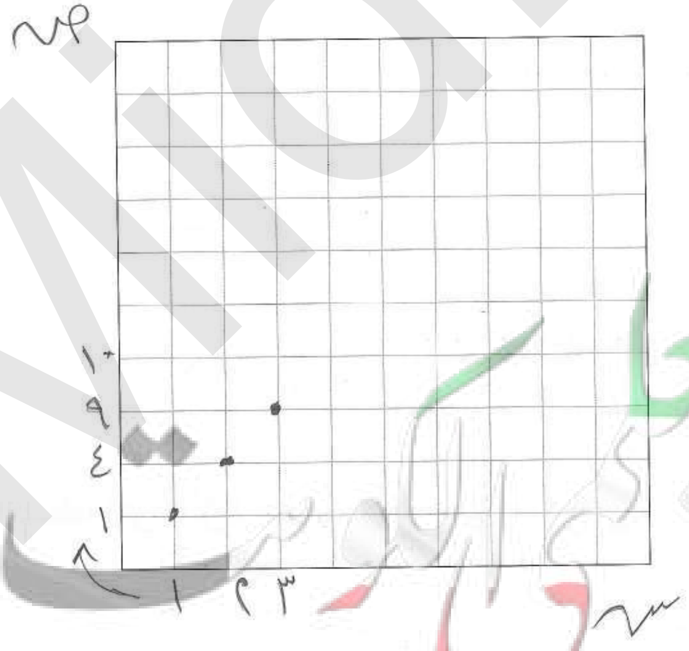
أُكتب المجال ، المجال المقابِل ، المدى ، ثمّ ارسم المخطَّط البياني للتطبيق ت .



المجال = {١ ، ٢ ، ٣}

المجال المقابل = {١ ، ٤ ، ٩ ، ١٠}

المدى = {١ ، ٤ ، ٩}



KuwaitTeacher.Com

في الصف الثامن السؤال يكون مرسوم جدول ويتم التعويض داخل الجدول وليس بهذه الصورة

٦ **إذا كانت سـ = { ١ ، ٣ ، ٤ } ، صـ = { ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } ،**
وكان ت تطبيق من سـ إلى صـ ، حيث ت (س) = ٢ س − ١

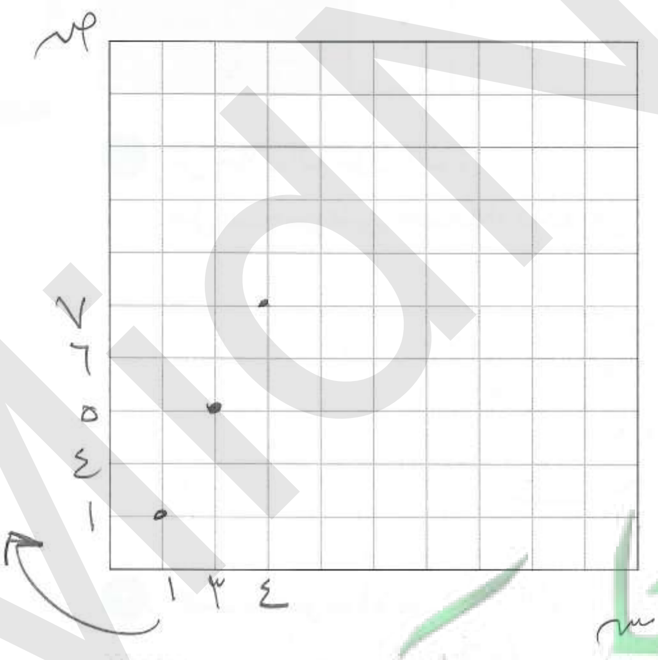
أ أوجِد مدى التطبيق ت .

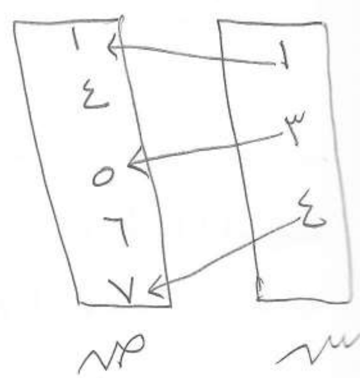
ت (س) = ٢س − ١
ت(١) = ٢ × ١ − ١ = ١
ت(٣) = ٢ × ٣ − ١ = ٥
ت(٤) = ٢ × ٤ − ١ = ٧
المدى = { ١ ، ٥ ، ٧ }

ب أُكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ت = { (١ ، ١) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٧) }

جـ أُرسم مخطَّطًا سهميًّا للتطبيق ت وآخر بيانيًّا .





Midnight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

٦-١ مجموعة الفرق
Difference Set

سوف تتعلّم : إيجاد مجموعة الفرق بين مجموعتين .

نشاط :

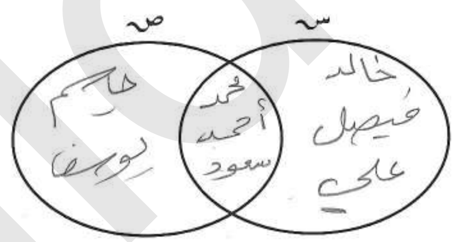
العبارات والمفردات :
مجموعة الفرق
Difference set

معلومات مفيدة :
تُقسَّم الدوائر الانتخابية داخل الكويت إلى ٥ دوائر، ويتم اختيار ١٠ أعضاء من كلّ دائرة لتمثيل الناخبين داخل مجلس الأمّة .

اِنتخب متعلّمو الصفّ التاسع مجموعة منهم لتمثيلهم داخل اللجنة الثقافية للمدرسة ، ومجموعة لتمثيلهم داخل اللجنة الرياضية للمدرسة ، وكانت نتائج المرشَّحين كالتالي :

أسماء المرشَّحين / مجموعة	أحمد	خالد	محمّد	جاسم	سعود	فيصل	يوسف	عليّ
اللجنة الثقافية س	✓	✓	✓		✓	✓		✓
اللجنة الرياضية ص	✓		✓	✓	✓		✓	

١ من خلال الجدول السابق ،
مثِّل المجموعتين باستخدام شكل ڤن .



٢ أُكتب مجموعة الأعضاء في اللجنة الثقافية وليسوا أعضاء في اللجنة الرياضية .

خالد ، فيصل ، علي

٣ أُكتب مجموعة الأعضاء في اللجنة الرياضية وليسوا أعضاء في اللجنة الثقافية .

جاسم ، يوسف

KuwaitTeacher.Com

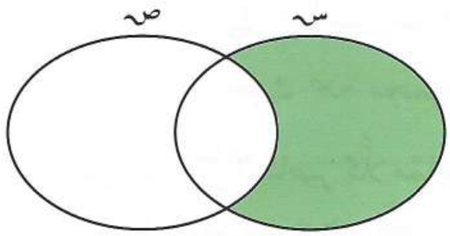
من خلال النشاط السابق :

- مجموعة الأعضاء في اللجنة الثقافية سـ وليسوا أعضاء في اللجنة الرياضية صـ

تُسمّى **مجموعة الفرق بين مجموعتين**

وتُكتَب سـ − صـ

وتُظلَّل كما في شكل ڤن المقابِل .



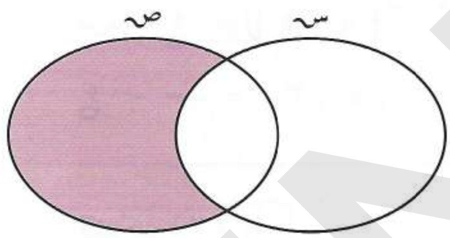
سـ − صـ = مجموعة العناصر التي تنتمي إلى سـ ولا تنتمي إلى صـ

- وكذلك مجموعة الأعضاء في اللجنة الرياضية صـ وليسوا أعضاء في اللجنة الثقافية سـ

تُسمّى **مجموعة الفرق بين مجموعتين**

وتُكتَب صـ − سـ

وتُظلَّل كما في شكل ڤن المقابِل .



صـ − سـ = مجموعة العناصر التي تنتمي إلى صـ ولا تنتمي إلى سـ

تدرّب (١) :

من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلاًّ ممّا يلي :

أ سـ − صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ }

ب صـ − سـ = { ٦ ، ٧ }

جـ ماذا تلاحظ ؟ سـ − صـ ≠ صـ − سـ

Midnight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

مثال :

إذا كانت س = {أ : أ ∈ ص ، أ عامل من العوامل الموجَبة للعدد ٨} ،

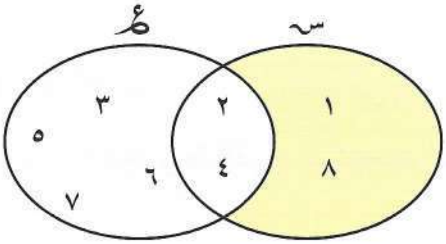
ع = {ب : ب ∈ ص ، ١ < ب ≤ ٧} ،

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة .

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي : س ، ع ، س - ع ، ع - س .

ثمّ مثِّل كلًّا من س ، ع بشكل ڤن ، وظلِّل المنطقة التي تمثّل س - ع .

الحلّ :



س = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٨}

ع = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

س - ع = {١ ، ٨}

ع - س = {٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

تدرّب (٢) :

إذا كانت س = {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦} ،

ع = {ب : ب ∈ ص ، -١ ≤ ب ≤ ٤} ،

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة .

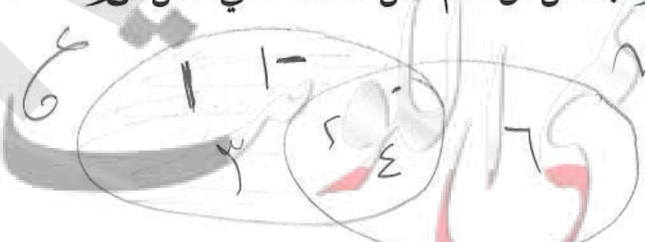
فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي:

ع = {-١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

س - ع = {٦}

ع - س = {-١ ، ١ ، ٣}

مثِّل كلًّا من س ، ع بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ع - س .



KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٣) :

إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٥ }

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي:

س − ص = { ٣ }

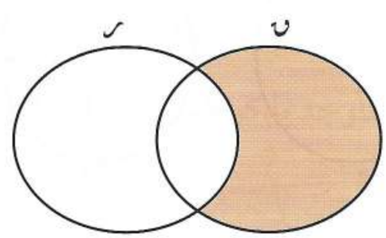
ص − س = ∅ أو { }

مثِّل كلًّا من س ، ص بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل س − ص .

تدرّب (٤) :

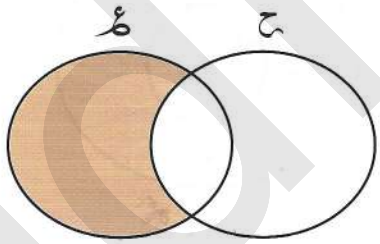
أُكتب ما يمثّله الجزء المظلَّل في كلّ من الأشكال التالية :

أ



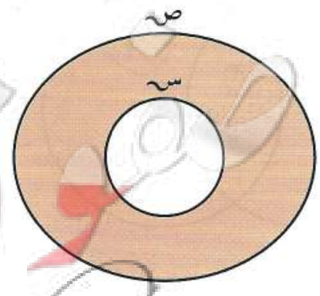
ن − ر

ب



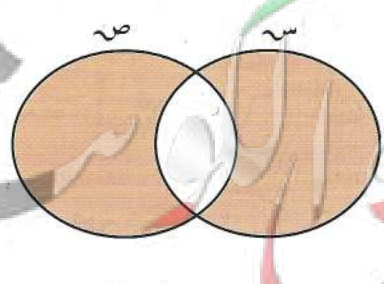
ع − ح

جـ



ص − س

د



(س − ص) ∪ (ص − س)

Midnight
معارف
Midnightteacher.com

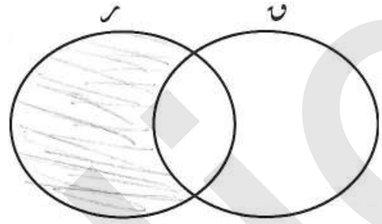
فكِّر وناقِش

إذا كانت س ⊇ ص ، فأوجِد س − ص . ∅

تمــرَّنْ :

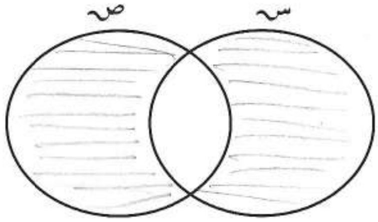
(١) ظلِّل المنطقة التي تمثّل كلًّا ممّا يلي في الأشكال التالية :

(أ)



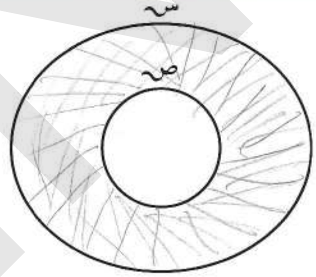
ر − ن

(ب)



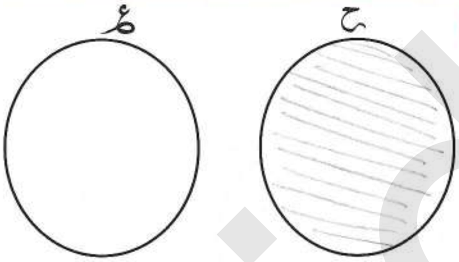
(س − ص) ∪ (ص − س)

(جـ)



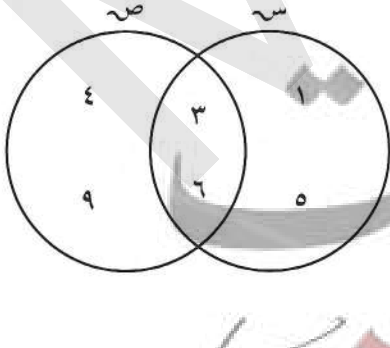
س − ص

(د)



ح − ع

(٢) من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



س = {١ ، ٥ ، ٣ ، ٦}

ص = {٣ ، ٦ ، ٤ ، ٩}

س − ص = {١ ، ٥}

ص − س = {٤ ، ٩}

Midnight
KuwaitTeacher.Com

٣ إذا كانت س = مجموعة مضاعَفات العدد ٣ الأصغر من ٩ ،

ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦}

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

س = {٣ ، ٦}

س − ص = { } أو ∅

ص − س = {١ ، ٢ ، ٤}

مثِّل كلًّا من س ، ص بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ص − س .

٤ إذا كانت ع = {أ : أ ∈ ص ، ١ ≤ أ < ٥} ،

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة .

ح = {ب : ب عامل من العوامل الأوّلية للعدد ٣٠}

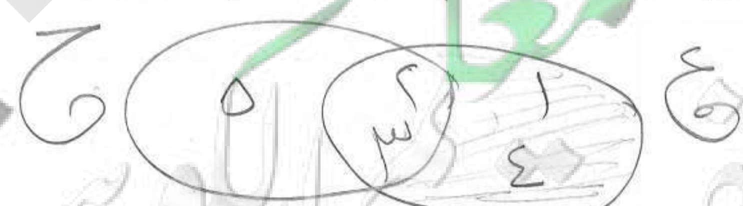
فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

ح = {٢ ، ٣ ، ٥}

ع − ح = {١ ، ٤}

مثِّل كلًّا من ع ، ح بشكل ڤن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل ع − ح .



Midnight
صفوة الوقت
KuwaitTeacher.Com

٦-٢ المجموعة الشاملة – المجموعة المتمِّمة
Overall Set – Complement of a Set

سوف تتعلّم : إيجاد المجموعة الشاملة والمجموعة المتمِّمة .

نشاط :

لتكن :

سـ = {أ ، ب ، جـ} ، صـ = {ب ، جـ ، د} ، ع = {جـ ، د ، هـ ، ل}

١ أُكتب مجموعة ي بحيث كلّ من سـ ، صـ ، ع مجموعة جزئية منها .

ي = {أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ل ، ع}

٢ أُكتب مجموعة أخرى م بحيث كلّ من سـ ، صـ ، ع مجموعة جزئية منها .

م = {أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ل ، و ، س ، ى}

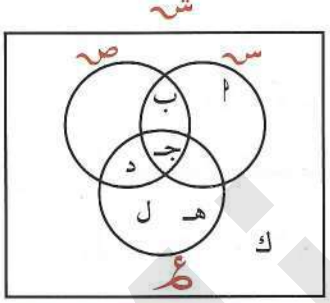
العبارات والمفردات :
المجموعة الشاملة
Overall Set
المجموعة المتمِّمة
Complement of a Set

تُسمّى كلّ من ي ، م ، ... مجموعة شاملة للمجموعات سـ ، صـ ، ع في أمثلة مختلفة

وعادةً نرمز إلى المجموعة الشاملة بالرمز شـ .

لتكن شـ = {أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ل ، ك}
المجموعة الشاملة لكلّ من سـ ، صـ ، ع
وتُمثَّل بشكل فن المقابِل .

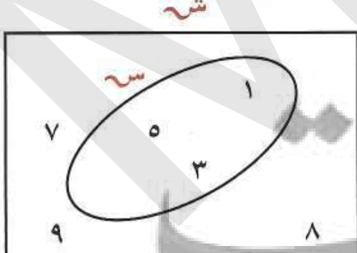
شـ



تدرّب (١) :

من الشكل المقابِل :

شـ



أ أُكتب بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

شـ = {١ ، ٢ ، ٥ ، ٣ ، ٨ ، ٧ ، ٩}

سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥}

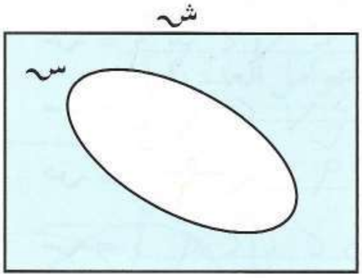
شـ – سـ = {٨ ، ٧ ، ٩}

ب أكمِل : ٨ ∈ (شـ – سـ) ، ١ ∉ (شـ – سـ)

Midnight
KuwaitTeacher.Com

من تدرّب (١) السابق :

مجموعة العناصر التي تنتمي إلى شـ ولا تنتمي إلى سـ هي شـ − سـ



وتُسمّى مجموعة متمِّمة سـ

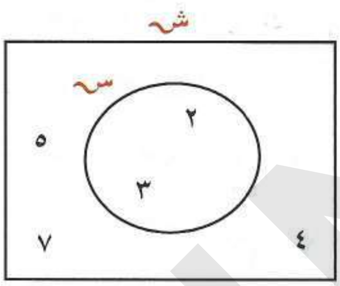
ويُرمَز لها بالرمز : $\overline{\text{سـ}}$ أو $\text{سـ}'$

وتُظلَّل كما في شكل ڤن المقابِل .

أي أنّ $\overline{\text{سـ}}$ = شـ − سـ

تدرّب (٢) :

من الشكل المقابِل ، اُكتب بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



شـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧}

سـ = {٢ ، ٣}

$\overline{\text{سـ}}$ = شـ − سـ

= {٤ ، ٥ ، ٧}

سـ ∩ $\overline{\text{سـ}}$ = ∅

سـ ∪ $\overline{\text{سـ}}$ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧} = شـ

$\overline{\overline{\text{سـ}}}$ = شـ − $\overline{\text{سـ}}$ = {٢ ، ٣}

= سـ

ويمكن استنتاج أنّ :

سـ ∩ $\overline{\text{سـ}}$ = ∅ ، سـ ∪ $\overline{\text{سـ}}$ = شـ

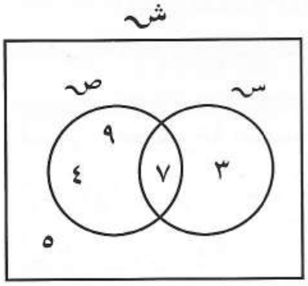
$\text{سـ}'$ = شـ − $\overline{\text{سـ}}$ = سـ ، $\overline{\overline{\text{سـ}}}$ = سـ

شـ ∪ سـ = شـ ، شـ ∩ سـ = سـ

شـ ∪ $\overline{\text{سـ}}$ = شـ ، شـ ∩ $\overline{\text{سـ}}$ = $\overline{\text{سـ}}$

KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٣) :



من الشكل المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

ش = {٣ ، ٧ ، ٩ ، ٤ ، ٥}

س = {٣ ، ٧}

ص = {٧ ، ٩ ، ٤}

$\overline{\text{س}}$ = {٩ ، ٤ ، ٥}

$\overline{\text{ص}}$ = {٣ ، ٥}

$\overline{\text{س}} \cap \overline{\text{ص}}$ = {٥}

$\text{س} \cup \text{ص}$ = {٣ ، ٧ ، ٩ ، ٤}

$\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$ = {٥}

ماذا تلاحظ؟ $\overline{\text{س} \cup \text{ص}} = \overline{\text{س}} \cap \overline{\text{ص}}$

$\overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}}$ = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٩}

$\text{س} \cap \text{ص}$ = {٧}

$\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$ = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٩}

ماذا تلاحظ؟ $\overline{\text{س} \cap \text{ص}} = \overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}}$

معلومات مفيدة :

Augustus de Morgan

عالم رياضيات إنجليزي وُلِد في مدينة مدراس الهندية عام ١٨٠٦ م حيث كان يعمل والده ، ثمّ أكمل دراسته في بريطانيا ونبغ في علوم الرياضيات والفلسفة .

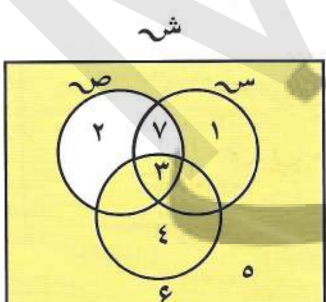
قوانين دي مورغان de Morgan :

- $\overline{\text{س} \cup \text{ص}} = \overline{\text{س}} \cap \overline{\text{ص}}$
- $\overline{\text{س} \cap \text{ص}} = \overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}}$

مثال :

من شكل ڤن المقابل ، أوجِد كلًّا من : ش ، س ، $\overline{\text{س}}$ ، $\overline{\text{ص}}$ ، س − ع ، ثمّ ظلّل المنطقة التي تمثّل $(\overline{\text{ص} - \text{ع}})$.

الحل :



ش = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧}

$\overline{\text{س}}$ = {١ ، ٣ ، ٧}

$\overline{\text{ص}}$ = {١ ، ٤ ، ٥}

س − ع = {١ ، ٧}

Midnight
KuwaitTeacher.Com
معلمي صفوة الكويت

$\overline{\overline{\text{س}}} = \text{س} \leftarrow \overline{\overline{\overline{\text{س}} \cap \overline{\text{ص}}}} = \text{س} \cap \text{ص}$

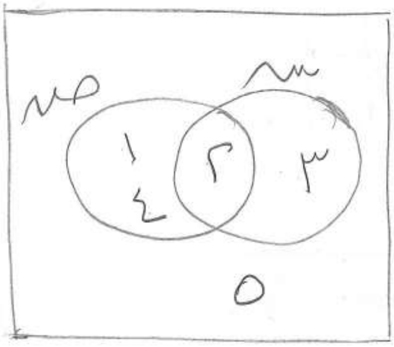
تدرّب (٤) :

إذا كانت المجموعة الشاملة ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،

س = { أ : أ ∈ مجموعة الأعداد الكلّية ، ٢ ≤ أ < ٤ } ،

ص = { ب : ب ∈ مجموعة الأعداد الكلّية ، ب عامل من عوامل العدد ٤ }

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



س = { ٢ ، ٣ }

ص = { ١ ، ٢ ، ٤ }

$\overline{\text{س}}$ = { ١ ، ٤ ، ٥ }

$\overline{\text{ص}}$ = { ٣ ، ٥ }

$\overline{(\text{س} \cap \text{ص})} = \overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}}$ = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

$\overline{(\text{س} \cup \text{ص})} = \overline{\text{س}} \cap \overline{\text{ص}}$ = { ٥ }

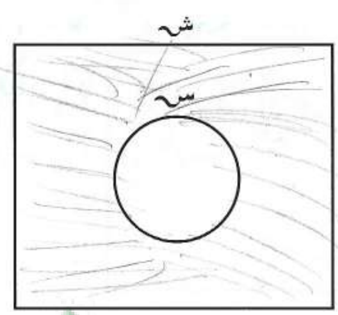
$\overline{\overline{(\text{س} \cap \text{ص})}} = \overline{(\overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}})} = \overline{\overline{\text{س}}} \cap \overline{\overline{\text{ص}}} = \text{س} \cap \text{ص}$ = { ٢ }

مثِّل كلًّا من ش ، س ، ص بشكل ڤن .

تدرّب (٥) :

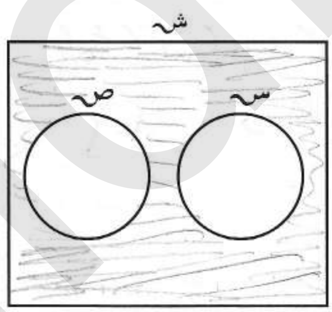
ظلِّل المنطقة التي تمثّل كلًّا ممّا يلي في الأشكال التالية :

أ



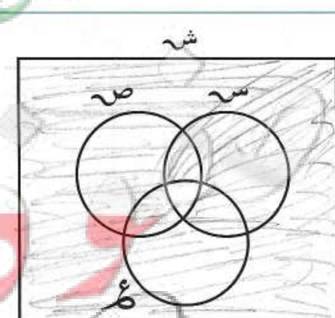
$\overline{\text{س}}$

ب



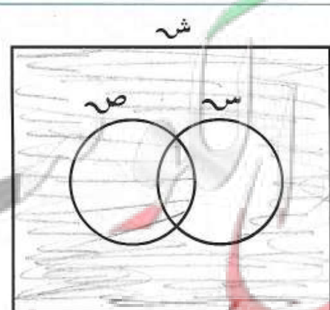
$\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$

جـ



(س ∩ ص ∩ ع)

د

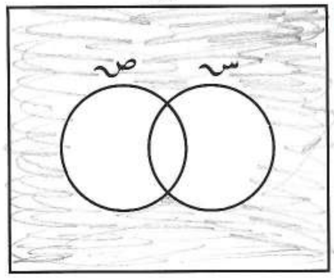


(س − ص)

تمـــرَّنْ :

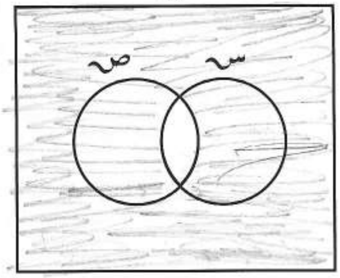
١ ظلِّل المنطقة التي تمثّل كلًّا ممّا يلي في الأشكال التالية :

أ



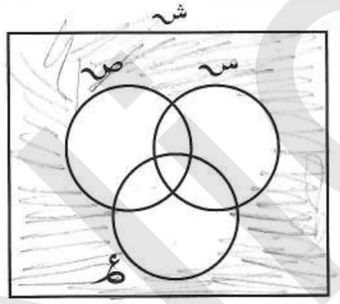
$\overline{س \cup ص}$

ب



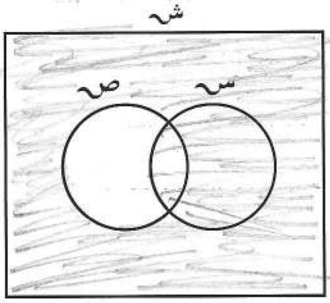
$\overline{س \cap ص}$

جـ



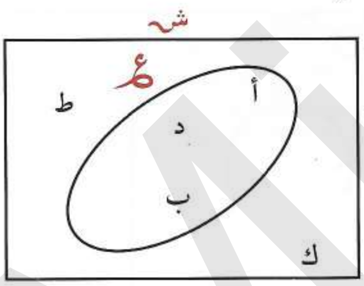
$\overline{(س \cup ص \cup ع)}$

د



$\overline{(ص - س)}$

٢ من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



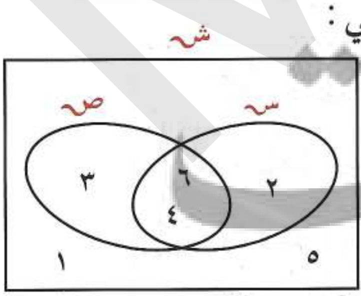
ش = {أ ، د ، ب ، ك ، ط}

ع = {أ ، د ، ب}

$\overline{ع}$ = {ك ، ط}

$\overline{\overline{ع}}$ = ع = {أ ، ب ، د}

٣ من شكل ڤن المقابِل ، أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



أ ش = {٢ ، ٦ ، ٤ ، ٣ ، ١ ، ٥}

س = {٢ ، ٦ ، ٤}

ص = {٦ ، ٤ ، ٣}

$\overline{س}$ = {٣ ، ١ ، ٥} ، $\overline{ص}$ = {٢ ، ٥ ، ١}

Midnight

KuwaitTeachers.Com

ب) $(\overline{\text{س} \cap \text{ص}})$ = $\overline{\text{س}} \cup \overline{\text{ص}}$ = {٢ ، ٣ ، ١ ، ٥}

$(\overline{\text{س} \cup \text{ص}})$ = $\overline{\text{س}} \cap \overline{\text{ص}}$ = {١ ، ٥}

---

٤) إذا كانت المجموعة الشاملة ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
م = مجموعة الأعداد الفردية الأكبر من ١ والأصغر من ٧ ،
ك = {أ : أ عدد زوجي ، ١ < أ < ٦ } ،
فأوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

م = {٣ ، ٥}

ك = {٢ ، ٤}

$\overline{\text{م}}$ = {١ ، ٢ ، ٤}

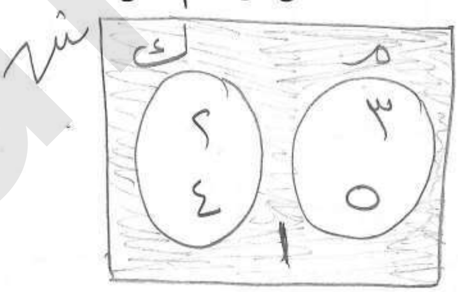
$\overline{\text{ك}}$ = {١ ، ٣ ، ٥}

$(\overline{\text{م} \cap \text{ك}})$ = $\overline{\text{م}} \cup \overline{\text{ك}}$ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

م − ك = {٣ ، ٥}

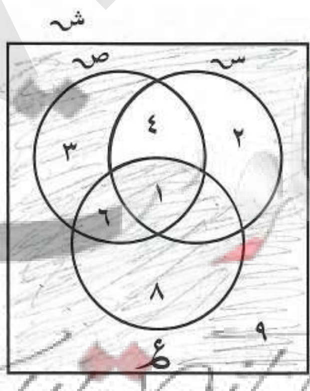
$(\overline{\text{م} - \text{ك}})$ = ش − (م − ك) = {١ ، ٢ ، ٤}

مثّل كلًّا من ش ، م ، ك بشكل ڤن ، ثمّ ظلّل المنطقة التي تمثّل $(\overline{\text{م} \cap \text{ك}})$.



---

٥) من شكل ڤن المقابل ، أكمل بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



أ) ش = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩}

ب) ص = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٦}

جـ) $\overline{\text{س}}$ = {٣ ، ٦ ، ٨ ، ٩}

د) ص − ع = {٤ ، ٣}

هـ) $(\overline{\text{س} \cap \text{ص}})$ = {٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ، ٩}

ثمّ ظلّل المنطقة التي تمثّل $(\overline{\text{س} - \text{ع}})$.

Midnight
KuwaitTeacher.com

٦-٣ التطبيق وأنواعه
Mapping and its Kind

العبارات والمفردات :

تطبيق
Mapping

المجال
Domain

المجال المقابِل
Corresponding Domain

المدى
Range

تطبيق شامل
Surjective

تطبيق متباين
Injective

تطبيق تقابل
Bijective

دالّة
Function

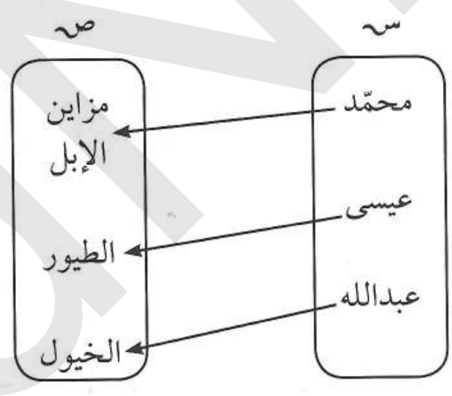
سوف تتعلّم : التطبيق (الدالّة) وأنواعه .

درست فيما سبق : أنّ العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي تطبيق (دالّة) إ... ارتبط كلّ عنصر من س بعنصر واحد وواحد فقط من ص . وتُسمّى س « المجال » ... ص « المجال المقابِل » وتُسمّى مجموعة صور عناصر المجال « المدى » .

نشاط :

شارك مجموعة من الأصدقاء هم محمّد وعيسى وعبدالله في مسابقات الموروث الشعبي الخليجي على يومين متتاليين . المخطّطات السهمية التالية تمثّل المسابقات التي اشترك فيها الأصدقاء حيث س تمثّل مجموعة الأصدقاء ، ص تمثّل مجموعة المسابقات ، **كلّ من العلاقات التالية تمثّل تطبيقًا .**

اليوم الأول



ت : س ⟵ ص

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

في التطبيق ت : س ⟵ ص

المجال = { محمد ، عيسى ، عبدالله }

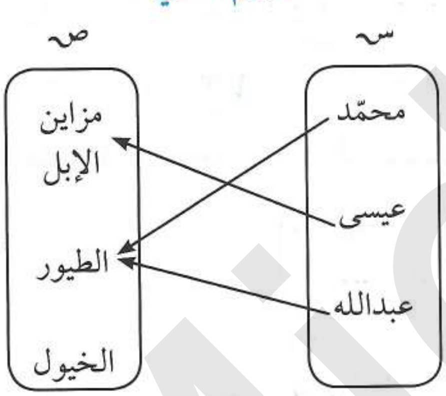
المجال المقابل = { مزاين الإبل ، الطيور ، الخيول }

المدى = { مزاين الإبل ، الطيور ، الخيول }

هل المدى يساوي المجال المقابل ؟

نعم

اليوم الثاني



ن : س ⟵ ص

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

في التطبيق ن : س ⟵ ص

المجال = { محمد ، عيسى ، عبدالله }

المجال المقابل = { مزاين الإبل ، الطيور ، الخيول }

المدى = { مزاين الإبل ، الطيور }

هل المدى يساوي المجال المقابل ؟

لا

معلومات مفيدة :

تقيم قرية صباح الأحمد التراثية مهرجان الموروث الشعبي الخليجي في كلّ عام ، والذي يشمل العديد من الاحتفاليات الوطنية والفعّاليات من الفنون الشعبية والتراثية والثقافية والفنّية والرياضية والعديد من المسابقات والأنشطة التي تضفي جوًّا من البهجة والترفيه على زوّار القرية .

kuwaitteacher.com

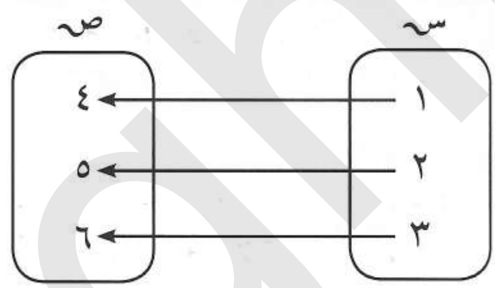
التطبيق الذي يتساوى فيه المدى والمجال المقابِل يُسمّى « **تطبيق شامل** » .

ممّا سبق نستنتج أنّ :

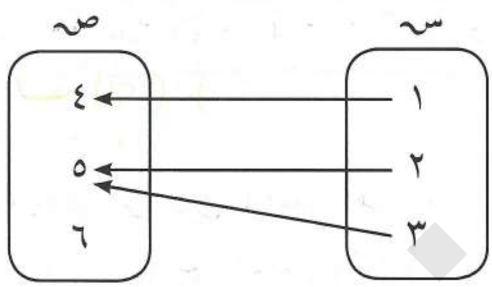
ت تطبيق شامل ، ں تطبيق ليس شاملًا .

تدرّب (١) :

أيّ التطبيقات التالية شامل وأيّها ليس شاملًا ؟ أُذكر السبب :



ت : س ⟵ ص



ں : س ⟵ ص

ت تطبيق شامل

السبب : لأن المدى = المجال المقابل

ں تطبيق ليس شامل

السبب : لأن المدى ≠ المجال المقابل

من تدرّب (١) : أكمِل :

في التطبيق ت : س ⟵ ص

ت (١) = ٤

ت (٢) = ٥

ت (٣) = ٦

هل صور عِناصر المجال مختلفة ؟

نعم

في التطبيق ں : س ⟵ ص

ں (١) = ٤

ں (٢) = ٥

ں (٣) = ٥

هل صور عناصر المجال مختلفة ؟

لا

التطبيق الذي لا يرتبط فيه عنصران أو أكثر من المجال بالعنصر نفسه من المجال المقابِل يُسمّى « **تطبيق متباين** » .

إذًا في تدرب (١) : ت تطبيق متباين ، ں تطبيق ليس متباينًا .

التطبيق الشامل والمتباين يُسمّى « **تطبيق تقابل** » .

إذًا في تدرب (١) : ت تطبيق تقابل ، ں تطبيق ليس تقابلًا .

Midnight
معاً نفوق الوقت
KuwaitTeacher.Com

مثال (١):

إذا كانت سـ = { -١ ، ٠ ، ٣ } ، صـ = { -٣ ، -١ ، ٥ } ،
التطبيق ت : سـ ⟵ صـ ، حيث ت (س) = ٢س - ١

أ أوجِد مدى التطبيق ت .

ب اُكتب التطبيق ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

جـ بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب

د مثِّل التطبيق ت بمخطَّط سهمي وآخر بياني .

الحلّ:

أ ت (س) = ٢س - ١

ت (-١) = ٢ × (-١) - ١ = -٣

ت (٠) = ٢ × (٠) - ١ = -١

ت (٣) = ٢ × (٣) - ١ = ٥

المدى = { -٣ ، -١ ، ٥ }

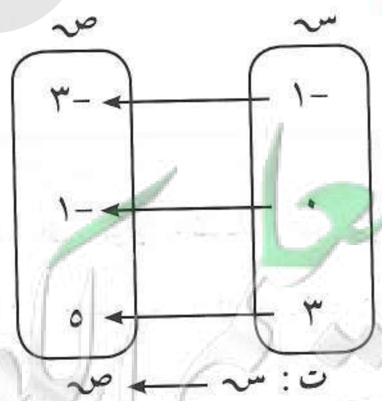
ب ت = { (-١ ، -٣) ، (٠ ، -١) ، (٣ ، ٥) }

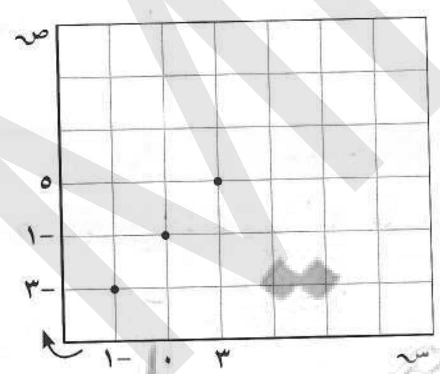
جـ ت تطبيق شامل لأنّ المدى = المجال المقابِل .

ت تطبيق متباين لأنّ ت (-١) ≠ ت (٠) ≠ ت (٣)

ت تطبيق تقابل لأنّه شامل ومتباين .

د





تدرّب (٢) :

إذا كانت س = {−٣ ، ٠ ، ٣}، ص = {−٩ ، ٠ ، ٩}،

التطبيق ن : س ⟵ ص ، حيث ن (س) = ٣ س

أ أوجِد مدى التطبيق ن .

ن (س) = ٣ س

ن (−٣) = ٣ × −٣ = −٩

ن (٠) = ٣ × ٠ = ٠

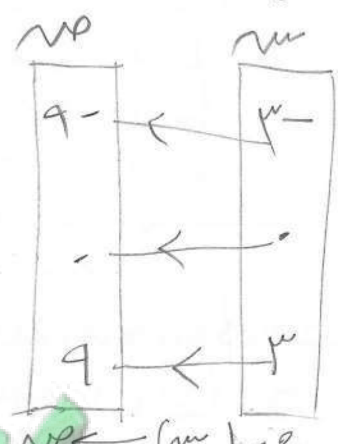
ن (٣) = ٣ × ٣ = ٩

المدى = {−٩ ، ٠ ، ٩}

ب أُكتب التطبيق ن كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ن = {(−٣ ، −٩) ، (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٩)}

جـ مثِّل التطبيق ن بمخطَّط سهمي .



د بيِّن نوع التطبيق ن من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ن تطبيق شامل لأنّ : المدى = المجال المقابل

ن تطبيق متباين لأنّ : ن(−٣) ≠ ن(٠) ≠ ن(٣)

ن تطبيق تقابل لأنه : شامل ومتباين

Midnight
KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٣) :

ليكن التطبيق ت : { −٢ ، −١ ، ٢ ، ٣ } ⟵ { ٠ ، ٣ ، ٨ } ، حيث ت (س) = $س^٢$ −

أ) أوجِد مدى التطبيق ت .

ت (س) = $س^٢$ − ١

ت(−٢) = $(−٢)^٢$ − ١ = ٤ − ١ = ٣

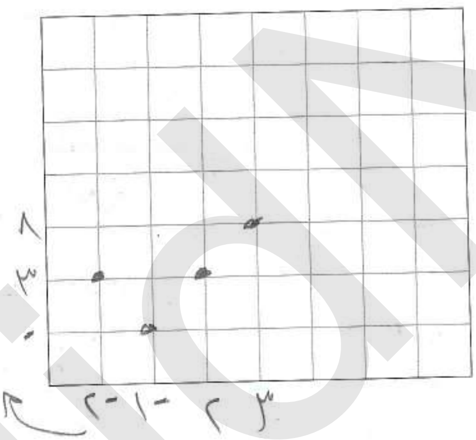
ت(−١) = $(−١)^٢$ − ١ = ١ − ١ = ٠

ت(٢) = $(٢)^٢$ − ١ = ٤ − ١ = ٣

ت(٣) = $(٣)^٢$ − ١ = ٩ − ١ = ٨

المدى = { ٠ ، ٣ ، ٨ }

ب) مثِّل التطبيق ت بمخطَّط بياني .



جـ) بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

التطبيق شامل لأن المدى = المجال المقابل

التطبيق ليس متباين لأن ت(−٢) = ت(٢)

التطبيق ليس تقابل لأنه ليس متباين

فكِّر وناقِش

إذا كان التطبيق ن : ص ⟵ ص ، حيث ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة ، ن (س) = $س^٢$ ، هل التطبيق ن تطبيق متباين ؟ لا

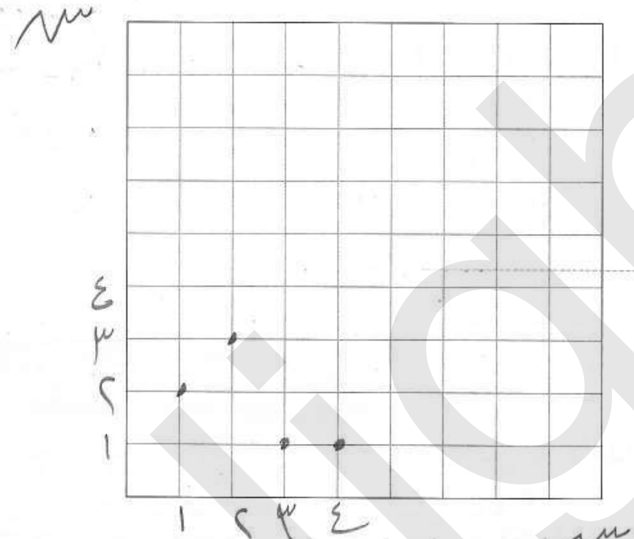
KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٤) :

إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، التطبيق د : سـ ⟵ سـ ،

حيث د = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ١) }

أ مثّل التطبيق د بمخطّط بياني .



ب أُكتب مدى التطبيق .

المدى = { ٢ ، ٣ ، ١ }

جـ هل التطبيق د تطبيق تقابل ؟ لماذا ؟

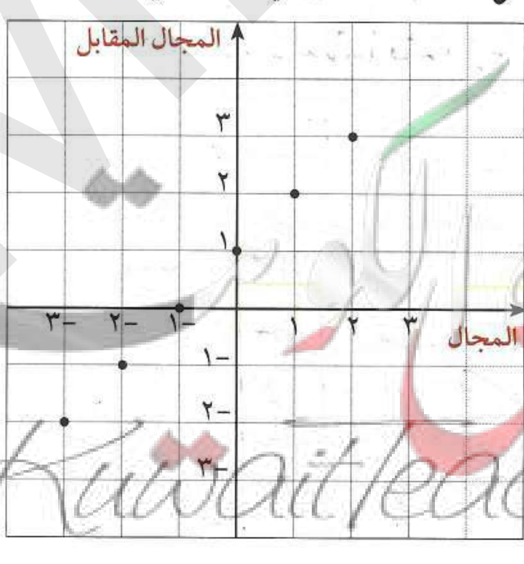
التطبيق ليس شامل لأن المدى ≠ المجال المقابل

التطبيق ليس متباين لأن د(٣) = د(٤)

التطبيق ليس تقابل لأنه ليس شامل وليس متباين

مثال (٢) :

ليكن التطبيق ن : صـ ⟵ صـ (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث ن (س) = س + ١ ، مثّل ن بمخطّط بياني .



الحلّ :

(المجال صـ مجموعة غير منتهية فنوجد صور بعض العناصر) .

⋮

ن (-٢) = -٢ + ١ = -١

ن (-١) = -١ + ١ = ٠

ن (٠) = ٠ + ١ = ١

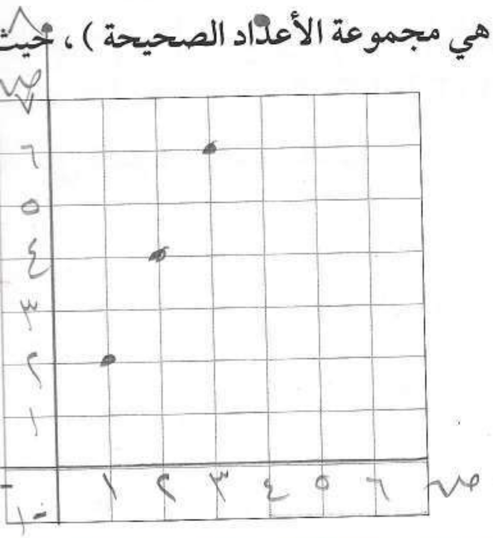
ن (١) = ١ + ١ = ٢

⋮

Midnight
Kuwaitteacher.Com

تدرّب (٥) :

ليكن التطبيق ت : $ص_{+}$ ⟵ ص (ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث ت (س) = ٢س ، مثل ت بمخطَّط بياني .



ت(١) = ٢×١ = ٢

ت(٢) = ٢×٢ = ٤

ت(٣) = ٢×٣ = ٦

ت(٤) = ٢×٤ = ٨

فكِّر وناقِش

ليكن التطبيق ت : $ص_{+}$ ⟵ ص (ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ،
حيث ت (س) = ٢س ، هل التطبيق ت تطبيق تقابل؟

ليس تقابل لأن المدى ≠ المجال المقابل صه
وبالتالي ليس تقابل

تمــرَّنْ :

١ إذا كانت س = {-٢ ، ٠ ، ٢} ، ص = {-٤ ، ٢ ، ٨} ،
التطبيق ه : س ⟵ ص ، حيث ه (س) = ٣ س + ٢

أ أوجِد مدى التطبيق ه .

ه(س) = ٣س + ٢

ه(-٢) = ٣×-٢ + ٢ = -٦ + ٢ = -٤

ه(٠) = ٣×٠ + ٢ = ٠ + ٢ = ٢

ه(٢) = ٣×٢ + ٢ = ٦ + ٢ = ٨

المدى = {-٤ ، ٢ ، ٨}

ب أُكتب التطبيق ه كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ه = {(-٢ ، -٤) ، (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٨)}

جـ مثِّل التطبيق ه بمخطَّط سهمي .

Kuwaitteacher.Com

د بيِّن نوع التطبيق ق من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

التطبيق شامل لأن المدى = المجال المقابل

التطبيق متباين لأن ق(−٢) ≠ ق(٠) ≠ ق(٢)

التطبيق تقابل لأنه شامل ومتباين

---

٢ إذا كانت ل = { ١ ، −١ ، ٣ } ، م = { ٢ ، ٥ ، ١٠ } ،

التطبيق هـ : ل ⟵ م ، حيث هـ (س) = $س^٢ + ١$

أ أوجِد مدى التطبيق هـ .

هـ(س) = $س^٢$ + ١

هـ(١) = $(١)^٢$ + ١ = ١ + ١ = ٢

هـ(−١) = $(−١)^٢$ + ١ = ١ + ١ = ٢

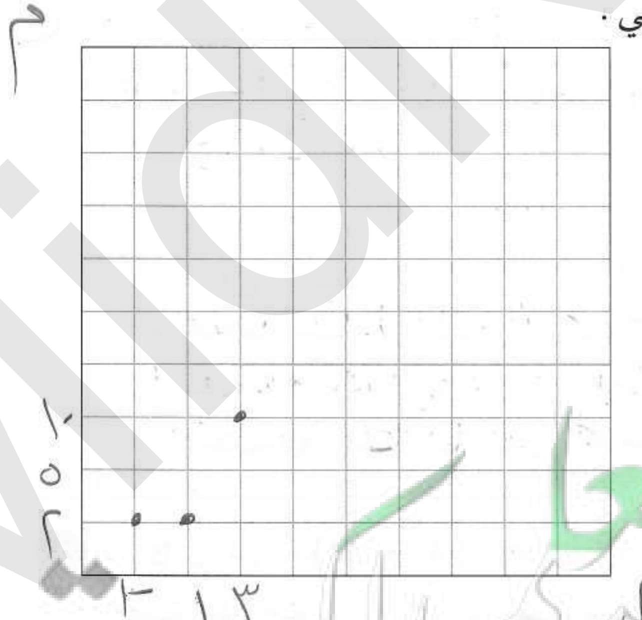
هـ(٣) = $(٣)^٢$ + ١ = ٩ + ١ = ١٠

المدى = { ٢ ، ١٠ }

ب أُكتب التطبيق هـ كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

هـ = { (١ ، ٢) ، (−١ ، ٢) ، (٣ ، ١٠) }

جـ مثِّل التطبيق هـ بمخطَّط بياني .



د بيِّن نوع التطبيق هـ من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

التطبيق ليس شامل لأن المدى ≠ المجال المقابل

التطبيق ليس متباين لأن هـ(١) = هـ(−١)

التطبيق ليس تقابل لأنه ليس شامل وليس متباين

٣ إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٨ } ،
التطبيق د : س ⟵ ص ، حيث د (س) = س^{٣}

أ أوجِد مدى التطبيق د .

د(س) = س^{٣}

د(٠) = (٠)^{٣} = ٠

د(١) = (١)^{٣} = ١

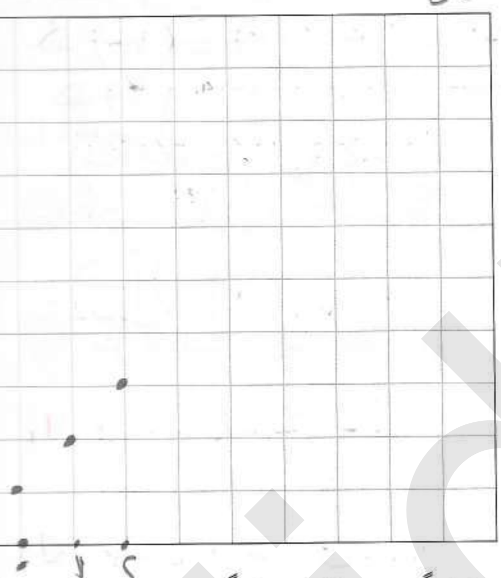
د(٢) = (٢)^{٣} = ٨

المدى = { ٠ ، ١ ، ٨ }

ب أُكتب التطبيق د كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

د = { (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٨) }

جـ مثِّل التطبيق د بمخطَّط بياني .



د بيِّن نوع التطبيق د من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب

التطبيق شامل لأن المدى = المجال المقابل

التطبيق متباين لأن د(٠) ≠ د(١) ≠ د(٢)

التطبيق تقابل لأنه شامل ومتباين

٤ إذا كانت س = { ١ ، ٤ ، ٩ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
التطبيق ت : س ⟵ ص ، حيث ت (س) = $\sqrt{\text{س}}$

أ أوجِد مدى التطبيق ت .

ت(س) = $\sqrt{\text{س}}$

ت(١) = $\sqrt{١}$ = ١

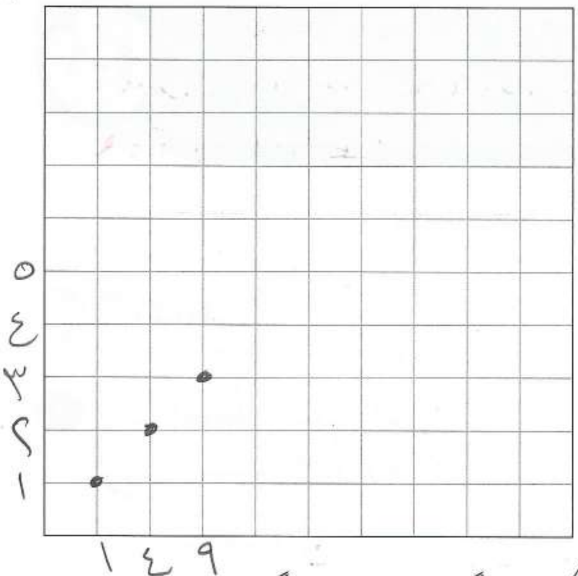
ت(٤) = $\sqrt{٤}$ = ٢

ت(٩) = $\sqrt{٩}$ = ٣

المدى = { ١ ، ٢ ، ٣ }

KuwaitTeacher.Com

ب مثِّل التطبيق ت بمخطَّط بياني .



جـ بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

التطبيق ليس شامل لأن المدى ≠ المجال المقابل

التطبيق متباين لأن ت(١) ≠ ت(٤) ≠ ت(٩)

التطبيق ليس تقابل لأنه ليس شامل

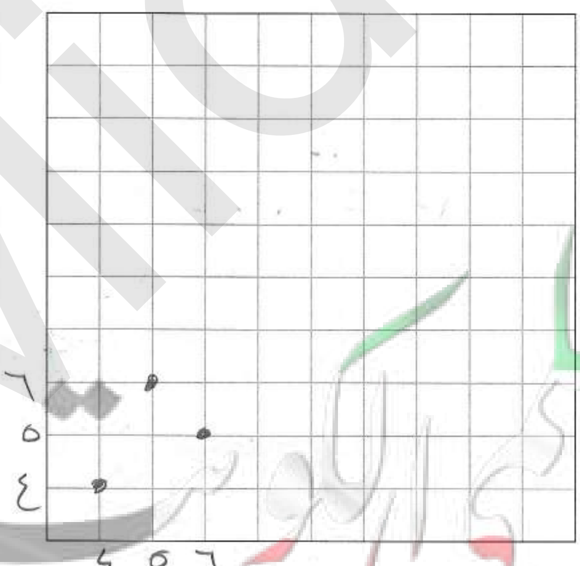
---

٥ إذا كانت سـ = { ٤ ، ٥ ، ٦ } ، التطبيق ك : سـ ⟵ سـ ،
حيث ك = { (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) }

أ أوجد مدى التطبيق ك .

المدى = { ٤ ، ٦ ، ٥ }

ب مثِّل التطبيق ك بمخطَّط بياني .



جـ بيِّن أنّ التطبيق ك تطبيق تقابل .

التطبيق شامل لأن المدى = المجال المقابل

التطبيق متباين لأن ك(٤) ≠ ك(٥) ≠ ك(٦)

التطبيق تقابل لأنه شامل ومتباين

Midlight
صفوة الكويت
Kuwaitteacher.com

٦-٤ الدالّة الخطيّة
Linear Function

سوف تتعلّم : تمثيل الدوالّ الخطيّة بيانيًّا .

العبارات والمفردات :

متغيّر تابع
Dependent Variable

متغيّر مستقل
Independent Variable

دالّة خطية
Linear Function

معلومات مفيدة :

تستخدم المطابع الدوال الخطية لتحديد تكاليف أعمال الطباعة الضخمة .

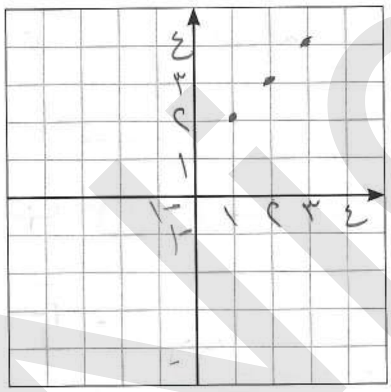
اللوازم :

- ورقة رسم بياني .
- مسطرة .

نشاط :

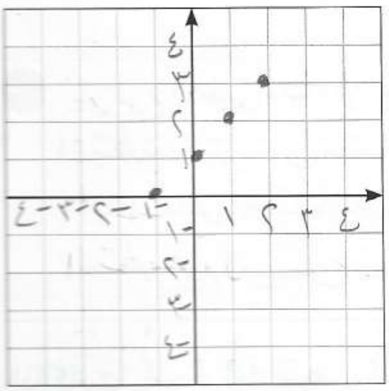
١ أُرسم المخطَّط البياني للتطبيق

ن : $ص_+$ ← ح ، ن (س) = س + ١



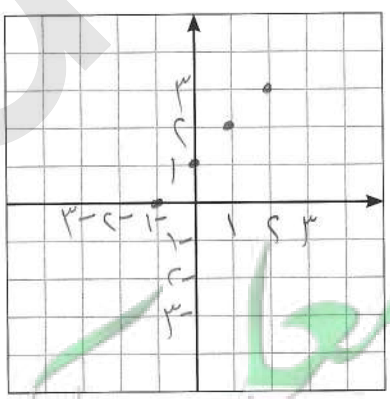
٢ أُرسم المخطَّط البياني للتطبيق

ن : ص ← ح ، ن (س) = س



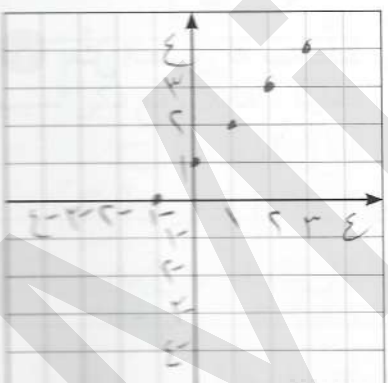
٣ أُرسم المخطَّط البياني للتطبيق

ن : ن ← ح ، ن (س) = س + ١



٤ أُرسم المخطَّط البياني للتطبيق

ن : ح ← ح ، ن (س) = س



قارِن بين المخطَّطات البيانية الأربعة السابقة .

ماذا تلاحظ ؟

الدالّة (التطبيق) التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد الحقيقية تُسمّى « دالّة حقيقية » .

KuwaitTeacher.Com

الدالّة الحقيقية ت : ح ⟵ ح ، ت (س) = أ س + ب
حيث أ ، ب ∈ ح تُسمّى « **دالّة خطّية** » (تطبيق خطّي) .

لاحِظ أنّ :

١ ت (س) = أ س + ب
تُسمّى قاعدة الاقتران ويمكن كتابتها على الصورة : ص = أ س + ب
ويكون بيانها خطًّا مستقيمًا .

٢ تُسمّى س المتغيّر المستقلّ وتُسمّى ص المتغيّر التابع .

٣ عندما يكون أ = ٠ تكون الدالّة ثابتة ويكون بيانها خطًّا مستقيمًا أفقيًّا (يوازي محور السينات) .

تدرّب (١) :

أكمِل الجدولين للدالّتين الخطّيتين التاليتين :

أ ص = س + ٣

ص = س + ٣					
س (المتغيّر المستقلّ)	-١	٠	١	٢	٣
ص (المتغيّر التابع)	٢	٣	٤	٥	٦

ب ص = ٢س

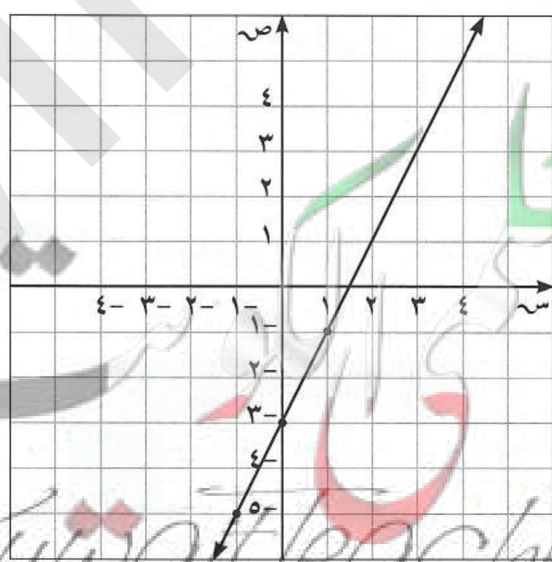
ص = ٢ س					
س	-١	٠	١	٢	٣
ص	-٢	٠	٢	٤	٦

مثال :

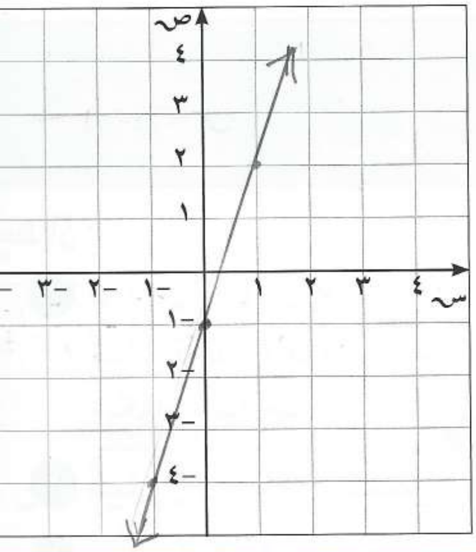
أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ٢ س – ٣

الحلّ :

ص = ٢ س – ٣			
س	١-	٠	١
ص	٥-	٣-	١-



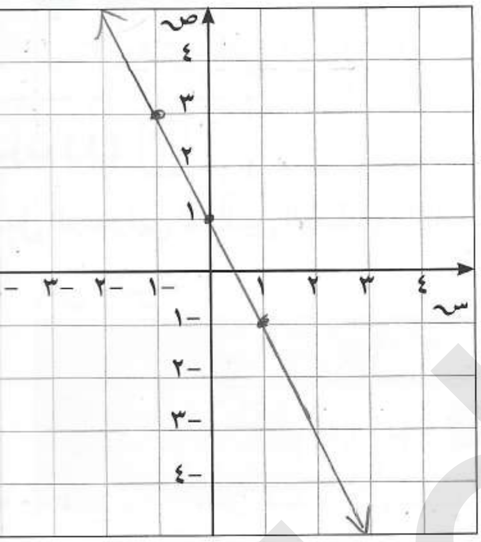
Kuwaitteacher.Com



تدرّب (٢)

أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ٣ س – ١

ص = ٣ س – ١			
س	١-	٠	١
ص	٤-	١-	٢



تدرّب (٣) :

أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ١ – ٢ س

س	ص = ١ – ٢ س	(س ، ص)
١-	ص = ١ – ٢ × ١- = ٣	(١- ، ٣)
٠	ص = ١ – ٢ × ٠ = ١	(٠ ، ١)
١	ص = ١ – ٢ × ١ = ١-	(١ ، ١-)

فكِّر وناقِش

هل بيان الدالّة ص = ٥ يوازي محور السينات ؟ نعم

أُكتب نقطتين تنتميان إلى هذا البيان . (٠ ، ٥) ، (١- ، ٥)

تمـرَّنْ :

١ أكمِل الجدولين للدالّتين الخطّيتين التاليتين :

أ ص = ٢ س – ٤

ص = ٢ س – ٤				
س	١-	٠	٢	٣
ص	٦-	٤-	٠	٢

ب ص = – س + ٢

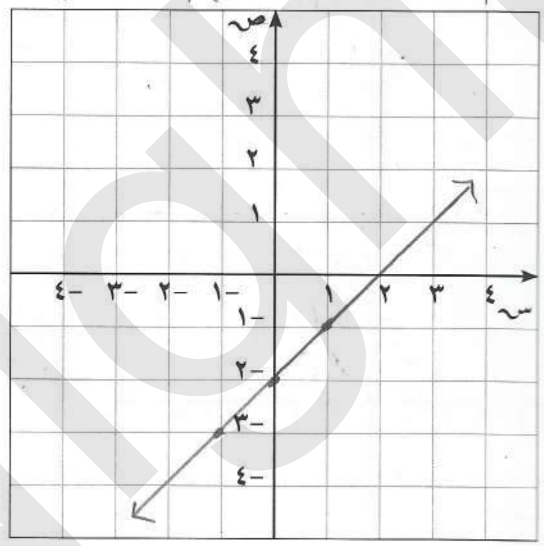
ص = – س + ٢				
س	١	٠	١-	٢-
ص	١	٢	٣	٤

KuwaitTeacher.Com

٣ أُرسم بيانيًّا كلًّا من الدوالّ الخطّية التالية :

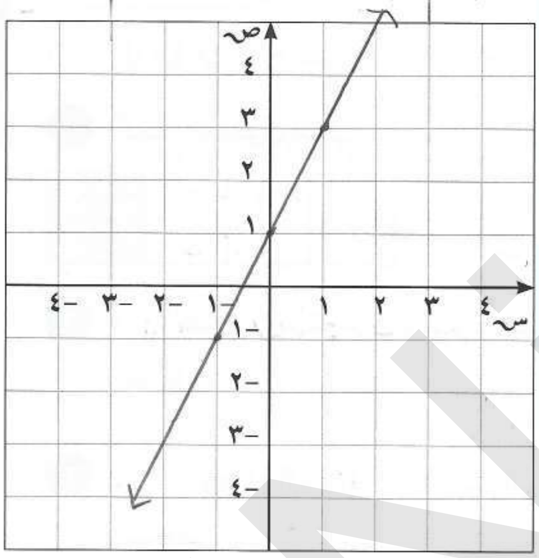
أ ص = س − ٢

س	ص = س − ٢	(س، ص)
٠	ص = ٠ − ٢ = −٢	(٠، −٢)
١	ص = ١ − ٢ = −١	(١، −١)
−١	ص = −١ − ٢ = −٣	(−١، −٣)



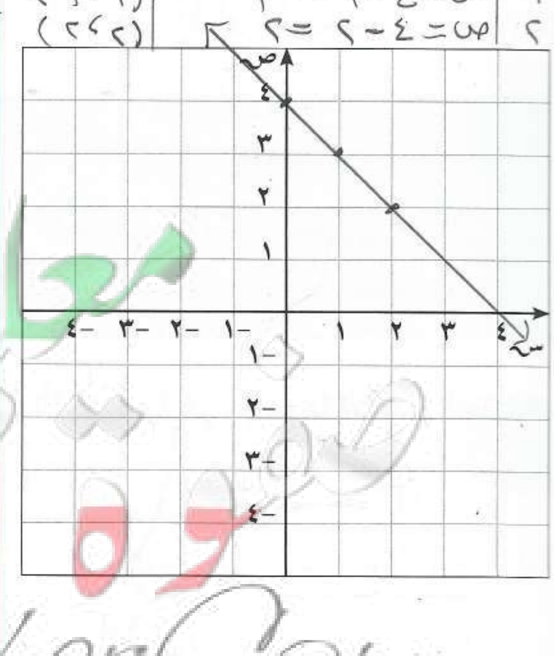
ب ص = ٢ س + ١

س	ص = ٢س + ١	(س، ص)
٠	ص = ٢ × ٠ + ١ = ١	(٠، ١)
١	ص = ٢ × ١ + ١ = ٣	(١، ٣)
−١	ص = ٢ × −١ + ١ = −١	(−١، −١)



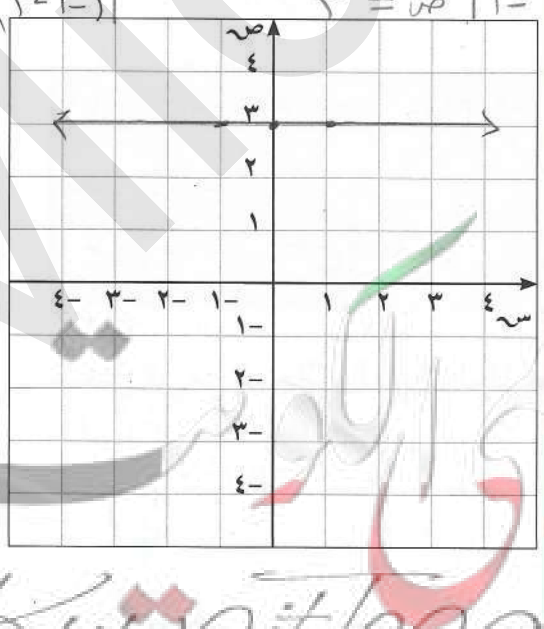
جـ ص = ٤ − س

س	ص = ٤ − س	(س، ص)
٠	ص = ٤ − ٠ = ٤	(٠، ٤)
١	ص = ٤ − ١ = ٣	(١، ٣)
٢	ص = ٤ − ٢ = ٢	(٢، ٢)



د ص = ٣

س	ص = ٣	(س، ص)
٠	ص = ٣	(٠، ٣)
١	ص = ٣	(١، ٣)
−١	ص = ٣	(−١، ٣)



KuwaitTeacher.Com

٦-٥ الدالّة التربيعية
Quadratic Function

العبارات والمفردات :
دالّة تربيعية
Quadratic Function
قطع مكافِئ
Parabola

سوف تتعلّم : الدوالّ التربيعية وتمثيلها بيانيًّا .

نشاط :

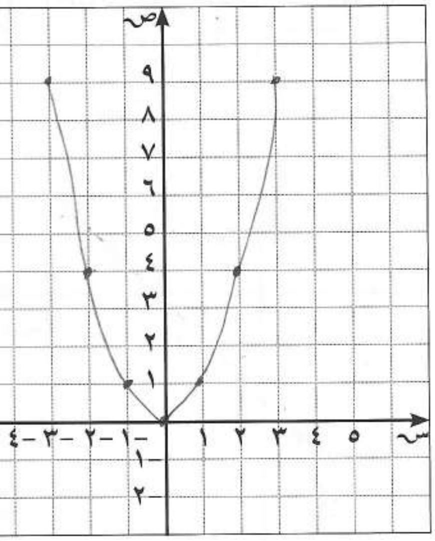
لتكن الدالّة ن : ح ← ح ، ن (س) = س^{٢}

١ أكمِل الجدول التالي :

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٤	١	٠	١	٤

٢ عيِّن النقاط السابقة في المستوى الإحداثي المقابِل.

٣ دون استخدام المسطرة صل بين النقاط السابقة.



الدالّة الحقيقية التي فيها القوّة الأعلى للمتغيّر المستقلّ تساوي ٢ تُسمّى « دالّة تربيعية »
ويكون الرسم البياني للدالّة التربيعية منحنى على شكل ∨ أو ∧ ويُسمّى « قطع مكافئ »

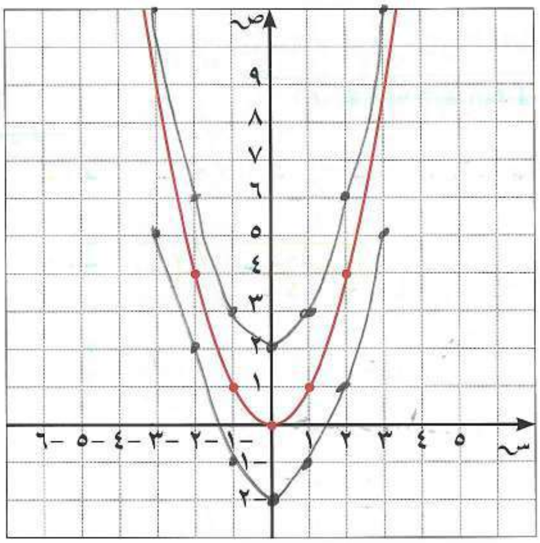
الصورة العامّة للدالّة التربيعية هي :

ص = $\underbrace{\text{أ س}^{٢}}_{\text{حدّ من الدرجة الثانية}}$ + $\underbrace{\text{ب س}}_{\text{حدّ من الدرجة الأولى}}$ + $\underbrace{\text{جـ}}_{\text{حدّ ثابت}}$ حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، أ ≠ ٠ .

سنعتبر كلّ من المجال والمجال المقابِل للدالّة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم يُذكر خلاف ذلك .

KuwaitTeacher.Com

تدرّب (١) :



الشكل المجاوِر يمثّل بيان الدالّة : ص = س^{٢}

مثّل في نفس المستوى الاحداثي بيان كلّ ممّا يلي:

أ الدالّة : ص = س^{٢} + ٢

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٦	٣	٢	٣	٦

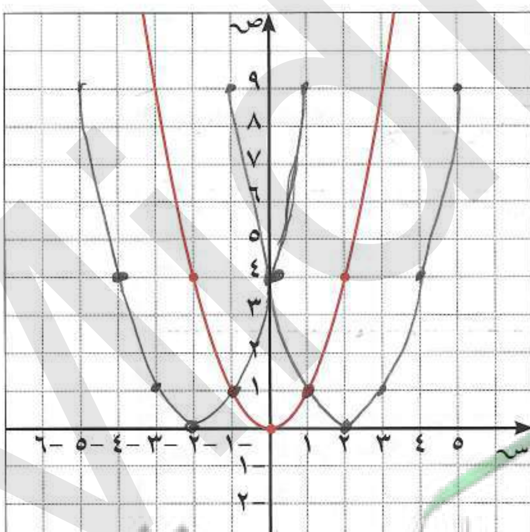
ماذا تلاحظ ؟ تم عمل إزاحة رأسية للأعلى وحدتين للدالة س^{٢}

ب الدالّة : ص = س^{٢} - ٢

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٢	-١	-٢	-١	٢

ماذا تلاحظ ؟ تم عمل إزاحة رأسية للأسفل وحدتين للدالة س^{٢}

تدرّب (٢) :



الشكل المجاوِر يمثّل بيان الدالّة : ص = س^{٢}

مثّل في نفس المستوى الاحداثي بيان كلّ ممّا يلي:

أ الدالّة : ص = (س - ٢)^{٢}

س	٤	٣	٢	١	٠
ص	٤	١	٠	١	٤

ماذا تلاحظ ؟ تم عمل إزاحة أفقية لليمين وحدتين للدالة س^{٢}

ب الدالّة : ص = (س + ٢)^{٢}

س	٠	-١	-٢	-٣	-٤
ص	٤	١	٠	١	٤

ماذا تلاحظ ؟ تم عمل إزاحة أفقية لليسار وحدتين للدالة س^{٢}

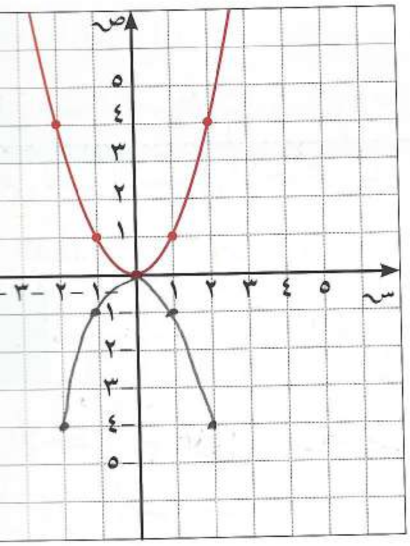
KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٣) :

الشكل المجاوِر يمثّل بيان الدالّة : ص = س^{٢}

مثِّل في نفس المستوى الاحداثي

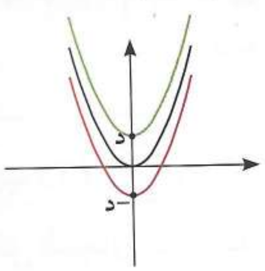
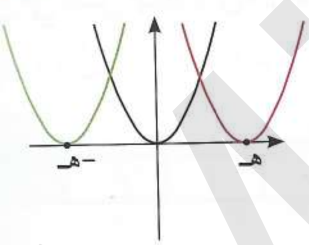
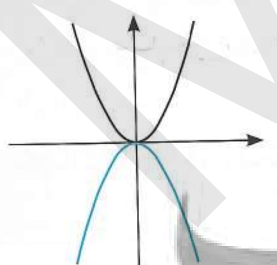
بيان الدالّة : ص = − س^{٢}



ص	٢	١	٠	−١	−٢
س	−٤	−١	٠	−١	−٤

ماذا تلاحظ ؟ تم عمل انعكاس حول محور السينات الدالة

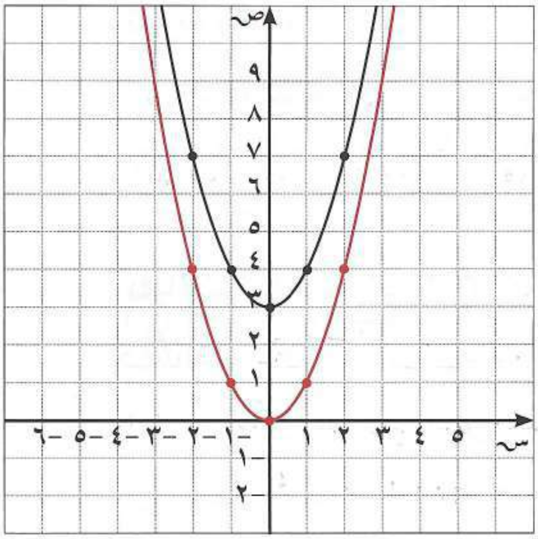
س ع

الدالّة التربيعية	التحويلات الهندسية المطبَّقة على التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}	التمثيل البياني
ص = س^{٢} + د	إزاحة رأسية د وحدة إلى الأعلى إذا كانت د موجَبة ، وإزاحة رأسية | د | وحدة إلى الأسفل إذا كانت د سالبة .	
ص = (س + هـ)^{٢}	إزاحة أفقية هـ وحدة إلى اليسار إذا كانت هـ موجَبة ، وإزاحة أفقية | هـ | وحدة إلى اليمين إذا كانت هـ سالبة .	
ص = −س^{٢}	اِنعكاس في محور السينات .	

KuwaitTeacher.Com

مثال (١) :

مثِّل بيانيًّا الدالّة ص = س^{٢} + ٣ مستخدمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



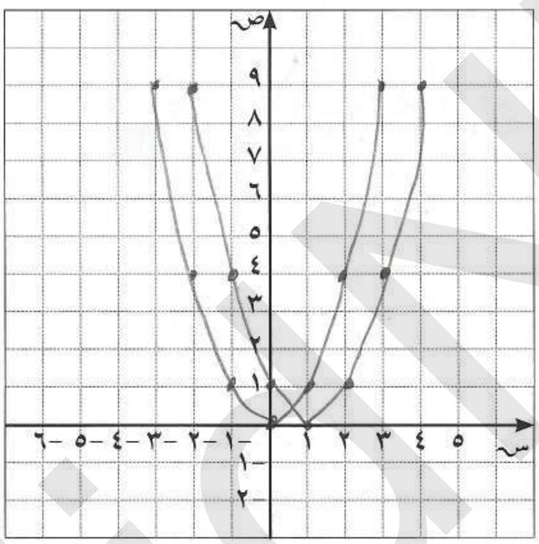
الحلّ :

- نرسم بيان الدالّة : ص = س^{٢}
- بيان الدالّة ص = س^{٢} + ٣

هو إزاحة رأسية لبيان الدالّة : ص = س^{٢}
٣ وحدات إلى الأعلى وتُمثَّل كما في الشكل .

تدرّب (٤) :

مثِّل بيانيًّا الدالّة ص = (س – ١)^{٢} مستخدمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} .



أ) أُرسم بيان الدالّة : ص = س^{٢}

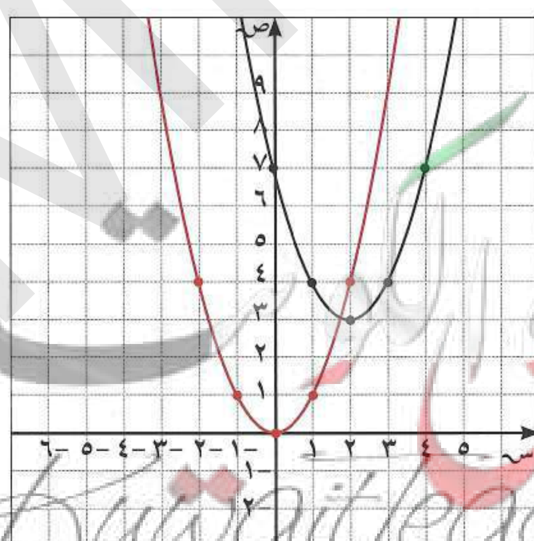
ب) بيان الدالّة ص = (س – ١)^{٢}

هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة : ص = س^{٢}
لليمين وحدة واحدة

جـ) أُرسم بيان الدالّة ص = (س – ١)^{٢}

مثال (٢) :

مثِّل بيانيًّا الدالّة ص = (س – ٢)^{٢} + ٣ مستخدمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



الحلّ :

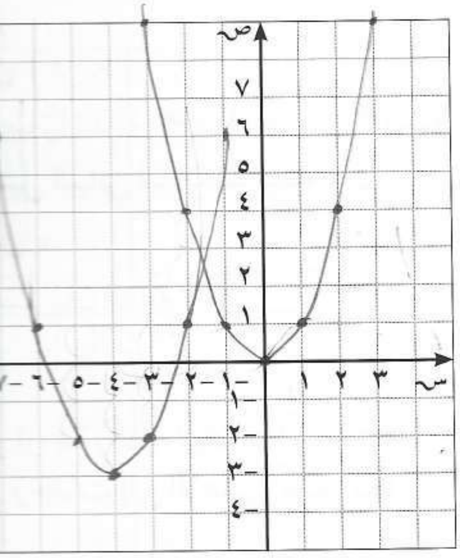
- نرسم بيان الدالّة : ص = س^{٢}
- بيان الدالّة ص = (س – ٢)^{٢} + ٣

هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة : ص = س^{٢}
وحدتان إلى اليمين ، وإزاحة رأسية ٣ وحدات إلى الأعلى .

KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٥) :

مثّل بيانيًّا الدالّة ص = $($ س + ٤ $)^{٢}$ − ٣ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = $س^{٢}$

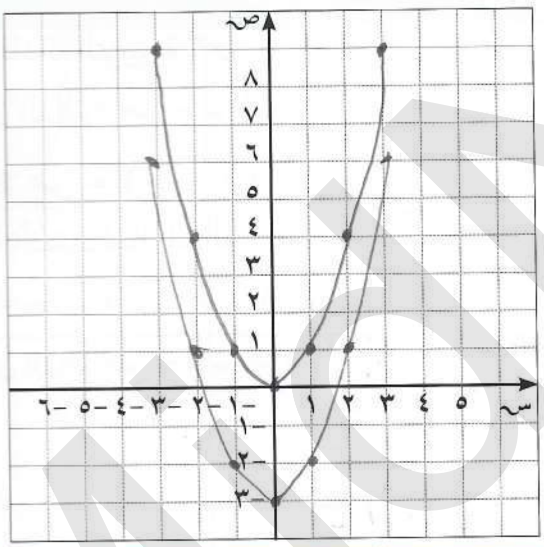


بيان الدالة ص = (س + ٤)^{٢} − ٣ هو إزاحة أفقية لليسار ٤ وحدات ثم إزاحة رأسية للأسفل ٣ وحدات لبيان الدالة ص = س^{٢}

تمــرّنْ :

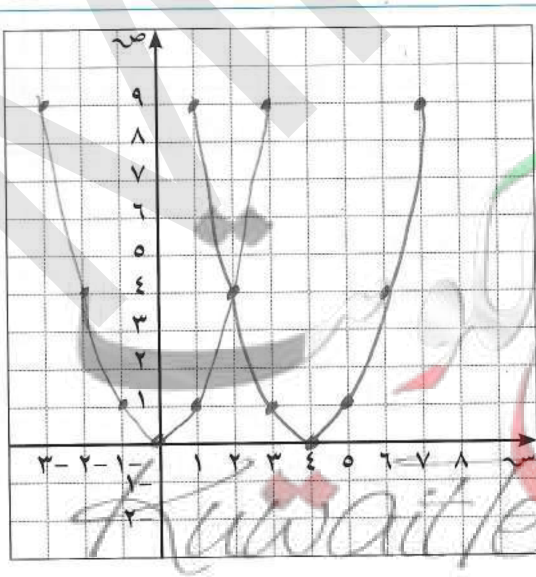
مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = $س^{٢}$ ، مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوالّ التالية

١ ص = $س^{٢}$ − ٣



بيان الدالة ص = س^{٢} − ٣ هو إزاحة رأسية للأسفل ٣ وحدات لبيان الدالة ص = س^{٢}

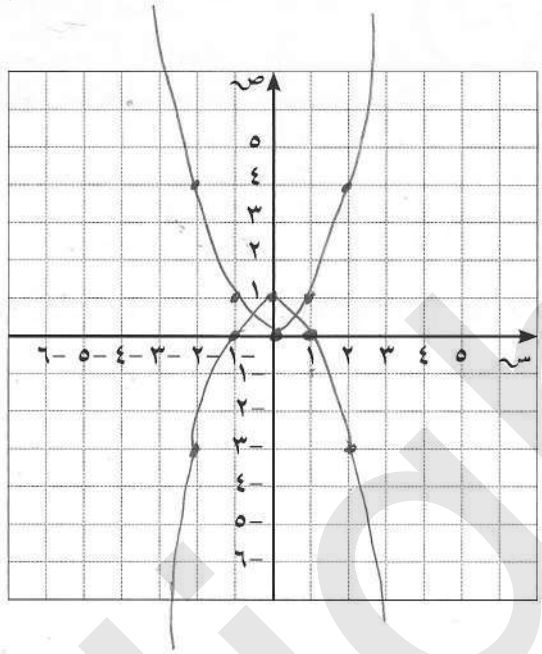
٢ ص = $($ س − ٤ $)^{٢}$



بيان الدالة ص = (س − ٤)^{٢} هو إزاحة أفقية لليمين ٤ وحدات

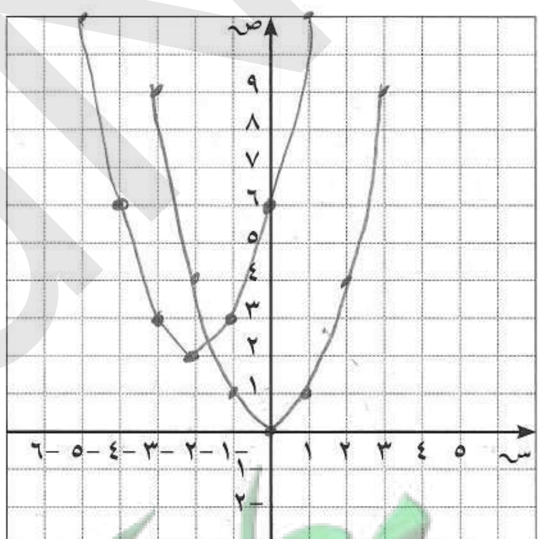
KuwaitTeacher.Com

٣ $ص = -س^٢ + ١$



انعكاس للدالة
ص = $س^٢$ ثم إزاحة
رأسية للأعلى
وحدة واحدة

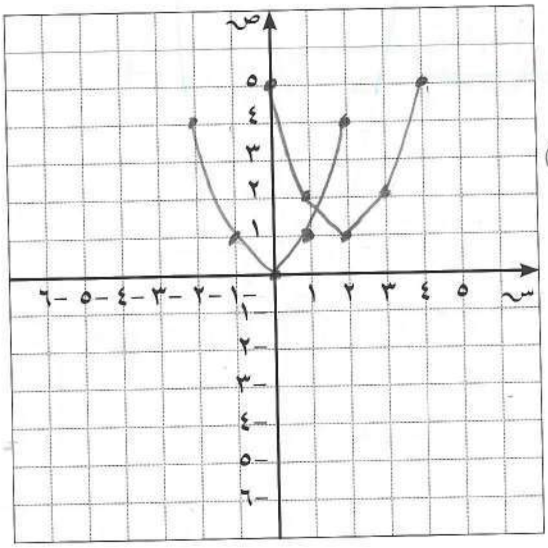
٤ $ص = (س + ٢)^٢ + ٢$



إزاحة أفقية
لليسار وحدتين
ثم إزاحة رأسية
للأعلى وحدتين
لبيان الدالة
ص = $س^٢$

MidAlight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

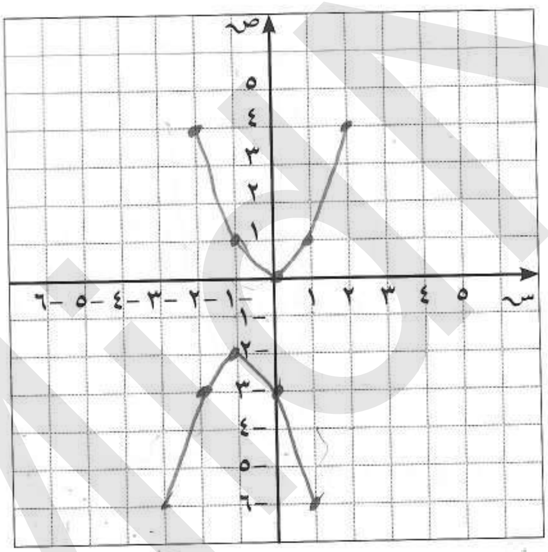
٥ ص = (س − ٢)^{٢} + ١



بيان الدالة ص = (س − ٢)^{٢} + ١
هو إزاحة أفقية لليمين وحدتين
ثم إزاحة رأسية للأعلى
وحدة واحدة

* ٦ ص = − (س + ١)^{٢} − ٢

بيان الدالة ص = −(س + ١)^{٢} − ٢
هو إنعكاس ثم إزاحة أفقية
لليسار وحدة واحدة ثم
إزاحة رأسية للأسفل
وحدتين

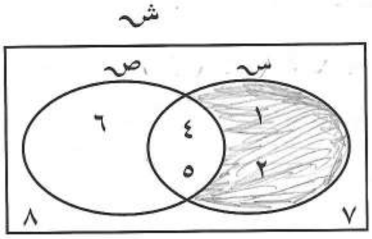


صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

٦-٦ مراجعة الوحدة السادسة
Revision Unit six

أوّلًا : التمارين المقالية

١ من شكل ڤن المقابِل ، أكمِل بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :



أ ش = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

ب س = {١، ٢، ٤، ٥}

جـ ص = {٤، ٥، ٦}

د س − ص = {١، ٢}

هـ ص − س = {٦}

و $\overline{\text{س}}$ = {٦، ٧، ٨}

ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل (س − ص) .

---

٢ لتكن المجموعة الشاملة ش = مجموعة الأعداد الكلّية الأصغر من ٥ ،
س = { ا : ا عدد صحيح موجَب ، ا ≤ ٤ } ، ع = {٢ ، ٤} .

أوجِد بذكر العناصر كلًّا ممّا يلي :

أ ش = {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

ب س = {١، ٢، ٣، ٤}

جـ $\overline{\text{س}}$ = {٠}

د $\overline{\text{ع}}$ = {٠، ١، ٣}

هـ س − ع = {١، ٣}

و ($\overline{\text{س}}$ ∩ $\overline{\text{ع}}$) = {٠}

ز ($\overline{\text{س} \cap \text{ع}}$) = $\overline{\text{س}}$ ∪ $\overline{\text{ع}}$ = {٠، ١، ٣}

ح $\overline{\overline{\text{س}}}$ = س = {١، ٢، ٣، ٤}

Midkight
KuwaitTeacher.Com

٣ إذا كان التطبيق د : س ← ص ، حيث س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ،
ص = { ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ } ، د (س) = ٢س + ١

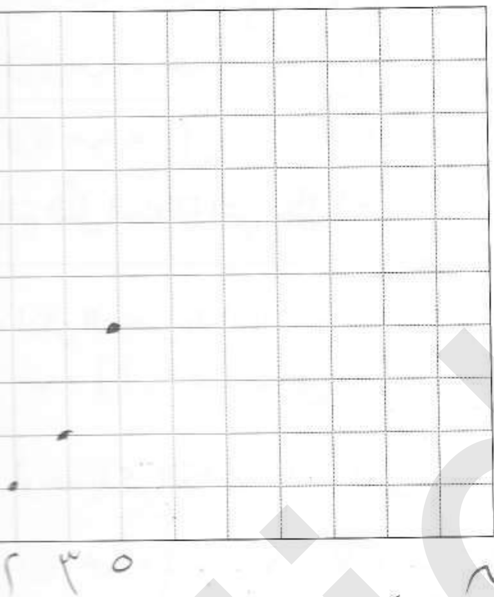
أ أوجِد مدى التطبيق د .

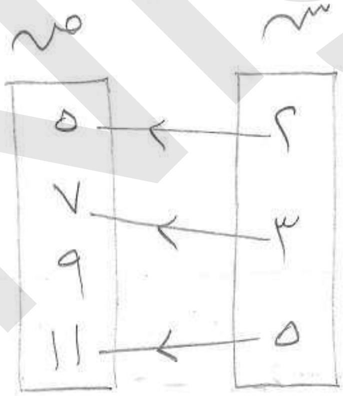
د(س) = ٢س + ١
د(٢) = ٢ × ٢ + ١ = ٥
د(٣) = ٢ × ٣ + ١ = ٧
د(٥) = ٢ × ٥ + ١ = ١١
المدى = { ٥ ، ٧ ، ١١ }

ب أُكتب د كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

د = { (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٥ ، ١١) }

جـ مثِّل التطبيق د بمخطَّط سهمي وآخر بياني .





د بيِّن نوع التطبيق د من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

التطبيق ليس شامل لأن المدى ≠ المجال المقابل
التطبيق متباين لأن د(٢) ≠ د(٣) ≠ د(٥)
التطبيق ليس تقابل لأنه ليس شامل

٤ التطبيق ن : س ← ع ، حيث س = { أ : أ ∈ ص ، -١ ≤ أ ≤ ١ } ،
(ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة)

ع = { ب : ب ∈ مجموعة الأعداد الكلّية ، ب ≤ ٢ } ، ن (س) = س^2

أ أُكتب كلًّا من س ، ع بذكر العناصر .

س = { -١ ، ٠ ، ١ }
ع = { ٠ ، ١ ، ٢ }

KuwaitTeacher.Com

ب أوجِد مدى التطبيق ت .

ه(س) = $س^٢$

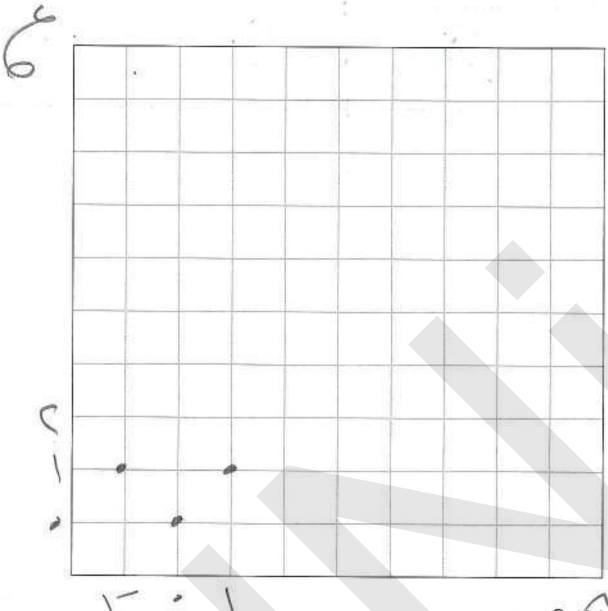
ه(-١) = $(-١)^٢$ = ١

ه(٠) = $(٠)^٢$ = ٠

ه(١) = $(١)^٢$ = ١

المدى = {٠ ، ١}

جـ مثِّل التطبيق ت بمخطَّط بياني .



د هل التطبيق ت تطبيق تقابل ؟ لماذا ؟

التطبيق ليس شامل لأنه المدى ≠ المجال المقابل

التطبيق ليس متباين لأنه ه(-١) = ه(١)

التطبيق ليس تقابل لأنه ليس شامل وليس متباين

٥ **إذا كان التطبيق ت : س ← ص ، حيث س = {-١ ، ٠ ، ٢} ،**
ص = {-١ ، ١ ، ٧} ، ت (س) = ٢ $س^٢$ - ١ ، فبيِّن أنّ ت تطبيق تقابل .

ه(س) = ٢$س^٢$ - ١

ه(-١) = ٢×$(-١)^٢$ - ١ = ٢×١-١ = ١

ه(٠) = ٢×$(٠)^٢$ - ١ = ٢×٠ - ١ = -١

ه(٢) = ٢×$(٢)^٢$ - ١ = ٢×٤ - ١ = ٧

المدى = {-١ ، ١ ، ٧}

التطبيق شامل لأنه المدى = المجال المقابل

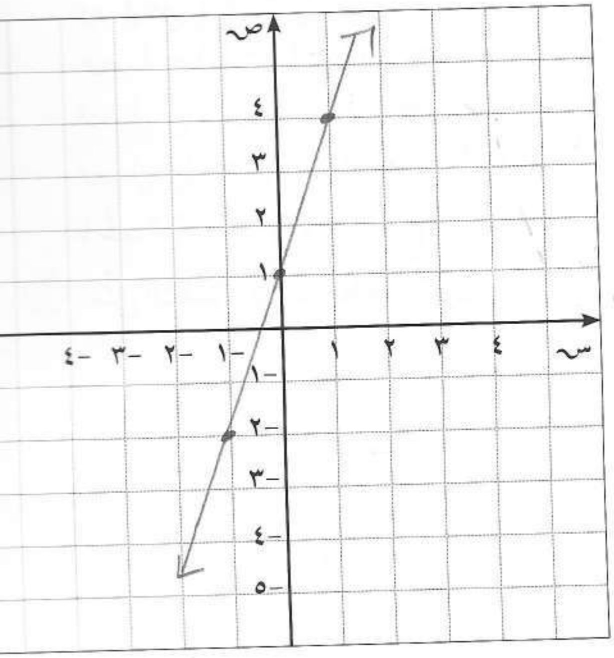
التطبيق متباين لأنه ه(-١) ≠ ه(٠) ≠ ه(٢)

التطبيق تقابل لأنه شامل ومتباين

Midnight
Kuwaitteacher.com

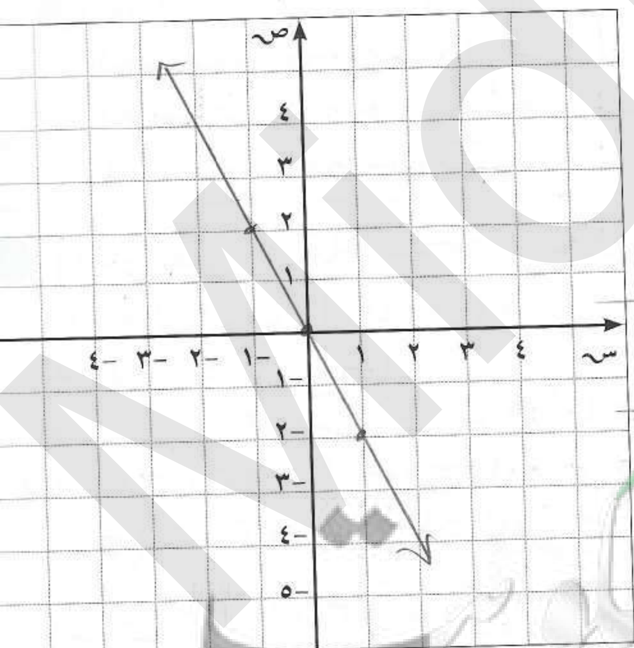
٦ أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ٣ س + ١

س	ص = ٣س + ١	(س، ص)
٠	ص = ٣ × ٠ + ١ = ١	(٠، ١)
١	ص = ٣ × ١ + ١ = ٤	(١، ٤)
-١	ص = ٣ × -١ + ١ = -٢	(-١، -٢)



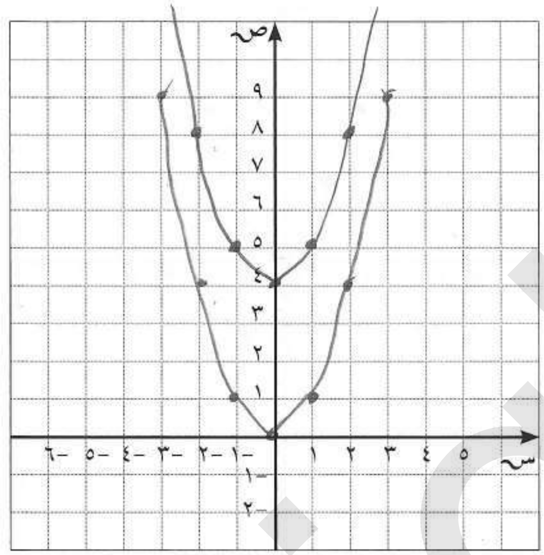
٧ أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = -٢ س

س	ص = -٢س	(س، ص)
٠	ص = -٢ × ٠ = ٠	(٠، ٠)
١	ص = -٢ × ١ = -٢	(١، -٢)
-١	ص = -٢ × -١ = ٢	(-١، ٢)



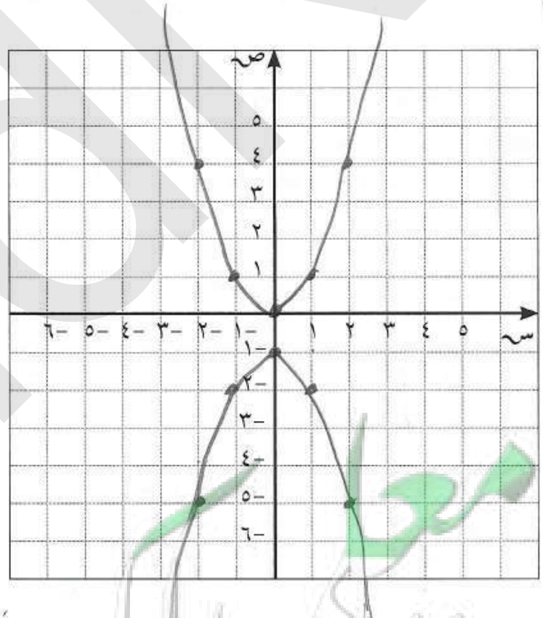
Midnight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

٨ **مثّل بيانيًّا : $ص = س^{٢} + ٤$ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية $ص = س^{٢}$**



بيان الدالة $ص = س^{٢} + ٤$
هو إزاحة رأسية
لأعلى ٤ وحدات
لبيان الدالة $ص = س^{٢}$

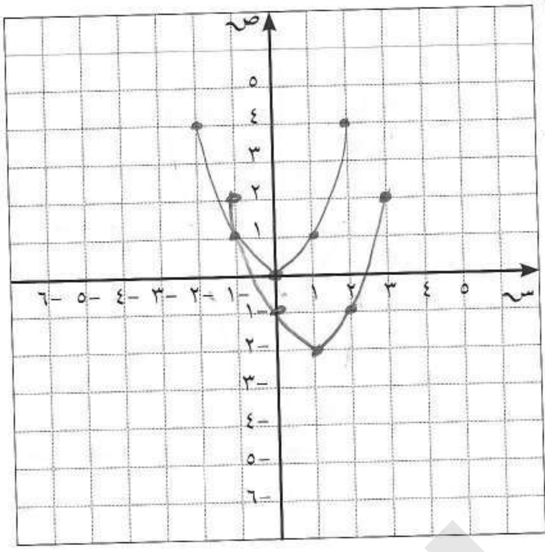
٩ **مثّل بيانيًّا : $ص = - س^{٢} - ١$ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية $ص = س^{٢}$**



بيان الدالة $ص = -س^{٢} - ١$
هو إنعكاس في محور
السينات لبيان الدالة
$ص = س^{٢}$ ثم إزاحة
رأسية للأسفل
وحدة واحدة

Midlight
KuwaitTeacher.Com

١٠ مثِّل بيانيًّا : ص = (س − ١)^{٢} − ٢ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}

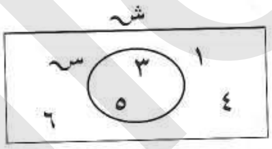


بيان الدالة ص = (س − ١)^{٢} − ٢
هو إزاحة المنحنى وحدة
واحدة لليمين ثم إزاحة
رأسية للأسفل
وحدتين

ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة

١ إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٣ ، ٥} فإنّ س − ص = {٥}	(أ)	(ب)
٢ إذا كانت س ∩ ص = ∅ ، فإنّ س − ص = س	(أ)	(ب)
٣ من شكل ڤن المقابل : $\overline{\text{س}}$ = {٣ ، ٥} ≠ س	(أ)	(ب)
٤ التطبيق ت : {١ ، ٢ ، ٣} ⟵ {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} هو تطبيق شامل. المجال يحتوي على ثلاثة عناصر والمجال المقابل يحتوي على ٤ أربع عناصر	(أ)	(ب)
٥ لتكن س = {−١ ، ٠ ، ١} ، فإذا كان التطبيق ت : س ⟵ ص (ص مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث ت (س) = س ، فإنّ ت تطبيق ليس شاملًا وليس متباينًا .	(أ)	(ب)



KuwaitTeacher.Com

ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

{٢، ٣، ٥}

٦ إذا كانت س = { أ : أ عدد أوّلي < ٦ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، فإنّ ص − س =

(أ) { ٥ }   (ب) { ١ ، ٤ }   (ج) { ٢ ، ٣ }   (د) { ٢ ، ٣ ، ٥ }

ش = {١، ٢، ٤}

٧ إذا كانت المجموعة الشاملة ش = مجموعة عوامل العدد ٤ ، س = { ١ ، ٢ } ، فإنّ $\overline{س}$ =

(أ) { −١ ، −٢ }   (ب) { ١ ، ٢ }   (ج) { ٤ }   (د) { ٤ ، −١ ، −٢ ، −٤ }

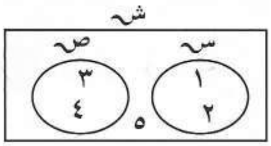
---

٨ إذا كانت المجموعة الشاملة ش = { −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ، ع = { ١ ، ٢ } ، ل = { ١ } ،
فإنّ $\overline{ع - ل}$ = ش − (ع − ل) = ش − {٢}

(أ) { ١ }   (ب) { ٢ }   (ج) { ١ ، ٠ ، −١ }   (د) { ٢ ، ٠ ، −١ }

---

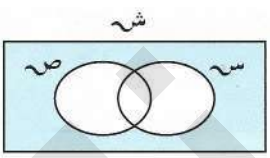
٩ من شكل ڤن المقابل : ($\overline{س \cap ص}$) =



(أ) { ١ ، ٢ ، ٥ }   (ب) { ٥ }   (ج) ∅   (د) { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

---

١٠ من شكل ڤن المقابِل المنطقة المظلَّلة تمثّل :



(أ) ($\overline{ص \cap س}$)   (ب) س ∪ ص
(ج) ($\overline{س}$ ∪ س)   (د) ($\overline{ص \cup س}$)

---

١١ إذا كان التطبيق ت : ص ⟵ { ٥ } ، حيث (ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ،
ت (س) = ٥ . فإنّ ت تطبيق :

(أ) شامل ومتباين   (ب) ليس شاملًا وليس متباينًا
(ج) شامل وليس متباينًا   (د) متباين وليس شاملًا

Midnight
KuwaitTeacher.Com

١٢ التطبيق د : س ⟵ ص (ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، د (س) = س^{٢} ،
إذا كان د تطبيقًا متباينًا ، فإنّ س يمكن أن تساوي :

أ {-١ ، ٠ ، ١}   ب {-٢ ، ٢ ، ٥}   جـ {١ ، ٢ ، ٣}   د {-٣ ، ١ ،

١٣ ليكن التطبيق ت : ح ⟵ ح ، حيث ت (س) = ٢س − ٣ . فإذا كان ت (م) = ٧ ، فإنّ

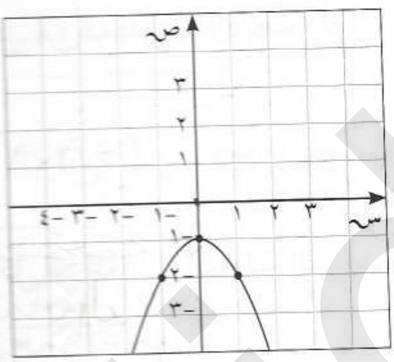
أ ٧   ب ٥   جـ ٤   د -٢

١٤ النقطة (٠ ، ٣) ∈ بيان الدالّة :

أ ص = ٢ س + ٣   ب ص = س
جـ ص = ٣ س + ١   د ص = ٣ س

١٥ الشكل المقابل يمثّل بيان الدالّة :

ص = − س^{٢} − ١



أ ص = س^{٢} + ١
ب ص = − س^{٢} + ١
جـ ص = − (س^{٢} + ١)
د ص = س^{٢} − ١

١٦ بيان الدالّة ص = (س − ٣)^{٢} − ٥ ، يمثّل بيان الدالّة ص = س^{٢} تحت تأثير :

أ إزاحة أفقية بمقدار ٣ وحدات إلى اليسار ، وإزاحة رأسية بمقدار ٥ وحدات إلى الأ
ب إزاحة أفقية بمقدار ٣ وحدات إلى اليمين ، وإزاحة رأسية بمقدار ٥ وحدات إلى الأ
جـ إزاحة أفقية بمقدار ٥ وحدات إلى اليسار ، وإزاحة رأسية بمقدار ٣ وحدات إلى الأ
د إزاحة أفقية بمقدار ٣ وحدات إلى اليمين ، وإزاحة رأسية بمقدار ٥ وحدات إلى الأ

Kuwaitteacher.Com

الوحدة السابعة المعادلات الخطّية والمتباينات الخطّية

Linear Equations and Linear Inequalities

المنحدرات

Slopes

سطح الكرة الأرضية يتميّز باختلاف تضاريسه ، ومن أهمّ هذه التضاريس المنحدرات .

والانحدار : هو ميل سطح الأرض عن خطّ الأفق أو الميلان الذي يربط نقطتين مختلفتين في المنسوب .

وتتّضح الأهمّية التطبيقية للمنحدرات من خلال استعمالات الأراضي المختلفة ، إذ تحدّد نسبة الانحدار مدى ملاءمة السطح للاستعمالات المختلفة والتي منها : إنشاء مدرَّجات المطارات ، سكك حديدية ، إقامة المباني ، مدّ أنابيب المياه والصرف الصحّي ، المصاطب الزراعية أو الشريطية ، شقّ الطرق والأنفاق وبناء الجسور .

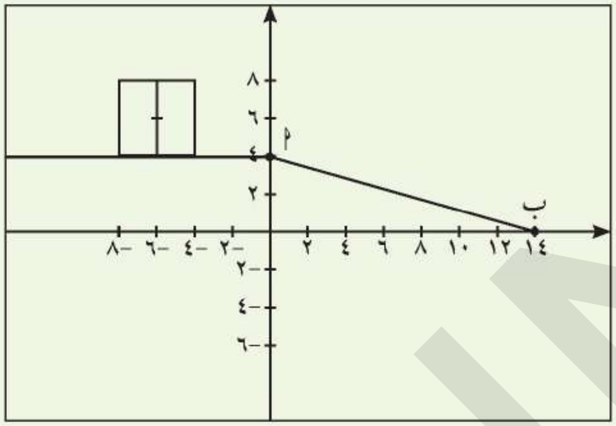
مشروع الوحدة : (تصميم منحدر لذوي الاحتياجات الخاصّة)

دولة الكويت تُعَدّ من الدول الرائدة في مجال خدمة ورعاية وتأهيل ذوي الاحتياجات الخاصّة .

ومن مظاهر هذه الرعاية القوانين والشروط والمواصفات الخاصّة بتسهيل حركتهم داخل وخارج كلّ المباني لجميع مناطق الكويت ، وذلك بوضع المنحدرات المناسِبة ، وتكون ذات ميل مناسِب يسهّل حركتهم داخل وخارج المباني.

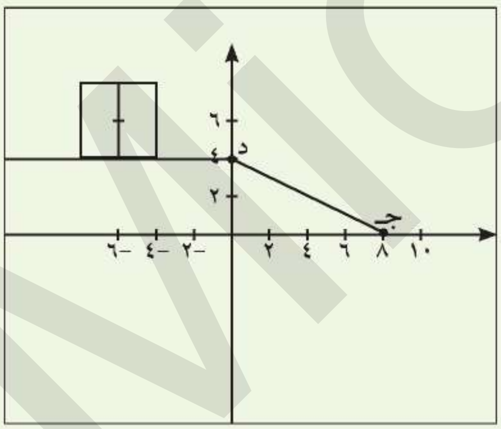
خطّة العمل :

قام مهندس بتصميم منحدرين لذوي الاحتياجات الخاصّة ، يريد اختيار الأنسب إنشاؤه لإحدى الدوائر الحكومية .
ساعِد المهندس على اختيار المنحدر المناسِب .



خطوات تنفيذ المشروع :

- اِبحث في شبكة الإنترنت عن المواصفات القياسية لمنحدر ذوي الاحتياجات الخاصّة .
- أُحسب ميل المنحدر في الشبكة الأولى والذي يمثّل $\overline{\text{أب}}$.
- أُحسب ميل المنحدر في الشبكة الثانية والذي يمثّل $\overline{\text{د جـ}}$.
- اِختر التصميم المناسِب .



علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة التنفيذ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

KuwaitTeacher.Com

مخطَّط تنظيمي للوحدة السابعة

المعادلات الخطّية والمتباينات الخطّية

- الميل
  - المستقيمات المتوازية و المستقيمات المتعامدة
- حل معادلتين خطّيتين
- المتباينات الخطّية

اِستعِدَّ للوحدة السابعة

١ أوجِد ناتج ما يلي :

أ -٣ - (-٥) = -٣ + ٥ =
+٢

ب -١ - ٤ = -١ + -٤
= -٥

جـ ٦ - ٧ = ٦ + -٧ =
-١

د ٠ - (-٩) = ٠ + ٩
= +٩

٢ ضَعِ المعادلات التالية في صورة : ص = أس + ب

أ ص + س = ٣

ص = -س + ٣

ب س - ص = ٤

س - ٤ = ص

ص = س - ٤

جـ ٢ ص - ٤ س - ٣ = ٠

$\frac{٢}{٢}$ ص = $\frac{٤}{٢}$ س - $\frac{٣}{٢}$

ص = ٢س - ١,٥

د ٣ س + ٥ ص = ٧

$\frac{٥}{٥}$ ص = $\frac{-٣}{٥}$ س + $\frac{٧}{٥}$

ص = $\frac{-٣}{٥}$ س + $\frac{٧}{٥}$

Midnight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

٣ أوجِد قيمة ص في الحالات التالية :

أ ص = ٢ س − ٣ ، عندما س = ٠

ص = ٢ × ٠ − ٣

ص = −٣

ب ص = س − ٢ ، عندما س = −١

ص = −١ − ٢

ص = −٣

جـ ٢ س − ص = ٤ ، عندما س = ٣

٢ × ٣ − ص = ٤

٦ − ص = ٤

− ص = ٤ − ٦

$\frac{\cancel{-1}\text{ص}}{\cancel{-1}} = \frac{-2}{-1}$

ص = ٢

د س − ٥ ص = ٧ ، عندما س = ٢

٢ − ٥ص = ٧

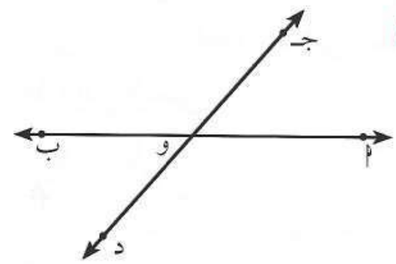
− ٥ص = ٧ − ٢

$\frac{\cancel{-5}\text{ص}}{\cancel{-5}} = \frac{5}{-5}$

ص = −١

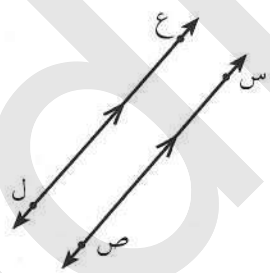
٤ أكمِل ما يلي :

أ



$\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـد}}$ = { و }

ب

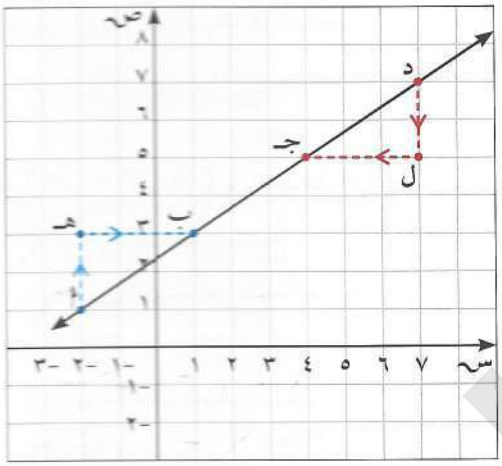


$\overleftrightarrow{\text{س ص}} \cap \overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ = ∅

Midlight
معلمي الكويت صفوة
KuwaitTeacher.Com

٧-١ الميل
Slope

سوف تتعلّم : كيفية إيجاد ميل خطّ مستقيم .



العبارات والمفردات :

الميل	Slope
التغيّر الرأسي	Rise
التغيّر الأفقي	Run
ميل موجَب	Positive Slope
ميل سالب	Negative Slope

نشاط (١) :

١ في المستوى الإحداثي :

أ يحرّك خالد القرص الأحمر من النقطة د إلى النقطة ل **رأسيًا إلى أسفل** ثمّ من النقطة ل إلى النقطة جـ **أفقيًا إلى اليسار** .

أكمِل ما يلي :

التغيّر الرأسي من د إلى ل

= ٥ − ٧ = −٢ (وحدتان **إلى أسفل**)

التغير الأفقي من ل إلى جـ

= ٤ − ٧ = −٣ (وحدات لليسار)

$\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

ب يحرّك أحمد القرص الأزرق من النقطة أ إلى النقطة هـ **رأسيًا إلى أعلى** ثمّ من النقطة هـ إلى النقطة ب **أفقيًا إلى اليمين** .

أكمِل ما يلي :

التغيّر الرأسي من أ إلى هـ

= ٣ − ١ = ٢ (وحدتان **إلى أعلى**)

التغيّر الأفقي من هـ إلى ب

= ١ − −٢ = ٣ (وحدات لليمين)

$\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{٢}{٣}$

ماذا تلاحظ ؟ ....

$\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}$ يعبّر عن ميل $\overleftrightarrow{\text{أد}}$

$\boxed{\text{الميل} = \frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}}$

معلومات مفيدة :
يستخدم الرياضيون مصطلح الميل ليصفوا انحدار الأسطح وبخاصّة عند التزلّج على الجليد .

Midlight
KuwaitTeacher.Com

٢ أكمِل ما يلي :

أ إحداثيا النقطتين جـ ، د هما :

جـ (٤ ، ٥) ،

د (٧ ، ٧)

$\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٥}{٧ - ٤}$

$= \frac{٢}{٣}$

ب إحداثيا النقطتين ٲ ، ب هما :

ٲ (−٢ ، ١) ،

ب (١ ، ٣)

$\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ١}{١ - −٢}$

$= \frac{٢}{٣}$

ماذا تلاحظ ؟ ....

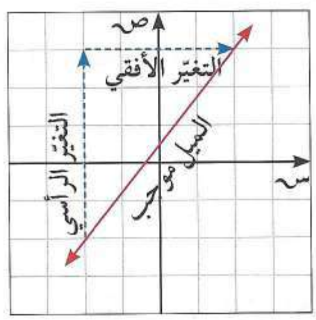
إذا كانت ٲ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) نقطتين في المستوى الإحداثي فإنّ :

ميل $\overleftrightarrow{ٲب}$ = $\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ، $س_٢ \neq س_١$

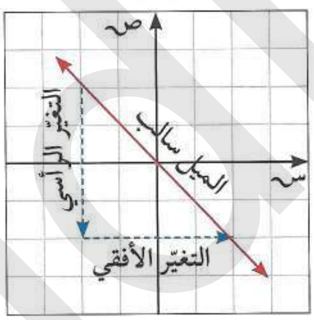
ملاحظة :

$\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢}$

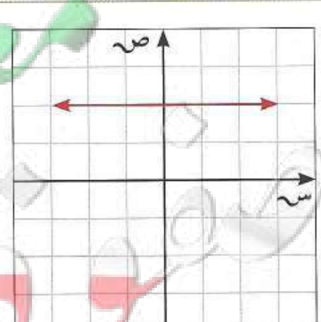
لاحظ أنّ :



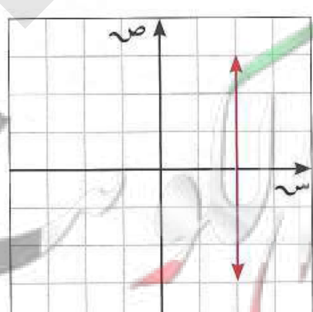
ميل المستقيم موجَب



ميل المستقيم سالب

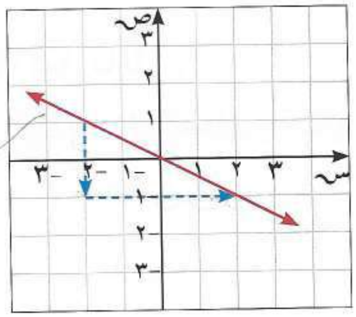


ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل

مثال (١) :



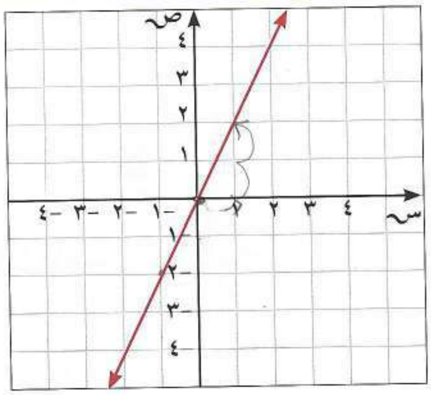
في الشكل المقابِل : أوجِد ميل المستقيم المرسوم .

الحلّ :

$$\text{الميل (م)} = \frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}$$

$$= \frac{-٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$$

تدرّب (١) :



أوجِد ميل المستقيم في الشكل المقابِل :

$$\text{الميل (م)} = \frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}$$

$$= \frac{٢}{١} = ٢$$

(حاوِل إيجاد الميل بطريقة أخرى)

مثال (٢) :

أوجِد ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين أ (-٢ ، ١) ، ب (٥ ، ٧) .

الحلّ :

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٧ - ١}{٥ - (-٢)} = \frac{٦}{٧}$$

تدرّب (٢) :

أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ حيث : د (١ ، -١) ، هـ (٢ ، ٢) .

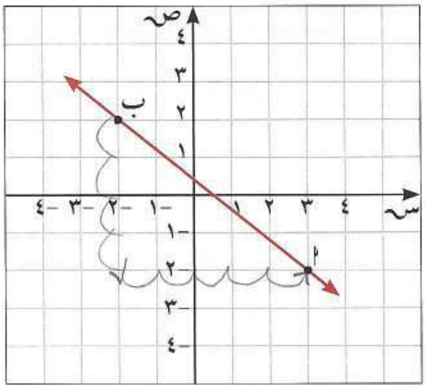
$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{د هـ}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - -١}{٢ - ١} = \frac{٢ + ١}{٢ - ١}$$

$$\text{م } (\overleftrightarrow{\text{د هـ}}) = \frac{٣}{١} = ٣$$

Midnight
KuwaitTeacher.Com

(٢، ٢-) ب ، (٢-، ٣) ٩

تدرّب (٣) :



في الشكل المقابِل : أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{٩ب}}$ بطريقتين مختلفتين.

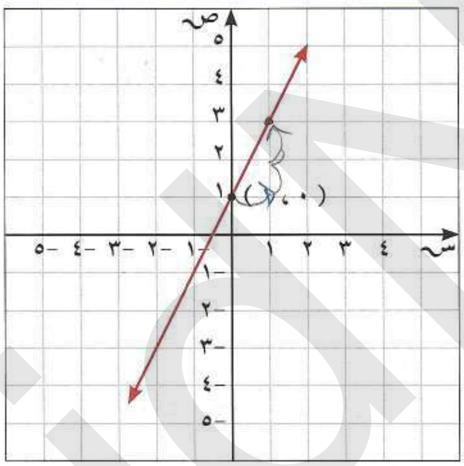
الميل = التغير الرأسي / التغير الأفقي = $\frac{٤}{-٥}$

الطريقة الثانية

م($\overleftrightarrow{\text{٩ب}}$) = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ = $\frac{٢ - -٢}{-٢ - ٣}$ = $\frac{٤}{-٥}$ = $\frac{-٤}{٥}$

معلومة مفيدة :
الجزء المقطوع من محور الصادات هو الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات .

نشاط (٢):



الشكل المقابل يمثّل بيان المستقيم الذي معادلته :

ص = ٢ س + ١

أكمِل ما يلي :

١ ميل المستقيم = $\frac{٢}{١}$ = ٢

٢ ما العلاقة بين ميل المستقيم ومعامل س في معادلة المستقيم ؟ متساويان

٣ من الرسم : الجزء المقطوع من محور الصادات هو ١

٤ ما العلاقة بين الحدّ الثابت في معادلة المستقيم و الجزء المقطوع من محور الصادات ؟ متساويان

المعادلة على الصورة : ص = م س + ب تمثّل معادلة المستقيم الذي ميله م ، والجزء المقطوع من محور الصادات ب .

KuwaitTeacher.Com

مثال (٣) :

أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

ص = ٥ س − ٣

الحلّ :

المعادلة : ص = ٥ س − ٣

على الصورة : ص = م س + ب

∴ الميل (م) = ٥

والجزء المقطوع من محور الصادات (ب) = −٣

تدرّب (٤) :

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

أ) ص = ٧ س + ١

الميل (م) = ٧

الجزء المقطوع من محور الصادات = ١

ب) ص = −٥ − ٢ س

الميل = −٢

الجزء المقطوع من محور الصادات = −٥

جـ) ٢ ص = − ٩ س

ص = $-\frac{٩}{٢}$ س

الميل = $-\frac{٩}{٢}$ ، الجزء المقطوع من محور الصادات = صفر

د) ٥ س = ٤ − ص

ص = ٤ − ٥ س

الميل = −٥ ، الجزء المقطوع من محور الصادات = ٤

فكِّر وناقِش

هل المستقيم الذي معادلته س = ٢ يقطع محور الصادات ؟

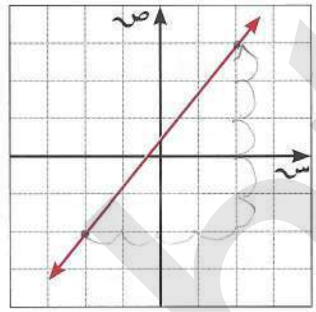
يوازي محور الصادات ولا يقطع محور الصادات

KuwaitTeacher.Com

تمـــرَّنْ :

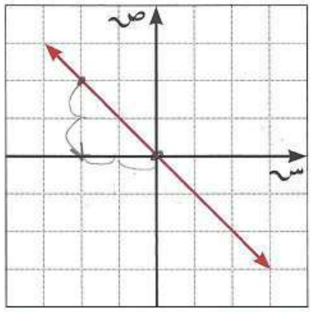
١ أوجِد ميل كلّ من المستقيمات التالية إن أمكن ذلك :

أ



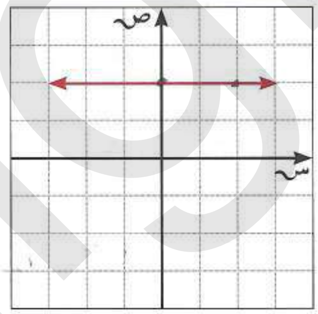
م = $\frac{٥}{٤}$

ب



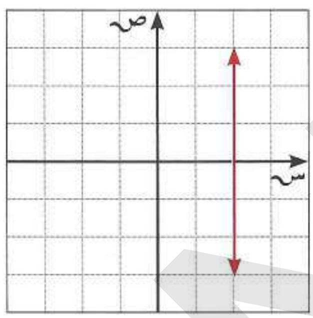
م = $\frac{-٢}{٢}$ = -١

جـ



م = $\frac{صفر}{٢}$ = صفر

د



ليس له ميل (غير معرف)

٢ أوجِد ميل المستقيم المارّ بالنقطتين في كلّ مما يلي :

أ ا (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٤)

م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٤ - ٢}{٣ - ١}$

م = $\frac{٢}{٢}$ = ١

ب د (-١ ، ٦) ، هـ (٤ ، ٥)

م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٥ - ٦}{٤ - -١}$

م = $\frac{-١}{٥}$

جـ ل (-٤ ، ٠) ، ك (٠ ، -٣)

م = $\frac{-٣ - ٠}{٠ - -٤}$ = $\frac{-٣}{٤}$

د م (٢ ، ٣) ، ن (-٥ ، ٣)

م = $\frac{٣ - ٣}{-٥ - ٢}$ = $\frac{صفر}{-٧}$

م = صفر

Kuwaitteacher.Com

٣ أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

أ ص = ٣ س + ٤

الميل = ٣

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٤

ب ص = −٣ − ٧ س

الميل = −٧

الجزء المقطوع من محور الصادات = −٣

جـ ص = ٥ س

الميل = ٥

الجزء المقطوع من محور الصادات = صفر

د ٢ س + ص = ١

ص = ١ − ٢ س

الميل = ١

الجزء المقطوع من محور الصادات = ١

هـ ٣ ص − ٦ س + ٧ = ٠

$\frac{٣}{٣}$ ص = $\frac{٦}{٣}$ س − $\frac{٧}{٣}$

ص = ٢ س − $\frac{٧}{٣}$

الميل = ٢

الجزء المقطوع من محور الصادات

$-\frac{٧}{٣}$

و $\frac{٢}{٢}$ ص = $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{٨}{٢}$

ص = $\frac{٣}{٢}$ س + ٤

الميل = $\frac{٣}{٢}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٤

Midlight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

ز $-ص + س + ٢ = ٠$

$ص = س + ٢$

الميل = ١

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٢

ح $ص = ٩$

الميل = صفر

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٩

MidNight

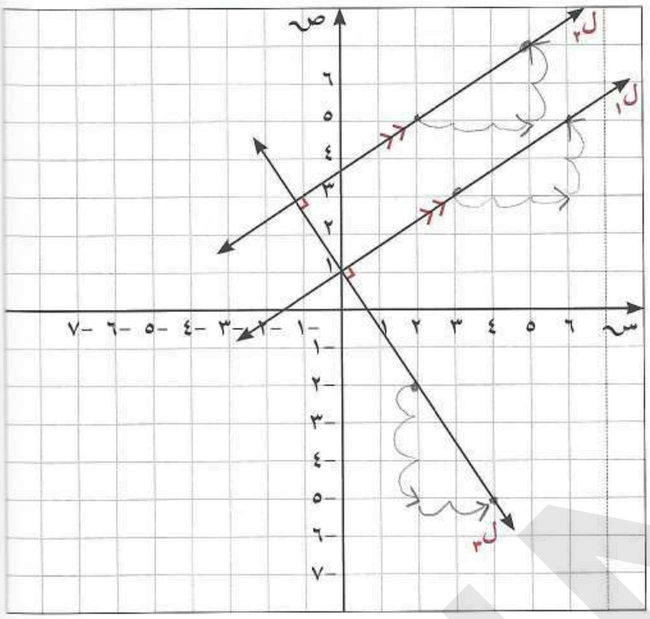
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

٧-٢ المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة
Parallel Lines and Perpendicular Lines

سوف تتعلّم : المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة والعلاقة بين ميلها .

العبارات والمفردات :
المستقيمات المتوازية
Parallel Lines
المستقيمات المتعامدة
Perpendicular Lines

نشاط :



في الشكل المقابِل :

إذا كان $\overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢}$ ، $\overleftrightarrow{ل_١} \perp \overleftrightarrow{ل_٣}$ ،
$\overleftrightarrow{ل_٢} \perp \overleftrightarrow{ل_٣}$.

١ أوجِد ميل المستقيمات التالية :

أ $\overleftrightarrow{ل_١}$

م = $\frac{٢}{٣}$

ب $\overleftrightarrow{ل_٢}$

م = $\frac{٢}{٣}$

جـ $\overleftrightarrow{ل_٣}$

م = $\frac{-٣}{٢}$

٢ أكمِل ما يلي :

أ $\overleftrightarrow{ل_١} \parallel \overleftrightarrow{ل_٢}$

ميل $\overleftrightarrow{ل_١}$ = ميل $\overleftrightarrow{ل_٢}$

ب $\overleftrightarrow{ل_١} \perp \overleftrightarrow{ل_٣}$

ميل $\overleftrightarrow{ل_١}$ × ميل $\overleftrightarrow{ل_٣}$

= $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{-٣}{٢}$ = -١

جـ $\overleftrightarrow{ل_٢} \perp \overleftrightarrow{ل_٣}$

ميل $\overleftrightarrow{ل_٢}$ × ميل $\overleftrightarrow{ل_٣}$

= $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{-٣}{٢}$ = -١

ليكن م١ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_١}$ ، م٢ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_٢}$:

- $\overleftrightarrow{ل_١}$ // $\overleftrightarrow{ل_٢}$ ⟺ م١ = م٢
- $\overleftrightarrow{ل_١}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل_٢}$ ⟺ م١ × م٢ = −١ (أي أن : م١ = $\frac{-١}{م_٢}$)

مثال (١) :

إذا كان $\overleftrightarrow{ن}$ يمرّ بالنقطتين أ (−٣ ، ٥) ، ب (−٤ ، ٣) ،
وكانت معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = ٢ س + ٧ ، فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{ن}$ // $\overleftrightarrow{ك}$.

الحلّ :

∵ $\overleftrightarrow{ن}$ يمر بالنقطتين أ (−٣ ، ٥) ، ب (−٤ ، ٣)

∴ ميل $\overleftrightarrow{ن}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{٣ - ٥}{-٤ - (-٣)}$ = $\frac{-٢}{-١}$ = $\boxed{٢}$

∵ معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = ٢ س + ٧

∴ ميل $\overleftrightarrow{ك}$ = ٢

∵ ميل $\overleftrightarrow{ن}$ = ميل $\overleftrightarrow{ك}$

∴ $\overleftrightarrow{ن}$ // $\overleftrightarrow{ك}$

تدرّب (١) :

إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ هو −٣ ، حدِّد أيًّا من المستقيمين التاليين يوازي $\overleftrightarrow{أب}$:

أ $\overleftrightarrow{جـ د}$ الذي يمرّ بالنقطتين :

جـ (٣ ، −١) ، د (١ ، −٧)

م ($\overleftrightarrow{جـ د}$) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{-٧ - -١}{١ - ٣}$ = $\frac{-٦}{-٢}$ = ٣

م ($\overleftrightarrow{أب}$) ≠ م ($\overleftrightarrow{جـ د}$)

المستقيمان غير متوازيين

ب $\overleftrightarrow{ل ع}$ الذي معادلته :

٣ س + ص = ٥

ص = ٥ − ٣ س

م ($\overleftrightarrow{ل ع}$) = −٣

∴ م ($\overleftrightarrow{أب}$) = م ($\overleftrightarrow{ل ع}$)

المستقيمان متوازيان

Midnight
KuwaitTeacher.com

مثال (٢) :

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يمرّ بالنقطتين ف (٤ ، ٦) ، ع (٦ ، ١)

وكانت معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = $\frac{٢}{٥}$ س − ٤ ، أثبِت أنّ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{ك}}$.

الحلّ :

∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يمرّ بالنقطتين ف (٤ ، ٦) ، ع (٦ ، ١)

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

= $\frac{١ - ٦}{٦ - ٤}$

= $\frac{-٥}{٢}$

∵ معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ص = $\frac{٢}{٥}$ س − ٤

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ = $\frac{٢}{٥}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{ك}}$

= $\frac{-٥}{٢} \times \frac{٢}{٥} = -١$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{ك}}$

تدرّب (٢) :

إذا كان ميل $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ هو $\frac{١}{٤}$ ، حدِّد أيًّا من المستقيمين التاليين عمودي على $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$.

أ $\overleftrightarrow{\text{ع م}}$ الذي معادلته :

٢ ص − ٨ س − ٣ = ٠

٢ص = $\frac{٨}{٢}$ س − $\frac{٣}{٢}$

ص = ٤ س − $\frac{٣}{٢}$

∴ م ($\overleftrightarrow{\text{ع م}}$) = ٤

م ($\overleftrightarrow{\text{م ن}}$) × م ($\overleftrightarrow{\text{ع م}}$) = ٤ × $\frac{١}{٤}$ = ١

$\overleftrightarrow{\text{ع م}}$ ليس عمودي على $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$

ب $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ الذي يمرّ بالنقطتين :

أ (٦ ، ٩) ، ب (٧ ، ٥)

م ($\overleftrightarrow{\text{أب}}$) = $\frac{٥ - ٩}{٧ - ٦}$ = $\frac{-٤}{١}$ = −٤

م ($\overleftrightarrow{\text{أب}}$) × م ($\overleftrightarrow{\text{م ن}}$) = $\frac{١}{٤}$ × −٤

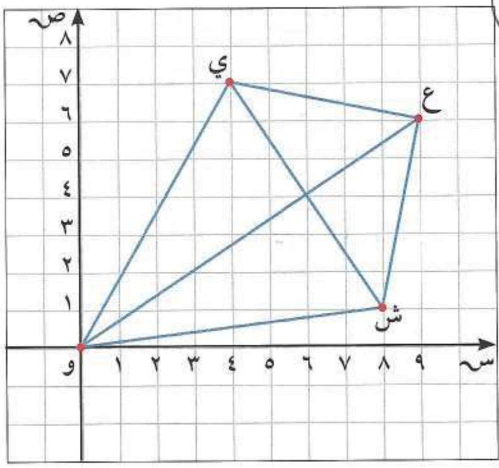
= −١

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{م ن}}$

MidNight
Kuwaitteacher.com

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابل : ع ش و ي شكل رباعي ، أثبِت أنّ قطريه متعامدان .



ع (٩، ٦) ، و (٠، ٠) ، ش (٨، ١) ، ي (٤، ٧)

ميل ($\overline{ع و}$) = $\frac{٠-٦}{٠-٩} = \frac{-٦}{-٩} = \frac{٢}{٣}$

ميل ($\overline{ش ي}$) = $\frac{٧-١}{٤-٨} = \frac{٦}{-٤} = \frac{-٣}{٢}$

∵ ميل ($\overline{ع و}$) × ميل ($\overline{ش ي}$) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{-٣}{٢} = -١$

∴ $\overline{ع و} \perp \overline{ش ي}$

∴ القطران متعامدان

مثال (٣) :

إذا كان $\overleftrightarrow{ن} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ، ومعادلة $\overleftrightarrow{ل}$: ص = ٢ س + ١

أوجد ميل $\overleftrightarrow{ن}$.

الحلّ :

∵ معادلة $\overleftrightarrow{ل}$: ص = ٢ س + ١

∴ ميل $\overleftrightarrow{ل}$ = ٢

بالتعويض مباشرة في القاعدة

∵ $\overleftrightarrow{ن} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ← ∴ م ($\overleftrightarrow{ن}$) × م ($\overleftrightarrow{ل}$) = -١

م ($\overleftrightarrow{ن}$) × $\frac{٢}{٢}$ = $\frac{-١}{٢}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{ن}$ = $\frac{-١}{\text{ميل } \overleftrightarrow{ل}}$

صعب على الطالب

∴ م ($\overleftrightarrow{ن}$) = $\frac{-١}{٢}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{ن}$ = $\frac{-١}{٢}$

فكّر وناقِش

هل المستقيم الذي معادلته ص = ٥ يوازي المستقيم المارّ بالنقطتين (-٣، ٢) ، (١، ٢) ؟ ولماذا ؟

أيضاً هذا المستقيم يوازي محور السينات

هذا المستقيم يوازي محور السينات وبالتالي م = ٠

نعم المستقيمان متوازيان

Kuwaitteacher.Com

تدرّب (٤) :

إذا كان $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ يمرّ بالنقطتين أ (٥ ، ٣) ، ب (٨ ، ٦) .
فأوجِد ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$.

ميل $(\overleftrightarrow{أب}) = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٦ - ٣}{٨ - ٥} = \frac{٣}{٣} = ١$

$\because \overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ $\therefore$ م $(\overleftrightarrow{أب}) \times$ م $(\overleftrightarrow{جـ د}) = -١$

$١ \times$ م $(\overleftrightarrow{جـ د}) = -١$

$\therefore$ م $(\overleftrightarrow{جـ د}) = -١$

تمــرَّنْ :

١ أكمِل ما يلي :

ميل $\overleftrightarrow{ل}$	ميل المستقيم الموازي له	ميل المستقيم العمودي عليه
٢	٢	$-\frac{١}{٢}$
$-\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٢}{٣}$	$\frac{٣}{٢}$
$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	‎-٤
$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	$-\frac{٥}{٢}$

٢ إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ هو ‎-٤ ، فأيّ من المستقيمات التالية يوازي $\overleftrightarrow{أب}$:

أ $\overleftrightarrow{جـ د}$ الذي يمرّ بالنقطتين :
جـ (٠ ، ٦) ، د (‎-٤ ، ٢)

م $(\overleftrightarrow{جـ د}) = \frac{٢ - ٦}{-٤ - ٠} = \frac{-٤}{-٤} = ١$

م $(\overleftrightarrow{أب}) \neq$ م $(\overleftrightarrow{جـ د})$

المستقيمان غير متوازيين

ب $\overleftrightarrow{ع ل}$ الذي معادلته :
ص + ٤ س ‎- ٥ = ٠

ص = ‎-٤ س + ٥

ميل $(\overleftrightarrow{ع ل}) = -٤$

م $(\overleftrightarrow{أب}) =$ م $(\overleftrightarrow{ع ل}) = -٤$

المستقيمان متوازيان

Midlight
Kuwaitteacher.com

٣ إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = ٤ س + ٣

ومعادلة $\overleftrightarrow{ن}$: ٤ ص − ١٦ س = ١ ، فهل المستقيمان متوازيان ؟ وضِّح ذلك .

معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = ٤ س + ٣

معادلة $\overleftrightarrow{ن}$: $\frac{٤ص}{٤} = \frac{١٦س}{٤} + \frac{١}{٤}$

∴ معادلة $\overleftrightarrow{ن}$: ص = ٤ س + $\frac{١}{٤}$

م($\overleftrightarrow{ك}$) = ٤ ، م($\overleftrightarrow{ن}$) = ٤

∴ م($\overleftrightarrow{ك}$) = م($\overleftrightarrow{ن}$) = ٤

∴ المستقيمان متوازيان

٤ إذا كان $\overleftrightarrow{أ}$ يمرّ بالنقطتين (٨ ، ١) ، (٣ ، ٤)

ومعادلة $\overleftrightarrow{ب}$: ١٠ س − ٦ ص = −٥ ، فهل المستقيمان متعامدان ؟ وضِّح ذلك .

معادلة $\overleftrightarrow{ب}$: $\frac{-٦ص}{-٦} = \frac{-١٠س}{-٦} - \frac{٥}{-٦}$

ص = $\frac{٥}{٣}$ س + $\frac{٥}{٦}$ ⟵ ∴ م($\overleftrightarrow{ب}$) = $\frac{٥}{٣}$ (١)

ميل ($\overleftrightarrow{أ}$) = $\frac{٤-١}{٣-٨} = \frac{٣}{-٥} = -\frac{٣}{٥}$ ⟵ (٢)

∴ ميل ($\overleftrightarrow{أ}$) × ميل ($\overleftrightarrow{ب}$) = $-\frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٣} = -١$

∴ المستقيمان متعامدان

Midnight
معلمي صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

٥ إذا كان $\overleftrightarrow{م ن}$ يمرّ بالنقطتين م (٢ ، ٦) ، ن (٧ ، ٦) ، (يوازي السينات)

$\overleftrightarrow{هـ ط}$ يمرّ بالنقطتين هـ (٢ ، ١) ، ط (٥ ، ١) (يوازي السينات)

أثبِت أنّ : $\overleftrightarrow{م ن}$ // $\overleftrightarrow{هـ ط}$.

ميل $(\overleftrightarrow{م ن})$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٦ - ٦}{٧ - ٢}$ = $\frac{٠}{٥}$ = صفر

ميل $(\overleftrightarrow{هـ ط})$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{١ - ١}{٥ - ٢}$ = $\frac{٠}{٣}$ = صفر

∵ ميل $(\overleftrightarrow{م ن})$ = ميل $(\overleftrightarrow{هـ ط})$

∴ المستقيمان متوازيان

٦ تحقّقْ من تعامد $\overleftrightarrow{ل_١}$ الذي يمرّ بالنقطتين (٣ ، −٦) ، (٧ ، ٦)

مع $\overleftrightarrow{ل_٢}$ الذي يمرّ بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (−٦ ، ٧) .

ميل $(\overleftrightarrow{ل_١})$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٦ - −٦}{٧ - ٣}$ = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣

ميل $(\overleftrightarrow{ل_٢})$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٧ - ٤}{−٦ - ٣}$ = $\frac{٣}{−٩}$ = $-\frac{١}{٣}$

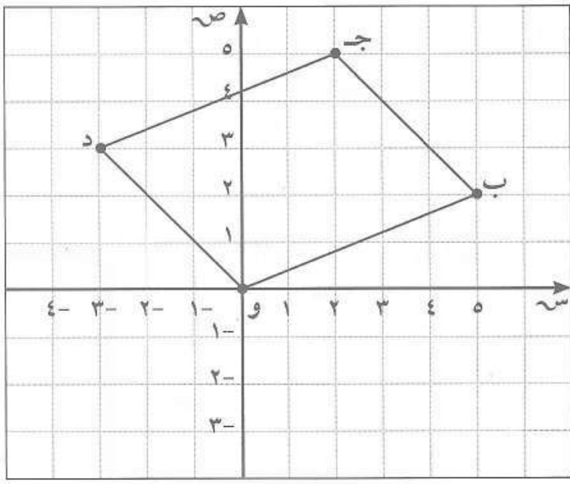
∵ ميل $(\overleftrightarrow{ل_١})$ × ميل $(\overleftrightarrow{ل_٢})$ = ٣ × $-\frac{١}{٣}$ = −١

∴ $\overleftrightarrow{ل_١}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل_٢}$

(المستقيمان متعامدان)

KuwaitTeacher.Com

٧ في الشكل الرباعي و ب جـ د ، أثبِت أنّ : $\overline{\text{و ب}} \parallel \overline{\text{د جـ}}$.



و(٠،٠) ، ب(٥،٢) ، د(-٣،٣) ، جـ(٢،٥)

ميل ($\overline{\text{و ب}}$) = $\frac{٢-٠}{٥-٠}$ = $\frac{٢}{٥}$

ميل ($\overline{\text{د جـ}}$) = $\frac{٥-٣}{٢-(-٣)}$ = $\frac{٢}{٥}$

∴ ميل ($\overline{\text{و ب}}$) = ميل ($\overline{\text{د جـ}}$)

∴ $\overline{\text{و ب}} \parallel \overline{\text{د جـ}}$

٨ إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ك}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ حيث معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: ٨ س − ٢ ص = ٩ ،
أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$.

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ك}}$: $\frac{-٢ص}{-٢}$ = $\frac{-٨}{-٢}$ س + $\frac{٩}{-٢}$

ص = ٤ س − $\frac{٩}{٢}$

ميل ($\overleftrightarrow{\text{ك}}$) = ٤

∵ $\overleftrightarrow{\text{ك}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ ∴ م($\overleftrightarrow{\text{ك}}$) × م($\overleftrightarrow{\text{ل}}$) = −١

$\frac{٤}{٤}$ × م($\overleftrightarrow{\text{ل}}$) = $\frac{-١}{٤}$

∴ ميل ($\overleftrightarrow{\text{ل}}$) = $-\frac{١}{٤}$

صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

٧-٣ حل معادلتين خطّيتين (من الدرجة الأولى) في متغيّرين
Solving Linear (First degree) Equations with Two Variables

سوف تتعلّم : حل معادلتين خطّيتين من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانيًّا آنيًّا .

العبارات والمفردات :
معادلة خطّية
Linear equation
آنية
Simultaneous

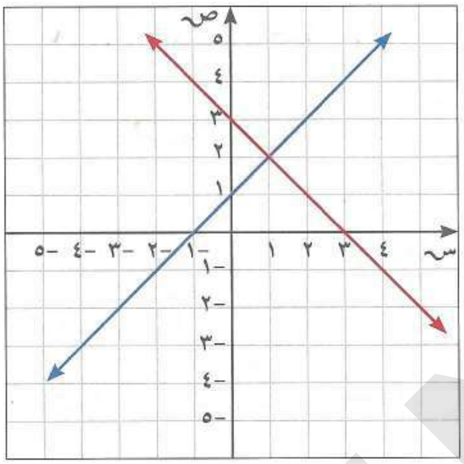
الصورة العامة للمعادلة الخطية من الدرجة الأولى في متغيرين :

ٲ س + ب ص + جـ = ٠ ، ٲ ، ب ، جـ ∈ ح ، حيث ٲ ، ب ، لا يساويان صفر معًا .

نشاط :

الشكل المقابِل يمثّل بيان المستقيمين :

ص = س + ١ ، ص = − س + ٣



١ أكمِل الجدول التالي :

النقطة	تنتمي إلى المستقيم ص = س + ١	تنتمي إلى المستقيم ص = − س + ٣
(−١ ، ٠)	✓	✗
(١ ، ٢)	✓	✓
(٠ ، ٣)	✗	✓
(٣ ، ١)	✗	✗

٢ من الجدول السابق : أيّ من النقاط السابقة تنتمي إلى كلّ من المستقيمين ؟

(١ ، ٢)

٣ من الشكل السابق : في أيّ نقطة يتقاطع المستقيمان ؟ (١ ، ٢)

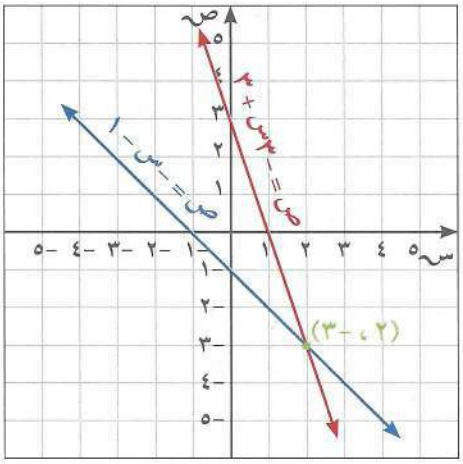
تمثّل النقطة (١ ، ٢) حلًّا للمعادلتين الخطّيتين :

ص = س + ١ ، ص = − س + ٣

وبالتالي تكون {(١ ، ٢)} هي :

مجموعة الحلّ التي تحقّق المعادلتين في **آن واحد** .

مثال (١) :



أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص + ٣ س − ٣ = ٠ ، ص + س = −١

الحلّ :

• نكتب معادلتي المستقيمين على الصورة :

ص = − ٣ س + ٣ ، ص = − س − ١

• نرسم بيان المستقيمين :

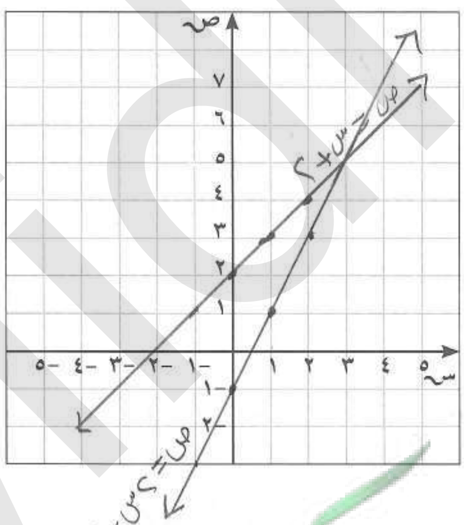
ص = − ٣ س + ٣			
س	٠	١	٢
ص	٣	٠	−٣

ص = − س − ١			
س	٠	١	٢
ص	−١	−٢	−٣

نلاحظ أنّ : المستقيمين تقاطعا في النقطة (٢ ، −٣)

∴ مجموعة الحلّ = { (٢ ، −٣) }

تدرّب (١) :



أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص = س + ٢ ، ص = ٢ س − ١

ص = س + ٢			
س	٠	١	٢
ص	٢	٣	٤

ص = ٢ س − ١			
س	٠	١	٢
ص	−١	١	٣

∴ مجموعة الحلّ = {(٣ ، ٥)}

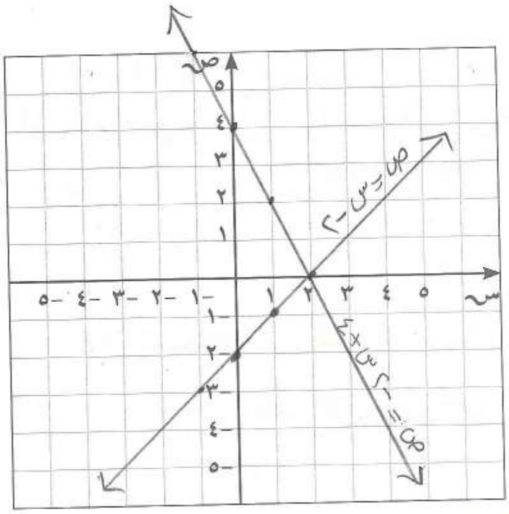
تحقّقْ بالتعويض في كلّ من معادلتي المستقيمين .

KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٢) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص + ٢ س – ٤ = ٠ ، ص – س = –٢



ص = –٢س + ٤			
س	٠	١	٢
ص	٤	٢	٠

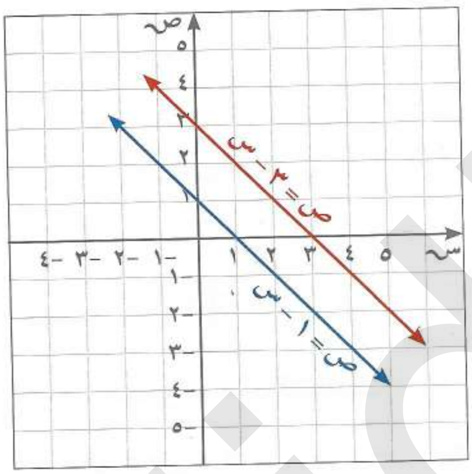
ص = س – ٢			
س	٠	١	٢
ص	–٢	–١	٠

∴ مجموعة الحلّ = { (٢ ، ٠) }

مثال (٢) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا : ص = ٣ – س ، ص = ١ – س

الحلّ :



ص = ٣ – س			
س	٠	١	٢
ص	٣	٢	١

ص = ١ – س			
س	٠	١	٢
ص	١	٠	–١

نلاحظ من الرسم أنّ المستقيمين المرسومين غير متقاطعين (متوازيين) .

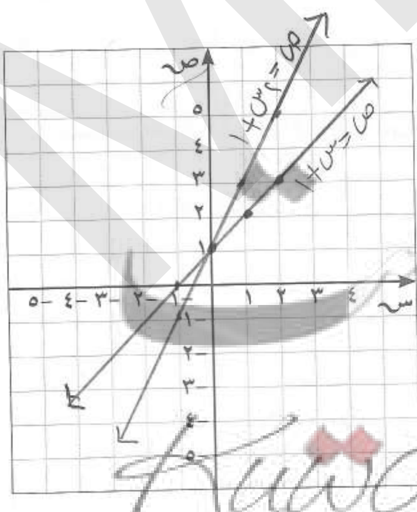
∴ مجموعة الحلّ = { } أو ∅

تحقَّقْ من توازي المستقيمين بإيجاد الميل لكلّ منهما .

تمـرَّنْ :

١ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص = ٢ س + ١ ، ص = س + ١



ص = ٢س + ١			
س	٠	١	٢
ص	١	٣	٥

ص = س + ١			
س	٠	١	٢
ص	١	٢	٣

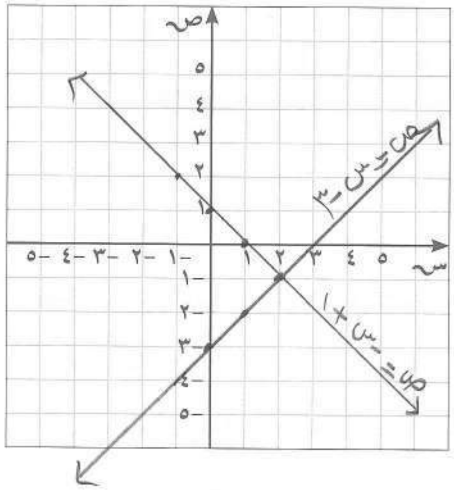
∴ مجموعة الحلّ = { (٠ ، ١) }

٢ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص = س − ٣ ، ص = − س + ١

ص = س − ٣			
س	٠	١	٢
ص	−٣	−٢	−١

ص = −س + ١			
س	٠	١	٢
ص	١	٠	−١



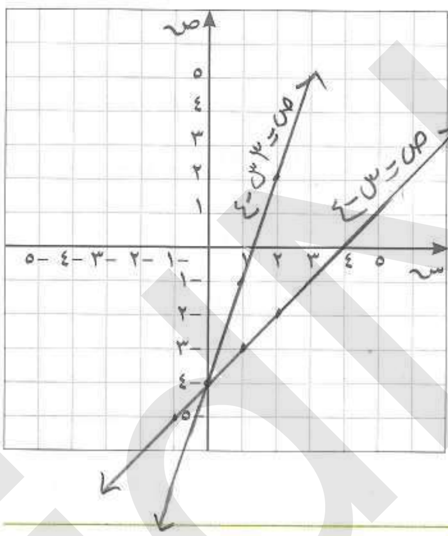
مجموعة الحل = {(٢ ، −١)}

٣ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص − ٣ س + ٤ = ٠ ، ص − س = −٤

ص = ٣ س − ٤			
س	٠	١	٢
ص	−٤	−١	٢

ص = س − ٤			
س	٠	١	٢
ص	−٤	−٣	−٢



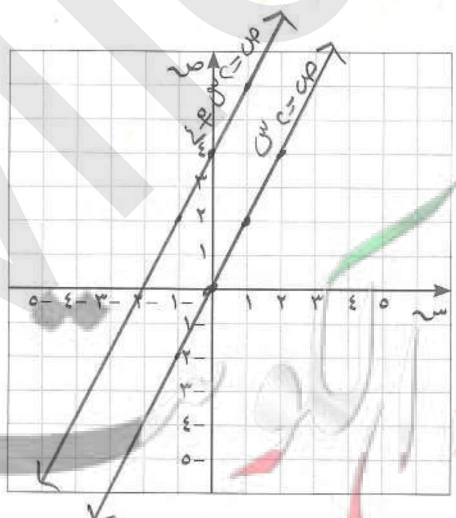
مجموعة الحل = {(٠ ، −٤)}

٤ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين الآتيتين بيانيًّا :

ص − ٢ س = ٠ ، ص = ٢ س + ٤

ص = ٢ س			
س	٠	١	٢
ص	٠	٢	٤

ص = ٢ س + ٤			
س	٠	١	−١
ص	٤	٦	٢



....

KuwaitTeacher.Com

٤-٧ المتباينات الخطّية (منطقة الحل المشترك)
The Graph of Linear Inequalities

سوف تتعلّم :تمثيل منطقة حل متباينة ومنطقة الحل المشترك لمتباينتين من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانيًّا .

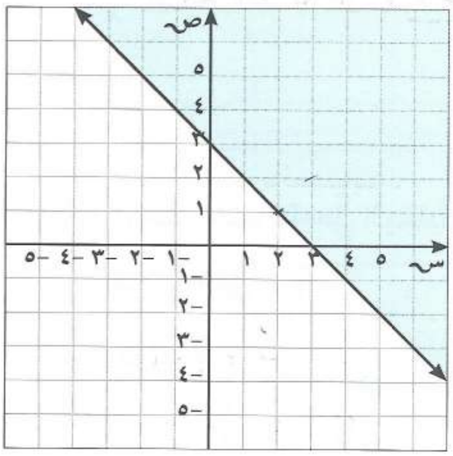
العبارات والمفردات :
متباينة خطّية
Linear Inequality
خطّ فاصل
(خطّ الحدود)
Boundary Line

المتباينات التالية تُسمّى متباينات من الدرجة الأولى في متغيّرين :

أس + ب ص < جـ ، أس + ب ص ≥ جـ ،

أس + ب ص > جـ ، أس + ب ص ≤ جـ

حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية .



نشاط (١) :

في الشكل المقابِل : بيان المستقيم س + ص = ٣ يقسم المستوى الإحداثي إلى ٣ مجموعات من النقاط .

معلومات مفيدة :
يستخدم العلماء المتباينات لوصف معدّلات الشوائب المسموح بها في عيّنات مياه الشرب .

أكمِل الجدول التالي :

النقطة	تنتمي إلى المنطقة المظلَّلة	تنتمي إلى المستقيم	تنتمي إلى المنطقة غير المظلّلة
(٣ ، ٢)	✓	✗	✗
(٢ ، ١)	✗	✓	✗
(٠ ، ٠)	✗	✗	✓
(١ ، ٤)	✓	✗	✗

- جميع نقاط المستقيم تمثّل حلًّا للمعادلة س + ص = ٣ .
- جميع نقاط المنطقة المظلَّلة تمثّل حلًّا للمتباينة س + ص > ٣ .
- جميع نقاط المنطقة غير المظلّلة تمثّل حلًّا للمتباينة س + ص < ٣ .

تُعرَف منطقة الحل لمتباينة الدرجة الأولى في متغيّرين على أنّها جميع النقاط (س ، ص) في المستوى الإحداثي والتي تحقّق المتباينة .

MidNight
KuwaitTeacher.Com

عند إيجاد منطقة الحلّ لمتباينة الدرجة الأولى في متغيّرين ، سوف نحتاج إلى رسم خطّ مستقيم يُسمّى خط الحدود (أو الخطّ الفاصل) .

إذا كانت المتباينة على الصورة :

- أ س + ب ص ≥ جـ ، أ س + ب ص ≤ جـ ،
  نرسم خطّ الحدود (متّصل) .
- أ س + ب ص < جـ ، أ س + ب ص > جـ ،
  نرسم خطّ الحدود (متقطّع) .

معلومة مفيدة :
معادلة خط الحدود للمتباينة تسمى المعادلة المناظِرة للمتباينة.

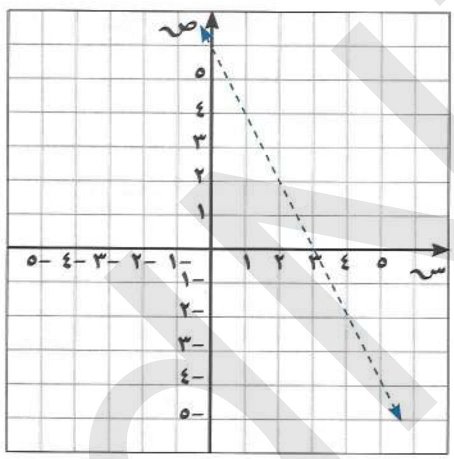
مثال (١) :

أُرسم خطّ الحدود للمتباينة : ٢ س + ص > ٦

الحلّ :

- المعادلة المناظِرة (معادلة خطّ الحدود) هي :
  ٢ س + ص = ٦
- نكوّن جدولًا لقيم المعادلة المناظِرة :

ص = − ٢ س + ٦			
س	١	٢	٣
ص	٤	٢	٠



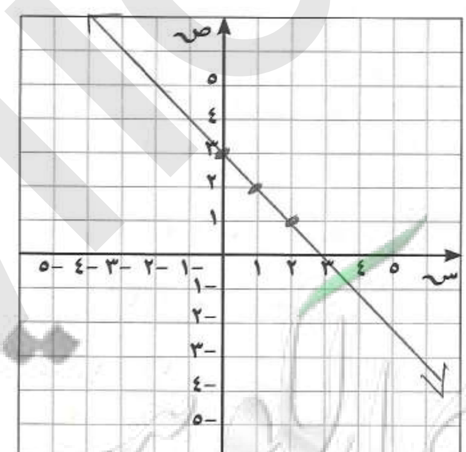
- نرسم خطّ الحدود (متقطّع) .

تدرّب (١) :

أُرسم خطّ الحدود للمتباينة : س + ص ≥ ٣

- المعادلة المناظِرة (معادلة خطّ الحدود) هي :
  س + ص ≤ ٣
- كوِّن جدولًا لقيم المعادلة المناظِرة :

ص = − س + ٣			
س	٠	١	٢
ص	٣	٢	١



- أُرسم خطّ الحدود (متصل) .

KuwaitTeacher.Com

خطوات إيجاد منطقة الحلّ لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانيًّا :

(١) نرسم خطّ الحدود للمتباينة باستخدام الخط **المتّصل** في حالة : ≥ ، ≤
والخط **المتقطّع** في حالة : < ، > .

(٢) نقوم بتحديد المنطقة التي تمثّل جانب منطقة حل المتباينة ، ولتحديد هذا الجانب نختار أيّ نقطة لا تنتمي إلى خطّ الحدود ونعوّض بها في المتباينة ، إذا نتج عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحل ، وإذا نتج عبارة غير صحيحة يكون الجانب الآخر هو جانب منطقة الحل .

(٣) في حالة : ≥ ، ≤ تتكوّن منطقة الحل من مجموعة نقاط خطّ الحدود اتّحاد مجموعة نقاط جانب منطقة الحل ،
وفي حالة : < ، > تتكونّ منطقة الحل من مجموعة نقاط جانب منطقة الحل فقط .

(٤) نظلّل المنطقة التي تمثّل منطقة حل المتباينة .

مثال (٢) :

مثِّل بيانيًّا منطقة حلّ المتباينة : ص ≤ ٢ س − ٣

الحلّ :

- المعادلة المناظرة (معادلة خطّ الحدود) هي : ص = ٢ س − ٣
- نكوّن جدولًا لقيم المعادلة المناظرة :

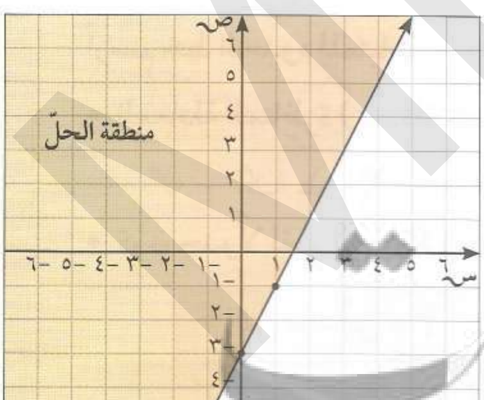
ص = ٢س − ٣			
س	١	٠	−١
ص	−١	−٣	−٥

- نرسم خطّ الحدود (**متّصل**)
- نختار نقطة لا تنتمي الى خطّ الحدود ولتكن نقطة الأصل (٠ ، ٠) ونعوّض بها في المتباينة .

ص ≤ ٢ س − ٣

٠ ≤ − ٣ **عبارة صحيحة**

- نظلّل المنطقة التي تنتمي إليها نقطة الأصل ، فتكون منطقة حلّ المتباينة هي جميع النقاط التي تنتمي إلى المنطقة المظلّلة وجميع نقاط خطّ الحدود .



Kuwaitteacher.Com

تدرّب (٢) :

مثّل بيانيًّا منطقة الحلّ للمتباينة : ص > ٢ − س

• المعادلة المناظِرة : ص = ٢ − س

• جدول القيم :

ص = ٢ − س			
س	١	٠	١−
ص	١	٢	٣

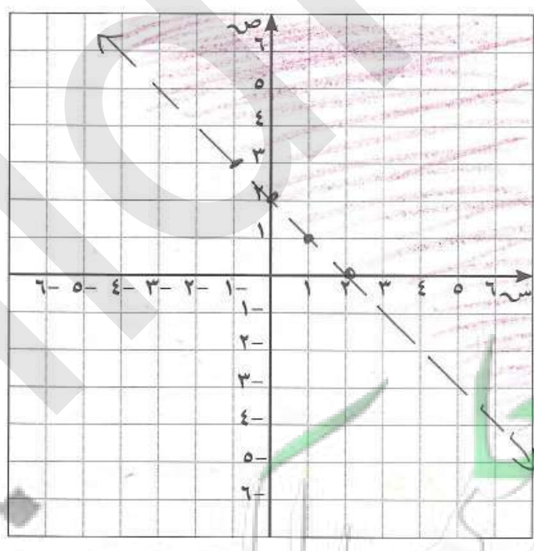
• أُرسم خطّ الحدود (متقطع)

• اِختر النقطة (...... ، ......) لا تنتمي إلى خطّ الحدود .

عوِّض في المتباينة ص > ٢ − س

...... > ٢ ...... (عبارة خاطئة)

• ظلِّل منطقة حلّ المتباينة .

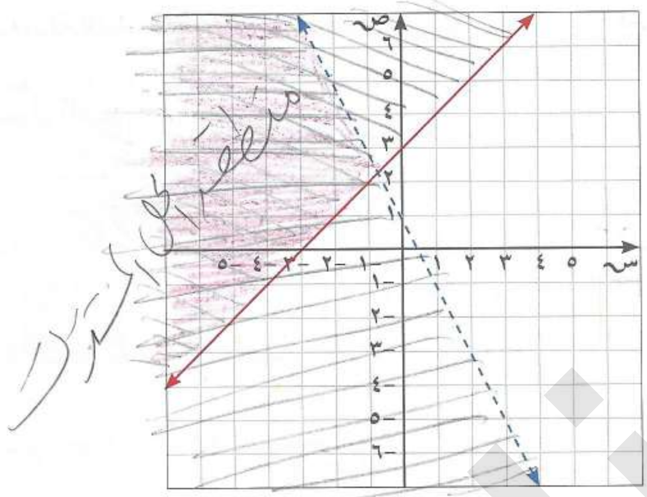


KuwaitTeacher.Com

نشاط (٢):

حاضر
٢٠/٣
د ١ صحيحة

يمثّل الشكل التالي خطّ الحدود للمتباينتين : ص ≤ س + ٣ ، ص < ١ - ٢ س



١ ظلِّل منطقة الحلّ لكلّ منهما .

٢ ماذا تلاحظ ؟

المنطقة التي تمثّل منطقة الحلّ هي تقاطع منطقتي الحلّ للمتباينتين (منطقة الحلّ المشترَك).

٣ عيِّن على الرسم منطقة الحلّ المشترَك .

خطوات إيجاد منطقة الحلّ المشترَك لمتباينتين من الدرجة الأولى في متغيّرين بيانيًّا :

(١) نرسم خطّ الحدود لكل متباينة في نفس المستوى الإحداثي .

(٢) نحدّد منطقة الحل لكل متباينة .

(٣) نوجد منطقة الحل المشترَك والتي تتكوّن من جميع النقاط (س ، ص) التي تنتمي إلى منطقة تقاطع منطقتي حل المتباينتين .

Midnight
صفوة كويت
KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٣) :

مثّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتين :

ص < ٢ س − ١ ، ص > س − ١

- المعادلة المناظِرة

ص = ٢ س − ١

- جدول القيم :

ص = ٢ س − ١			
س	٠	١	٢
ص	−١	١	٣

- أُرسم خطّ الحدود . (متقطع)
- عوّض بالنقطة (٠ ، ٠) .

٠ < −١

عبارة خاطئة

- المعادلة المناظِرة

ص = س − ١

- جدول القيم :

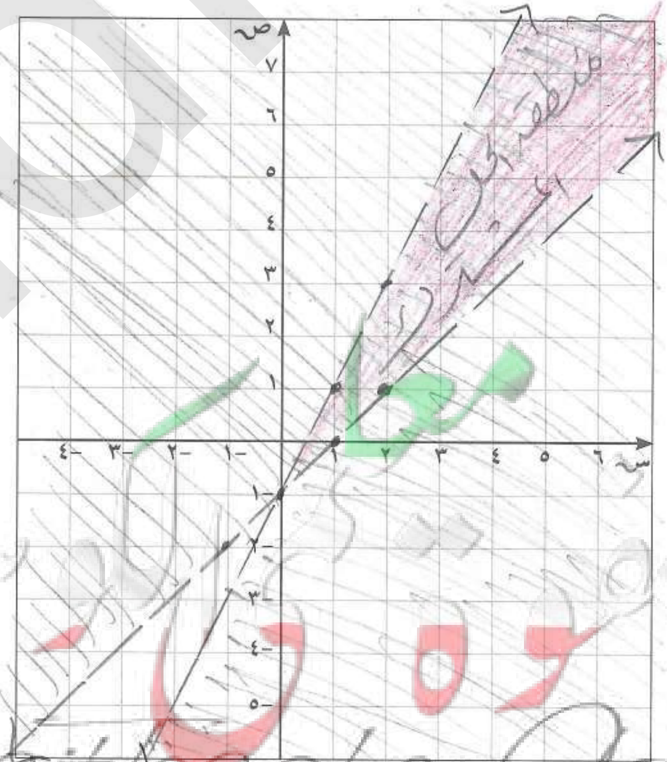
ص = س − ١			
س	٠	١	٢
ص	−١	٠	١

- أُرسم خطّ الحدود . (متقطع)
- عوّض بالنقطة (٠ ، ٠) .

٠ > −١

عبارة صحيحة

- ظلّل منطقة الحل لكل من المتباينتين .
- عيّن على الرسم منطقة الحل المشترَك .



Kuwait Teacher.Com

تدرّب (٤) :

مثّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتين :

ص < س ، ص ≤ ٢

المعادلة٢ المناظرة

ص = س

ص = س			
س	٠	١	٢
ص	٠	١	٢

نرسم خط الحدود (متقطع)

نعوض بالنقطة (٢، ١) في

المتباينة ص < س

١ < ٢ عبارة صحيحة

المعادلة١ المناظرة

ص = ٢

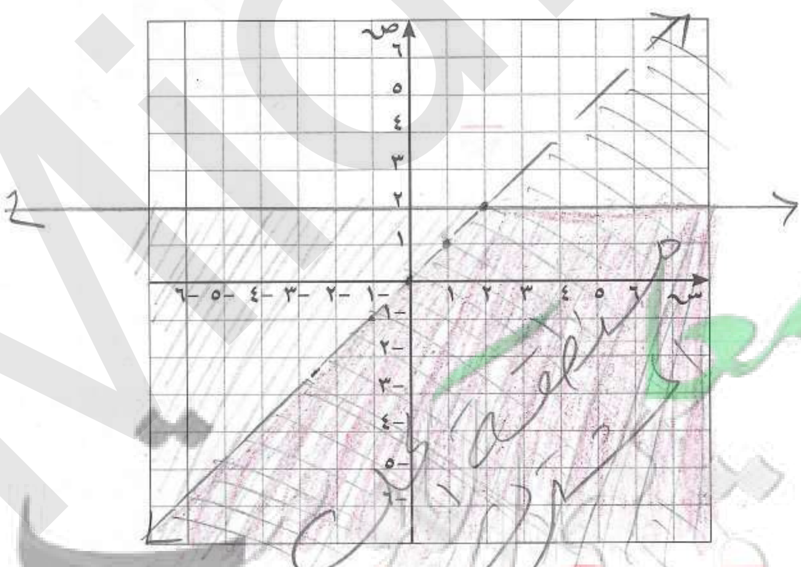
ص = ٢			
س	٠	١	٢
ص	٢	٢	٢

نرسم خط الحدود (متصل)

نعوض بالنقطة (٠، ٠) في

المتباينة ص ≤ ٢

٠ ≤ ٢ عبارة صحيحة



Midnight
صفوة المعلمين
KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٥) :

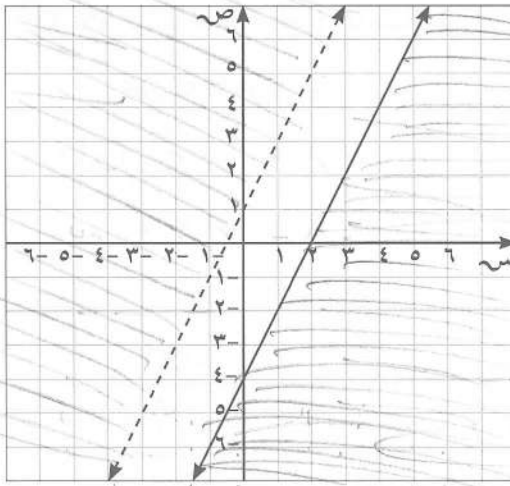
ظلِّل في الشكل المقابِل منطقة الحلّ لكلّ من المتباينتين :

$ص > ٢ س + ١$

$ص \geq ٢ س - ٤$

ماذا تلاحظ ؟

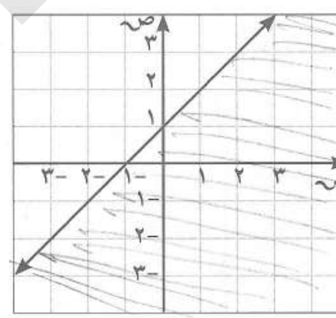
لا يوجد منطقة حل مشتركة



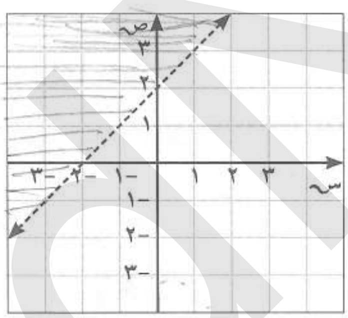
تمـرَّنْ :

١ ظلِّل منطقة حلّ كلّ متباينة في ما يلي :

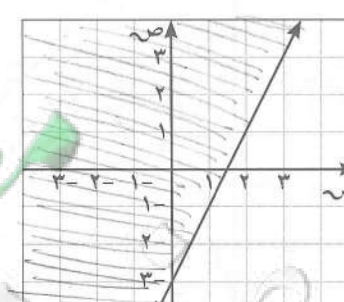
أ $ص \geq س + ١$



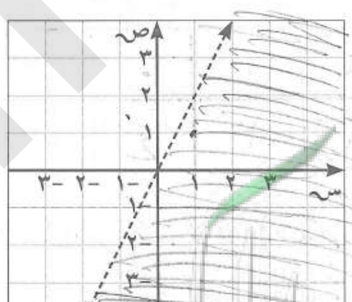
ب $ص > س + ٢$



جـ $ص \leq ٢ س - ٣$



د $ص < ٢ س$

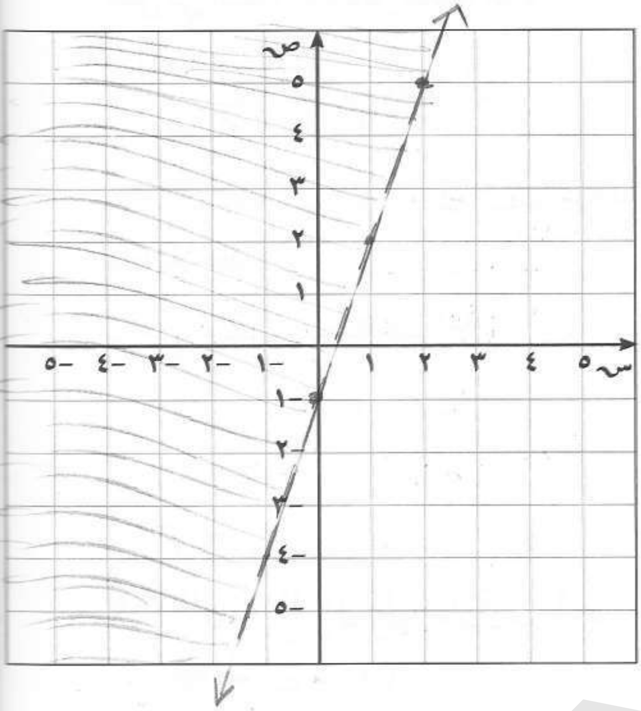


Midnight
KuwaitTeacher.Com

٩٣٢٢٦٣٦٦

٢ مثل بيانيًا منطقة الحل للمتباينة :

ص > ٣ س − ١



المعادلة المناظرة

ص = ٣ س − ١

ص = ٣س − ١			
س	٠	١	٢
ص	−١	٢	٥

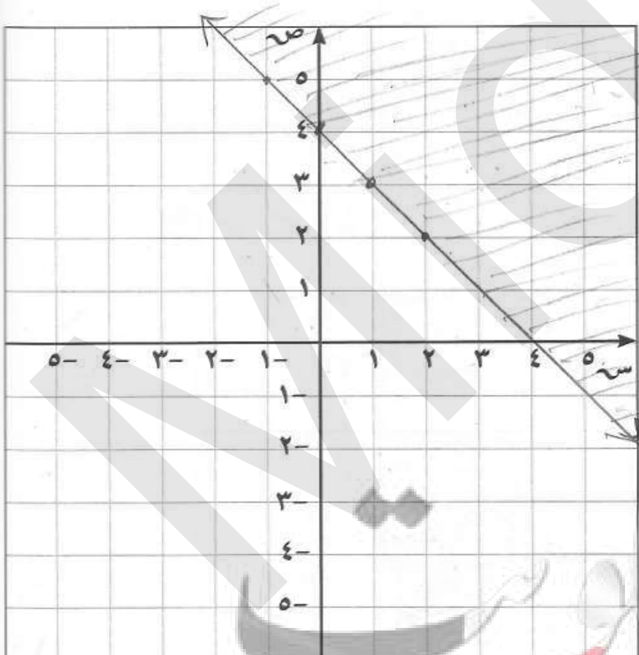
نرسم خط (متقطع)

نعوض بالنقطة (٠، ٠) في

المتباينة ٠ > −١ (صحيحة)

٣ مثل بيانيًا منطقة الحل للمتباينة :

ص ≤ ٤ − س



المعادلة المناظرة

ص = ٤ − س

ص = ٤ − س			
س	٠	١	٢
ص	٤	٣	٢

نرسم خط الحدود (متصل)

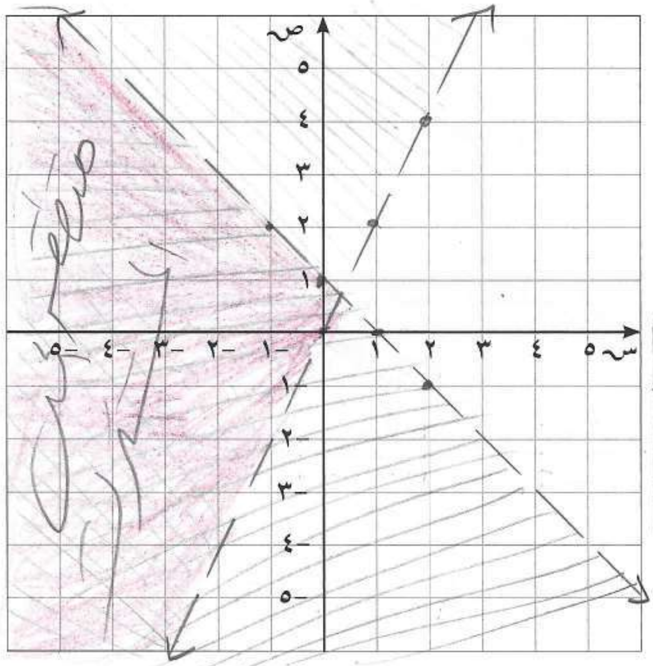
نعوض بالنقطة (٠، ٠) في المتباينة

٠ ≤ ٤ (خاطئة)

KuwaitTeacher.Com

٤ مثل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

ص > ٢ س ، ص < ١ − س



١ المعادلة المناظرة

ص = ٢ س

ص = ٢ س			
س	٠	١	٢
ص	٠	٢	٤

نرسم خط الحدود (متقطع)

نعوض بالنقطة (١،٢)

في المتباينة

٢ > ١ (خاطئة)

المعادلة المناظرة

ص = ١ − س

ص = ١ − س			
س	٠	١	٢
ص	١	٠	−١

نرسم خط الحدود (متقطع)

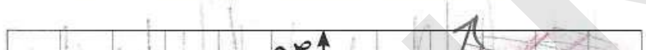
نعوض بالنقطة (٠،٠)

في المتباينة

٠ < ١ صحيحة

٥ مثل بيانيًا منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

ص < ٣ س − ٢ ، ص ≤ − ٢



١ المعادلة المناظرة

ص = ٣ س − ٢

ص = ٣ س − ٢			
س	٠	١	٢
ص	−٢	١	٤

نرسم خط الحدود (متقطع)

نعوض بالنقطة (٠،٠)

في المتباينة

٠ < −٢ خاطئة

المعادلة المناظرة

ص = −٢

ص = −٢			
س	٠	١	٢
ص	−٢	−٢	−٢

نرسم خط الحدود (متصل)

نعوض بالنقطة (٠،٠) في المتباينة

٠ ≥ −٢ (صحيحة)

KuwaitTeacher.Com

٧-٥ مراجعة الوحدة السابعة
Revision Unit Seven

أوّلًا : التمارين المقالية

١ أوجِد ميل المستقيم المارّ بالنقطتين في كلّ من الحالات التالية :

أ (١ ، ٣) ، (٢ ، ٦)

س١ ص١ س٢ ص٢

م = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$ = $\frac{٦ - ٣}{٢ - ١}$

= $\frac{٣}{١}$ = ٣

ب (-٢ ، ٩) ، (٤ ، ٠)

س١ ص١ س٢ ص٢

م = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$ = $\frac{٠ - ٩}{٤ - -٢}$

= $\frac{-٩}{٦}$ = $-\frac{٣}{٢}$

٢ أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكلّ من المستقيمات التالية :

أ ص = ٥ س + ٧

الميل = ٥

الجزء المقطوع من محور الصادات

= ٧

ب ٤ س + ٢ ص = ٥

$\frac{٢ص}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$ − $\frac{٤س}{٢}$

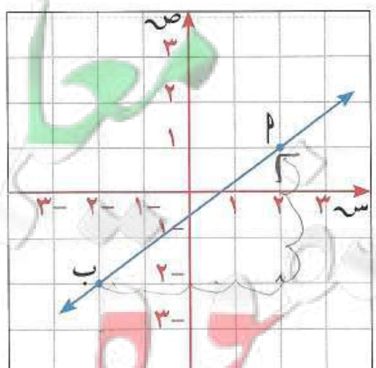
ص = $\frac{٥}{٢}$ − ٢س

الميل = −٢

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٥}{٢}$

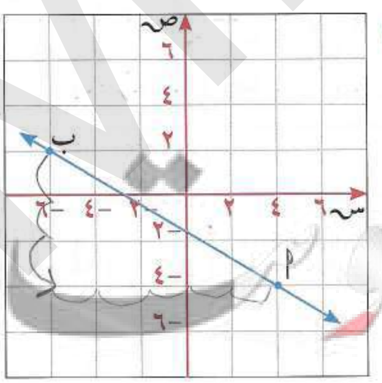
٣ أوجِد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ في كلّ ممّا يلي :

أ



م($\overleftrightarrow{أب}$) = $\frac{٣}{٤}$

ب



م($\overleftrightarrow{أب}$) = $-\frac{٣}{٥}$

KuwaitTeacher.Com

٤ حدِّد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة في كلّ من الحالات التالية :

أ $\overleftrightarrow{ل_١}$ الذي يمرّ بالنقطتين : (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ الذي معادلته : ٢ ص + س = ٦

م ($\overleftrightarrow{ل_١}$) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٥ - ٣}{٢ - ١}$ = $\frac{٢}{١}$ = ٢

معادلة المستقيم ل٢ ← $\frac{٢ص}{٢}$ = $\frac{-س}{٢}$ + $\frac{٦}{٢}$

المعادلة ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ٣

ميل ($\overleftrightarrow{ل_٢}$) = $-\frac{١}{٢}$

∴ م ($\overleftrightarrow{ل_١}$) × م ($\overleftrightarrow{ل_٢}$) = ٢ × $-\frac{١}{٢}$ = −١

∴ $\overleftrightarrow{ل_١}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل_٢}$

(المستقيمان متعامدان)

ب $\overleftrightarrow{ل_١}$ الذي يمر بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (−١ ، ٢) ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ الذي يمرّ بالنقطتين (−٢ ، ٥) ، (٢ ، ٨)

ميل ($\overleftrightarrow{ل_١}$) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٢ - ٥}{-١ - ٣}$ = $\frac{-٣}{-٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

ميل ($\overleftrightarrow{ل_٢}$) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٨ - ٥}{٢ - -٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ ميل ($\overleftrightarrow{ل_١}$) = ميل ($\overleftrightarrow{ل_٢}$)

∴ المستقيمان متوازيان

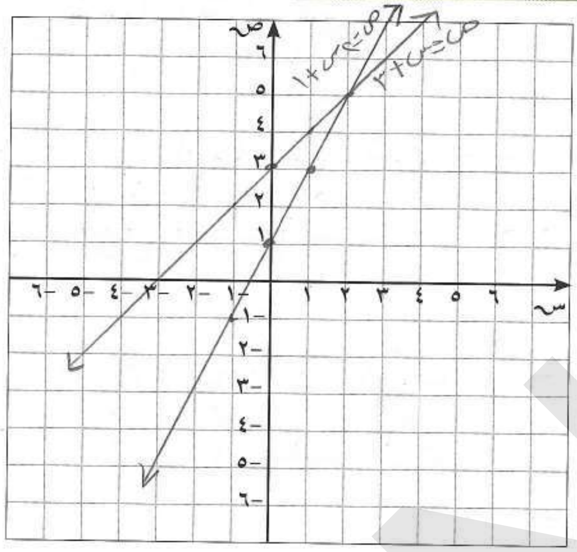
Midnight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

٥ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتين بيانيًّا :

أ ص = س + ٣ ، ص = ٢ س + ١

ص = س + ٣			
س	٠	١	٢
ص	٣	٤	٥

ص = ٢ س + ١			
س	٠	١	٢
ص	١	٣	٥



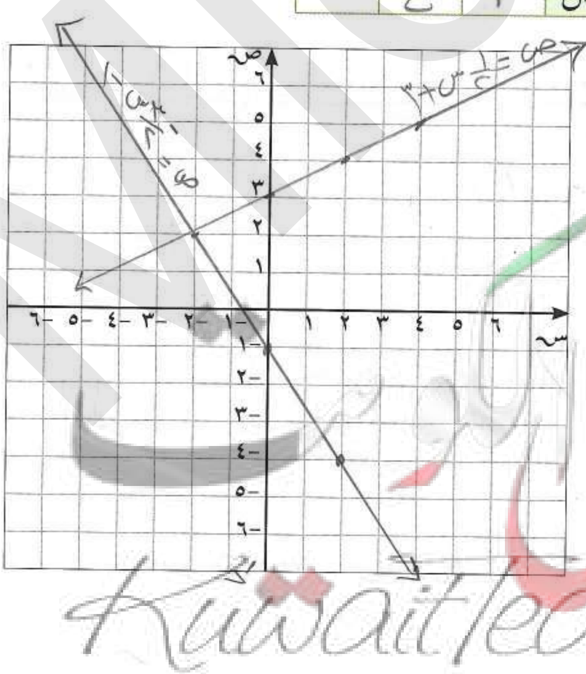
مجموعة الحل = {(٢، ٥)}

معامل س كسر غير موجود في الدروس

ب ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ، ص = − $\frac{٣}{٢}$ س − ١

ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣			
س	٠	٢	٤
ص	٣	٤	٥

ص = − $\frac{٣}{٢}$ س − ١			
س	٠	٢	٤
ص	−١	−٤	−٧

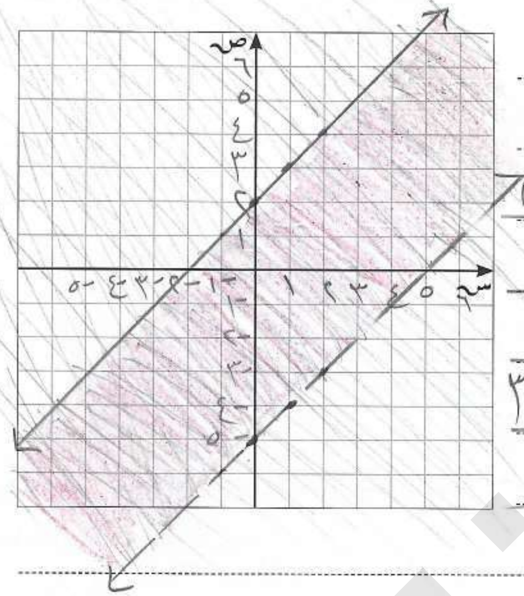


مجموعة الحل = {(−٢، ٢)}

MidNight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

٦ مثّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتين :

أ ص ≥ س + ٢ ، ص > س − ٥



المعادلة المناظرة

ص = س + ٢

ص = س + ٢			
س	٠	١	٢
ص	٢	٣	٤

نرسم خط الحدود (متصل)

بالتعويض بالنقطة (٠،٠)

في المتباينة

٠ ≥ ٢ صحيحة

المعادلة المناظرة

ص = س − ٥

ص = س − ٥			
س	٠	١	٢
ص	−٥	−٤	−٣

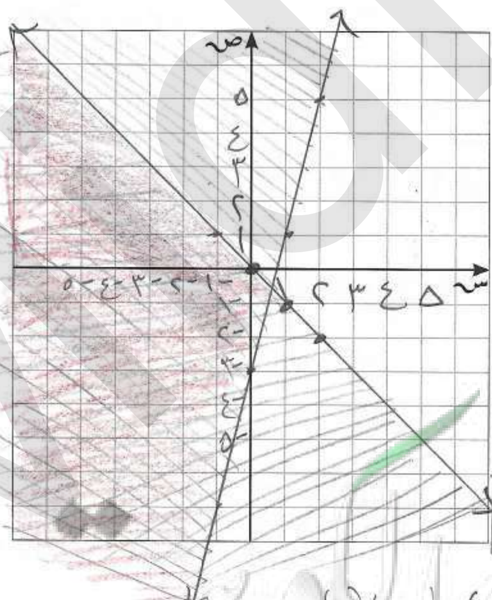
نرسم خط الحدود (متقطع)

بالتعويض بالنقطة (٠،٠) في المتباينة

٠ > −٥ صحيحة

الفكرة غير موجودة بالدروس

ب ص − ٤ س + ٣ ≤ ٠ ، ص ≥ − س



ص ≤ ٤ س − ٣

المعادلة المناظرة

ص = ٤ س − ٣

الخط متصل

ص = ٤ س − ٣			
س	٠	١	٢
ص	−٣	١	٥

بالتعويض بالنقطة (٠،٠)

في المتباينة

٠ ≤ −٣ صحيحة

المعادلة المناظرة

ص = − س

الخط متصل

ص = − س			
س	٠	١	٢
ص	٠	−١	−٢

بالتعويض (١،٠) في المتباينة

١ ≥ −١ خاطئة

KuwaitTeacher.Com

ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ المستقيم الذي معادلته ص = ٤ ليس له ميل . يوازي محور السينات (أفقي) الميل = صفر	(أ)	(ب)
٢ المستقيمان ص = ٢ س − ١ ، ٢/٢ ص = ٢/٢ س + ٣/٢ متوازيان .	(أ)	(ب)
٣ المستقيم الذي معادلته ص = ٣ والمستقيم الذي معادلته س = ٢ ← رأسي ليس له ميل مستقيمان متعامدان .	(أ)	(ب)
٤ إذا كان ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ل_١}$ هو ٢ ، فإنّ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ل_٢}$ العمودي عليه هو −٢	(أ)	(ب)
٥ النقطة (٠ ، ١) هي أحد حلول المتباينة : ص ≤ ٢ س − ١ صحيحة	(أ)	(ب)

ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

٢ص/٢ = −س/٢ − ٢/٢ ← ص = −½ س − ١

٦ الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته : ٢ ص + س + ٢ = ٠ هو :

(أ) −١ (ب) −١/٢ (ج) ١ (د) ٢

---

٧ المستقيم المتعامد مع المستقيم : ٢/٢ ص = ٣/٢ س − ١/٢ هو : ← ص = ٣/٢ س − ١

(أ) ٣ ص = ٢ س + ٥ (ب) ٢ ص = ٣ س − ٥

(ج) ٢ ص = −٣ س + ٥ (د) ٣ ص = −٢ س − ٥

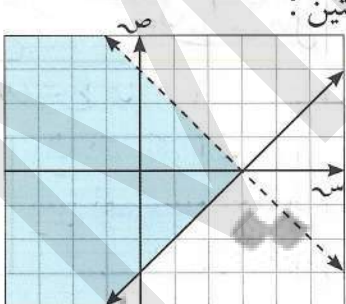
---

٨ مجموعة حلّ المعادلتين : ص = ٣ س − ٢ ، ص = ٢ س + ٢ هي :

(أ) {(٠ ، −٢)} (ب) {(٠ ، ٢)} (ج) {(٤ ، ١٠)} (د) ∅

---

٩ المنطقة المظلّلة في الشكل أدناه تمثّل منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتين :



(أ) س + ص ≥ ٣ ، ص ≤ س − ٣ استبعاد

(ب) س + ص > ٣ ، ص ≥ س − ٣

(ج) س + ص > ٣ ، ص < س − ٣ استبعاد

(د) س + ص < ٣ ، ص ≤ س − ٣ صحيحة

---

١٠ النقطة التي تنتمي إلى منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتين س + ص > −٢ ، ٢ س − ص < ٣ هي :

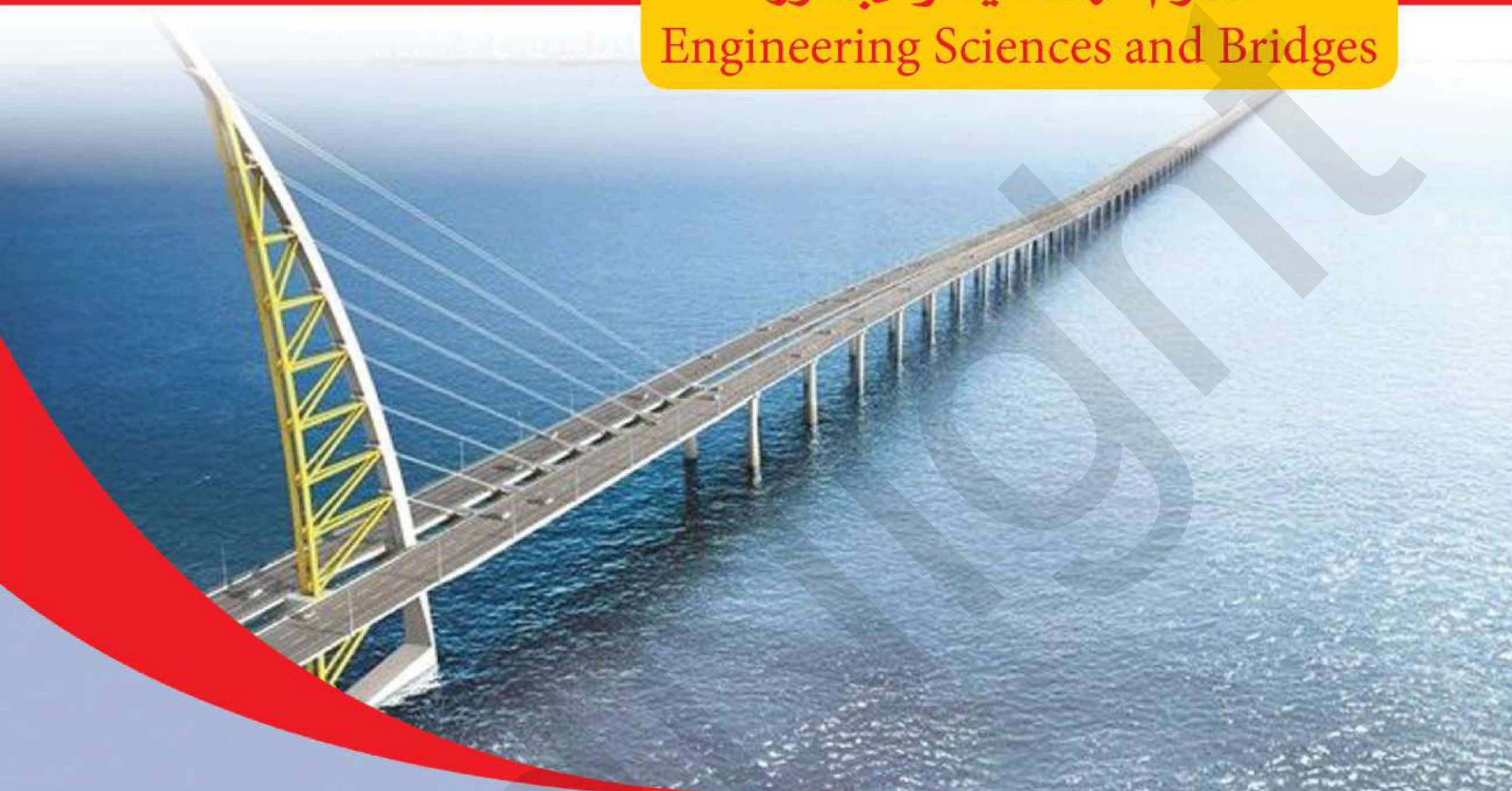
(أ) (٢ ، ١) (ب) (١ ، ١) (ج) (٤ ، ١) (د) (٣ ، ١)

KuwaitTeacher.Com

الوحدة الثامنة

هندسة المثلّث
Geometry of Triangle

العلوم الهندسية والجسور
Engineering Sciences and Bridges



يرتبط بناء الجسور بهندسة المثلّث حيث يمكن توظيفها في إقامة الدعائم والركائز القوية لجسور الطرق . وقد اهتمّت بلادنا الحبيبة الكويت بالجسور ، ومن أهمّ مظاهر هذا الاهتمام مشروع جسر الشيخ جابر الأحمد ، والذي يُعَدّ من المشاريع العملاقة المدرَجة ضمن الخطّة التنموية لدولة الكويت ، ويعتبر هذا الجسر من أطول الجسور البحرية على مستوى العالم ، حيث يربط جسر الشيخ جابر مدينة الكويت بمدينة الصبية الجديدة ، ويهدف إلى اختصار المسافة بين المدينتين .

KuwaitTeacher.Com

مشروع الوحدة : (هياكل الجسور)

الجسر هو منشأ يُستخدَم للعبور من منطقة إلى أخرى بينهما عائق ، قد يكون هذا العائق مائيًّا أو أرضًا وعرة أو منطقة شديدة الانحدار، أو لحلّ مشاكل مرورية .

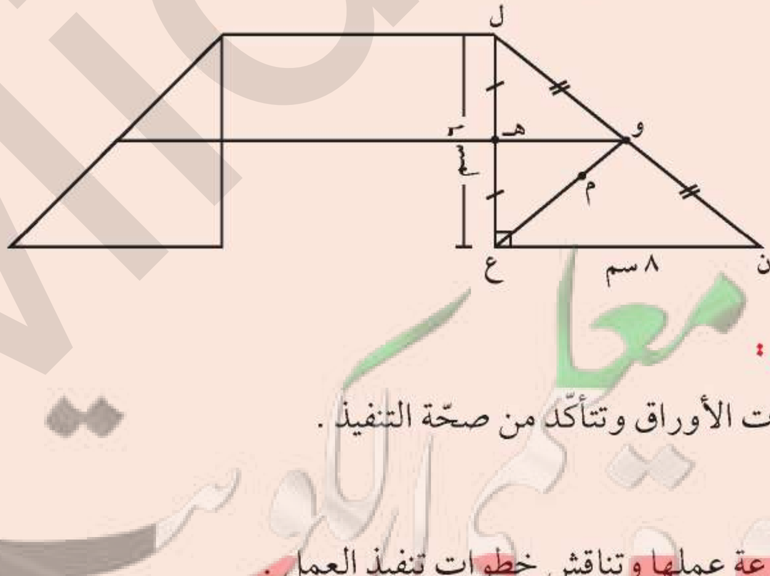
وتختلف هياكل الجسور بحسب الغرض من إنشائها ، كما أنّ لها ارتباطًا وثيقًا بهندسة المثلّث .

خطّة العمل :

- أمامك تصميم لجسر مشاة حيث يمثّل المثلّث ل ع ن إحدى دعامات هذا الجسر.
  ساعِد المهندس أنت وأفراد مجموعتك على استكمال بيانات التصميم.

خطوات تنفيذ المشروع :

- أوجِد المسافة التي يمكن أن ينشأ عليها درج لجسر المشاة والتي تمثّل ن و .
- أوجِد المسافة من الدعامة التي يمشي عليها المشاة قبل الدخول إلى الجسر والتي تمثّل هـ و .
- أراد المهندس معرفة المسافة بين نقطة تقاطع متوسّطات المثلّث ورأس الزاوية القائمة لقاعدة الدعامة والتي تمثّل م ع ، وذلك لتعليق لوحة إعلانية . أوجِد هذه المسافة .



علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة التنفيذ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

Midnight
KuwaitTeacher.Com

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثامنة

هندسة المثلّث

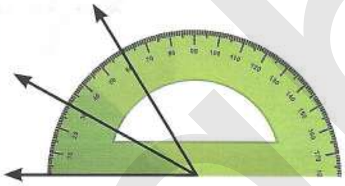
- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين
- القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر
- محاور أضلاع المثلّث
- منصِّفات زوايا المثلّث
- الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث
- القطع المتوسّطة للمثلّث

KuwaitTeacher.Com

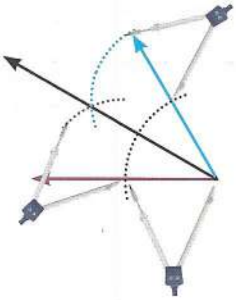
اِستعِدَّ للوحدة الثامنة

١ تنصيف زاوية :

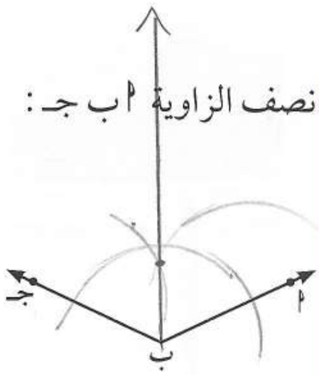
بالقياس :



بالرسم :

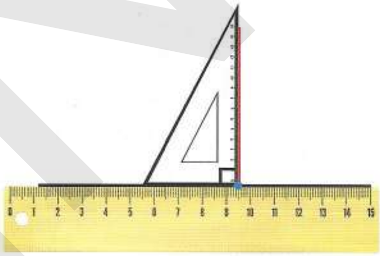


نصف الزاوية ∠ أ ب جـ :

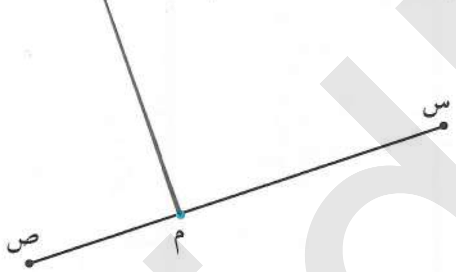


٢ رسم قطعة عمودية على أخرى :

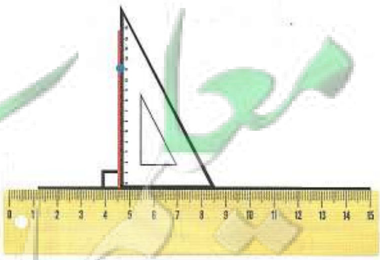
أ من نقطة تنتمي إليها



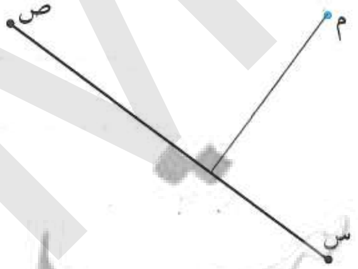
أَقِم عمودًا من النقطة م على $\overline{\text{س ص}}$



ب من نقطة لا تنتمي إليها



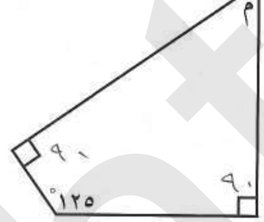
أسقِط عمودًا من النقطة م على $\overline{\text{س ص}}$



KuwaitTeacher.Com

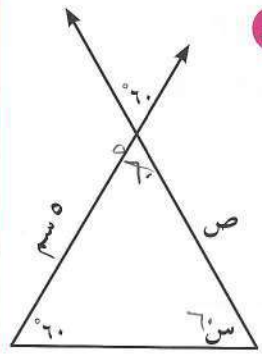
٣ أوجِد قيمة المجهول في كلّ ممّا يلي :

أ



م = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١٢٥)
= ٥٥°

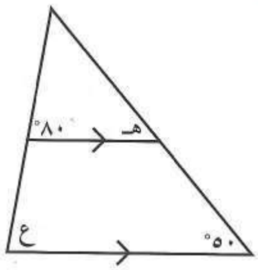
ب



س = ١٨٠ − (٦٠ + ٦٠) = ٦٠

ص = ٥ سم لتساوي الزاويتين

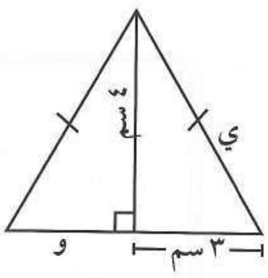
جـ



ع = ٨٠° بالتناظر والتوازي

هـ = ٥٠° بالتناظر والتوازي

د

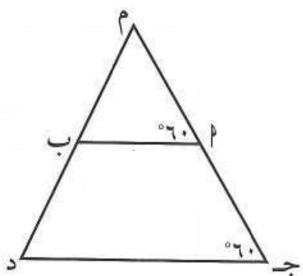


و = ٣ سم منصف

ي = $\sqrt{}$ (٤)² + (٣)² فيثاغورث

= $\sqrt{}$ ١٦ + ٩ = $\sqrt{}$ ٢٥ = ٥

٤ في الشكل المقابل : هل أب // جـد ولماذا ؟



ق (م أ ب) = ق (ج) = ٦٠ وهما في

وضع تناظر ∴ أب // جـد

٥ في الشكل المقابِل : د تقسم أب بنسبة ٢ : ١ من جهة أ .

أكمل ما يلي :

أد = ٢ دب ، دب = $\frac{1}{2}$ أد

أب = $\frac{3}{2}$ أد ، أد = $\frac{2}{3}$ أب

أب = ٣ دب ، دب = $\frac{1}{3}$ أب

٦ أوجِد قيمة س :

٧ س = ٢ (٣س + ١)

٧س = ٦س + ٢

٧س − ٦س = ٢

س = ٢

Midnight
معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

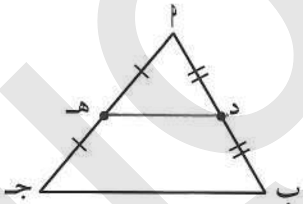
٨-١ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث
Midsegment of Triangle

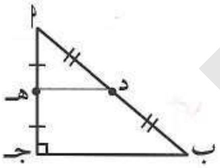
سوف تتعلّم : توظيف القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث لحلّ تمارين هندسية .

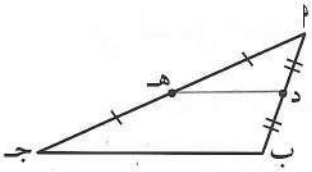
العبارات والمفردات:
مثلّث
Triangle
قطعة مستقيمة
Segment

نشاط :

١ في كلّ من المثلّثات التالية : د منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$. أُرسم $\overline{\text{د هـ}}$.


مثلّث حادّ الزوايا


مثلّث قائم الزاوية


مثلّث منفرج الزاوية

معلومات مفيدة :
يستخدم مهندسو المساحة نظرية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين لإيجاد طول بحيرة ما .

٢ أوجِد باستخدام الأدوات الهندسية كلًّا مما يلي :

مثلّث حادّ الزوايا	مثلّث قائم الزاوية	مثلّث منفرج الزاوية
د هـ = ١٫٥ سم	د هـ = ١ سم	د هـ = ١٫٥ سم
ب جـ = ٣ سم	ب جـ = ٢ سم	ب جـ = ٣ سم

ماذا تلاحظ ؟ د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

مثلّث حادّ الزوايا	مثلّث قائم الزاوية	مثلّث منفرج الزاوية
ق ($\widehat{\text{ا ب جـ}}$) = ٦٠°	ق ($\widehat{\text{ا ب جـ}}$) = ٩٠°	ق ($\widehat{\text{ا ب جـ}}$) = ١١٠°
ق ($\widehat{\text{ا د هـ}}$) = ٦٠°	ق ($\widehat{\text{ا د هـ}}$) = ٩٠°	ق ($\widehat{\text{ا د هـ}}$) = ١١٠°

اللوازم :
- أدوات هندسية .

ق ($\widehat{\text{ا ب جـ}}$) $\cong$ ق ($\widehat{\text{ا د هـ}}$) وهما في وضع تناظر

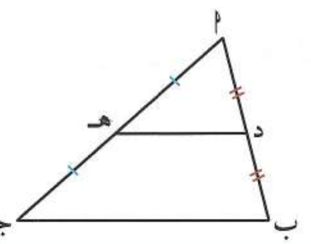
∴ د هـ // ب جـ

KuwaitTeacher.Com

نظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .

في المثلّث ٵ ب جـ :



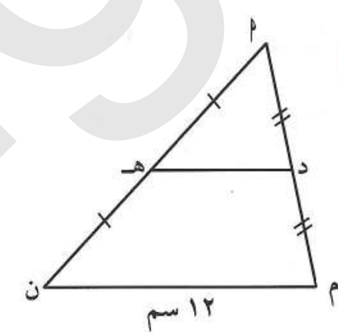
∵ د منتصف $\overline{\text{ٵب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ٵجـ}}$

∴ $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

تدرّب (١) :

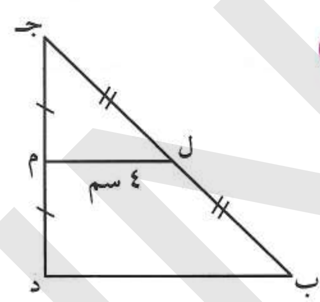
في كلّ من المثلّثات التالية أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

أ



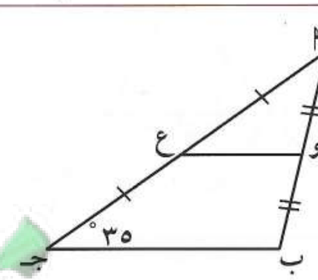
د هـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

ب



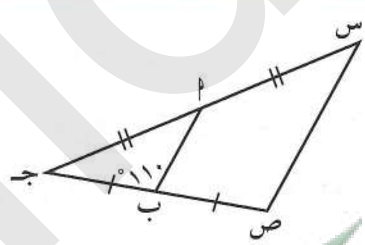
ب د = ٢ × ٤ = ٨ سم

جـ



ق ($\widehat{\text{ٵع و}}$) = ٣٥° بالتناظر والتوازي

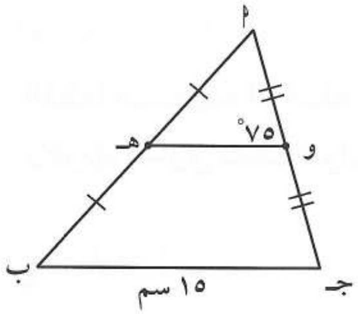
د



ق ($\widehat{\text{ص}}$) = ١١٠° بالتناظر والتوازي

صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

مثال (١) :



في الشكل المقابل ﺃب جـ مثلّث فيه :

ﺃو = و جـ ، ﺃهـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ،

ق (ﺃ$\hat{\text{و}}$ هـ) = ٧٥° .

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{\text{و هـ}}$ (٢) ق ($\hat{\text{جـ}}$) .

الحلّ :

المعطيات : ﺃو = و جـ ، ﺃهـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ،

ق (ﺃ$\hat{\text{و}}$ هـ) = ٧٥°

المطلوب : إيجاد (١) طول $\overline{\text{و هـ}}$ (٢) ق ($\hat{\text{جـ}}$)

البرهان : في Δ ﺃب جـ :

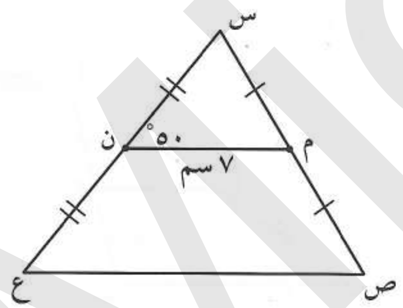
∵ و منتصف $\overline{\text{ﺃجـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ﺃب}}$

∴ و هـ = $\frac{1}{2}$ جـ ب ، $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$

و هـ = $\frac{1}{2}$ × ١٥ = ٧ $\frac{1}{2}$ سم

∴ ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ق (ﺃ$\hat{\text{و}}$ هـ) = ٧٥° (بالتناظر والتوازي)

تدرّب (٢) :



س ص ع مثلّث فيه :

م منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ،

ق (س $\hat{\text{ن}}$ م) = ٥٠° ، م ن = ٧ سم .

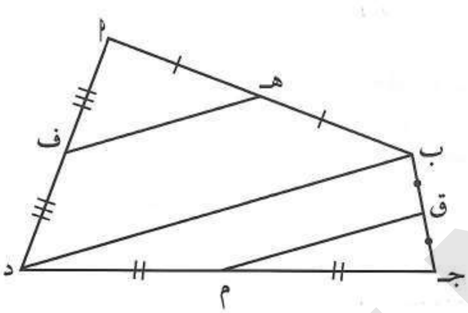
أوجِد بالبرهان : (١) ص ع (٢) ق ($\hat{\text{ع}}$) .

المعطيات : م منتصف $\overline{سص}$ ، ن منتصف $\overline{سع}$
ق(س ن̂ م) = ٥٠° ، م ن = ٧ سم

المطلوب : ١) أوجد ص ع ٢) ق(ع̂)

البرهان : في △ س ص ع
م منتصف $\overline{سص}$ ، ن منتصف $\overline{سع}$
∴ ص ع = ٢ م ن ، $\overline{صع}$ // م ن
∴ ص ع = ٢ × ٧ = ١٤ سم
∴ ق(ع̂) = ق(س ن̂ م) = ٥٠° بالتناظر والتوازي

تدرّب (٣) :



في الشكل الرباعي أ ب جـ د :
إذا كان هـ ، ف ، م ، ق منتصفات الأضلاع
$\overline{بأ}$ ، $\overline{أد}$ ، $\overline{دجـ}$ ، $\overline{جـب}$ على الترتيب .
أثبِت أنّ : $\overline{هـف}$ // $\overline{قم}$

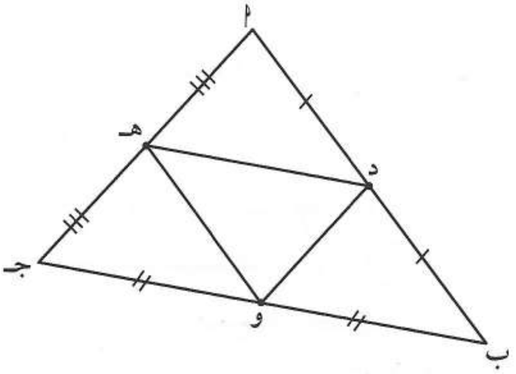
المعطيات : هـ ، ف ، م ، ق منتصفات $\overline{بأ}$ ، $\overline{أد}$ ، $\overline{دجـ}$ ، $\overline{جـب}$
على الترتيب

المطلوب : أثبت أن $\overline{هـف}$ // $\overline{قم}$

البرهان : في المثلّث أ ب د :
∵ هـ منتصف $\overline{أب}$ ، ف منتصف $\overline{أد}$
∴ $\overline{هـف}$ // $\overline{بد}$ (١)
في △ ب جـ د
ق منتصف $\overline{بجـ}$ ، م منتصف $\overline{جـد}$
∴ $\overline{قم}$ // $\overline{بد}$ ← (٢)
من (١) ، (٢) ينتج أن
$\overline{هـف}$ // $\overline{قم}$

KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٤) :



ﺃ ب جـ مثلّث فيه :

ﺃ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٤ سم ،

ﺃ جـ = ١١ سم ، د ، هـ ، و منتصفات

ﺃ ب ، ﺃ جـ ، ب جـ على الترتيب .

أوجِد بالبرهان محيط المثلّث د و هـ .

المعطَيات : ﺃ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٤ سم ، ﺃ جـ = ١١ سم ، د ، هـ ، و منتصفات ﺃ ب ، ﺃ جـ ، ب جـ

المطلوب : أوجد محيط △ د و هـ

البرهان : في المثلّث ﺃ ب جـ :

∵ د منتصف ﺃ ب ، و منتصف ب جـ

∴ د و = $\frac{1}{2}$ ﺃ جـ = $\frac{1}{2}$ ٥ سم

∵ د منتصف ﺃ ب ، هـ منتصف ﺃ جـ

∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ١٤ = ٧ سم

∵ و منتصف ب جـ ، هـ منتصف ﺃ جـ

∴ هـ و = $\frac{1}{2}$ ﺃ ب = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

محيط △ د و هـ = د و + د هـ + و هـ

= $\frac{1}{2}$ ٥ + ٧ + ٦ = $\frac{1}{2}$ ١٨ سم

فكِّر وناقِش

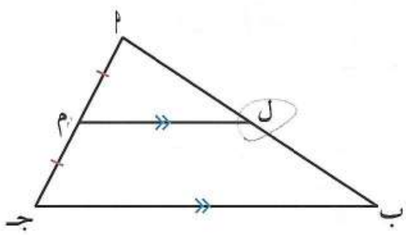
في تدرّب (٤) ، ما العلاقة بين محيط المثلّث د و هـ ، ومحيط المثلّث ﺃ ب جـ ؟

محيط △ د و هـ = $\frac{1}{2}$ محيط △ ﺃ ب جـ

صفوة الوقت
KuwaitTeacher.Com

نظرية :

إذا رُسِم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلّث موازِيًا ضلعًا آخر فيه ، فإنّه ينصّف الضلع الثالث .

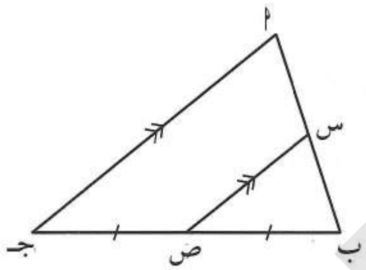


في المثلّث ءب جـ :

∵ م منتصف $\overline{\text{ءجـ}}$ ، $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ل منتصف $\overline{\text{ءب}}$

تدرّب (٥) :



ءب جـ مثلّث فيه : ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

$\overline{\text{ص س}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ، ءس = ٦ سم .

أوجِد بالبرهان ب س .

المعطَيات : ص منتصف بجـ ، ص س // جـء ، ء س = ٦ سم

المطلوب : أوجد بالبرهان ب س

البرهان : في المثلّث ءب جـ :

∵ ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ص س}}$ // جـء

∴ س منتصف ءب

∴ ب س = ءس = ٦ سم

Midnight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

تذكّرْ أنّ :

قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلّ منهما الآخر.

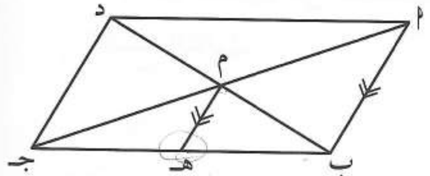
مثال (٢) :

أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م ،

رسم $\overline{\text{م هـ}} \,//\, \overline{\text{أ ب}}$ ،

إذا كان $\overline{\text{م هـ}} \cap \overline{\text{ب جـ}} = \{\text{هـ}\}$ ،

فأثبت أنّ : م هـ $= \frac{1}{2}$ أ ب .



الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م ،

$\overline{\text{م هـ}} \,//\, \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م هـ}} \cap \overline{\text{ب جـ}} = \{\text{هـ}\}$

المطلوب : أثبِت أنّ م هـ $= \frac{1}{2}$ أ ب

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع أ ب جـ د

∴ م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ (١)

في المثلّث أ ب جـ :

∵ $\overline{\text{م هـ}} \,//\, \overline{\text{أ ب}}$

∴ هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢)

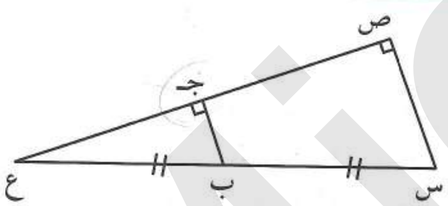
∴ م هـ $= \frac{1}{2}$ أ ب

تدرّب (٦) :

س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،

ب منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ص ع}}$.

أثبِت أنّ : ص جـ = ع جـ .



المعطَيات : س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، ب منتصف $\overline{\text{س ع}}$

$\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ص ع}}$

المطلوب : أثبت أن ص جـ = ع جـ

البرهان : ∵ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ص ع}}$ ∴ ق(ب جـ م) = ٩٠°

ق(ص) = ق(ب جـ ع) = ٩٠° وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{\text{ب جـ}} \,//\, \overline{\text{س ص}}$ ← (١)

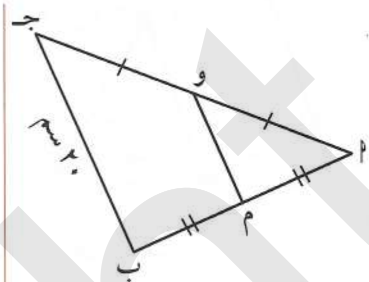
∵ ب منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ← (٢)

∴ جـ منتصف ص ع ∴ ص جـ = ع جـ

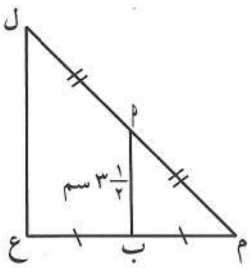
Midlight
KuwaitTeacher.Com

تمـــرَّنْ :

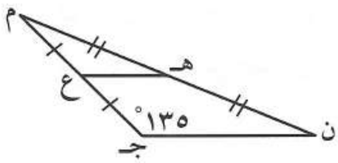
١ في كلّ من المثلّثات التالية أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



م و = $\frac{1}{2}$ × ٢٠ = ١٠ سم

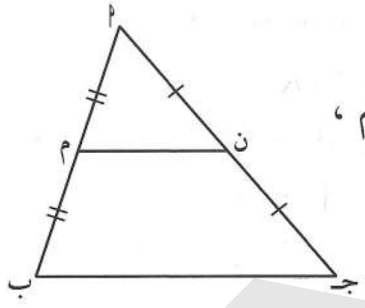


ل ع = ٢ × ٣$\frac{1}{2}$ = ٧ سم



ق (هـ $\hat{ع}$ م) = ١٣٥° بالتناظر والتوازي

٢ أ ب جـ مثلّث فيه :



م منتصف $\overline{أب}$ ، ن منتصف $\overline{أجـ}$ ، أب = ١٠ سم ،
أجـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١١ سم .
أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{نم}$.
(٢) محيط △ أ ن م .

المعطيات : م منتصف $\overline{أب}$ ، ن منتصف $\overline{أجـ}$ ، أب = ١٠ سم
أجـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١١ سم
المطلوب ① طول $\overline{نم}$ ② محيط △ أ ن م
البرهان
في △ أ جـ ب
ن منتصف $\overline{أجـ}$ ، م منتصف $\overline{أب}$
∴ ن م = $\frac{1}{2}$ جـ ب = $\frac{1}{2}$ × ١١ = ٥$\frac{1}{2}$ سم
∴ أ ن = $\frac{1}{2}$ أ جـ = $\frac{1}{2}$ × ١٣ = ٦,٥ سم
∴ أ م = $\frac{1}{2}$ أ ب = $\frac{1}{2}$ × ١٠ = ٥ سم
محيط △ أ ن م = ٥$\frac{1}{2}$ + ٦,٥ + ٥ = ١٧ سم

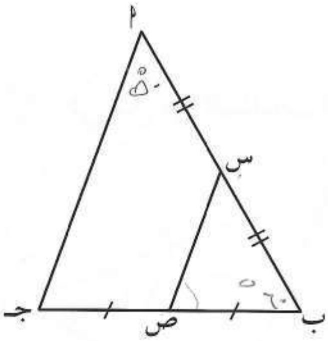
KuwaitTeacher.Com

٣ أ ب جـ مثلّث فيه :

س منتصف أب ، ص منتصف ب جـ ،

ق (ب̂) = ٦٠° ، ق (أ̂) = ٥٠° .

أوجِد ق (س ص̂ ب) .



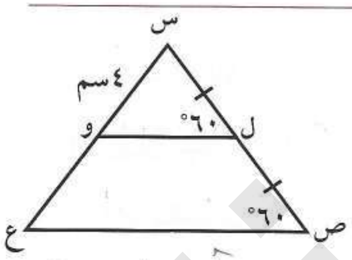
المعطيات : س منتصف أب ، ص منتصف ب جـ ،
ق (ب̂) = ٦٠° ، ق (أ̂) = ٥٠°
المطلوب : أوجد ق (س ص̂ ب)
البرهان : في △ أ ب جـ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°
∴ ق (جـ̂) = ١٨٠° − (٥٠° + ٦٠°) = ٧٠°
∵ س منتصف أب ، ص منتصف ب جـ
∴ س ص = ½ أ جـ ، س ص // أ جـ
∴ ق (س ص̂ ب) = ق (جـ̂) = ٧٠° بالتناظر والتوازي

---

٤ س ص ع مثلّث فيه : ل منتصف س ص ،

ق (ص̂) = ق (س ل̂ و) = ٦٠° ، س و = ٤ سم .

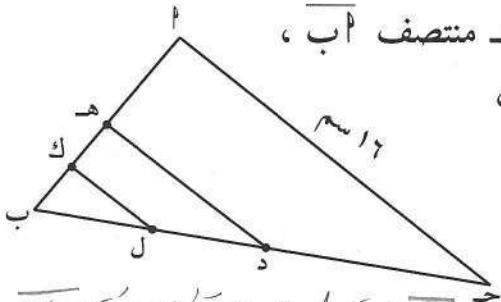
أوجِد طول س ع .



المعطيات : ل منتصف س ص ، ق (ص̂) = ق (س ل̂ و) = ٦٠°
، س و = ٤ سم
المطلوب : أوجد طول س ع
البرهان :
∵ ق (ص̂) = ق (س ل̂ و) = ٦٠° وهما في وضع تناظر
∴ ل و // ص ع ، ∵ ل منتصف س ص
∴ و منتصف س ع
∴ و ع = و س = ٤ سم

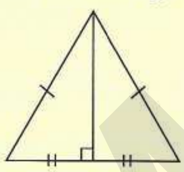
Midnight
KuwaitTeacher.Com

٥ أ ب جـ مثلّث فيه : أجـ = ١٦ سم ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، د منتصف $\overline{جـب}$ ، ك منتصف $\overline{ب هـ}$ ، $\overline{ك ل}$ // $\overline{هـ د}$. أوجِد طول ك ل .

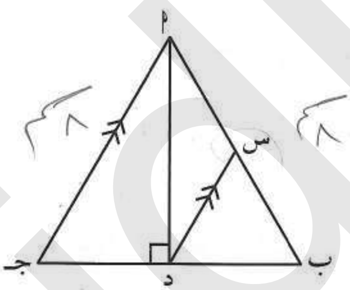


المعطيات: أجـ = ١٦ سم ،
هـ منتصف أب ، د منتصف جـب ، ك منتصف ب هـ ، ك ل // هـ د
المطلوب: أوجد طول ك ل
البرهان:
في △ أ ب جـ
هـ منتصف أب ، د منتصف جـب
∴ هـ د = ١/٢ أ جـ = ١/٢ × ١٦ = ٨ سم
∴ في △ هـ د ب
ك منتصف هـ ب ، ل منتصف د ب
∴ ك ل = ١/٢ هـ د = ١/٢ × ٨ = ٤ سم

تذكَّرْ أنّ : في المثلّث المتطابق الضلعين العمود المرسوم من رأس المثلّث على قاعدته ينصّفها .



٦ عند تصميم أحد الجسور ، قام المهندس برسم المثلّث في الشكل المقابل :
حيث أب = أجـ = ٨ سم ، $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$ ،
رسم $\overline{د س}$ // $\overline{جـ أ}$ ، س ∈ $\overline{أب}$.
أوجِد طول س د .



المعطيات: أب = أجـ = ٨ سم ، أد ⊥ ب جـ ، د س // جـ أ
المطلوب: طول س د
البرهان: ∵ أب = أجـ ∴ △ أب جـ متطابق الضلعين
∵ أد ⊥ ب جـ
∴ د منتصف ب جـ (من خواص المثلث متطابق الضلعين) (١)
∵ س د // أ جـ
∴ س منتصف أ ب (٢)
من (١) ، (٢) نستنتج أن
س د = ١/٢ أ جـ = ١/٢ × ٨ = ٤ سم

Kuwaitteacher.Com

٨-٢ القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر

The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of the Hypotenuse

العبارات والمفردات:

رأس
Vertex

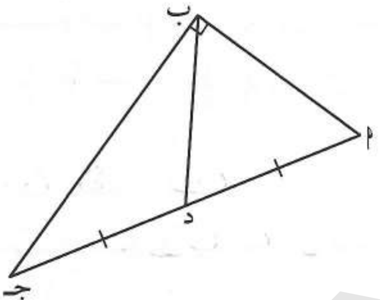
زاوية قائمة
Right Angle

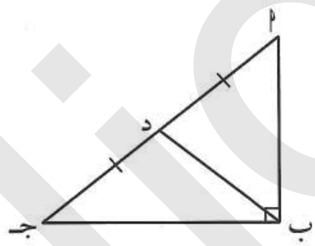
وتر المثلّث
Hypotenuse

سوف تتعلّم : توظيف القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في المثلّث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر لحلّ تمارين هندسية .

نشاط (١):

في الأشكال التالية : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$.





١ باستخدام الأدوات الهندسية ، أكمِل ما يلي :

طول $\overline{\text{ب د}}$ = ٢ سم ، طول $\overline{\text{أ جـ}}$ = ٤ سم

طول $\overline{\text{ب د}}$ = ٢,٥ سم ، طول $\overline{\text{أ جـ}}$ = ٥ سم

٢ ماذا تلاحظ ؟ ب د = ½ أ جـ

معلومات مفيدة :
يستخدم المهندسون نظرية القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في مثلّث إلى منتصف الوتر لمعرفة طول الدعائم الحديدية المستخدَمة في الجسور .

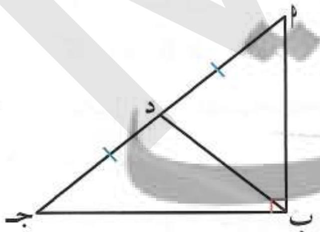
نظرية :
طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلّث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .

اللوازم :
- أدوات هندسية .

في المثلّث أ ب جـ :

∵ ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٩٠° ، د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

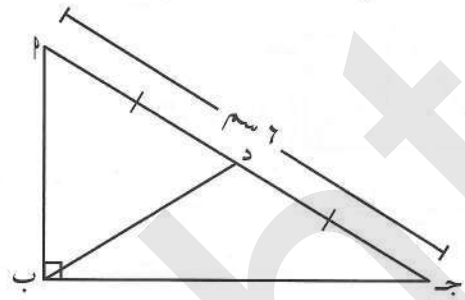
∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ

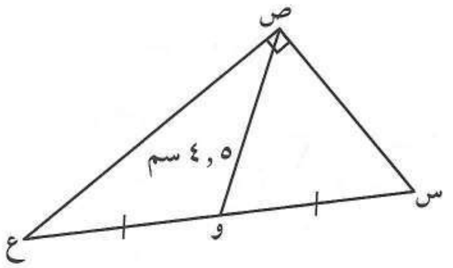


KuwaitTeacher.Com

تدرّب (١) :

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

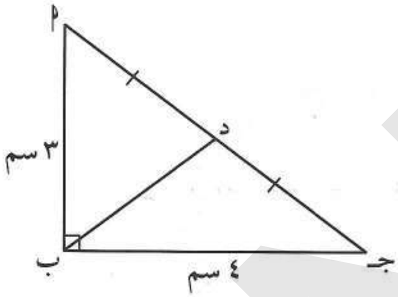




طول $\overline{\text{ب د}}$ = $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم

س ع = ٢ × ٤,٥ = ٩ سم

مثال (١) :



ٰب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ٰب = ٣ سم ،
ب جـ = ٤ سم ، د منتصف $\overline{\text{ٰجـ}}$.
أوجِد بالبرهان طول $\overline{\text{ب د}}$.

الحلّ :

المعطَيات : ٰب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ٰب = ٣ سم ،
ب جـ = ٤ سم ، د منتصف $\overline{\text{ٰجـ}}$.

المطلوب : إيجاد طول $\overline{\text{ب د}}$.

البرهان : ∵ ٰب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب

∴ $(\text{ٰجـ})^2 = (\text{ٰب})^2 + (\text{ب جـ})^2$ (نظرية فيثاغورث)

$= (٣)^2 + (٤)^2$

$= ٩ + ١٦ = ٢٥$

∴ ٰجـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

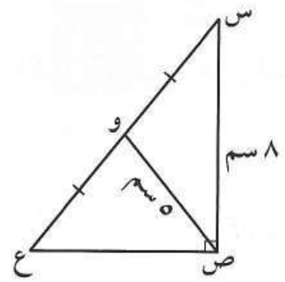
∵ د منتصف $\overline{\text{ٰجـ}}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ ٰجـ

$= \frac{١}{٢} \times ٥ = ٢\frac{١}{٢}$ سم

Midnight
KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٢) :



س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ،
ص و = ٥ سم ، س ص = ٨ سم .

أوجد بالبرهان : (١) س ع (٢) ص ع .

المعطَيات : س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،
و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، ص و = ٥ سم ، س ص = ٨ سم .

المطلوب : إيجاد (١) س ع (٢) ص ع

البرهان : ∵ س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$

∴ ص و = $\frac{1}{2}$ س ع

∴ س ع = ٢ ص و = ٢×٥ = ١٠ سم

من نظرية فيثاغورث

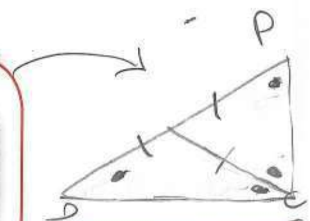
(ص ع)^2 = (س ع)^2 − (س ص)^2

= ١٠٠ − ٦٤ = ٣٦

ص ع = $\sqrt{36}$ = ٦ سم

فكِّر وناقِش

إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة من رأس مثلّث إلى منتصف الضلع المقابل تساوي نصف طول هذا الضلع . فهل المثلّث قائم الزاوية ؟ ولماذا ؟



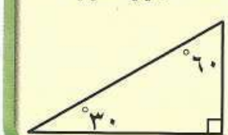
ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{جـ}$) ① ، ق($\hat{ب}$) + ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{جـ}$) = ١٨٠° ② بالتعويض ب ① في ②

∴ ق($\hat{ب}$) + ق($\hat{ب}$) = ١٨٠°

٢ × ق($\hat{ب}$) = ١٨٠° ⟸ ق($\hat{ب}$) = ٩٠°

معلومة مفيدة :

المثلّث التالي : يُسمّى مثلّثًا ثلاثينيًا ستّينيًا .



نشاط (٢) :

أ ب جـ مثلّث ثلاثيني ستّيني ، ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° ،

أكمِل ما يلي باستخدام الأدوات الهندسية :

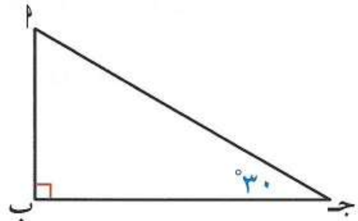
١ طول $\overline{\text{أ ب}}$ = ٢ سم

٢ طول $\overline{\text{أ جـ}}$ = ٤ سم

٣ ماذا تلاحظ ؟ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ

Midnight
KuwaitTeacher.Com

نتيجة (١) : في المثلّث الثلاثيني الستّيني يكون طول الضلع المقابِل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساوِيًا نصف طول الوتر .

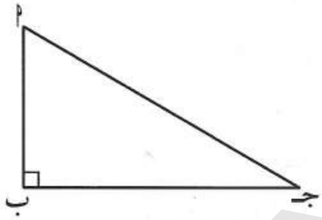


∵ أب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ق (جـ^) = ٣٠°

∴ أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ

وعكس ذلك أيضًا صحيح :

نتيجة (٢) : في المثلّث القائم الزاوية إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة مساوِيًا نصف طول الوتر ، فإنّ قياس الزاوية المقابِلة لهذا الضلع ٣٠° ويُسمّى المثلّث ثلاثينيًا ستّينيًا .



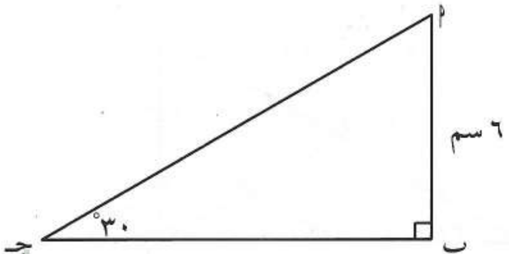
∵ أب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ

∴ ق (جـ^) = ٣٠°

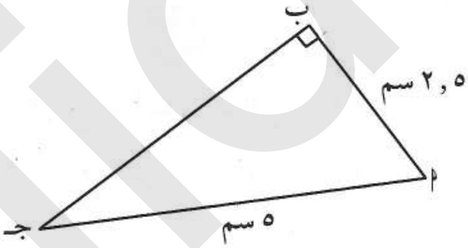
∴ المثلّث أب جـ ثلاثيني ستّيني

تدرّب (٣) :

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



أجـ = ٢ × ٦ = ١٢ سم

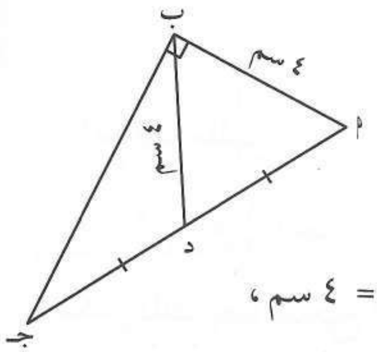


ق (جـ^) = ٣٠° لأن أب = ½ أجـ

Midlight
معلمي صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

مثال (٢) :

في الشكل المقابِل :



أوجد بالبرهان : (١) ق (جـ^) (٢) ق (أ^) .

الحلّ :

المعطَيات : أب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أب = ٤ سم ،

ب د = ٤ سم ، د منتصف $\overline{\text{أجـ}}$.

المطلوب : إيجاد (١) ق (جـ^) (٢) ق (أ^) .

البرهان : ∵ المثلّث أب جـ قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أجـ

∴ أجـ = ٢ × ٤ = ٨ سم

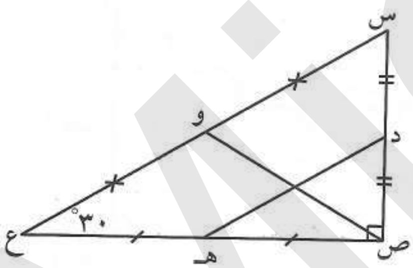
∵ أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ

∴ ق (جـ^) = ٣٠°

∴ أب جـ مثلّث ثلاثيني ستّيني

∴ ق (أ^) = ٦٠°

تدرّب (٤) :



س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،

ص و = ٦ سم ، ق (ع^) = ٣٠° ،

د منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ،

و منتصف $\overline{\text{س ع}}$.

أوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) طول $\overline{\text{س ع}}$ (٢) طول $\overline{\text{س ص}}$ (٣) طول $\overline{\text{د هـ}}$

المعطَيات : س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، ص و = ٦ سم ، ق (ع^)

= ٣٠° ، د منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$

Midlight
KuwaitTeacher.Com

المطلوب : أوجد ① طول $\overline{سع}$ ② طول $\overline{سص}$ ③ طول $\overline{ده}$

البرهان : ∵ في △ س ص ع القائم الزاوية في ص

∵ ق(∠ص) = ٩٠° ، و منتصف $\overline{سع}$

∴ س ع = ٢ ص و = ٢ × ٦ = ١٢ سم

∵ ق(∠ص) = ٩٠° ، ∵ ق(∠ع) = ٣٠°

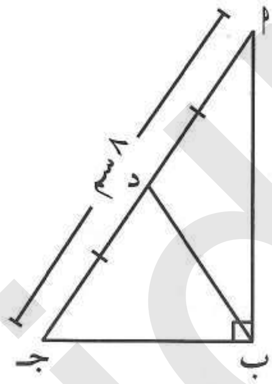
∴ △ س ص ع ثلاثيني ستيني

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ س ع = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

∵ د منتصف $\overline{سص}$ ، هـ منتصف $\overline{صع}$

∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ س ع = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

تمــرَّنْ :



① أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ،

د منتصف $\overline{أجـ}$ ، أ جـ = ٨ سم .

أوجد بالبرهان طول ب د .

المعطيات :

△ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، د منتصف

$\overline{أجـ}$ ، أ جـ = ٨ سم

المطلوب : أوجد طول $\overline{بد}$

البرهان :

∵ في △ أ ب جـ القائم الزاوية في ب

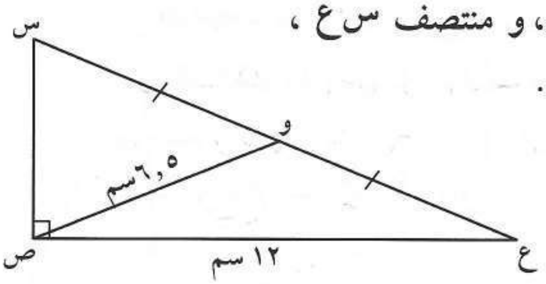
ق(∠ب) = ٩٠° ، د منتصف $\overline{أجـ}$

∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ

ب د = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤ سم

KuwaitTeacher.Com

٢ س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ،
ص و = ٦,٥ سم ، ع ص = ١٢ سم .



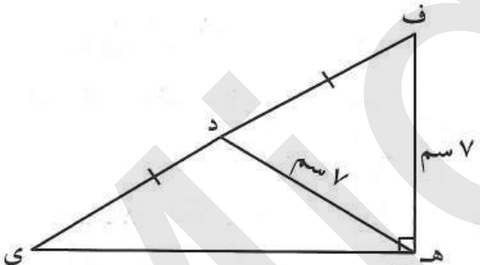
أوجد بالبرهان كلًّا مما يلي :

(١) س ع

(٢) س ص

المعطيات: س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، و منتصف س ع
ص و = ٦,٥ سم ، ع ص = ١٢ سم
المطلوب: أوجد (١) س ع (٢) س ص
البرهان:
∵ في △ س ص ع القائم الزاوية في ص
ق(ص) = ٩٠° ، و منتصف س ع
∴ س ع = ٢ × و ص = ٢ × ٦,٥ = ١٣ سم
∵ في △ س ع ص القائم الزاوية في ص (مبرهنة فيثاغورث)
(س ص)^٢ = (١٣)^٢ − (١٢)^٢
= ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥
س ص = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

٣ في الشكل المقابِل :



أوجد بالبرهان كلًّا مما يلي :

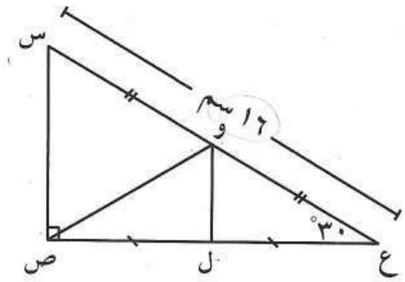
(١) ق ($\hat{\text{ي}}$)

(٢) ق ($\hat{\text{ف}}$) .

المعطيات: △ ف هـ ي قائم الزاوية في هـ ، د منتصف ف ي
، ف هـ = هـ د = ٧ سم
المطلوب: ق($\hat{\text{ي}}$) ، ق($\hat{\text{ف}}$)
البرهان: ∵ في △ ف هـ ي القائم الزاوية في هـ
ق($\hat{\text{هـ}}$) = ٩٠° ، د منتصف ف ي
∴ ف ي = ٢ × هـ د = ٢ × ٧ = ١٤ سم
∴ ف هـ = $\frac{١}{٢}$ ف ي
∴ ق($\hat{\text{ي}}$) = ٣٠° ، △ ف هـ ي ثلاثيني ستيني
∴ ق($\hat{\text{ف}}$) = ٦٠°

Midnight
KuwaitTeacher.Com

٤ صمّم مهندس جسرًا للمشاة ، فقام برسم المثلّث في الشكل المقابِل كدعامة للجسر حيث س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، س ع = ١٦ سم ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، ل منتصف $\overline{\text{ع ص}}$ ، ق (ع^) = ٣٠° .



أوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) ص و

(٢) س ص

(٣) و ل

المعطيات : س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، س ع = ١٦ سم

و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، ل منتصف $\overline{\text{ع ص}}$ ، ق (ع^) = ٣٠°

المطلوب : أوجد ① ص و ، ② س ص ، ③ و ل

البرهان :

∵ في △ س ص ع القائم الزاوية في ص

∵ ق (ص) = ٩٠° ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$

∴ ص و = $\frac{1}{2}$ س ع = $\frac{1}{2}$ × ١٦ = ٨ سم

∵ ق (ص) = ٩٠° ، ∵ ق (ع^) = ٣٠° ∴ △ س ص ع ثلاثيني ستيني

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ س ع = $\frac{1}{2}$ × ١٦ = ٨ سم

∵ و منتصف س ع ، ل منتصف $\overline{\text{ع ص}}$

∴ ل و = $\frac{1}{2}$ س ص = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤ سم

KuwaitTeacher.Com

٨-٣ محاور أضلاع المثلّث
Perpendicular Bisectors of a Triangle

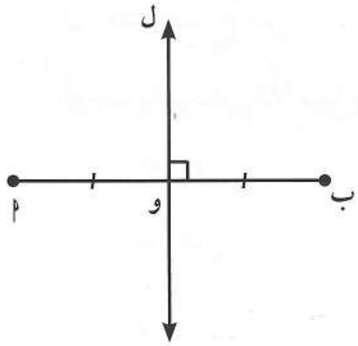
سوف تتعلّم : توظيف محاور أضلاع المثلّث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :
محور القطعة المستقيمة
Perpendicular Bisector

محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصِّف لها .

$\because$ $\overleftrightarrow{ل} \perp \overline{أب}$ ، أو = ب و

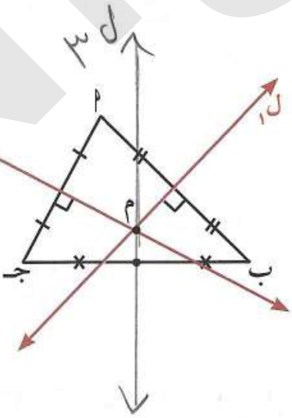
$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل}$ محور $\overline{أب}$



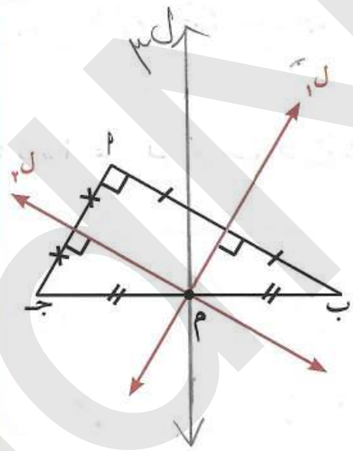
نشاط :

في المثلّثات التالية :

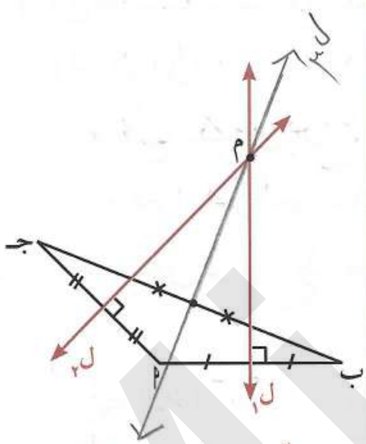
$\overleftrightarrow{ل_١}$ محور $\overline{بأ}$ ، $\overleftrightarrow{ل_٢}$ محور $\overline{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{ل_١} \cap \overleftrightarrow{ل_٢}$ = م



مثلّث حادّ الزوايا



مثلّث قائم الزاوية



مثلّث منفرج الزاوية

اللوازم :
- أدوات هندسية .

١ أرسم $\overleftrightarrow{ل_٣}$ محور $\overline{ب جـ}$ في المثلّثات السابقة [باستخدام الأدوات الهندسية].

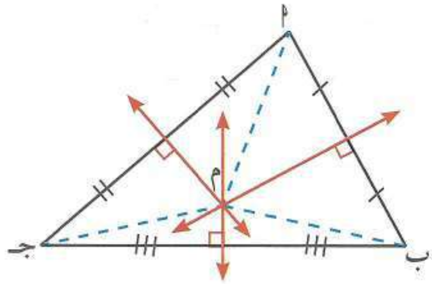
٢ ماذا تلاحظ ؟ المحاور تتقاطع في نقطة واحدة

نظرية :
محاور أضلاع المثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

KuwaitTeacher.Com

من النشاط السابق نلاحظ أنّ :

- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث الحادّ الزوايا تقع **داخله** .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث القائم الزاوية تقع في **منتصف الوتر** .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث المنفرج الزاوية تقع **خارجه** .



لتكن م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ﺃب جـ ،
باستخدام الأدوات الهندسية ، أوجِد كلًّا ممّا يلي :

1. م ﺃ = ٥٫٠ سم
2. م ب = ٥٫٠ سم
3. م جـ = ٥٫٠ سم

ماذا تلاحظ ؟ م ﺃ = م ب = م جـ

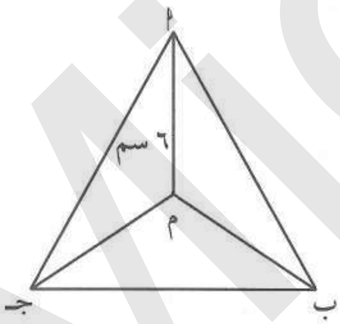
نتيجة : نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه .

∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ﺃب جـ

∴ م ﺃ = م ب = م جـ

بالرجوع إلى النشاط السابق ، تحقَّق من صحّة النتيجةُ لكلّ من المثلّث القائم الزاوية و المثلّث المنفرج الزاوية .

تدرّب (١) :



المثلّث ﺃب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،
م ﺃ = ٦ سم .

أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

م ب = ٦ سم

م جـ = ٦ سم

فكِّر وناقِش

لتكن م نقِطة تقع على أبعاد متساوية من رؤوس مثلّث. فهل م هي نقطة تقاطع محاور أضلاعه ؟ فسِّر إجابتك.

KuwaitTeacher.Com

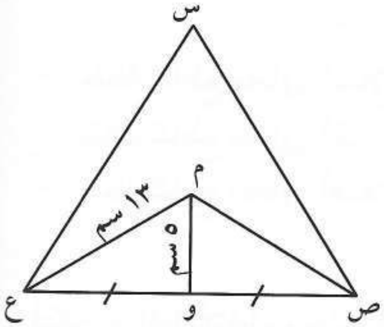
مثال :

س ص ع مثلّث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

و منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع



الحل :

المعطيات : س ص ع مثلّث فيه م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

و منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .

المطلوب : إيجاد كلّ من : (١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث س ص ع

∴ م ص = م ع = ١٣ سم

∵ و منتصف $\overline{\text{ص ع}}$

∴ $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{ص ع}}$

∴ Δ م ص و قائم الزاوية في و

∴ $(\text{ص و})^{٢} = (\text{م ص})^{٢} - (\text{م و})^{٢}$ (نظرية فيثاغورث)

$\text{ص و} = \sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$

$= \sqrt{١٦٩ - ٢٥} = \sqrt{١٤٤} = ١٢$ سم

∴ ص ع = ٢ × ص و

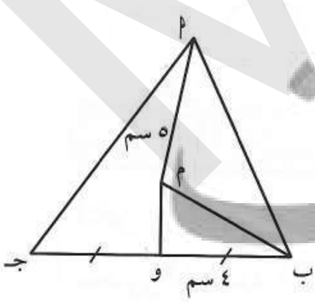
= ٢ × ١٢ = ٢٤ سم

تدرّب (٢) :

Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،

أ م = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

أوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) م ب (٢) م و .



KuwaitTeacher.Com

المعطَيات : Δ ٩ب جـ فيه م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،
٩م = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف ب جـ .

المطلوب : إيجاد كلّ ممّا يلي : (١) م ب (٢) م و

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ٩ب جـ

∴ م ب = م٩ = ٥ سم

∵ و منتصف ب جـ ∴ م و ⊥ ب جـ

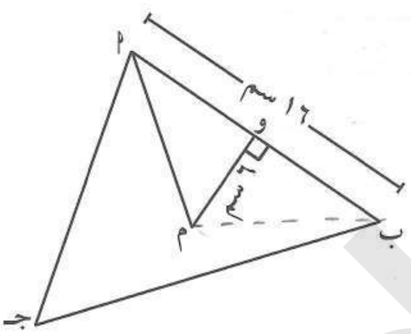
∵ Δ م ب و قائم الزاوية في و

∴ (م و)^{٢} = (٥)^{٢} − (٤)^{٢} (نظرية فيثاغورث)

= ٢٥ − ١٦ = ٩

∴ م و = √٩ = ٣ سم

تدرّب (٣) :



٩ب جـ مثلّث فيه :

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ٩ب جـ ،
م و ⊥ ٩ب ، ٩ب = ١٦ سم ، م و = ٦ سم .

أوجِد بالبرهان كلًّا مما يلي : (١) م ب (٢) محيط Δ ٩م ب .

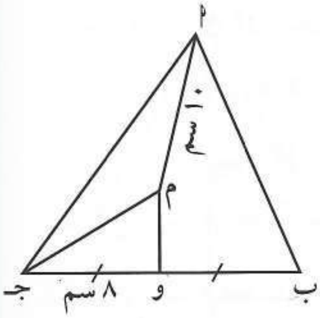
المعطيات : م نقطة تقاطع محاور أضلاع Δ ٩ب جـ
م و ⊥ ٩ب ، ٩ب = ١٦ سم ، م و = ٦ سم

المطلوب : أوجد م ب ، محيط Δ ٩م ب

البرهان : ∵ في Δ ٩ب جـ ، م و ⊥ ب ٩
∴ و منتصف ٩ب
∴ ٩و = و ب = ٨ سم
∵ في Δ ٩ و م القائم الزاوية في و
∴ (٩م)^{٢} = (٨)^{٢} + (٦)^{٢} (حسب نظرية فيثاغورث)
= ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠
٩م = √١٠٠ = ١٠ سم
∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث
∴ ب م = م٩ = ١٠ سم
محيط Δ ٩م ب = ١٠ + ١٠ + ١٦ = ٣٦ سم

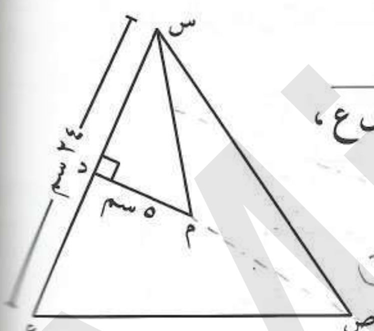
KuwaitTeacher.Com

تمــرَّنْ :



١ △ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،
أم = ١٠ سم ، و جـ = ٨ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.
أوجد بالبرهان : (١) طول $\overline{\text{م جـ}}$ (٢) طول $\overline{\text{م و}}$

المعطيات: م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ، أم = ١٠ سم
و جـ = ٨ سم ، و منتصف ب جـ
المطلوب: أوجد (١) م جـ (٢) م و
البرهان:
في △ أ ب جـ ، م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث
∴ م جـ = م أ = ١٠ سم
∵ و منتصف ب جـ
∴ و م ⊥ ب جـ
∴ △ م و جـ قائم الزاوية في و
∴ $(\text{م و})^2 = (10)^2 - (8)^2$ (مبرهنة فيثاغورث)
= ١٠٠ − ٦٤ = ٣٦
∴ م و = $\sqrt{36}$ = ٦ سم



٢ س ص ع مثلّث فيه :

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث س ص ع ، $\overline{\text{م د}} \perp \overline{\text{س ع}}$ ،
س ع = ٢٤ سم ، م د = ٥ سم . أوجِد طول م ص .

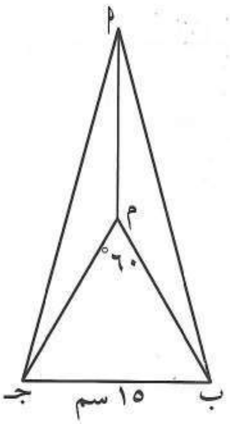
المعطيات: م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث
م د ⊥ س ع ، س ع = ٢٤ سم ، م د = ٥ سم
المطلوب: أوجد طول م ص
البرهان: في △ س ص ع
م د ⊥ س ع
∴ د منتصف س ع
∴ س د = ع د = ١٢ سم
في △ س م د القائم الزاوية في د
$(\text{س م})^2 = (12)^2 + (5)^2$
= ١٤٤ + ٢٥

Midnight
Kuwaitteacher.com

∴ س م = $\sqrt{169}$ = ١٣ سم

∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث

∴ م ص = م س = ١٣ سم



٣ أ ب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

إذا كان ب جـ = ١٥ سم ، ق (ب م̂ جـ) = ٦٠° .

(١) أثبِت أن المثلّث ب م جـ متطابق الأضلاع .

(٢) أوجِد م أ .

المعطيات : م نقطة تقاطع محاور أضلاع △

ب جـ = ١٥ سم ، ق (ب م̂ جـ) = ٦٠°

المطلوب : ① أثبت أن المثلث ب م جـ متطابق

الأضلاع ② أوجد م أ

البرهان : في △ أ ب جـ

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث

∴ م ب = م جـ = م أ

∴ △ م ب جـ متطابق الضلعين

∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

∴ ق (م ب̂ جـ) = ق (م جـ̂ ب) = $\frac{180° - 60°}{2}$ = $\frac{120}{2}$ = ٦٠°

∴ △ م ب جـ متطابق الأضلاع

∴ م ب = م جـ = ب جـ = ١٥ سم

∵ م أ = م ب = م جـ

∴ م أ = ١٥ سم

Kuwaitteacher.Com

٨-٤ منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث
Interior Angles Bisectors of a Triangle

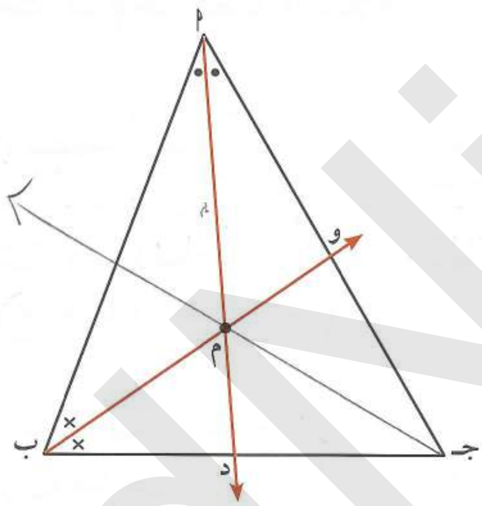
سوف تتعلّم : توظيف منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث لحل تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :
منصِّفات الزوايا
Angle Bisectors

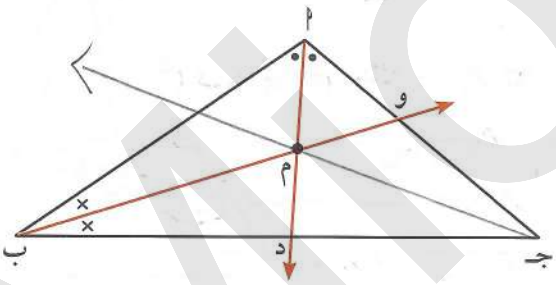
نشاط :

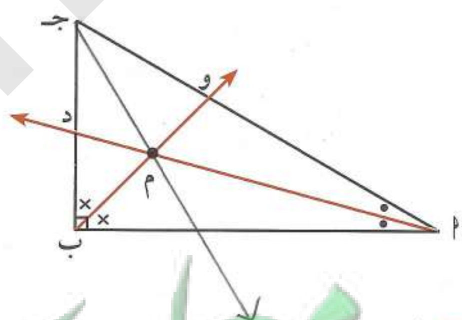
في المثلّثات التالية :

$\overleftarrow{أد}$ منصِّف الزاوية أ ، $\overleftarrow{ب و}$ منصِّف الزاوية ب ، $\overleftarrow{أد} \cap \overleftarrow{ب و} = \{ م \}$



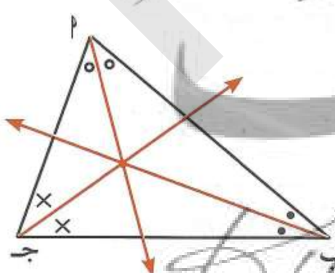
اللوازم :
- أدوات هندسية .





١ أُرسم منصِّف الزاوية جـ .

٢ ماذا تلاحظ ؟ منصفات الزوايا تتلاقى في نقطة واحدة



نظرية :
منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

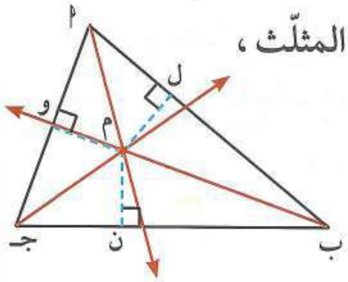
Midnight
KuwaitTeacher.Com

في الشكل المقابِل :

إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث ٢ب جـ ،

$\overline{\text{م ل}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$ ، $\overline{\text{م و}}$ هي الأعمدة المرسومة من م على أضلاع المثلّث ،

فأوجِد باستخدام الأدوات الهندسية كلًّا ممّا يلي :



معلومة مفيدة :
بعد نقطة عن مستقيم هو طول العمود المرسوم من هذه النقطة على المستقيم.

١ طول $\overline{\text{م ل}}$ = ١ سم

٢ طول $\overline{\text{م ن}}$ = ١ سم

٣ طول $\overline{\text{م و}}$ = ١ سم

ماذا تلاحظ ؟ م ل = م ن = م ن

نتيجة : نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث على أبعاد متساوية من أضلاعه .

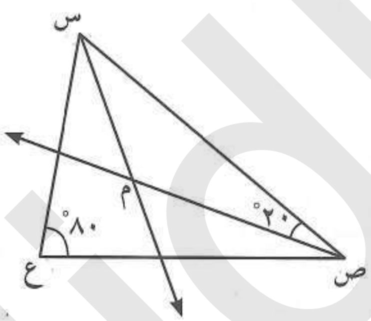
∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث

∴ م ل = م ن = م و

بالرجوع إلى النشاط السابق ، تحقَّقْ من صحّة النتيجة في كلّ من المثلّث القائم الزاوية والمثلّث المنفرج الزاوية .

تدرّب (١) :

في الشكل المقابِل :



م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

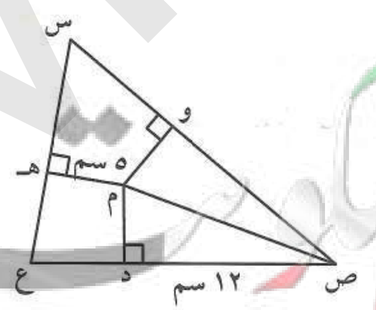
ق (م $\hat{\text{ص}}$ ع) = ٢٠° ، ق (س $\hat{\text{ص}}$ ع) = ٤٠° ،

ق (ص $\hat{\text{س}}$ ع) = ٦٠° ، ق (ص $\hat{\text{س}}$ م) = ٣٠°

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

تدرّب (٢) :

المثلث س ص ع فيه :



م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

م هـ = ٥ سم ، ص د = ١٢ سم .

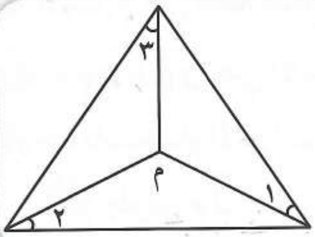
أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

م د = ٥ سم

م ص = $\sqrt{١٤٤ + ٢٥}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ سم

Kuwaitteacher.Com

فكّر وناقش

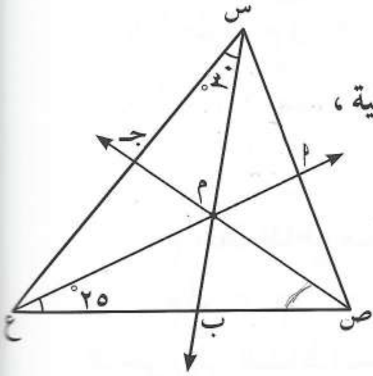


لتكن م نقطة تقاطع منصّفات زوايا المثلّث الداخلية .

فما مجموع قياسات الزوايا التالية :

ق ($\hat{١}$) ، ق ($\hat{٢}$) ، ق ($\hat{٣}$) ؟ = ٩٠°

مثال (١) :



Δ س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (م $\hat{ع}$ ص) = ٢٥° ، ق (م $\hat{س}$ ع) = ٣٠° ،

فأوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) ق (س $\hat{ص}$ ع) (٢) ق (م $\hat{ص}$ ع)

الحلّ :

المعطيات : م نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع ،

ق (م $\hat{ع}$ ص) = ٢٥° ، ق (م $\hat{س}$ ع) = ٣٠°

المطلوب : إيجاد (١) ق (س $\hat{ص}$ ع) (٢) ق (م $\hat{ص}$ ع)

البرهان : $\because$ م نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع

$\therefore$ $\overleftarrow{ع م}$ منصّف $\hat{ع}$

$\therefore$ ق (س $\hat{ع}$ ص) = ٢ × ٢٥° = ٥٠°

وبالمثل $\overleftarrow{س م}$ منصّف $\hat{س}$

$\therefore$ ق (ص $\hat{س}$ ع) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

$\because$ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية يساوي ١٨٠°

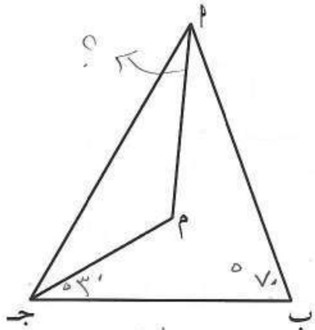
$\therefore$ ق (س $\hat{ص}$ ع) = ١٨٠° − (٥٠° + ٦٠°) = ٧٠°

$\because$ $\overleftarrow{ص جـ}$ منصّف $\hat{ص}$

$\therefore$ ق (م $\hat{ص}$ ع) = ٧٠° ÷ ٢ = ٣٥°

KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٣) :



Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (أ ب^ جـ) = ٧٠° ، ق (م جـ^ ب) = ٣٠° .

فأوجِد بالبرهان ق (م أ^ جـ) .

المعطيات : م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلية

ق (أ ب^ جـ) = ٧٠° ، ق (م جـ^ ب) = ٣٠°

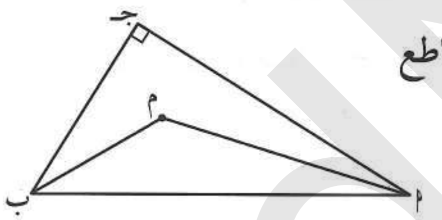
المطلوب : إيجاد ق (م أ^ جـ)

البرهان : في Δ أ ب جـ ، م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية

∵ جـ م منصف (جـ^)

∴ ق (جـ^) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°	∵ أ م منصف أ^
∵ مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°	∴ ق (م أ^ جـ) = ٥٠° ÷ ٢ = ٢٥°
∴ ق (أ^) = ١٨٠° − (٧٠° + ٦٠°) = ٥٠°	

مثال (٢) :



Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ ، إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ، فأوجِد بالبرهان ق (أ م^ ب) .

الحلّ :

المعطَيات : Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ ،
م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية .

المطلوب : إيجاد ق (أ م^ ب)

البرهان : في Δ أ ب جـ :

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية يساوي ١٨٠°

∴ ق (جـ أ^ ب) + ق (جـ ب^ أ) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث أ ب جـ

∴ ق (م أ^ ب) + ق (م ب^ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق (جـ أ^ ب) + ق (جـ ب^ أ)]

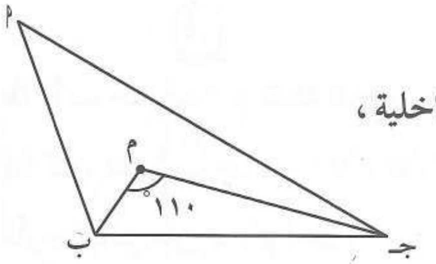
= $\frac{1}{2}$ × ٩٠° = ٤٥°

∴ في Δ أ ب م :

ق (أ م^ ب) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

Kuwaitteacher.Com

تدرّب (٤) :



Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (جـ $\hat{م}$ ب) = ١١٠° .

فأوجِد بالبرهان ق (جـ $\hat{أ}$ ب) .

المعطيات : م نقطة تقاطع منصفات زوايا Δ الداخلية

ق (جـ $\hat{م}$ ب) = ١١٠°

المطلوب : أوجد ق (جـ $\hat{أ}$ ب)

البرهان : في Δ جـ م ب مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°

∴ ق (م $\hat{ب}$ جـ) + ق (م $\hat{جـ}$ ب) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°

∵ م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث أ ب جـ

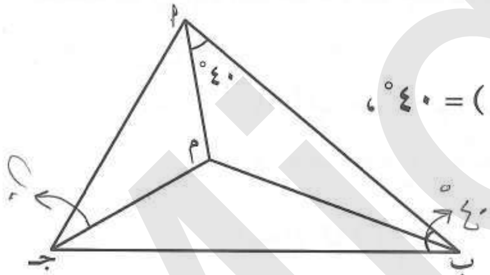
∴ ق (م $\hat{ب}$ جـ) + ق (م $\hat{جـ}$ ب) = $\frac{1}{2}$ ق ($\hat{ب}$) + $\frac{1}{2}$ ق ($\hat{جـ}$) = ٧٠°

∴ ق ($\hat{ب}$) + ق ($\hat{جـ}$) = ٧٠° × ٢ = ١٤٠°

∵ مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°

∴ ق (جـ $\hat{أ}$ ب) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

تمــرّن :



١ Δ أ ب جـ فيه : ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ق (ب $\hat{أ}$ م) = ٤٠° ،

م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية .

أوجِد بالبرهان ق (أ $\hat{جـ}$ م) .

المعطيات : ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ق (ب $\hat{أ}$ م) = ٤٠° ، م نقطة تقاطع منصفات الزوايا

المطلوب : أوجد ق (أ $\hat{جـ}$ م)

البرهان : في Δ أ ب جـ

∵ م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية

∴ أ م منصف $\hat{أ}$

∴ ق ($\hat{أ}$) = ٤٠ × ٢ = ٨٠°

∵ مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°

∴ ق ($\hat{جـ}$) = ١٨٠° − (٤٠ + ٨٠) = ٦٠°

∵ جـ م منصف $\hat{جـ}$

∴ ق (أ $\hat{جـ}$ م) = ٦٠ ÷ ٢ = ٣٠°

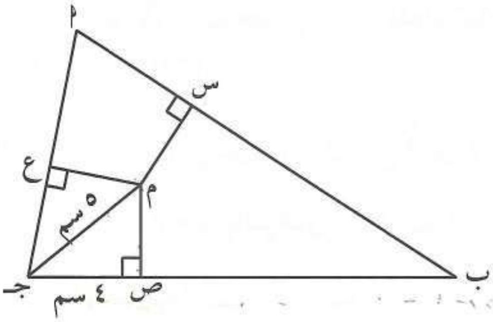
٢ المثلّث ا ب جـ فيه :

م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

م جـ = ٥ سم ، جـ ص = ٤ سم

أوجِد بالبرهان :

(١) طول $\overline{\text{م ص}}$ **(٢)** طول $\overline{\text{س م}}$



المعطيات : م نقطة تقاطع منصفات زوايا △ الداخلية

م جـ = ٥ سم ، جـ ص = ٤ سم

المطلوب : أوجد (١) طول م ص ، (٢) طول س م

البرهان :

∵ في △ م ص جـ القائم الزاوية في ص

$(\text{م ص})^2 = (٥)^2 - (٤)^2$ (من نظرية فيثاغورث)

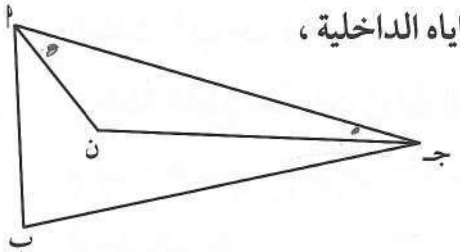
$= ٢٥ - ١٦ = ٩$

$\text{م ص} = \sqrt{٩} = ٣$ سم

∵ م تقاطع منصفات زوايا △ الداخلية

∴ م س = م ص = م ع = ٣ سم

معلمي صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com



٣ △ أ ب جـ فيه : ن نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان :

ق (ن جـ^ أ) + ق (ن أ^ جـ) = ٥٠° ،

فأوجِد بالبرهان ق (ب^) .

المعطيات : ن نقطة تقاطع منصفات زوايا △ الداخلية

ق(ن جـ^ أ) + ق(ن أ^ جـ) = ٥٠°

المطلوب : أوجد ق(ب^)

البرهان :

في △ أ جـ ب ، ن نقطة تقاطع منصفات زوايا △

∵ ق(ن جـ^ أ) + ق(ن أ^ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(جـ^) + $\frac{1}{2}$ ق(أ^) = ٥٠°

∴ ق(جـ^) + ق(أ^) = ١٠٠°

∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

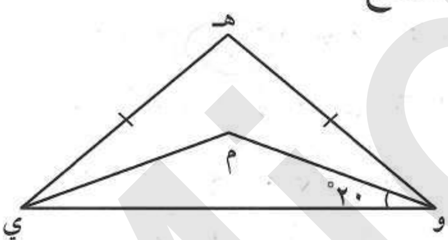
∴ ق(ب^) = ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠°

---

٤ △ هـ و ي متطابق الضلعين فيه : م هي نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (م و^ ي) = ٢٠° .

فأوجِد بالبرهان ق (هـ^) .



المعطيات : △ هـ و ي متطابق الضلعين ، م هي نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ، ق(م و^ ي) = ٢٠°

المطلوب : أوجد ق(هـ^)

البرهان : في △ هـ و ي

∵ م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية

∴ و م منصف و^

∴ ق(و^) = ٢٠ × ٢ = ٤٠°

∵ △ هـ و ي متطابق الضلعين

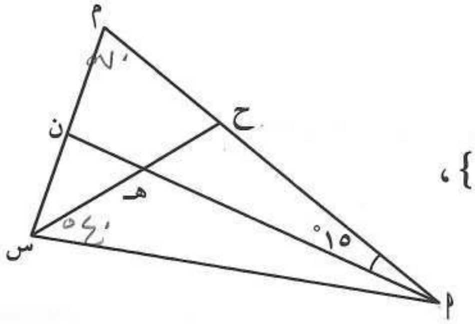
∴ ق(و^) = ق(ي^) = ٤٠°

∵ مجموع قياسات △ = ١٨٠°

∴ ق(هـ^) = ١٨٠° − (٤٠° + ٤٠°) = ١٠٠°

Midnight
Kuwaitteacher.com

٥ م أ س مثلّث فيه : ق ($\hat{م}$) = ٧٠°، ق (م $\hat{أ}$ ن) = ١٥° ، ق (أ $\hat{س}$ ح) = ٤٠°،



إذا كان $\overrightarrow{سح}$ منصِّف $\hat{س}$ ، $\overline{أن} \cap \overline{سح}$ = { هـ } ،

فأثبت أنّ هـ نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث م أ س .

المعطيات : ق ($\hat{م}$) = ٧٠° ، ق (م $\hat{أ}$ ن) = ١٥°

، ق (أ $\hat{س}$ ح) = ٤٠° ، $\overrightarrow{سح}$ منصف $\hat{س}$ ، $\overline{أن} \cap \overline{سح}$ = { هـ }

المطلوب : أثبت : هـ نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث م أ س

البرهان :

∵ في △ أ م س ، $\overrightarrow{سح}$ منصف $\hat{س}$

∴ ق ($\hat{س}$) = ٢ × ٤٠° = ٨٠°

∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

∴ ق ($\hat{أ}$) = ١٨٠° − (٧٠ + ٨٠) = ٣٠°

، ∵ ق (م $\hat{أ}$ ن) = ١٥°

∴ ق (ن $\hat{أ}$ س) = ٣٠° − ١٥° = ١٥°

∴ ق (م $\hat{أ}$ ن) = ق (ن $\hat{أ}$ س) = ١٥°

∴ $\overrightarrow{أن}$ منصف $\hat{أ}$

، ∵ $\overline{أن} \cap \overline{سح}$ = { هـ }

∴ هـ نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث م أ س

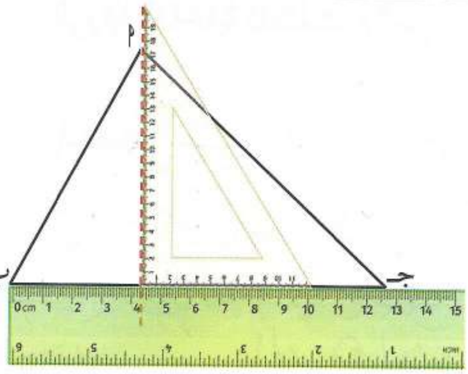
KuwaitTeacher.Com

٨-٥ الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه
Altitudes from Vertices of a Triangle to its Sides

سوف تتعلّم : توظيف الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه لحل تمارين هندسيّة .

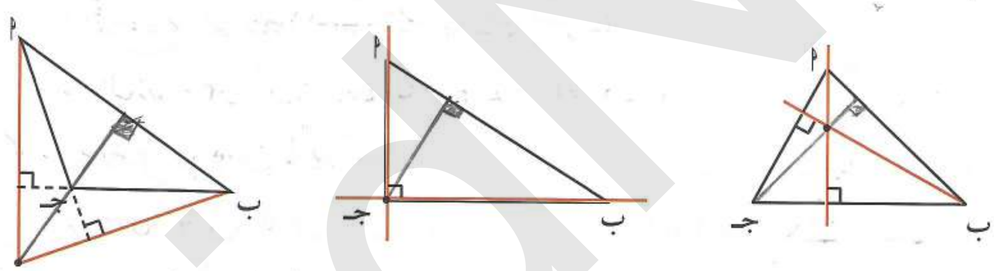
العبارات والمفردات :
الأعمدة
Altitudes
الارتفاعات
Heights

في المثلّث ؟ ب جـ يمكن رسم العمود النازل من رأس المثلّث ؟ على الضلع المقابِل له ب جـ باستخدام المثلّث القائم والمسطرة كما في الشكل .



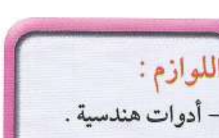
نشاط :

في المثلّثات التالية تمّ رسم العمودين من الرأسين ؟ ، ب على الضلعين المقابِلين لهما (أو امتدادهما) كما في الشكل .
اُرسم العمود الثالث من الرأس جـ .



ماذا تلاحظ ؟ الأعمدة المرسومة من رؤوس △ على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة

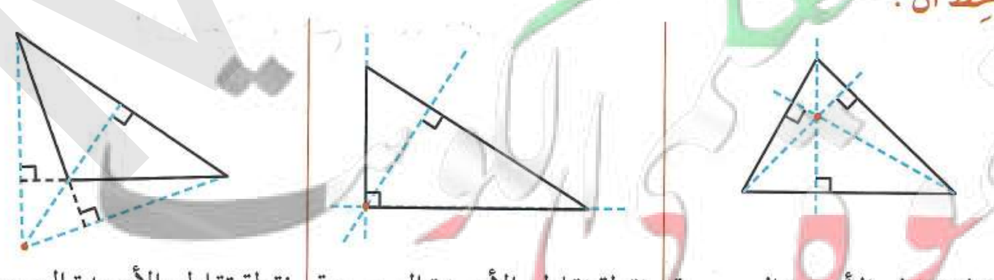
معلومات مفيدة :
يستخدم مهندسو التنظيم المدني نظرية الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه لمعرفة الطرق المختصَرة بين الشوارع في المدن .



نظرية :
الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة .

لاحِظ أنّ :

اللوازم :
– أدوات هندسية .



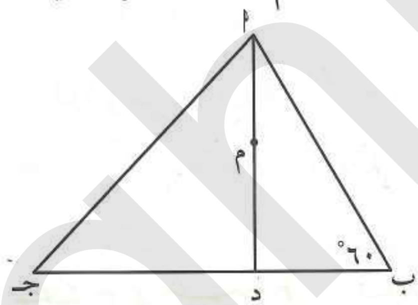
نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث الحادّ الزوايا على أضلاعه تقع داخل المثلّث .

نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث القائم الزاوية على أضلاعه هي رأس الزاوية القائمة .

نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث المنفرج الزاوية على أضلاعه تقع خارج المثلّث .

تدرّب (١) :

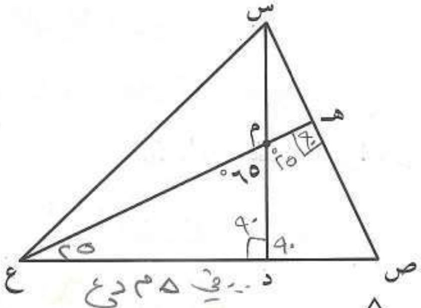
أ في المثلث ٲ ب جـ : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، م ∈ $\overline{ٲ د}$ ، أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



ق (ٲ $\hat{د}$ ب) = ٩٠°

ق (د $\hat{ٲ}$ ب) = ٣٠°

ب في المثلث س ص ع : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، $\overline{ع هـ}$ ∩ $\overline{س د}$ = { م } . أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



∵ في ∆ م د ع

ق (م $\hat{ع}$ د) = ١٨٠° − (٩٠ + ٦٥) = ٢٥°

∵ في ∆ هـ ص ع

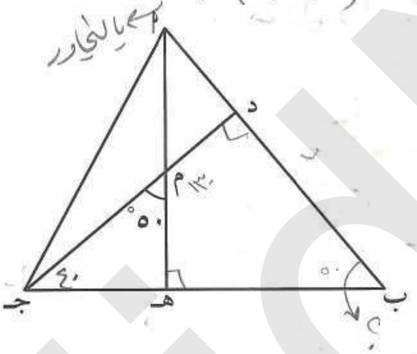
ق (س $\hat{ص}$ ع) = ١٨٠° − (٩٠ + ٢٥) = ٦٥°

أو ق (س $\hat{ص}$ ع) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١١٥°) = ٦٥°

مثال :

ٲ ب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، ق (جـ $\hat{م}$ هـ) = ٥٠° ، إذا كان $\overline{جـ د}$ ∩ $\overline{ٲ هـ}$ = { م } .

فأوجِد بالبرهان ق ($\hat{ب}$) .



الحل :

المعطَيات : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،
ق (جـ $\hat{م}$ هـ) = ٥٠°

المطلوب : إيجاد ق ($\hat{ب}$) .

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث ٲ ب جـ على أضلاعه

∴ ∆ م هـ جـ قائم الزاوية في هـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية ١٨٠°

∴ ق (م $\hat{جـ}$ هـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٩٠°) = ٤٠°

في ∆ جـ د ب القائم الزاوية في د

ق ($\hat{ب}$) = ١٨٠° − (٤٠° + ٩٠°) = ٥٠°

طريقة أخرى من الشكل الرباعي

د ب هـ م

ق (د $\hat{م}$ هـ) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠° بالتجاور على خط مستقيم

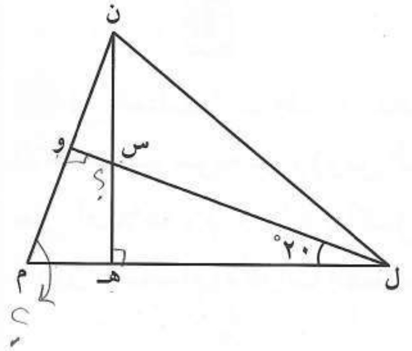
ق (ب د م) = ق (م $\hat{هـ}$ ب) = ٩٠°

ق ($\hat{ب}$) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٣٠°)

= ٥٠°

Midnight
kuwaitteacher.com

تدرّب (٢) :



ن ل م مثلّث فيه : س هي نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،

$\overline{ل و} \cap \overline{ن هـ} = \{ س \}$ ،

وكان ق (و $\hat{ل}$ م) = ٢٠° .

أوجِد بالبرهان كلًّا مما يلي: (١) ق (و $\hat{م}$ ل) (٢) ق (و $\hat{س}$ هـ) .

المعطيات : س نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس △ على أضلاعه

ق (و $\hat{ل}$ م) = ٢٠°

المطلوب : أوجد ① ق (و $\hat{م}$ ل) ② ق (و $\hat{س}$ هـ)

البرهان : في △ ن ل م

∵ س نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس △ على أضلاعه

∴ △ ل و م قائم الزاوية في و

∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

∴ ق (و $\hat{م}$ ل) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٠°) = ٧٠°

∵ $\overline{ل و} \cap \overline{ن هـ} = \{ س \}$

∵ $\overline{ن هـ} \perp \overline{ل م}$ ∴ ق (س $\hat{هـ}$ م) = ٩٠°

∵ في الشكل س هـ م و

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق (و $\hat{س}$ هـ) = ٣٦٠ − (٩٠° + ٩٠° + ٧٠) = ١١٠°

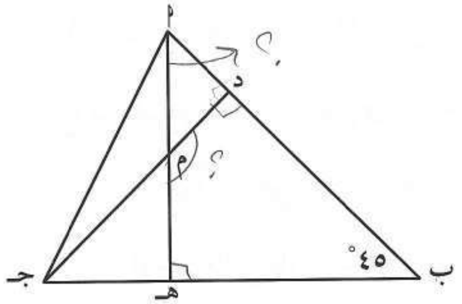
Midnight
معلمي صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

تمــرَّنْ :

١ Δ أ ب جـ فيه : ق($\hat{ب}$) = ٤٥°،

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه،

$\overline{أهـ} \cap \overline{جـ د}$ = {م}.



أوجد بالبرهان :

(١) ق(ب $\hat{أ}$ هـ)   (٢) ق(د $\hat{م}$ هـ)

المعطيات: ق($\hat{ب}$) = ٤٥°، م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه، $\overline{أهـ} \cap \overline{جـ د}$ = {م}

المطلوب: أوجد ① ق(ب $\hat{أ}$ هـ) ② ق(د $\hat{م}$ هـ)

البرهان:

∵ في Δ أ ب جـ، م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه

∴ Δ أ ب هـ قائم الزاوية في هـ

∵ مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°

∴ ق(ب $\hat{أ}$ هـ) = ١٨٠° − (٤٥° + ٩٠°) = ٤٥°

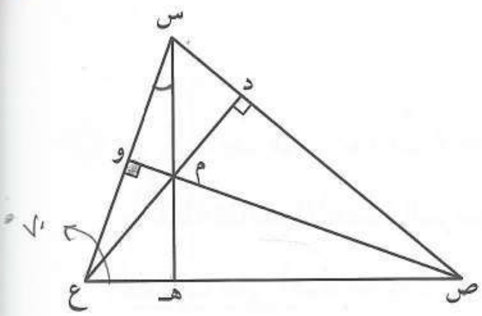
∵ $\overline{أهـ} \cap \overline{جـ د}$ = {م}

∴ $\overline{جـ د} \perp \overline{أ ب}$ ∴ ق(ب $\hat{د}$ م) = ٩٠°

∵ في الشكل ب د م هـ، مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(د $\hat{م}$ هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٤٥°) = ١٣٥°

KuwaitTeacher.Com



٢ Δ س ص ع فيه: ق(س $\hat{\text{ع}}$ ص) = ٧٠°،

$\overline{\text{ع د}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص و}}$ ⊥ $\overline{\text{س ع}}$.

(١) أثبِت أنّ: $\overline{\text{س هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$

(٢) أوجِد بالبرهان ق(هـ $\hat{\text{س}}$ ع)

المعطيات: ق(س $\hat{\text{ع}}$ ص) = ٧٠°، $\overline{\text{ع د}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$، $\overline{\text{ص و}}$ ⊥ $\overline{\text{س ع}}$

المطلوب: أثبت أن ① $\overline{\text{س هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$ ② أوجد ق(هـ $\hat{\text{ش}}$ ع)

البرهان

∵ $\overline{\text{ع د}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$ ، ∵ $\overline{\text{ص و}}$ ⊥ $\overline{\text{س ع}}$

∴ $\overline{\text{ع د}}$ ∩ $\overline{\text{ص و}}$ = {م}

∴ م تقاطع تلاقي الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث

∴ $\overline{\text{س هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$

∴ ق(س $\hat{\text{هـ}}$ ع) = ٩٠°

في Δ س هـ ع القائم الزاوية في هـ

∵ مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°

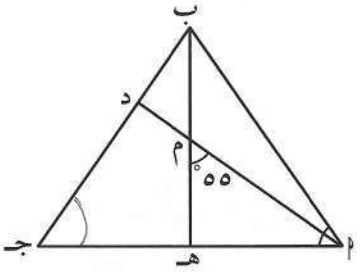
∴ ق(هـ $\hat{\text{ش}}$ ع) = ١٨٠° - (٩٠° + ٧٠°) = ٢٠°

Midnight
معلمي صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

٣ Δ أ ب جـ فيه :

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، $\overline{\text{أد}} \cap \overline{\text{ب هـ}} = \{\text{م}\}$ ،

ق (ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ق (أ $\hat{\text{م}}$ هـ) = ٥٥° .



(١) أوجِد بالبرهان ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ ب)

(٢) ما نوع المثلّث أ ب جـ بالنسبة إلى أضلاعه ؟

المعطيات :- م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، أد ∩ ب هـ = {م} ، ق(ب أ جـ) = ق(أ م هـ) = ٥٥

المطلوب : إيجاد ق(أ جـ ب)

الطريقة الأولى | البرهان | طريقة أخرى

الطريقة الأولى:

∵ في Δ أ ب جـ ، م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه

∴ أد ⊥ ب جـ ، ق(م د جـ) = ٩٠°

∵ ب هـ ⊥ أ جـ ، ق(م هـ جـ) = ٩٠°

∴ ق(د م هـ) = ١٨٠° − ٥٥° = ١٢٥° بالتجاور على خط مستقيم

∵ في الشكل الرباعي د م هـ جـ

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(أ جـ ب) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٢٥°) = ٥٥°

∵ ق(ب أ جـ) = ق(أ جـ ب) = ٥٥°

∴ Δ أ ب جـ متطابق الضلعين

طريقة أخرى:

∵ في Δ أ ب جـ ، م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه

∴ Δ أ م هـ قائم الزاوية في هـ

∵ مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°

∴ ق(م أ هـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٥٥°) = ٣٥°

∵ أ د ⊥ ب جـ

∴ Δ أ د جـ قائم الزاوية في د

∵ مجموع قياسات زوايا Δ = ١٨٠°

∴ ق(أ جـ ب) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٥°) = ٥٥°

∵ ق(ب أ جـ) = ق(أ جـ ب) = ٥٥°

∴ Δ أ ب جـ متطابق الضلعين

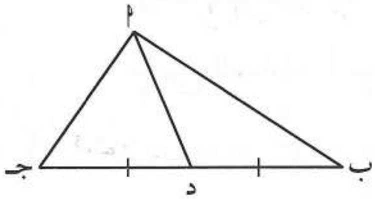
KuwaitTeacher.Com

٨-٦ القطع المتوسّطة للمثلّث
Medians of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف القطع المتوسّطة للمثلّث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :
القطع المتوسطة للمثلث
Median of a Triangle

القطعة المستقيمة التي تصل أيّ رأس للمثلّث بمنتصف الضلع المقابِل له تسمى قطعة متوسّطة للمثلّث .



في $\triangle$ ا ب جـ :

$\because$ د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ $\overline{\text{اد}}$ قطعة متوسّطة للمثلّث ا ب جـ .

نشاط :

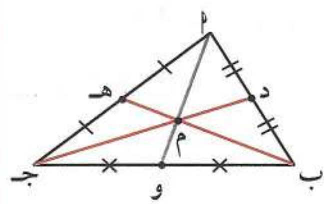
في المثلّثات التالية : $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ قطعتان متوسّطتان للمثلّث ا ب جـ .

أُرسم باستخدام الأدوات الهندسية القطعة المتوسّطة $\overline{\text{ا و}}$.

ماذا تلاحظ ؟ متوسطات المثلث تتلاقى في نقطة واحدة

اللوازم :
- أدوات هندسية .

في كلّ من المثلّثات التالية : لتكن م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ، أكمِل باستخدام المسطرة :

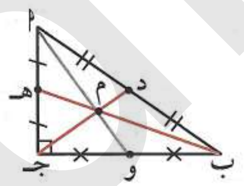


مثلّث حادّ الزوايا

جـ م = ٢ سم

د م = ١ سم

$\frac{\text{جـ م}}{\text{د م}} = \frac{٢}{١}$

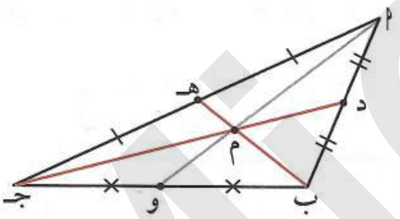


مثلّث قائم الزاوية

جـ م = ١ سم

د م = $\frac{١}{٢}$ سم

$\frac{\text{جـ م}}{\text{د م}} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{١}$



مثلّث منفرج الزاوية

جـ م = ٣ سم

د م = $١\frac{١}{٢}$ سم

$\frac{\text{جـ م}}{\text{د م}} = \frac{٣}{١\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{١}$

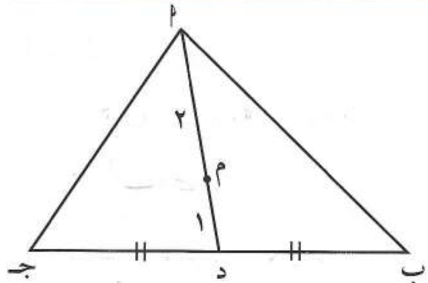
ماذا تلاحظ ؟

تحقَّقْ من صحّة هذه النسبة للقطع المتوسّطة الأخرى في المثلّث .

KuwaitTeacher.Com

نظرية :

القطع المتوسّطة للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلّ منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .



في $\triangle$ أب جـ :

$\overline{\text{أد}}$ قطعة متوسّطة ،

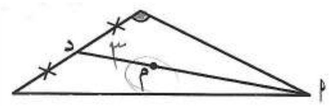
م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

أكمِل :

أم = ٢ م د	م د = ١/٣ أد	أم = ٢/٣ أد
م د = ١/٢ أم	أد = ٣ م د	أد = ٣/٢ أم

تدرّب (١) :

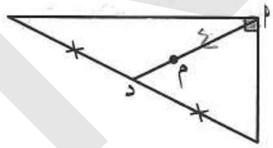
في كلّ من المثلّثات التالية : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة ، أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



د م = ٣ سم

أم = ٦ سم

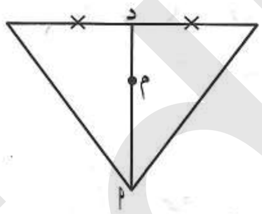
أد = ٩ سم



أم = ٤ سم

د م = ٢ سم

أد = ٦ سم

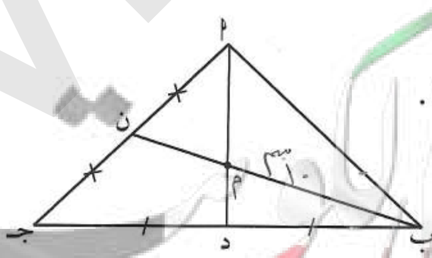


أد = ١٨ سم

د م = ٦ سم

أم = ١٢ سم

تدرّب (٢) :



أب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة .

إذا كان ب م = ١٠ سم فإنّ :

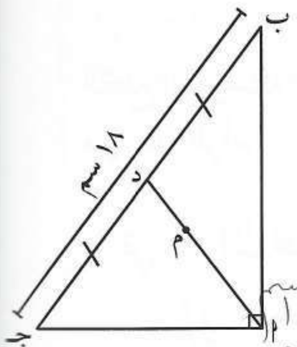
ن م = ٥سم ، ب ن = ١٥سم

إذا كان أد = ١٢ سم فإنّ :

أم = ٢/٣ × ١٢ = ٨سم ، د م = ١/٣ × ١٢ = ٤سم

Kuwaitteacher.Com

تدرّب (٣) :



ٵب جـ مثلّث قائم الزاوية في ٵ ، طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ١٨ سم ،
م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ٵب جـ .
أوجد بالبرهان كلًّا من : (١) ٵد (٢) ٵم .

المعطيات : ٵب جـ مثلث قائم الزاوية في ٵ ، طول ب جـ = ١٨ سم
، م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ٵب جـ

المطلوب : أوجد (١) ٵد (٢) ٵم

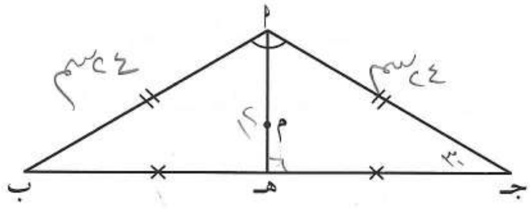
البرهان : في △ ٵب جـ القائم الزاوية في ٵ
ق(ٵ) = ٩٠° ، د منتصف ب جـ
∴ ٵد = $\frac{1}{2}$ ب جـ
∴ ٵد = $\frac{1}{2}$ × ١٨ = ٩ سم
∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ٵب جـ
∴ ٵم = $\frac{2}{3}$ ٵد
ٵم = $\frac{2}{3}$ × ٩ = ٦ سم

Midlight
معلمي صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

فكِّر وناقِش

ما نوع المثلّث الذي تتطابق فيه القطع المتوسّطة الثلاث ؟

مثال :



أ ب جـ مثلّث فيه :

أ ب = أ جـ = ٢٤ سم ،

$\text{ق}(\hat{\text{جـ}}) = 30^\circ$ ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

أوجد بالبرهان كلًّا من : (١) أ هـ (٢) م هـ (٣) م أ .

الحلّ :

المعطَيات : أ ب = أ جـ = ٢٤ سم ، $\text{ق}(\hat{\text{جـ}}) = 30^\circ$ ،
م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة في المثلّث

المطلوب : إيجاد كلٍّ من : (١) أ هـ (٢) م هـ (٣) م أ

البرهان : في $\triangle$ أ ب جـ :

∵ أ ب = أ جـ ، هـ منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$

∴ $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∵ $\text{ق}(\hat{\text{جـ}}) = 30^\circ$

∴ $\triangle$ أ جـ هـ ثلاثيني ستّيني

∴ أ هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ

= $\frac{1}{2} \times 24 = 12$ سم

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث أ ب جـ

م هـ = $\frac{1}{3}$ أ هـ

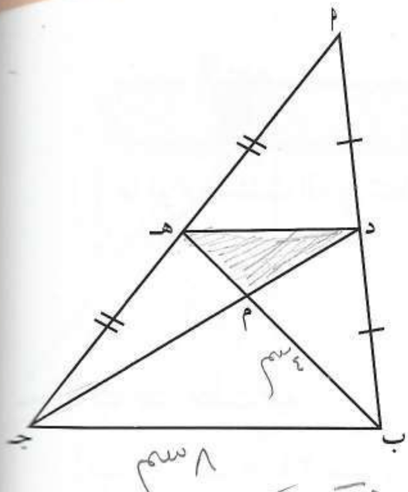
= $\frac{1}{3} \times 12 = 4$ سم

م أ = ٢ م هـ

= $2 \times 4 = 8$ سم

KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٤) :



في الشكل المقابل :

د منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$ ،

$\overline{\text{د جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب هـ}}$ = { م } ،

ب جـ = ٨ سم ، ب م = ٤ سم ، د جـ = ٩ سم .

أوجد بالبرهان محيط △ د م هـ .

المعطيات : د منتصف ا ب ، هـ منتصف ا جـ ،

د جـ ∩ ب هـ = {م} ، ب جـ = ٨ سم ، ب م = ٤ سم ، د جـ = ٩ سم

المطلوب : محيط △ د م هـ

البرهان : في △ ا ب جـ ، د منتصف ا ب ، هـ منتصف ا جـ

∴ م نقطة تقاطع متوسطات المثلث

∴ د م = $\frac{1}{3}$ د جـ = $\frac{1}{3}$ × ٩ = ٣ سم

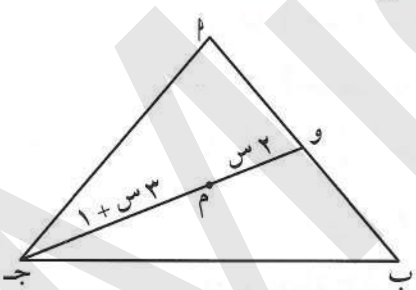
، م هـ = $\frac{1}{2}$ ب م = $\frac{1}{2}$ × ٤ = ٢ سم

، ∵ د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤ سم

∴ محيط △ د م هـ = ٢ + ٣ + ٤ = ٩ سم

تدرّب (٥) :



المثلّث ا ب جـ فيه : $\overline{\text{جـ و}}$ قطعة متوسطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث ،

إذا كان م و = ٢ س ، جـ م = ٣ س + ١ .

أوجد بالبرهان قيمة س.

المعطيات : جـ و قطعة متوسطة ، م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

م و = ٢ س ، جـ م = ٣ س + ١

المطلوب : قيمة س

Midnight
KuwaitTeacher.Com

البرهان : ∵ في △ أ ب جـ ، ∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة

، ∵ جـ و قطعة متوسطة ∴ جـ م = ٢ و م

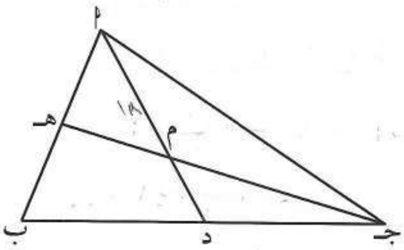
∴ ٣ س + ١ = ٢ × (٢ س)

٣ س + ١ = ٤ س ← ٤ س − ٣ س = ١

س = ١

تمــرَّنْ :

١ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أد}} \cap \overline{\text{جـ هـ}} = \{\text{م}\}$ ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث أ ب جـ ،

إذا كان أ م = ١٨ سم ، جـ هـ = ٣٠ سم .

فأوجد بالبرهان :

(١) م هـ (٢) جـ م (٣) أ د

المعطيات : ∵ م نقطة تقاطع متوسطات المثلث

أ م = ١٨ سم ، جـ هـ = ٣٠ سم

المطلوب : أوجد ① م هـ ② جـ م ③ أ د

البرهان

∵ في △ أ جـ ب ، ∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسط للمثلث

∴ م هـ = $\frac{1}{3}$ جـ هـ

م هـ = $\frac{1}{3}$ × ٣٠ = ١٠ سم

، جـ م = ٢ × م هـ = ٢ × ١٠ = ٢٠ سم   أو جـ م = $\frac{2}{3}$ × جـ هـ = $\frac{2}{3}$ × ٣٠ = ٢٠ سم

، ∵ أ د متوسط في △ أ ب جـ

∴ م د = $\frac{1}{2}$ أ م = $\frac{1}{2}$ × ١٨ = ٩ سم   أو أ د = $\frac{3}{2}$ × أ م

∴ أ د = ١٨ + ٩ = ٢٧ سم   أ د = $\frac{3}{2}$ × ١٨ = ٢٧ سم

Kuwaitteacher.Com

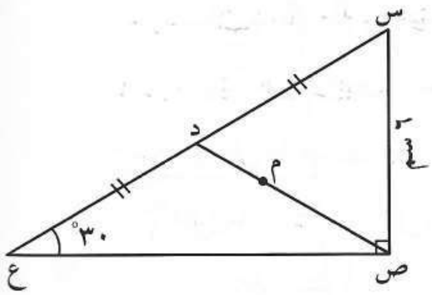
٢ Δ س ص ع قائم الزاوية في ص فيه :

ق ($\hat{ع}$) = ٣٠°،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث ،

س ص = ٦ سم .

أوجد كلًّا ممّا يلي :



(١) س ع **(٢)** ص د **(٣)** ص م

المعطيات : Δ س ص ع قائم الزاوية في ص ، ق ($\hat{ع}$) = ٣٠°

، م نقطة تقاطع القطع المتوسطة ، س ص = ٦ سم

المطلوب : أوجد (١) س ع (٢) ص د (٣) ص م

البرهان :

في Δ س ص ع القائم الزاوية في ص

ق ($\hat{ص}$) = ٩٠° ، ق ($\hat{ع}$) = ٣٠°

Δ س ص ع ثلاثيني ستيني

س ع = ٢ س ص = ٢ × ٦ = ١٢ سم

ق ($\hat{ص}$) = ٩٠° ، د منتصف س ع

ص د = $\frac{1}{2}$ س ع = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

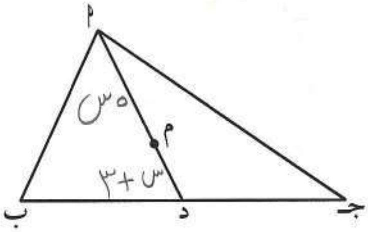
م نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث

ص م = $\frac{2}{3}$ × ص د

ص م = $\frac{2}{3}$ × ٦ = ٤ سم

Midnight
معلمي صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

٣ في الشكل المقابِل : $\overline{أد}$ قطعة متوسطة للمثلث أ ب جـ ،
م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث أ ب جـ ،
إذا كان أم = ٥ س ، م د = س + ٣ ،
فأوجد بالبرهان أ د .



المعطيات : أ د قطعة متوسطة للمثلث أ ب جـ ،
م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ ،
أ م = ٥ س ، م د = س + ٣
المطلوب : أوجد أ د
البرهان
في △ أ ب جـ ، ∵ أد قطعة متوسطة للمثلث أ ب جـ
، ∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث

∴ أ م = ٢ م د
٥ س = ٢ × (س + ٣)
٥ س = ٢ س + ٦
٥ س − ٢ س = ٦
$\frac{٣ س}{٣} = \frac{٦}{٣}$
∴ س = ٢
∴ أ م = ٥ س = ٥ × ٢ = ١٠ سم ، م د = س + ٣ = ٢ + ٣ = ٥ سم

∴ أ د = ١٠ + ٥ = ١٥ سم

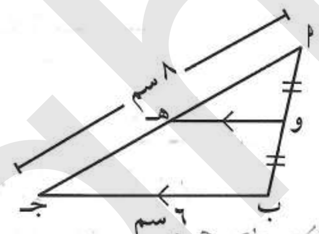
معلمي الكويت صفوة
KuwaitTeacher.Com

٨-٧ مراجعة الوحدة الثامنة
Revision Unit Eight

أوّلًا : التمارين المقالية

١ في كلّ من المثلّثات التالية أكمل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

أ

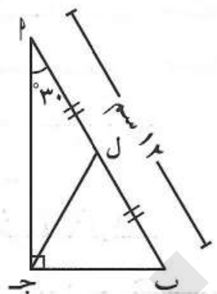


هـ منتصف أ ب

أ هـ = ½ × ٨ = ٤ سم

و هـ = ½ × ٦ = ٣ سم

ب

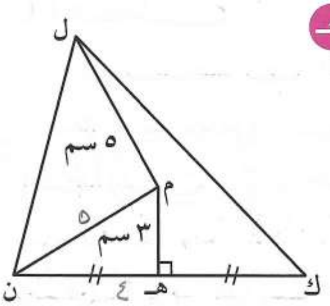


جـ ل = ½ × ١٢ = ٦ سم

ملاحظة

ب جـ = ½ × ١٢ = ٦ سم

جـ

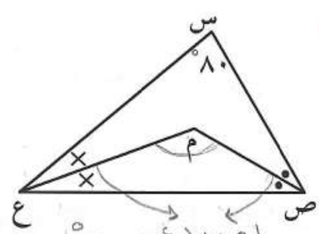


م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث . من نظرية فيثاغورث

هـ ن = ٤

ك ن = ٤ + ٤ = ٨

د



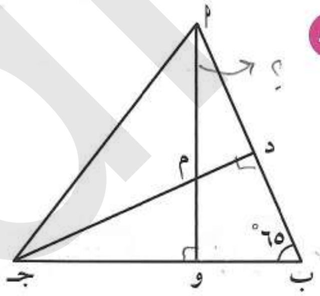
ص + ع = ١٠٠

½ص + ½ع = ٥٠°

ق (ص م̂ ع) = ١٨٠° − ٥٠ = ١٣٠°

مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠

هـ



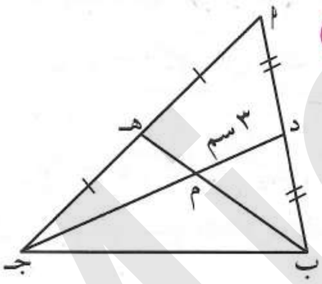
$\overline{أو} \cap \overline{جـد} = \{م\}$ ،

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث أ ب جـ على أضلاعه .

ق (ب أ̂ و) = ١٨٠° − (٦٥° + ٩٠°)

= ٢٥°

و

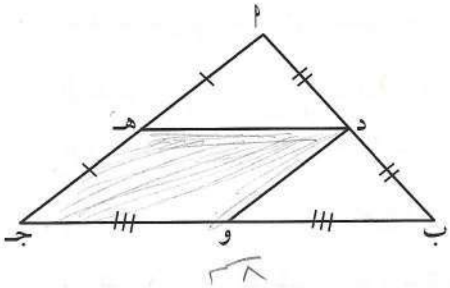


م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث أ ب جـ .

جـ م = ٢ × د م = ٢ × ٣ = ٦ سم

KuwaitTeacher.Com

٢ أ ب جـ مثلّث فيه : د ، و ، هـ منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أجـ}$ على الترتيب ،
إذا كان ب جـ = ٨ سم .



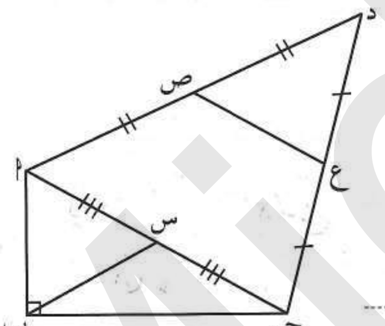
أ أوجد بالبرهان د هـ .

ب أثبت أنّ د و جـ هـ متوازي أضلاع .

المعطيات : د ، و ، هـ منتصفات أب ، ب جـ ، أ جـ ، ب جـ = ٨ سم
المطلوب : أوجد د هـ ، اثبت أن د و جـ هـ متوازي أضلاع
البرهان : في △ أ ب جـ

∵ د منتصف أب ، هـ منتصف أ جـ
∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤ سم
∵ د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ ، و منتصف ب جـ
∴ د هـ = و جـ ← ①
∵ د منتصف أب ، و منتصف ب جـ
∴ د و = $\frac{1}{2}$ أ جـ
∴ د و = هـ جـ ← ②
من ① ، ② ينتج أن الشكل د و جـ هـ متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعان متقابلان متطابقان

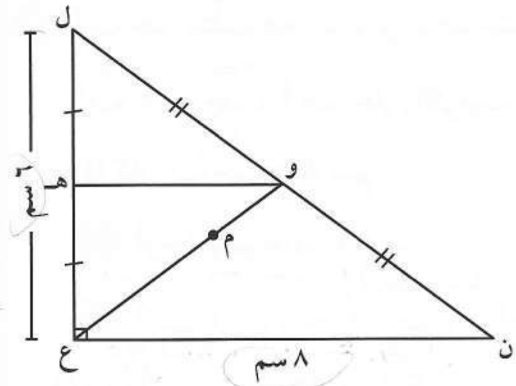
٣ أ ب جـ د شكل رباعي فيه : ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠° ،
ص منتصف $\overline{دأ}$ ، ع منتصف $\overline{د جـ}$ ،
إذا كانت س منتصف $\overline{أ جـ}$.
فأثبِت أنّ : ب س = ع ص .



المعطيات : ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠° ، ص منتصف د أ
، ع منتصف د جـ ، س منتصف أ جـ
المطلوب : إثبت أن ب س = ع ص
البرهان : في △ أ ب جـ القائم الزاوية في ب
ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ، س منتصف أ جـ
∴ ب س = $\frac{1}{2}$ أ جـ ← ①
في △ د جـ أ
ع منتصف د جـ ، ص منتصف د أ
∴ ع ص = $\frac{1}{2}$ أ جـ ← ②
من ① ، ② ينتج أن ب س = ع ص (خاصية المساواة)

KuwaitTeacher.Com

٤ عند تصميم جسر تمّ رسم المثلّث في الشكل المقابل حيث ل ع ن مثلّث قائم الزاوية في ع ،
ع ن = ٨ سم ، ع ل = ٦ سم ،
و منتصف $\overline{\text{ل ن}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ل ع}}$ ،
م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ل ع ن .
أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :
(١) و هـ (٢) ل ن (٣) ع و (٤) م و



المعطيات : ل ع ن مثلث قائم الزاوية في ع ، ع ن = ٨ سم ، ع ل = ٦ سم
و منتصف $\overline{\text{ل ن}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ل ع}}$ ، م نقطة تقاطع المتوسطات
المطلوب : أوجد (١) و هـ (٢) ل ن (٣) ع و (٤) م و
البرهان :
في △ ل ن ع ، و منتصف $\overline{\text{ل ن}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ل ع}}$
∴ و هـ = ½ ن ع = ½ × ٨ = ٤ سم ⟵ (١)

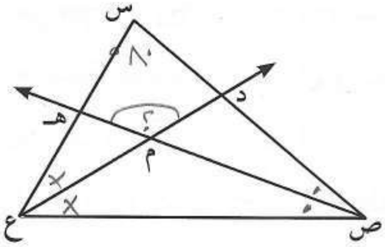
في △ ل ع ن القائم الزاوية في ع (من نظرية فيثاغورث)
(ل ن)² = (٨)² + (٦)² = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠
∴ ل ن = √١٠٠ = ١٠ سم ⟵ (٢)

∵ ق (ع) = ٩٠° ، و منتصف $\overline{\text{ل ن}}$
∴ ع و = ½ ل ن = ½ × ١٠ = ٥ سم ⟵ (٣)

∵ م نقطة تقاطع متوسطات المثلث ل ن ع
∴ و م = ⅓ و ع = ⅓ × ٥ = ٥⁄٣ = ١ ⅔ سم ⟵ (٤)

KuwaitTeacher.Com

٥ س ص ع مثلّث فيه : ق (س̂) = ٨٠° ،
ص هـ منصِّف ص̂ ،
ع د منصِّف ع̂ .



أوجِد بالبرهان ق (د م̂ هـ) .

المعطيات : ق (س̂) = ٨٠° ، ص هـ منصف ص̂
ع د منصف ع̂

المطلوب : أوجد ق (د م̂ هـ)

البرهان :

في △ س ص ع ، مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

∴ ق (ص̂) + ق (ع̂) = ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠°

∴ $\frac{1}{2}$ [ق (ص̂) + ق (ع̂)] = ٥٠°

∵ ص هـ منصف ص̂ ، ع د منصف ع̂

∴ $\frac{1}{2}$ [ق (ص̂) + ق (ع̂)] = ق (م ص̂ ع) + ق (م ع̂ ص) = ٥٠°

في △ ص م ع ، مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

∴ ق (ص م̂ ع) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

∴ ق (د م̂ هـ) = ق (ص م̂ ع) = ١٣٠° بالتقابل بالرأس

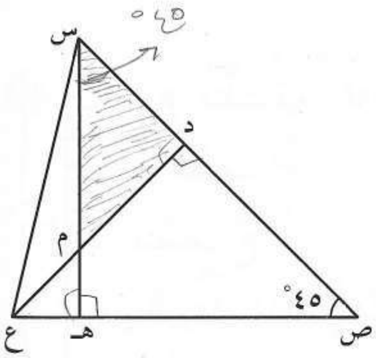
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

6 س ص ع مثلّث فيه : ق ($\hat{ص}$) = ٤٥°،

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه ،

$\overline{س هـ} \cap \overline{ع د}$ = { م } .

أثبِت أنّ المثلّث س د م متطابق الضلعين .



المعطيات :- ق (ص) = ٤٥° ،

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه

المطلوب :- أثبت أن المثلث س د م متطابق الضلعين

البرهان

∵ في △ س ص ع ، ∵ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه

∴ △ س ص هـ قائم الزاوية في هـ

∵ مجموع قياسات زوايا △ = ١٨٠°

∴ ق (ص س هـ) = ١٨٠° − (٤٥° + ٩٠°) = ٤٥°

∵ في △ س د م

∵ ع د ⊥ ص س ∴ ق (س د م) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

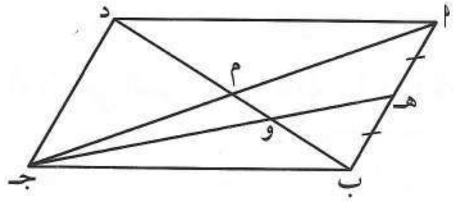
∴ ق (د م س) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°

∴ ق (د س م) = ق (س م د) = ٤٥°

∴ د م = د س

∴ △ س د م متطابق الضلعين

Midlight
معلمي صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com



٧ أب جـ د متوازي أضلاع فيه : م نقطة تقاطع قطريه ،
ب د = ١٢ سم ، نصّفت $\overline{\text{أب}}$ في هـ ،
$\overline{\text{جـهـ}} \cap \overline{\text{ب د}}$ = {و} .
برهِن أنّ :
(١) و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أب جـ
(٢) ب و = ٤ سم

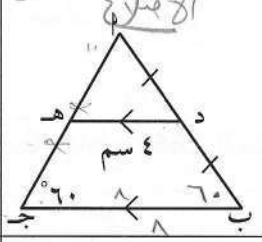
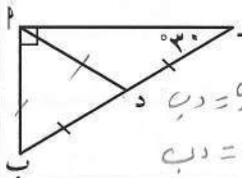
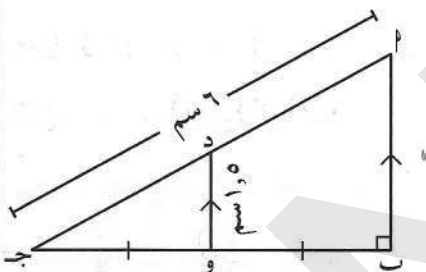
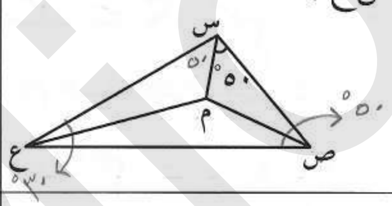
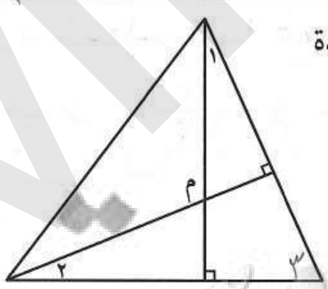
المعطيات : أب جـ د متوازي أضلاع ، ب د = ١٢ سم
، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$
المطلوب ① إثبت أن و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أب ج
② ب و = ٤ سم
البرهان
∵ أب جـ د متوازي أضلاع ∴ القطران ينصف كل منهما الآخر
∴ م منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ، ∵ هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$
∴ و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أب ج

∵ ب د = ١٢ سم ، ∵ القطران متناصفان
∴ م منتصف ب د
∴ ب م = $\frac{1}{2} \times 12 = 6$ سم
∵ و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أب ج
∴ ب و = $\frac{2}{3} \times 6 = 4$ سم

KuwaitTeacher.Com

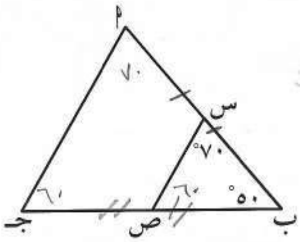
ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ المثلّث ا ب جـ فيه : ا ب = ا جـ ، د منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، د هـ = ٤ سم ، ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٦٠° ، فإنّ ا جـ = ٨ سم .  △ متطابق الضلعين إحدى زواياه = ٦٠ ⇐ △ متطابق الأضلاع	أ	ب
٢ ا ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ا ، د منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$ ، ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠° ، فإنّ △ ا د ب متطابق الأضلاع .  ا د = ½ جـ ب = د جـ = د ب	أ	ب
٣ ا ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ا جـ = ٦ سم ، د و = ١,٥ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{د و}}$ // $\overline{\text{ا ب}}$. فإنّ : ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠° .  د منتصف ا جـ ، ا ب = ٢ × د و ، ا ب = ٣ ⇐ ا ب = ½ ا جـ	أ	ب
٤ نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث القائم الزاوية هي رأس الزاوية القائمة .	أ	ب
٥ س ص ع مثلّث فيه : ق (ص $\hat{\text{س}}$ م) = ق (س $\hat{\text{ص}}$ ع) = ٥٠° ، حيث م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية ، فإنّ ق (س $\hat{\text{ع}}$ م) = ٣٠° .  ٢٥°	أ	ب
٦ في الشكل المقابِل : إذا كانت م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، فإنّ ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) .  ق(١) + ق(٣) = ٩٠° ، ق(٢) + ق(٣) = ٩٠° ، ق(١) = ق(٢)	أ	ب

KuwaitTeacher.Com

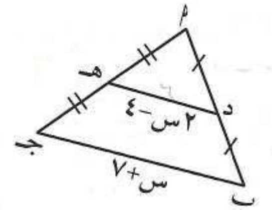
ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :



٧ ﺃب جـ مثلّث فيه : س منتصف $\overline{\text{ﺃب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

ق (ب̂) = ٥٠° ، ق (ب سˆ ص) = ٧٠° ، فإنّ ق (جـ̂) =

ﺃ ٥٠° ب ٦٠° جـ ٧٠° د ٨٠°

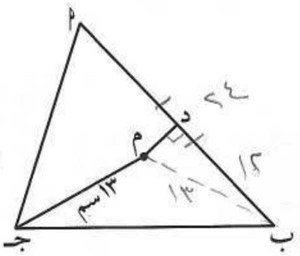


٨ في الشكل المقابِل : س =

س + ٧ = ٢(٢س − ٤)

س + ٧ = ٤س − ٨ ← ٣س = ١٥

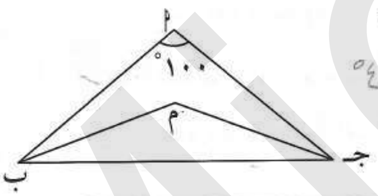
ﺃ ٢٠ ب ١٥ جـ ٥ د ٢



٩ ﺃب جـ مثلّث فيه : ﺃب = ٢٤ سم ، د منتصف $\overline{\text{ﺃب}}$ ،
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ، جـ م = ١٣ سم ،
فإنّ م د =

ﺃ ٥ سم ب ٦ سم

جـ ١٢ سم د ١٣ سم



١٠ ﺃب جـ مثلّث فيه : ق (ﺃ̂) = ١٠٠° ، م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث ،
فإنّ ق (جـ مˆ ب) =

ﺃ ١٤٠° ب ١٢٠°

جـ ١٠٠° د ٨٠°

---

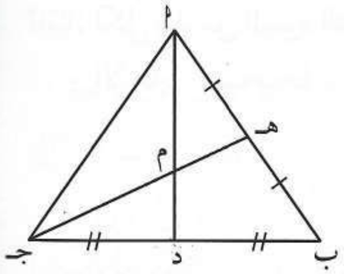
١١ المثلّث الذي يكون فيه نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه هي أحد رؤوسه هو :

ﺃ مثلّث منفرج الزاوية ب مثلّث متطابق الأضلاع

جـ مثلّث قائم الزاوية د مثلّث حادّ الزوايا

Midnight
KuwaitTeacher.Com

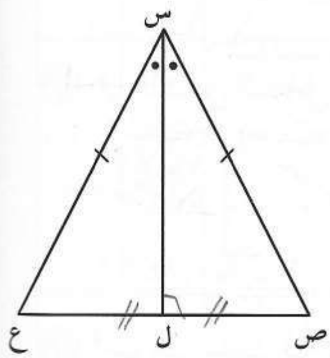
١٢ أ ب جـ مثلّث فيه : $\overline{أد} \cap \overline{جـهـ} = \{م\}$ ،
أ د = ١٢ سم فإن م د = $\frac{1}{3} \times 12 = 4$



(أ) ٣ سم (ب) ٤ سم (جـ) ٦ سم (د) ٨ سم

---

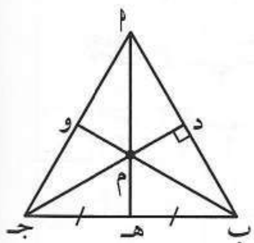
١٣ س ص ع مثلّث متطابق الضلعين ، فإنّ $\overline{س ل}$ هي :



(أ) منصِّف الزاوية س فقط .
(ب) قطعة متوسّطة فقط .
(جـ) محور $\overline{ص ع}$ فقط .
(د) منصِّف الزاوية س وقطعة متوسّطة ومحور $\overline{ص ع}$.

---

١٤ أ ب جـ مثلّث متطابق الأضلاع ، $\overline{أهـ} \cap \overline{ب و} \cap \overline{جـ د} = \{م\}$ ، فإنّ م هي نقطة تقاطع :



(أ) منصِّفات زوايا المثلّث فقط .
(ب) منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه فقط .
(جـ) منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه وقطعه المتوسّطة فقط .
(د) منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه وقطعه المتوسّطة ومحاور أضلاعه .

KuwaitTeacher.Com

الوحدة التاسعة

النسبة المئوية
Percent

التجارة
Trading

تهتمّ دولة الكويت بالتجارة منذ نشأتها . واستمرّ هذا الاهتمام على مدى تعاقب الأجيال ، وتجلّى بأبهى صورة من خلال إنشاء المجمّعات التجارية ، ومن أهمّها وأكبرها مجمّع الأفنيوز The Avenues الذي افتُتح في أبريل ٢٠٠٧ م تحت رعاية وحضور حضرة صاحب السموّ أمير البلاد الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح . يتميّز الأفنيوز بتصميم عمراني خلّاب يجمع عددًا من المدارس العمرانية المتنوّعة ، ويمنح كلّ منطقة هوية خاصّة مستوحاة من أعرق المدن في العالم ما يجعل من تجربة التسوّق في الأفنيوز تجربة فريدة من نوعها لكلّ متسوّق وزائر .

KuwaitTeacher.Com

مشروع الوحدة : (معرض للأدوات الكهربائية)

تحرص دولة الكويت على تشجيع المشاريع الصغيرة لدعم الشباب ومحاربة البطالة وتمكين القطاع الخاصّ من تحقيق النموّ الاقتصادي لدولة الكويت . ليكن مشروعنا الصغير إدارة وتجهيز معرض للأدوات الكهربائية .

خطّة العمل :

- إدارة وتجهيز معرض للأدوات الكهربائية .

خطوات تنفيذ المشروع :

- يقسّم المعلّم المتعلّمين إلى مجموعات ويقومون باختيار اسم المعرض .
- لنفرض أنّه تمّ البدء بإنشاء المعرض في شهر يناير برأس مال قدره ٢٧ ٠٠٠ دينار .
- تختار كلّ مجموعة نوعًا واحدًا من الأجهزة التي سيبيعها معرضهم وتبحث عن سعر الجهاز بالإنترنت .
- تحسب المجموعة سعر شراء الجهاز مضافًا إليه كلفة الشحن ولتكن ١٥٪ من سعره الأصلي .
- إذا بيع الجهاز بربح ٢٥٪ ، فكم سيكون السعر الجديد لبيع الجهاز ؟
- في شهر فبراير وبمناسبة الاحتفالات بالعيد الوطني ، قرّر المعرض عمل خصم على الأجهزة بنسبة ١٠٪ . فما سعر بيع الجهاز بعد الخصم ؟
- تقوم كلّ مجموعة بتسجيل ما قامت به منذ بدء إنشاء المعرض وحتّى نهاية شهر فبراير .

علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة التنفيذ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

KuwaitTeacher.Com

مخطَّط تنظيمي للوحدة التاسعة

النسبة المئوية

↓

النسبة المئوية التزايدية
والنسبة المئوية التناقصية

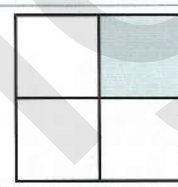
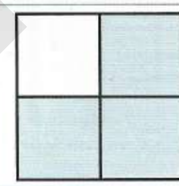
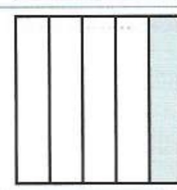
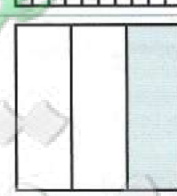
↓

تطبيقات على تغيّر
النسبة المئوية

Midnight
KuwaitTeacher.Com

اِستعِدَّ للوحدة التاسعة

١ أكمِل الجدول التالي :

الشكل	الصورة الكسرية	الصورة العشرية	النسبة المئوية
	$\frac{١}{١}$	١,٠	٪١٠٠
	$\frac{١}{٢}$	٠,٥	٪٥٠
	$\frac{١}{٤}$	٠,٢٥	٪٢٥
	$\frac{٣}{٤}$	٠,٧٥	٪٧٥
	$\frac{١}{٥}$	٠,٢	٪٢٠
	$\frac{١}{١٠}$	٠,١	٪١٠
	$\frac{١}{٣}$	٠,$\overline{٣}$	٪٣٣ $\frac{١}{٣}$
	$\frac{٢}{٣}$	٠,$\overline{٦}$	٪٦٦ $\frac{٢}{٣}$

Midnight
KuwaitTeacher.Com

٢ حُلَّ التناسب :

أ $\frac{٣}{٧} = \frac{٦}{س}$

$\frac{\cancel{٣} \times س}{\cancel{٣}} = \frac{٧ \times ٦}{٣}$

س = ١٤

ب $\frac{٢٥}{س} = \frac{١٢٥}{١٠٠}$

$س = \frac{١٠٠ \times ٢٥}{١٢٥}$

س = ٢٠

٣ حُلَّ المعادلات التالية في ح :

أ ٤٢٠ = ٦٠ س

$\frac{\cancel{٦٠} س}{\cancel{٦٠}} = \frac{٤٢٠}{٦٠}$

س = ٧

ب ٤ = س × $\frac{٨}{١٠٠}$

$\frac{١٠٠}{٨} \times ٤ = \frac{٨}{١٠٠} \times س \times \frac{١٠٠}{٨}$

س = ٥٠

جـ ٢٠ = ١٦ × (١ + س)

١٦ × (١ + س) = ٢٠

١٦ + ١٦ س = ٢٠

١٦ س = ٢٠ − ١٦

$\frac{١٦ س}{١٦} = \frac{٤}{١٦}$ ← س = $\frac{١}{٤}$

د ٣ = ٥ × (١ − س)

٣ = ٥ − ٥ س

٥ س = ٥ − ٣

$\frac{٥ س}{٥} = \frac{٢}{٥}$ ← س = $\frac{٢}{٥}$

٤ أوجِد قيمة كلّ من :

أ ٢٠ ٪ من ٢٥

$\frac{٢٠}{١٠٠} \times ٢٥ = ٥$

ب ٣٥ ٪ من ٧٠

$\frac{٣٥}{١٠٠} \times ٧٠ = \frac{٤٩}{٢} = ٢٤\frac{١}{٢}$

Midnight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

٩-١ النسبة المئوية
Percent

العبارات والمفردات :
النسبة المئوية
Percent
تقدير
Estimate

سوف تتعلّم : حلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية و تقدير النسبة المئوية .

أوّلًا : حل المسائل باستخدام النسب المئوية

نشاط (١) :

بدل الخدمة : يُعطى عادة مقابِل الخدمة التي تقدّمها المطاعم ، إذا كان بدل الخدمة ١٠٪ من قيمة الفاتورة وفي بعض الحالات يكون ٢٠٪ مقابِل الخدمة المميّزة .

١ أوجِد بدل الخدمة إذا كان المبلغ ٧٠ دينارًا .

بدل الخدمة = ١٠٪ × ٧٠

$\frac{١٠}{١٠٠} \times ٧٠ = ٧$ دينار

٢ أوجِد بدل الخدمة المميّزة إذا كان المبلغ ٨٠ دينارًا .

٢٠٪ × ٨٠

$\frac{٢٠}{١٠٠} \times \frac{٨٠}{١} = ١٦$ دينار

تدرّب (١) :

إذا كان سعر لوحة فنّية ١٥٠ دينارًا ، وتمّ خصم ١٠٪ من سعرها الأصلي .
فما قيمة هذا الخصم ؟

قيمة الخصم = ١٠٪ × ١٥٠

$\frac{١٠}{١٠٠} \times \frac{١٥٠}{١} = ١٥$ دينار

Midnight
KuwaitTeacher.Com

مثال (١) :

باعت مكتبة ١٨٠ كتابًا والتي تمثّل ٣٠٪ من كتبها المعروضة.
أوجِد عدد الكتب التي كانت في المكتبة قبل البيع.

الحلّ :

النسبة المئوية = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكلّ}}$

$\frac{٣٠}{١٠٠} = \frac{١٨٠}{س}$

٣٠ × س = ١٨٠ × ١٠٠

س = $\frac{١٨٠ \times ١٠٠}{٣٠}$ = ٦٠٠

∴ عدد الكتب = ٦٠٠ كتاب

حلّ آخر :

عدد الكتب المباعة =
النسبة المئوية × عدد الكتب

١٨٠ = ٣٠٪ × س

١٨٠ = $\frac{٣٠}{١٠٠}$ × س

س = ١٨٠ × $\frac{١٠٠}{٣٠}$ = ٦٠٠

∴ عدد الكتب = ٦٠٠ كتاب

تدرّب (٢) :

باع محلّ للعطور ٤٠٪ من الكمّية المعروضة عنده ، والتي بلغت ٣٦٠ زجاجة عطر ، فكم عدد زجاجات العطر التي كانت لديه ؟

٤٠٪ من كمية العطر = ٣٦٠

٤٠٪ × س = ٣٦٠

$\frac{١٠٠}{٤٠}$ × $\frac{٤٠}{١٠٠}$ × س = ٣٦٠ × $\frac{١٠٠}{٤٠}$

س = $\frac{\cancel{٣٦٠} \times ١٠٠}{\cancel{٤٠}}$ = ٩٠٠

عدد الزجاجات = ٩٠٠ زجاجة

طريقة أخرى

النسبة المئوية = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$

$\frac{٤٠}{١٠٠} = \frac{٣٦٠}{س}$

س = $\frac{\cancel{٣٦٠} \times ١٠٠}{\cancel{٤٠}}$ = ٩٠٠

عدد الزجاجات = ٩٠٠ زجاجة

تدرّب (٣) :

أثناء موسم التخفيضات، اشترت شهد حقيبة كان سعرها ٢٤٠ دينارًا ، وتمّ خصم ٦٠ دينارًا من سعرها الأَصلي ، فما النسبة المئوية للخصم ؟

النسبة المئوية = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$

$\frac{س}{١٠٠} = \frac{٦٠}{٢٤٠}$

س = $\frac{٦٠ \times ١٠٠}{٢٤٠}$ = ٢٥

النسبة المئوية للخصم ٢٥٪

النسبة المئوية للخصم = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$ × ١٠٠٪

= $\frac{٦٠}{٢٤٠}$ × ١٠٠٪

النسبة المئوية للخصم = ٢٥٪

Midlight
kuwaitteachers.com

ثانيًا : تقدير النسب المئوية

نشاط (٢) :

يعتمد أحد الفنادق نظام بدل الخدمة نظير نوع الخدمة التي يقدّمها . إذا كان بدل الخدمة ١٢٪ من قيمة الفاتورة وفي بعض الحالات ١٨٪ مقابِل الخدمة المميَّزة .

١ قدِّر بدل الخدمة إذا كان المبلغ ٥٨ دينارًا .

بدل الخدمة = ١٢٪ × ٥٨

نلاحظ أنّ :

١٢٪ ≈ ١٠ ٪ ، ٥٨ ≈ ٦٠

∴ بدل الخدمة ≈ ١٠ ٪ × ٦٠

= ٦ دنانير

∴ ١٢٪ من ٥٨ دينارًا ≈ ٦ دنانير

٢ قدِّر بدل الخدمة المميَّزة إذا كان المبلغ ٩٢ دينارًا .

١٨٪ ≈ ٢٠٪ ، ٩٢ ≈ ١٠٠

∴ بدل الخدمة ≈ ٢٠٪ × ١٠٠

= ٢٠ دينار

∴ ١٨٪ من ٩٢ ≈ ٢٠ دينار

عند تقدير النسب المئوية نختار أعدادًا مناسِبة .

مثال (٢) :

قدِّر ٢٤٪ من ٨١

الحلّ :

٢٤٪ ≈ ٢٥٪ ، ٨١ ≈ ٨٠

٢٥ ٪ من ٨٠

= ٢٥٪ × ٨٠

$= \frac{٢٥}{١٠٠} \times ٨٠ = \frac{١}{٤} \times ٨٠ = ٢٠$

∴ ٢٤ ٪ من ٨١ ≈ ٢٠

أعطِ تقديرًا آخر .

٢٤٪ ≈ ٢٠٪ ، ٨١ ≈ ٨٠

٢٠٪ × ٨٠ = ١٦

KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٤) :

١ قدِّر ٧٤,٥٪ من ٢٣٩

٧٤,٥٪ ≈ ٧٥٪

٢٣٩ ≈ ٢٤٠

٧٥٪ من ٢٤٠ = $\frac{٧٥}{١٠٠} \times ٢٤٠ = ١٨٠$

∴ ٧٤,٥٪ من ٢٣٩ ≈ ١٨٠

٢ قدِّر ٣٣٪ من ٨٩

٣٣٪ ≈ ٣٠٪ ، ٨٩ ≈ ٩٠

٣٠٪ من ٩٠

$\frac{٣٠}{١٠٠} \times ٩٠ = ٢٧$

٣٣٪ من ٨٩ ≈ ٢٧

تدرّب (٥) :

أعلن أحد المحلّات التجارية عن خصم ١١٪ على إحدى السلع . قدِّر قيمة الخصم إذا كان سعر السلعة ٤٩٩ دينارًا .

١١٪ ≈ ١٠٪ ، ٤٩٩ ≈ ٥٠٠

١٠٪ من ٥٠٠ = $\frac{١٠}{١٠٠} \times ٥٠٠ = ٥٠$

∴ ١١٪ من ٤٩٩ ≈ ٥٠ دينار

∴ قيمة الخصم ≈ ٥٠

تدرّب (٦) :

إذا كانت مبيعات شركة ما في أحد الأعوام ٣٥٠٠٠٠ دينار ثم انخفضت بنسبة ١٩٪ في العام الذي يليه ، فقدِّر قيمة الانخفاض .

١٩٪ ≈ ٢٠٪

٢٠٪ من ٣٥٠٠٠٠ = $\frac{٢٠}{١٠٠} \times ٣٥٠٠٠٠ = ٧٠٠٠٠$

قيمة الانخفاض ≈ ٧٠٠٠٠ دينار

KuwaitTeacher.Com

تمـــرَّنْ :

١ جهاز كهربائي سعره ١٢٠ دينارًا ، وفي موسم التنزيلات وُضِع عليه خصم بنسبة ١٥٪ ، فما قيمة الخصم ؟

قيمة الخصم = ١٥٪ من ١٢٠

$= \frac{١٥}{١٠٠} \times ١٢٠$

$= \frac{١٥ \times ١٢٠}{١٠٠ \times ١} = ١٨$

قيمة الخصم = ١٨ دينار

طريقة أخرى

النسبة المئوية = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$

$\frac{١٥}{١٠٠} = \frac{س}{١٢٠}$

$س = \frac{١٢٠ \times ١٥}{١٠٠} = ١٨$

قيمة الخصم = ١٨ دينار

٢ سُجِّل ٥٠ متعلّمًا في رحلة مدرسية إلى أبراج الكويت ، حضر منهم ٣٥ متعلّمًا فقط . ما النسبة المئوية للحاضرين ؟

النسبة المئوية للحاضرين = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$

$\frac{س}{١٠٠} = \frac{٣٥}{٥٠}$

$س = \frac{٣٥ \times ١٠٠}{٥٠}$

س = ٧٠ ∴ النسبة = ٧٠٪

النسبة المئوية = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}} \times ١٠٠٪$

$= \frac{٣٥}{٥٠} \times ١٠٠٪$

= ٧٠٪

٣ إذا كان ٢٠٪ من متعلّمي الصفّ التاسع في إحدى المدارس هو ٤٢ متعلمًا ، فما عدد متعلمي الصف التاسع ؟

٢٠٪ من متعلمي الصف التاسع = ٤٢

٢٠٪ من س = ٤٢

$\frac{١٠٠}{٢٠} \times \frac{٢٠}{١٠٠} \times س = ٤٢ \times \frac{١٠٠}{٢٠}$

$س = \frac{٤٢ \times ١٠٠}{٢٠ \times ١} = ٢١٠$

النسبة المئوية = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$

$\frac{٢٠}{١٠٠} = \frac{٤٢}{س}$

$س = \frac{١٠٠ \times ٤٢}{٢٠} = ٢١٠$

∴ عدد متعلمي الصف التاسع = ٢١٠ متعلم

∴ عدد متعلمي الصف التاسع = ٢١٠ متعلم

MidNight
صفوف الكويت
KuwaitTeacher.Com

٧٥
١٥
٣٧٥
٧٥
١١٢٥

٤ قدِّر ٦٣٪ من العدد ٤٥

٦٣٪ ≈ ٦٠٪ ، ٤٥ ≈ ٤٥

٦٠٪ من ٤٥ = $\frac{٦٠}{١٠٠} \times \frac{٤٥}{١}$ = ٢٧ ← ٦٣٪ من ٤٥ ≈ ٢٧

أو

٦٣٪ ≈ ٦٠٪ ، ٤٥ ≈ ٥٠

٦٠٪ من ٥٠ = $\frac{٦٠}{١٠٠} \times$ ٥٠ = ٣٠ ← ٦٣٪ من ٤٥ ≈ ٣٠

٥ قدِّر ١٩٪ من العدد ٢١٠

١٩٪ ≈ ٢٠٪ ، ٢١٠ ≈ ٢١٠

٢٠٪ من ٢١٠ =

$\frac{٢٠}{١٠٠} \times$ ٢١٠ = ٤٢

∴ ١٩٪ من ٢١٠ ≈ ٤٢

١٩٪ ≈ ١٩٪ ، ٢١٠ ≈ ٢٠٠

١٩٪ من ٢٠٠ =

$\frac{١٩}{١٠٠} \times$ ٢٠٠ = ٣٨

∴ ١٩٪ من العدد ٢١٠ ≈ ٣٨

٦ لوحة أثرية ثمنها ١٤٥٠ دينارًا ، قدِّر ٧٣٪ من ثمن اللوحة .

٧٣٪ ≈ ٧٠٪ ، ١٤٥٠ ≈ ١٥٠٠

٧٠٪ من ١٥٠٠ = $\frac{٧٠}{١٠٠} \times$ ١٥٠٠
= ١٠٥٠

٧٣٪ من ١٤٥٠ ≈ ١٠٥٠

أو

٧٣٪ ≈ ٧٥ ، ١٤٥٠ ≈ ١٥٠٠

٧٥٪ من ١٥٠٠ = $\frac{٧٥}{١٠٠} \times$ ١٥٠٠ = ١١٢٥

٧٣٪ من ١٤٥٠ ≈ ١١٢٥

Midnight
KuwaitTeacher.Com

٩-٢ النسبة المئوية التزايدية والنسبة المئوية التناقصية
Percentage Increase and Percentage Decrease

العبارات والمفردات :
النسبة المئوية التزايدية
Percentage Increase
النسبة المئوية التناقصية
Percentage Decrease

سوف تتعلّم : حلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية تزايدية ونسبًا مئوية تناقصية .

نشاط :

قرّر مجلس إدارة أحد المجمّعات التجارية زيادة إيجار المحلّات التابعة له بنسبة ٢٠٪ للمحلّ الواحد ، إذا كانت قيمة الإيجار القديم ٥٠٠ دينار .

١ أوجِد ما يلي :

أ مقدار الزيادة .
مقدار الزيادة = ٥٠٠ × ٢٠٪
= ٥٠٠ × ٢٠ / ١٠٠ = ١٠٠
= ١٠٠ دينار

ب القيمة النهائية للإيجار .
القيمة النهائية = القيمة الأصلية + مقدار الزيادة
= ٥٠٠ + ١٠٠
= ٦٠٠ دينار

ج النسبة المئوية بعد الزيادة .
النسبة المئوية بعد الزيادة = ١٠٠٪ + ٢٠٪
= ١٢٠٪

٢ ما قيمة ١٢٠٪ من ٥٠٠ ؟ ١٢٠٪ × ٥٠٠
= ١٢٠ / ١٠٠ × ٥٠٠ = ٦٠٠ دينار

ماذا تلاحظ ؟

Midnight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

يمكن حلّ المسائل التي تتضمّن نسبًا مئوية تزايدية باستخدام المعادلة التالية :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠ ٪ + النسبة المئوية للتزايد)

كذلك يمكن حلّ المسائل التي تتضمّن نسبًا مئوية تناقصية باستخدام المعادلة التالية :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠ ٪ − النسبة المئوية للتناقص)

مثال (١) :

أوجِد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ٩٠ والنسبة المئوية للتزايد ٣٠٪ .

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= ٩٠ × (١٠٠٪ + ٣٠٪)

= ٩٠ × ١٣٠٪

= ٩٠ × $\frac{١٣٠}{١٠٠}$

= ١١٧

تدرّب (١) :

أوجِد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ١٢٠٠ والنسبة المئوية للتناقص ٨٠ ٪ .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

= ١٢٠٠ × (١٠٠٪ − ٨٠٪)

= ١٢٠٠ × ٢٠٪

= ١٢٠٠ × $\frac{٢٠}{١٠٠}$ = ٢٤٠

KuwaitTeacher.Com

مثال (٢) :

تذكّرْ أنّ :
مقدار التغيّر = القيمة النهائية – القيمة الأصلية

تناقصت إيرادات إحدى المؤسّسات التجارية في نهاية السنة المالية لعام ٢٠١٧ م حيث بلغت ٢٧٠ ٠٠٠ دينار ، بنسبة تناقص ١٠٪ عن نهاية السنة المالية ٢٠١٦ م. أوجِد القيمة الأصلية للإيرادات ومقدار النقص .

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ – النسبة المئوية للتناقص)

٢٧٠ ٠٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ – ١٠٪)

٢٧٠ ٠٠٠ = القيمة الأصلية × ٩٠٪

٢٧٠ ٠٠٠ = القيمة الأصلية × $\frac{٩٠}{١٠٠}$

القيمة الأصلية = ٢٧٠ ٠٠٠ × $\frac{١٠٠}{٩٠}$

= ٣٠٠ ٠٠٠ دينار

مقدار التغيّر = ٢٧٠ ٠٠٠ – ٣٠٠ ٠٠٠ = $\boxed{-}$٣٠ ٠٠٠ دينار

تعني تناقص

∴ مقدار النقص = ٣٠ ٠٠٠ دينار

تدرّب (٢) :

أوجِد القيمة الأصلية إذا كانت القيمة النهائية تساوي ٨٠ والنسبة المئوية للتزايد تساوي ٦٠ ٪ . وما مقدار الزيادة ؟

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠ ٪ + النسبة المئوية للتزايد)

٨٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + ٦٠٪)

٨٠ = القيمة الأصلية × ١٦٠٪

$\frac{١٠٠}{١٦٠}$ × ٨٠ = القيمة الأصلية × $\frac{١٦٠}{١٠٠}$ × $\frac{١٠٠}{١٦٠}$

القيمة الأصلية = $\frac{٨٠ × ١٠٠}{١٦٠}$ = ٥٠

مقدار التغير = ٨٠ – ٥٠ = ٣٠

Midnight
KuwaitTeacher.Com

النسبة المئوية للتزايد أو التناقص = $\frac{\text{مقدار التغير}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠\%$

مثال (٣) :

زادت أسعار بيع التلفاز في أحد المحلّات التجارية فبلغت ٢١٠ دنانير ، إذا كان السعر الأصلي ١٤٠ دينارًا ، فأوجِد النسبة المئوية للتزايد .

> **تذكَّرْ أنّ :**
> $١٠٠\% = ١$
> $٥٠\% = \frac{١}{٢}$

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

$٢١٠ = ١٤٠ \times (١ + س)$

$١ + س = \frac{٢١٠}{١٤٠}$

$١ + س = \frac{٣}{٢}$

$س = \frac{٣}{٢} - ١ = \frac{١}{٢}$

∴ النسبة المئوية للتزايد = $\frac{١}{٢} \times ١٠٠\% = ٥٠\%$

حاوِل أن تحلّ بطريقة أخرى .

مقدار التغير = ٢١٠ − ١٤٠ = ٧٠

النسبة المئوية للتزايد = $\frac{٧٠}{١٤٠} \times ١٠٠\%$

النسبة المئوية للتزايد = ٥٠٪

يمكن استخدام التناسب: $\frac{س}{١٠٠} = \frac{٧٠}{١٤٠}$

$س = \frac{٧٠ \times ١٠٠}{١٤٠} = ٥٠$

النسبة = ٥٠٪

تدرّب (٣) :

أوجِد النسبة المئوية للتناقص إذا كانت القيمة النهائية ٣٠٠ والقيمة الأصلية ٥٠٠ .

مقدار التناقص = ٥٠٠ − ٣٠٠ = ٢٠٠

النسبة المئوية للتناقص = $\frac{\text{مقدار التناقص}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠\%$

= $\frac{٢٠٠}{٥٠٠} \times ١٠٠\% = ٤٠\%$

∴ النسبة المئوية للتناقص = ٤٠٪

باستخدام التناسب

النسبة المئوية = $\frac{\text{مقدار التناقص}}{\text{القيمة الأصلية}}$

$\frac{س}{١٠٠} = \frac{٢٠٠}{٥٠٠}$

$س = \frac{٢٠٠ \times ١٠٠}{٥٠٠}$

س = ٤٠

النسبة المئوية للتناقص = ٤٠٪

KuwaitTeacher.Com

تمـــرَّنْ :

١ أوجِد السعر النهائي لحاسوب كان سعره ٧٠٠ دينار ثمّ زاد بنسبة ٢٠ ٪ .

السعر النهائي = السعر الأصلي × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للزيادة)

= ٧٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٠٪)

= ٧٠٠ × ١٢٠٪

= ٧٠٠ × $\frac{١٢٠}{١٠٠}$ = ٨٤٠

السعر النهائي = ٨٤٠ دينار

٢ يعمل جاسم في محلّ بيع الهواتف المتنقّلة ويحصل على خصم ٣٠٪ على مشترَياته . إذا كان سعر البيع لأحد الهواتف ٧٠ دينارًا ، فكم سيدفع جاسم بعد الخصم ؟

السعر بعد الخصم = السعر الأصلي × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للخصم)

= ٧٠ × (١٠٠٪ − ٣٠٪)

= ٧٠ × ٧٠٪ = ٧٠ × $\frac{٧٠}{١٠٠}$ = ٤٩

السعر بعد الخصم = ٤٩ دينار

٣ اِرتفعت قيمة سهم إحدى شركات الاتّصالات المدرَجة في سوق الأوراق المالية بنسبة ١٤٪ . إذا كانت القيمة الأصلية للسهم ٤٠٠ فلس ، فأوجِد القيمة النهائية للسهم .

القيمة النهائية للسهم = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للزيادة)

= ٤٠٠ × (١٠٠٪ + ١٤٪)

= ٤٠٠ × ١١٤٪

= ٤٠٠ × $\frac{١١٤}{١٠٠}$ = ٤٥٦

القيمة النهائية للسهم = ٤٥٦ دينار

٤ أوجِد القيمة الأصلية إذا كانت :

القيمة النهائية تساوي ٧٠٠ ، النسبة المئوية للتناقص تساوي ٦٥٪ .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

٧٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − ٦٥٪)

٧٠٠ = القيمة الأصلية × ٣٥٪

٧٠٠ × $\frac{١٠٠}{٣٥}$ = القيمة الأصلية × $\frac{٣٥}{١٠٠}$ × $\frac{١٠٠}{٣٥}$

القيمة الأصلية = $\frac{٧٠٠ \times ١٠٠}{٣٥}$ = [illegible]

Midnight
Kuwaitteacher.com

٥ تزايدت إيرادات أحد المطاعم بنسبة ٣٠٪ عن الشهر السابق ، إذا بلغت الإيرادات ٢٦٠٠ دينار ، فاحسب إيرادات الشهر السابق .

الأصلية

النهائية

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

٢٦٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + ٣٠٪)

٢٦٠٠ = القيمة الأصلية × ١٣٠٪

$\frac{100}{130}$ × ٢٦٠٠ = القيمة الأصلية × $\frac{130}{100}$ × $\frac{100}{130}$

القيمة الأصلية = $\frac{2600 \times 100}{130}$ = ٢٠٠٠ دينار

الإيرادات السابقة = ٢٠٠٠ دينار

٦ اشترت عائشة قلادة ذهبية بقيمة ٢٤٠٠ دينار بعد أن حصلت على خصم ٢٠٪ .
أوجِد السعر الأصلي للقلادة ، ثمّ أوجد مقدار الخصم .

السعر بعد الخصم = السعر الأصلي × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للخصم)

٢٤٠٠ = السعر الأصلي × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

٢٤٠٠ = السعر الأصلي × ٨٠٪

$\frac{100}{80}$ × ٢٤٠٠ = السعر الأصلي × $\frac{80}{100}$ × $\frac{100}{80}$

السعر الأصلي = $\frac{2400 \times 100}{80}$ = ٣٠٠٠ دينار

مقدار الخصم = ٣٠٠٠ − ٢٤٠٠ = ٦٠٠ دينار

٧ أوجِد النسبة المئوية للتزايد إذا كانت القيمة النهائية ٢٤٠ والقيمة الأصلية ٢٠٠ .

مقدار التزايد = ٢٤٠ − ٢٠٠ = ٤٠

النسبة المئوية للتزايد = $\frac{\text{مقدار التزايد}}{\text{القيمة الأصلية}}$ × ١٠٠٪

= $\frac{40}{200}$ × ١٠٠٪

النسبة المئوية للتزايد = ٢٠٪

أو باستخدام التناسب

$\frac{س}{100} = \frac{40}{200}$

س = $\frac{40 \times 100}{200}$

س = ٢٠

النسبة المئوية للتزايد = ٢٠٪

KuwaitTeacher.Com

٩-٣ تطبيقات على تغيّر النسبة المئوية
Applications of Percent Change

سوف تتعلّم : استخدام النسبة المئوية للتزايد والتناقص وتطبيقها .

نشاط :

في سوق الكويت للأوراق المالية تتأرجح أسعار أسهم الشركات التجارية بين هبوط وارتفاع ، إذا بلغ سعر بيع السهم لإحدى الشركات في بداية تداوله ١٠٠ فلس ،
فأوجِد سعر بيع السهم في كلّ من الحالات التالية :

١ اِرتفاع بنسبة ٢٪ ثمّ انخفاض بنسبة ٢٪ .

القيمة النهائية لسعر بيع السهم بعد ارتفاع ٢٪

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= ١٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٪)

= ١٠٠ × ١٠٢٪ = ١٠٢ فلسًا

القيمة النهائية لسعر بيع السهم

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

= ١٠٢ × (١٠٠٪ − ٢٪)

= ١٠٢ × ٩٨٪ = ٩٩,٩٦ فلسًا

ماذا تلاحظ ؟ ....

٢ اِنخفاض بنسبة ٢٪ ثمّ ارتفاع بنسبة ٢٪ .

القيمة النهائية لسعر بيع السهم بعد انخفاض ٢٪

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

= ١٠٠ × (١٠٠٪ − ٢٪)

= ١٠٠ × ٩٨٪ = ٩٨ فلسًا

القيمة النهائية لسعر بيع السهم

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= ٩٨ × (١٠٠٪ + ٢٪)

= ٩٨ × ١٠٢٪ = ٩٩,٩٦ فلسًا

قارن بين القيمة النهائية في كلّ من ١ ، ٢ .

معلومات مفيدة :

سوق الكويت للأوراق المالية أو بورصة الكويت الرسمية ، هي سوق لتداول الأسهم بشكل رسمي، وتتضمّن ٥ أسواق وهي : السوق الرسمِية ، السوق الموازِية ، سوق الكسور ، سوق الخيارات وسوق الآجل . تمّ تأسيس السوق بعد إصدار قانون تنظيم التداولات المالية في أكتوبر عام ١٩٦٢ م .

Midnight
KuwaitTeacher.Com

مثال (١) :

رفعت إحدى شركات الطيران أسعارها بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منحت هذه الشركة موظّفيها خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم ستدفع إحدى الموظّفات في هذه الشركة لتذكرة كان سعرها ٢٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

الحلّ :

سعر التذكرة بعد الزيادة = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= ٢٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٠٪)

= ٢٠٠ × ١٢٠٪

= ٢٠٠ × $\frac{١٢٠}{١٠٠}$ = ٢٤٠ دينارًا

القيمة النهائية للتذكرة = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

= ٢٤٠ × (١٠٠٪ − ١٠٪)

= ٢٤٠ × ٩٠٪

= ٢٤٠ × $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = ٢١٦ دينارًا

حاوِل أن تحلّ بطريقة أخرى ؟؟

تدرّب (١) :

في معرض لموادّ البناء تبيع إحدى الشركات أنواعًا مختلفة من البلاط ، إذا كان سعر بيع المتر المربّع من أحد أنواع البلاط هو ٥ دنانير و خلال فترة الخصومات كانت نسبة الخصم ٣٠٪ يُضاف إليها ١٠٪ كلفة تركيب ، فما هي كلفة شراء وتركيب المتر المربّع من هذا النوع من البلاط ؟

سعر المتر المربع من البلاط بعد الخصم = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

= ٥ × (١٠٠٪ − ٣٠٪)

= ٥ × ٧٠٪ = ٥ × $\frac{٧٠}{١٠٠}$ = $\frac{٧}{٢}$ دينار

سعر المتر بعد زيادة كلفة التركيب = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= $\frac{٧}{٢}$ × (١٠٠٪ + ١٠٪)

= $\frac{٧}{٢}$ × ١١٠٪

= $\frac{٧}{٢}$ × $\frac{١١٠}{١٠٠}$ = ٣٫٨٥ دينار

Midnight
KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٢) :

يكلّف استئجار قارب من إحدى شركات تأجير القوارب في اليوم الواحد ٢٥ دينارًا يُضاف إليها نظير الخدمة ، أوجِد تكلفة الاستئجار في الحالات التالية :

أ خصم ٢٠٪ ثم إضافة ١٠٪ نظير الخدمة .

التكلفة بعد الخصم = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

= ٢٥ × ٨٠٪

= ٢٥ × $\frac{٨٠}{١٠٠}$ = $\frac{٢٥ \times ٨٠}{١٠٠}$ = ٢٠

التكلفة بعد إضافة نظير الخدمة = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + ١٠٪)

= ٢٠ × ١١٠٪

= $\frac{٢٠ \times ١١٠}{١٠٠}$ = ٢٢ دينار

ب خصم ٢٠ ٪ خصمًا بعد إضافة ٥ دنانير نظير الخدمة . الإضافة أولا

التكلفة بعد إضافة نظير الخدمة = ٢٥ × (١٠٠٪ + ٥٪)

= ٢٥ × ١٠٥٪

= $\frac{٢٥ \times ١٠٥}{١٠٠}$ = ٢٦٫٢٥

التكلفة بعد الخصم = ٢٦٫٢٥ × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

= ٢٦٫٢٥ × ٨٠٪ = $\frac{٢٦٫٢٥ \times ٨٠}{١٠٠}$ = ٢١٫٠٠٠

مثال (٢) :

انخفض سعر مبيعات متجر للموادّ الغذائية إلى ١٦٠٠ دينار بنسبة ٢٠٪ .

أ أوجد القيمة الأصلية للمبيعات قبل الانخفاض .

ب ما النسبة المئوية للتزايد التي تعيد سعر المبيعات إلى سعرها الأصلي قبل الانخفاض؟

الحلّ :

أ القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

١٦٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

١٦٠٠ = القيمة الأصلية × ٨٠٪

١٦٠٠ = القيمة الأصلية × $\frac{٨٠}{١٠٠}$

∴ القيمة الأصلية = ١٦٠٠ × $\frac{١٠٠}{٨٠}$ = ٢٠٠٠ دينار

Midnight
معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

طريقة أخرى لحل (ب)

ب القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

٢٠٠٠ = ١٦٠٠ × (١ + س)

مقدار التغير = ٢٠٠٠ − ١٦٠٠ = ٤٠٠

النسبة المئوية للتزايد = $\frac{٤٠٠}{١٦٠٠}$ × ١٠٠٪

النسبة المئوية للتزايد = ٢٥٪

١ + س = $\frac{٢٠٠٠}{١٦٠٠}$

١ + س = $\frac{٥}{٤}$

س = $\frac{٥}{٤}$ − ١ = $\frac{١}{٤}$

∴ النسبة المئوية للتزايد = $\frac{١}{٤}$ × ١٠٠٪ = ٢٥٪

تدرّب (٣) :

إذا زادت نفقات حصّة ١٠٠ ٪ عن الشهر السابق لتصل إلى ٤٠٠ دينار .

أ أوجد نفقات حصّة قبل الزيادة. (الأصلية)

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

٤٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + ١٠٠٪)

٤٠٠ = القيمة الأصلية × ٢٠٠٪

$\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ × ٤٠٠ = القيمة الأصلية × $\frac{٢٠٠}{١٠٠}$ × $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$

القيمة الأصلية = $\frac{١٠٠ × ٤٠٠}{٢٠٠}$ = ٢٠٠ دينار

ب ما النسبة المئوية للتناقص التي تجعل نفقات حصّة تعود إلى مستواها في الشهر الماضي؟

مقدار التغير = ٤٠٠ − ٢٠٠ = ٢٠٠

النسبة المئوية للتناقص = $\frac{٢٠٠}{٤٠٠}$ × ١٠٠٪

= ٥٠٪

Midlight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

يصل الثمن إلى النصف بعد خصم ٥٠٪ ولكي تعود إلى أصلها يجب مضاعفتها أي تزيد نفس المقدار بمعنى ١٠٠٪
أي خرجي -٥٠٪ إلى بزيادة ١٠٠٪

التفسير

فكر وناقش

يقول سعد إنّ خصم ٥٠٪ يليها زيادة ١٠٠٪ على سلعة ما يعيدها إلى سعرها الأصلي . هل توافقه الرأي ؟ (فسِّر إجابتك) نعم

مثال: إذا كان الثمن الأصلي ١٠٠ فلس

الثمن بعد الخصم = ١٠٠ × ٥٠٪ = ٥٠

الثمن بعد الزيادة = ٥٠ × ٢٠٠٪ = ١٠٠

تمــرَّنْ :

١ اِشترى أحمد منزلًا بمبلغ ٤٠٠ ٠٠٠ دينار ثمّ باعه بزيادة قدرها ٢٥٪ عن سعره الأصلي ، حيث تقاضى الوسيط العقاري ٥٪ من سعر البيع ، فما هو المبلغ الذي حصل عليه أحمد من بيع المنزل ؟

سعر المنزل بعد الزيادة = الثمن الأصلي × (١٠٠٪ + ٢٥٪)

= ٤٠٠٠٠٠ × ١٢٥٪

= ٤٠٠٠٠٠ × ١٢٥ / ١٠٠ = ٥٠٠٠٠٠

المبلغ الذي حصل عليه أحمد بعد الخصم = ٥٠٠٠٠٠ × (١٠٠٪ − ٥٪)

= ٥٠٠٠٠٠ × ٩٥٪

= ٥٠٠٠٠٠ × ٩٥ / ١٠٠ = ٤٧٥٠٠٠

∴ المبلغ الذي حصل عليه أحمد = ٤٧٥٠٠٠ دينار

٢ إذا كان سعر استئجار غرفة في أحد المنتجعات السياحية لليلة الواحدة ٢٠٠ دينار وترتفع خلال فترة الصيف أسعار استئجار الغرف بنسبة ١٥٪ ، يقدّم نادي السياحة لأعضائه خصمًا قدره ١٠٪ خلال فترة الصيف ، فما المبلغ الذي سيدفعه عضو نادي السياحة عند استئجاره الغرفة خلال هذه الفترة ؟

سعر الغرفة بعد الزيادة = الثمن الأصلي × (١٠٠٪ + ١٥٪)

= ٢٠٠ × ١١٥٪

= ٢٠٠ × ١١٥ / ١٠٠ = ٢٣٠ دينار

سعر الغرفة بعد الخصم = ٢٣٠ × (١٠٠٪ − ١٠٪)

= ٢٣٠ × ٩٠٪

= ٢٣٠ × ٩٠ / ١٠٠ = ٢٠٧ دينار

ما سيدفعه عضو نادي السياحة

Midnight
KuwaitTeacher.Com

٣ رفع أحد معارض السيّارات أسعاره بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منح هذا المعرض موظّفيه خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم سيدفع أحد الموظّفين في هذا المعرض ثمنًا لشراء سيّارة كان سعرها ٩٠٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

سعر السيارة بعد الزيادة = ٩٠٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٠٪)

= ٩٠٠٠ × ١٢٠٪

= ٩٠٠٠ × $\frac{١٢٠}{١٠٠}$ = ١٠٨٠٠ دينار

ما سيدفعه أحد الموظفين = ١٠٨٠٠ × (١٠٠٪ − ١٠٪)

= ١٠٨٠٠ × ٩٠٪

= ١٠٨٠٠ × $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = ٩٧٢٠ دينار

٤ بلغ سعر التذكرة الواحدة لحضور مسرحية ٥٠ دينارًا ، ويُضاف إليها نظير الخدمة .
أوجِد سعر التذكرة في كلّ من الحالات التالية :

أ خصم ٢٠٪ ثمّ إضافة ١٢٪ نظير الخدمة .

سعر التذكرة بعد الخصم = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للخصم)

= ٥٠ × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

= ٥٠ × ٨٠٪

= ٥٠ × $\frac{٨٠}{١٠٠}$ = ٤٠ دينار

سعر التذكرة بعد إضافة نظير الخدمة = ٤٠ × (١٠٠٪ + ١٢٪)

= ٤٠ × ١١٢٪

= ٤٠ × $\frac{١١٢}{١٠٠}$ = ٤٤٫٨ دينار

ب خصم ٢٠٪ بعد إضافة ١٠ دنانير نظير الخدمة . الإضافة أولاً

سعر التذكرة بعد إضافة نظير الخدمة = ٥٠ × (١٠٠٪ + ١٠٪)

= ٥٠ × ١١٠٪

= ٥٠ × $\frac{١١٠}{١٠٠}$ = ٥٥ دينار

سعر التذكرة بعد الخصم = ٥٥ × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

= ٥٥ × ٨٠٪

= ٥٥ × $\frac{٨٠}{١٠٠}$ = ٤٤ دينار

Kuwaitteacher.Com

٥ اِنخفض سعر أسهم شركة ٤٠٪ عن سعر العام الماضي والذي كان ٢٠٠٠٠٠ دينار ، أوجِد ما يلي :

أ قيمة الأسهم بعد الانخفاض .

سعر الأسهم بعد الانخفاض = ٢٠٠٠٠٠ × (١٠٠٪ - ٤٠٪)

= ٢٠٠٠٠٠ × ٦٠٪

= ٢٠٠٠٠٠ × $\frac{٦٠}{١٠٠}$ = ١٢٠٠٠٠ دينار

ب ما النسبة المئوية للتزايد في السعر التي ستعيد سعر الأسهم إلى سعر العام الماضي ؟

مقدار التزايد = ٢٠٠٠٠٠ - ١٢٠٠٠٠ = ٨٠٠٠٠ دينار

النسبة المئوية للتزايد = $\frac{\text{مقدار التغير}}{\text{القيمة الأصلية}}$ × ١٠٠٪

= $\frac{٨٠٠٠٠}{١٢٠٠٠٠}$ × ١٠٠٪ = $\frac{٢٠٠}{٣}$٪

= ٦٦ $\frac{٢}{٣}$٪

طريقة أخرى لحل (ب)

القيمة الجديدة = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + س)

$\frac{٢٠٠٠٠٠}{١٢٠٠٠٠}$ = $\frac{١٢٠٠٠٠}{١٢٠٠٠٠}$ × (١ + س)

١ + س = $\frac{٢٠}{١٢}$ ← س = $\frac{٢٠}{١٢}$ - ١ = $\frac{٢٠}{١٢}$ - $\frac{١٢}{١٢}$

س = $\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

النسبة المئوية = $\frac{٢}{٣}$ × ١٠٠٪ = ٦٦ $\frac{٢}{٣}$٪

Midnight
معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

٩-٤ مراجعة الوحدة التاسعة
Revision Unit Nine

أوّلًا : التمارين المقالية

١ قدِّر ما يلي :

أ ٢٨٪ من ١٥٣

٢٨٪ ≈ ٣٠٪ ، ١٥٣ ≈ ١٥٠

٣٠٪ من ١٥٠ = $\frac{٣٠}{١٠٠}$ × ١٥٠ = ٤٥

٢٨٪ من ١٥٣ ≈ ٤٥

ب ٢٢٪ من ٤٠٠

٢٢٪ ≈ ٢٠٪ ، ٤٠٠ ≈ ٤٠٠

٢٠٪ من ٤٠٠ = $\frac{٢٠}{١٠٠}$ × ٤٠٠ = ٨٠

٢٢٪ من ٤٠٠ ≈ ٨٠

جـ ٦٤٪ من ٣٥٨

٦٤٪ ≈ ٦٠٪ ، ٣٥٨ ≈ ٣٦٠

٦٠٪ من ٣٦٠ = $\frac{٦٠}{١٠٠}$ × ٣٦٠ = ٢١٦

٦٤٪ من ٣٥٨ ≈ ٢١٦

د ٧٢٪ من ٧٢

٧٢٪ ≈ ٧٠٪ ، ٧٢ ≈ ٧٠

٧٠٪ من ٧٠ = $\frac{٧٠}{١٠٠}$ × ٧٠ = ٤٩

٧٢٪ من ٧٢ ≈ ٤٩

٢ يقدّم أحد النوادي الرياضية لزبائنه عرضًا للاشتراك السنوي بخصم نسبته ٢٥٪ .
كم سيدفع المشترِك إذا كان السعر الأصلي للاشتراك السنوي ٣٠٠ دينار ؟

السعر بعد الخصم = السعر الأصلي × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للخصم)

= ٣٠٠ × (١٠٠٪ − ٢٥٪)

= ٣٠٠ × ٧٥٪

= ٣٠٠ × $\frac{٧٥}{١٠٠}$ = ٢٢٥

∴ السعر بعد الخصم = ٢٢٥ دينار

Mid Night
KuwaitTeacher.Com

٣ بلغ عدد زبائن يوم الأربعاء في أحد المطاعم ١٢٠ شخصًا ، وفي يوم الجمعة زاد عدد الزبائن إلى ٣٦٠ شخصًا . أوجِد النسبة المئوية للتزايد في عدد الزبائن يوم الجمعة .

مقدار التزايد = ٣٦٠ − ١٢٠ = ٢٤٠

النسبة المئوية للتزايد = $\frac{\text{مقدار التزايد}}{\text{القيمة الأصلية}}$ × ١٠٠٪

= $\frac{٢٤٠}{١٢٠}$ × ١٠٠٪ = ٢٠٠٪

النسبة المئوية للتزايد = ٢٠٠٪

٤ في متجر للأجهزة الإلكترونية ، بيعت آلة تصوير بتخفيض قدره ٣٠٪ من ثمنها الأصلي ، إذا كان ثمن آلة التصوير هو ٢١٠ دينار ، فما هو ثمنها قبل التخفيض ؟ الأصلي

السعر النهائي = السعر الأصلي × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للخصم)

٢١٠ = السعر الأصلي × (١٠٠٪ − ٣٠٪)

٢١٠ = السعر الأصلي × ٧٠٪

$\frac{١٠٠}{٧٠}$ × $\frac{٧٠}{١٠٠}$ × السعر الأصلي = ٢١٠ × $\frac{١٠٠}{٧٠}$

السعر الأصلي = $\frac{٢١٠ × ١٠٠}{٧٠}$ = ٣٠٠ دينار

٥ أعلنت شركة عقارية عن زيادة قدرها ١٥٪ على مبيعاتها من قطع الأراضي والشقق ، يعمل خالد في هذه الشركة ويحصل على خصم ١٠٪ على مبيعات الشركة . فكم سيدفع خالد لشراء شقة كان سعرها الأصلي ١٠٠ ٠٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

سعر الشقة بعد الزيادة = ١٠٠ ٠٠٠ × (١٠٠٪ + ١٥٪)

= ١٠٠ ٠٠٠ × ١١٥٪

= ١٠٠ ٠٠٠ × $\frac{١١٥}{١٠٠}$ = ١١٥ ٠٠٠ دينار

ما سيدفعه خالد بعد الخصم = ١١٥ ٠٠٠ × (١٠٠٪ − ١٠٪)

= ١١٥ ٠٠٠ × ٩٠٪

= ١١٥ ٠٠٠ × $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = ١٠٣ ٥٠٠ دينار

KuwaitTeacher.Com

٦ انخفض سعر سلعة إلى ٥٠٠ دينار بنسبة خصم ٥٠ ٪ .

أوجد ما يلي :

أ القيمة الأصلية للسلعة .

٥٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − ٥٠٪)

٥٠٠ = القيمة الأصلية × ٥٠٪

$\frac{١٠٠}{٥٠}$ × ٥٠٠ = القيمة الأصلية × $\frac{٥٠}{١٠٠}$ × $\frac{١٠٠}{٥٠}$

القيمة الأصلية = $\frac{٥٠٠ × ١٠٠}{٥٠}$ = ١٠٠٠ دينار

ب ما النسبة المئوية للتزايد التي تعيد سعر السلعة إلى سعرها الأصلي ؟

مقدار التزايد = ١٠٠٠ − ٥٠٠ = ٥٠٠

النسبة المئوية للتزايد = $\frac{\text{مقدار التغير}}{\text{القيمة الأصلية}}$ × ١٠٠٪

= $\frac{٥٠٠}{٥٠٠}$ × ١٠٠٪ = ١٠٠٪

---

٧ تعمل مريم في شركة تجارية تمنحها أجرًا على عدد الساعات التي تعمل بها خلال العام . قرّرت مريم أن تنقّص من عدد ساعات عملها ، فنقص راتبها السنوي بمقدار ٢٠ ٪ . إذا أصبح راتبها ٤٨٠٠٠ دينار ، فأوجِد ما يلي :

أ الراتب السنوي قبل التناقص .

٤٨٠٠٠ = الراتب السنوي × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

٤٨٠٠٠ = الراتب السنوي × ٨٠٪

$\frac{١٠٠}{٨٠}$ × ٤٨٠٠٠ = الراتب السنوي × $\frac{٨٠}{١٠٠}$ × $\frac{١٠٠}{٨٠}$

الراتب السنوي = $\frac{٤٨٠٠٠ × ١٠٠}{٨٠}$ = ٦٠٠٠٠

ب النسبة المئوية للزيادة التي تعيد راتبها السنوي كما كان عليه .

مقدار الزيادة = ٦٠٠٠٠ − ٤٨٠٠٠ = ١٢٠٠٠

النسبة المئوية للتزايد = $\frac{١٢٠٠٠}{٤٨٠٠٠}$ × ١٠٠٪ = ٢٥٪

النسبة المئوية للتزايد = ٢٥٪

KuwaitTeacher.Com

ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

(١) حاسوب سعره الأصلي ٤٠٠ دينار وقد أصبح ثمنه خلال فترة الخصومات ٣٠٠ دينار ، فإنّ النسبة المئوية للخصم هي ٢٥٪ .	(أ)	(ب)
(٢) جهاز سعره ٩٤ دينارًا بيع بسعر ١٠٠ دينار ، فإنّ النسبة المئوية للتزايد ٦٪ .	(أ)	(ب)
(٣) إذا انخفض سعر سلعة بنسبة ٥٪ ثمّ ارتفع بنسبة ٥٪ ، فإنّ سعر السلعة سيعود إلى سعرها الأصلي .	(أ)	(ب)

ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

(٤) زاد سعر سهم من ٥٠ فلسًا إلى ٧٥ فلسًا ، فإنّ النسبة المئوية للتزايد هي :

(أ) ٢٥٪ (ب) ٥٠٪ (ج) ٧٥٪ (د) ١٥٠٪

(٥) بلغ عدد الناجحين في مدرسة ٢٨٠ متعلّمًا ، وكانت نسبة الناجحين ٧٠٪ ، فإنّ عدد متعلّمي المدرسة يساوي :

(أ) ٢٠٠ متعلّم (ب) ٣٥٠ متعلّمًا (ج) ٤٠٠ متعلّم (د) ٥٢٠ متعلّمًا

(٦) إذا كان عدد المشتركين في جريدة محلّية ٥٠٠ مشترك ، فإذا بلغت نسبة الزيادة لعدد المشتركين ٤٠٪ ، فإنّ عدد المشتركين بعد الزيادة يساوي :

(أ) ٢٠٠ مشترك (ب) ٣٠٠ مشترك (ج) ٧٠٠ مشترك (د) ٨٠٠ مشترك

(٧) إذا انخفض سعر سهم ٥٠٪ عن سعره في العام الماضي ، فإنّ النسبة المئوية للزيادة التي تعيده إلى سعره الأصلي هي :

(أ) ٥٠٪ (ب) ١٠٠٪ (ج) ١٥٠٪ (د) ٢٠٠٪

KuwaitTeacher.Com

الوحدة العاشرة

الهندسة والقياس
Geometry & Measurment

تصاميم هندسية
Geometrical Designs

تهتمّ دولة الكويت بمنظرها الجمالي ، وذلك من خلال إنشاء المباني الشاهقة ذات التصاميم الرائعة والجميلة ، ومن أعلى هذه المباني برج الحمراء الذي تمّ افتتاحه في عام ٢٠١١ م ، ويتكوّن برج الحمراء من ٨٠ طابقًا بارتفاع ٤١٣ مترًا . وهو بذلك يُعَدّ أطول ناطحة سحاب في الكويت وفي المرتبة ٢٣ على مستوى العالم (إحصائية ٢٠١٦ م) .

KuwaitTeacher.Com

مشروع الوحدة : (كُنْ مهندسًا معماريًّا)

المهندس المعماري هو المسؤول عن إخراج التصاميم الهندسية إلى أرض الواقع من خلال المباني الجميلة التي نراها حينما نتجوّل في بلدنا الحبيب الكويت .

خطّة العمل :

- إنشاء مجسَّم لمبنى بتصميم هندسي رائع .

خطوات تنفيذ المشروع :

- يتشاور أفراد المجموعة لاختيار مبنى يقومون بتصميمه وإنشاء مجسَّم مصغَّر له .
- يرسم أفراد المجموعة مخطَّطًا تقريبيًّا للمبنى .
- يحدّد أفراد المجموعة المجسَّمات التي تمّ استخدامها في المبنى من المجسَّمات التالية :
  (مكعّب – شبه مكعّب – أسطوانة – مخروط – هرم – منشور ثلاثي قائم) .
- يرسم أفراد المجموعة شبكة كلّ مجسَّم من المجسَّمات المختارة على ورق مقوّى مع الحرص على تسجيل الأبعاد المختارة على الشبكة .
- يكوّن أفراد المجموعة المجسَّمات من الشبكات التي تمّ رسمها ويكملون تصميم المبنى .
- يكمل المتعلّمون الجدول التالي :

اِسم المجسَّم المستخدَم	حجم المجسَّم المستخدَم	المساحة السطحية للمجسَّم

علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الجداول وتتأكّد من صحّة التنفيذ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

KuwaitTeacher.Com

مخطَّط تنظيمي للوحدة العاشرة

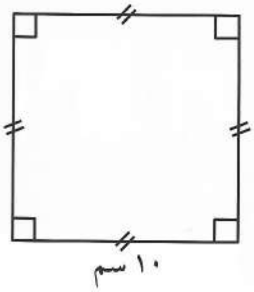
- الهندسة والقياس
  - المساحة السطحية
    - الهرم
    - المخروط
  - الحجم
    - الهرم
    - الكرة
- تطبيقات على المساحات السطحية والحجوم

MidNight
KuwaitTeacher.Com

اِستعِدّ للوحدة العاشرة

١ أوجِد محيط ومساحة كلّ شكل ممّا يلي بحسب المعطيات على الرسم :

أ



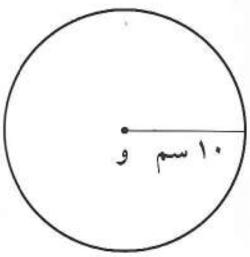
محيط المربع = ٤ × ١٠ = ٤٠ سم

أو المحيط = ١٠ + ١٠ + ١٠ + ١٠ = ٤٠ سم

مساحة المربع = ل × ل

= ١٠ × ١٠ = ١٠٠ سم²

ب



(اعتبر π = ٣,١٤)

محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × ٣,١٤ × ١٠

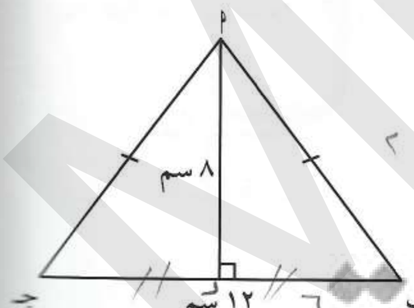
= ٦٢,٨ سم

مساحة الدائرة = ط نق²

= ٣,١٤ × ١٠ × ١٠

= ٣١٤ سم²

جـ



∵ △ متطابق الضلعين، أ د ⊥ ب جـ

∴ د منتصف ب جـ

من نظرية فيثاغورس: أ ب = $\sqrt{(٦)^2 + (٨)^2}$

أ ب = $\sqrt{٣٦ + ٦٤} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$ سم

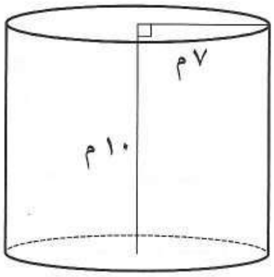
محيط المثلث = ١٠ + ١٠ + ١٢ = ٣٢ سم

مساحة △ = ½ × ق × ع

= ½ × ٨ × ١٢ = ٤٨ سم²

KuwaitTeacher.Com

٣ أوجِد المساحة الجانبية والحجم للأسطوانة الدائرية القائمة (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$) :



المساحة الجانبية = ٢ π نق ع (محيط القاعدة × الارتفاع)

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ١٠

= ٤٤٠ سم²

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق² × ع

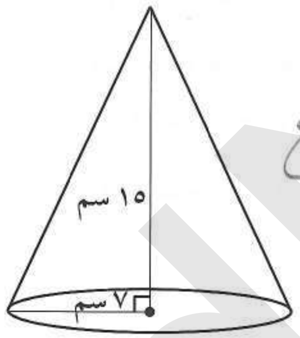
= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧ × ١٠

= ١٥٤٠ سم³

تذكَّرْ أنّ :
(١) المساحة الجانبية للأسطوانة الدائرية القائمة = ٢ π نق ع
(٢) حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = π نق² ع

---

٤ أوجِد حجم المخروط الدائري القائم الذي طول نصف قطر قاعدته ٧ سم ، وارتفاعه ١٥ سم . (بدلالة π)



حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × π نق² × ع

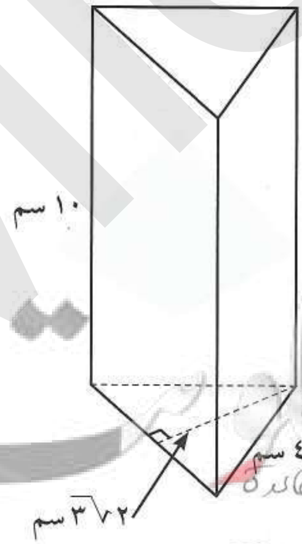
= $\frac{١}{٣}$ × π × ٧ × ٧ × ١٥

= ٢٤٥ π سم³

تذكَّرْ أنّ :
حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع

---

٥ منشور ثلاثي قائم قاعدته على شكل مثلّث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٤ سم وارتفاعه ٢ $\sqrt{٣}$ سم وارتفاع المنشور ١٠ سم . أوجِد حجم المنشور ومساحته السطحية .



حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ($\frac{١}{٢}$ × ق × ع) × ع المنشور

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢ $\sqrt{٣}$ × ١٠ = ٤٠ $\sqrt{٣}$

المساحة السطحية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

= محيط القاعدة × ع + ٢ × مساحة القاعدة

= (٤ + ٤ + ٤) × ١٠ + ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢ $\sqrt{٣}$

= ١٢٠ + ٨ $\sqrt{٣}$

تذكَّرْ أنّ :
(١) حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع
(٢) المساحة السطحية للمنشور القائم = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

Kuwaitteacher.com

١٠-١ المساحة السطحية للهرم والمخروط
Surface Area of Pyramid and Cone

سوف تتعلّم : إيجاد المساحة السطحية للهرم المنتظم والمخروط الدائري القائم .

العبارات والمفردات :

رأس
Vertex

قاعدة
Base

اِرتفاع
Height

اِرتفاع مائل
Slant Height

سطح
Surface

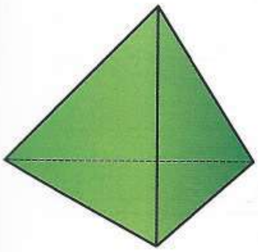
مساحة
Area

مساحة جانبية
Lateral Area

هرم منتظم
Regular Pyramid

مخروط
Cone

نشاط :



اِصنع هرمًا بنفسك :

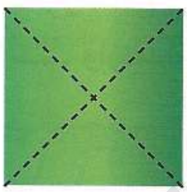
١ أحضِر ورقتين من الورق المقوى مربّعتي الشكل .

٢ أُرسم قطري إحدى الورقتين .

٣ اِقطع أحد المثلّثات التي نتجت من رسم القطرين كما في الشكل ، ثمّ ألصِق الحواف معًا لصنع هرم .

٤ ألصِق الورقة الأخرى المربّعة الشكل على الوجه غير المغطّى من الهرم ، وقُصَّ الزائد .

٥ صِفِ القاعدة والأوجه الجانبية .

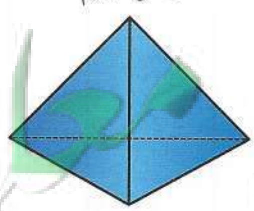

الخطوة (١)


الخطوة (٢)

اللوازم :
- عدد ٢ ورق مقوّى مربّعة الشكل .
- مقصّ .
- مسطرة .

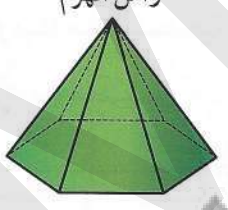
متطابقة الأضلاع

الهرم المنتظم : مجسّم متعدّد الأوجه له قاعدة واحدة منتظمة وأوجهه الجانبية الأخرى مثلّثات متطابقة تلتقي عند أعلى الهرم في نقطة تُسمّى رأس الهرم . يُسمّى الهرم بحسب عدد أضلاع قاعدته .



هرم ثلاثي القاعدة

هرم رباعي القاعدة

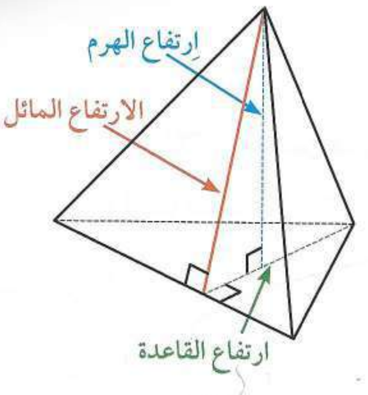


هرم سداسي القاعدة

معلومة مفيدة :
إذا تطابقت الأضلاع وتطابقت الزوايا في مضلّع ما ، فإنّه يُسمّى مضلّعًا منتظمًا.

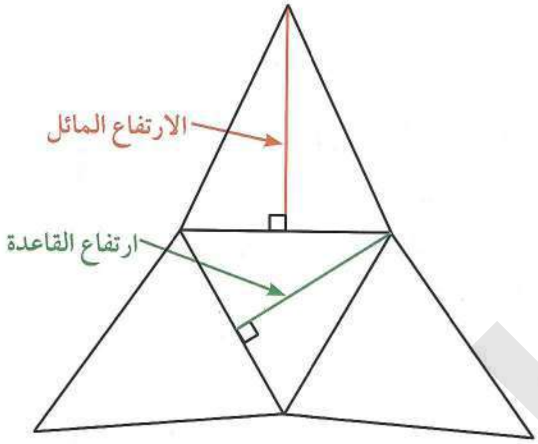
ستقتصر دراستنا على الهرم المنتظم .

KuwaitTeacher.Com



اِرتفاع الهرم : هو البعد العمودي من رأس الهرم إلى القاعدة المقابِلة .

الارتفاع المائل : هو البعد العمودي من رأس الهرم إلى أحد أحرف قاعدة الهرم .



يمكن إيجاد المساحة السطحية للهرم باستخدام شبكته كما في الشكل .

المساحة السطحية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة الجانبية للهرم المنتظم = عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد الجانبية

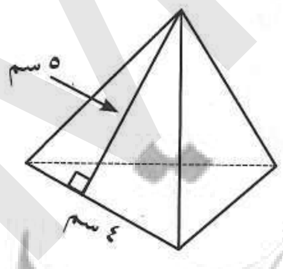
المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة

الجانبية

تدرّب (١) :

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم ومساحة قاعدته $٤\sqrt{٣}$ سم² وارتفاعه المائل ٥ سم ، أوجِد مساحته السطحية .

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة



مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٤

= ١٠

مساحة القاعدة = $٤\sqrt{٣}$

المساحة السطحية للهرم المنتظم = ٣ × ١٠ + $٤\sqrt{٣}$

= (٣٠ + $٤\sqrt{٣}$) سم²

KuwaitTeacher.Com

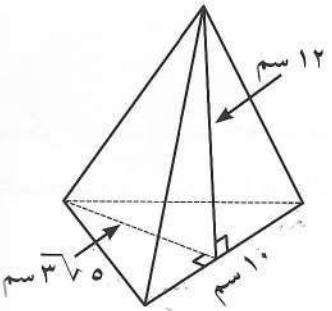
مثال (١) :

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاع قاعدته $٥\sqrt{٣}$ سم ، وارتفاعه المائل ١٢ سم . أوجد مساحته السطحية .

الحل :

الجانبية

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة



مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٢

= ٦٠ سم^{٢}

مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × $٥\sqrt{٣}$

= $٢٥\sqrt{٣}$ سم^{٢}

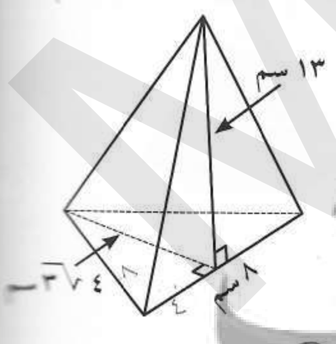
المساحة السطحية للهرم المنتظم = ٣ × ٦٠ + $٢٥\sqrt{٣}$

= (١٨٠ + $٢٥\sqrt{٣}$) سم^{٢}

تدرّب (٢) :

علبة زجاجية على شكل هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٨ سم وارتفاع القاعدة $٤\sqrt{٣}$ سم وارتفاعه المائل ١٣ سم . أوجد المساحة السطحية للعلبة .

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة



مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ١٣ = ٥٢ سم^{٢}

مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

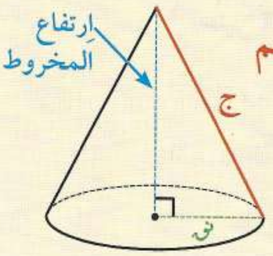
= $\frac{١}{٢}$ × ٨ × $٤\sqrt{٣}$ = $١٦\sqrt{٣}$ سم^{٢}

المساحة السطحية للهرم المنتظم = ٣ × ٥٢ + $١٦\sqrt{٣}$ سم

= (١٥٦ + $١٦\sqrt{٣}$) سم^{٢}

Midnight
KuwaitTeacher.Com

المخروط الدائري القائم : مجسّم قاعدته دائرية الشكل وله رأس واحد ، وارتفاعه هو طول العمود المرسوم من رأسه على قاعدته عند مركزها .



المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × طول الراسم

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ π نق × ج

= $\boxed{\text{π نق × ج}}$

(حيث ج هو طول الراسم)

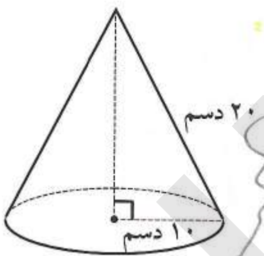
المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= π نق × ج + π نق^{٢}

= π نق (ج + نق)

مثال (٢) :

في الشكل المقابِل مخروط دائري قائم (اعتبر π = ١٤ ,٣) .



أوجد : (أ) مساحته الجانبية .

(ب) مساحته السطحية .

لم يطلب المساحة الجانبية للمخروط إلا في هذا المثال فقط وسؤال تمرن ٦ ص ٢١٣ بطريقة غير مباشرة ولا يوجد سؤال مباشر في تدرب أو تمرن أو المراجعة يطلب المساحة الجانبية

الحلّ :

(أ) المساحة الجانبية = π نق × ج

= ١٤ ,٣ × ١٠ × ٢٠

= ٦٢٨ دسم^{٢}

(ب) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

= المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٦٢٨ + π نق^{٢}

= ٦٢٨ + ١٤ ,٣ × (١٠)^{٢}

= ٦٢٨ + ٣١٤

= ٩٤٢ دسم^{٢}

المساحة الكلية = π نق (ج + نق)

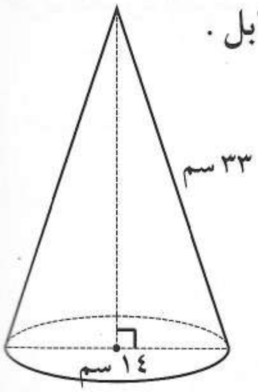
= ٣,١٤ × ١٠ (٢٠ + ١٠)

= ٣,١٤ × ١٠ × ٣٠

= ٩٤٢ دسم^{٢}

صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٣) :



أوجد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل .

(اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$) .

نق = ٧ سم

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

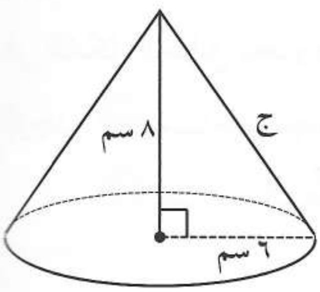
= π نق (ج + نق)

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × (٣٣ + ٧)

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٤٠

= ٨٨٠ سم^2

تدرّب (٤) :



في الشكل المقابل :

مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم ، أوجد ما يلي :

أ طول الراسم (ج) :

∵ في △ القائم ، من نظرية فيثاغورث

(ج)^2 = (٨)^2 + (٦)^2

(ج)^2 = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠

ج = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

ب المساحة السطحية للمخروط : (بدلالة π)

∴ المساحة الكلية للمخروط = π نق (ج + نق)

= π × ٦ × (١٠ + ٦)

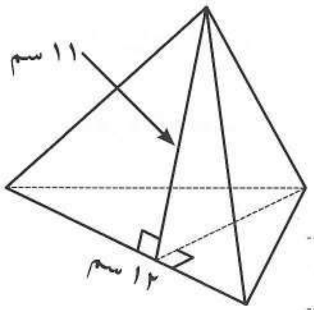
= π × ٦ × ١٦

= ٩٦ π سم^2

KuwaitTeacher.Com

تمــرَّنْ :

١ هرم ثلاثي منتظم مساحة قاعدته $36\sqrt{3}$ سم^2 ، طول ضلع قاعدته ١٢ سم ، وارتفاعه المائل ١١ سم . أوجد مساحته السطحية .



المساحة الكلية = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة

مساحة الوجه الواحد = $\frac{1}{2}$ × ق × ع

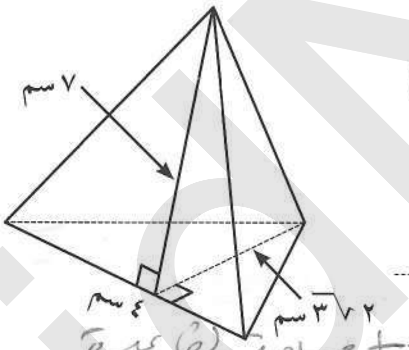
= $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ١١ = ٦٦ سم^2

المساحة الكلية = (٣ × ٦٦) + $36\sqrt{3}$

= ($198 + 36\sqrt{3}$) سم^2

---

٢ هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم وارتفاع قاعدته $2\sqrt{3}$ سم وارتفاعه المائل ٧ سم . أوجد مساحته السطحية .



المساحة الكلية للهرم =

= (عدد الأوجه الجانبية × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة

مساحة الوجه الواحد = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٧ = ١٤ سم^2

مساحة القاعدة = $\frac{1}{2}$ × ق × ع

= $\frac{1}{2}$ × ٤ × $2\sqrt{3}$

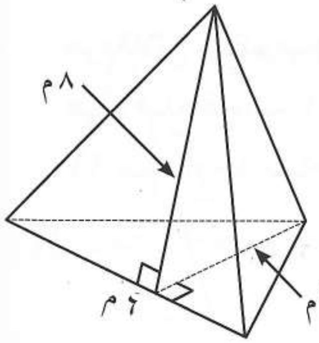
= $4\sqrt{3}$ سم^2

المساحة الكلية للهرم = (٣ × ١٤) + $4\sqrt{3}$

= ($42 + 4\sqrt{3}$) سم^2

KuwaitTeacher.Com

٣ هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٦ م ، وارتفاع قاعدته $٣\sqrt{٣}$ م وارتفاعه المائل ٨ م . أوجد المساحة السطحية للهرم المنتظم .

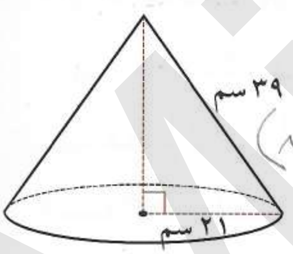


المساحة السطحية للهرم =
(عدد الأوجه الجانبية × مساحة الوجه الواحد)
+ مساحة القاعدة
مساحة الوجه الواحد = $\frac{1}{2}$ × ص × ع
= $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ م²
مساحة القاعدة = $\frac{1}{2}$ × ص × ع
= $\frac{1}{2}$ × ٦ × $٣\sqrt{٣}$ = $٩\sqrt{٣}$ م²
المساحة السطحية للهرم = (٣ × ٢٤) + $٩\sqrt{٣}$
= (٧٢ + $٩\sqrt{٣}$) م²

---

٤ أوجِد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابل .

(اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

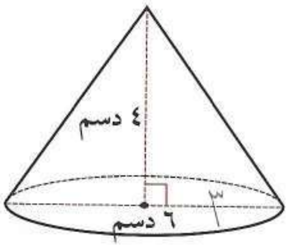


المساحة السطحية للمخروط = π نق (ل + نق)
= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ × (٣٩ + ٢١)
= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ × ٦٠
= ٣٩٦٠ سم²

٦٦ × ٦ = ٣٩٦

Midnight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

٥ في الشكل المقابِل :



مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦ دسم

وارتفاعه ٤ دسم ، أوجد ما يلي : نق = ٣ دسم

أ طول الراسم (ج) :

من نظرية فيثاغورث

(ج)² = (٣)² + (٤)²

(ج)² = ٩ + ١٦ = ٢٥

ج = √٢٥ = ٥ دسم

ب المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم : (بدلالة π)

المساحة الكلية = π نق (ج + نق)

= π × ٣ × (٥ + ٣)

= π × ٣ × ٨

= ٢٤π دسم²

---

٦ أرادت شركة ورقيات تصنيع قبّعات للأطفال على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٧ سم وطول الراسم ٣٠ سم . احسب المساحة السطحية للورق المستخدم لصناعة القبّعة . (اعتبر π = $\frac{22}{7}$)

ج = ٣٠ نق = ٧

(المقصود هنا المساحة الجانبية فقط حيث ان القبعة ليس لها قاعدة)

المساحة الجانبية للقبعة = π نق × ج

= $\frac{22}{7}$ × ٧ × ٣٠

= ٦٦٠ سم²

مساحة الورق المستخدم لصناعة القبعة = ٦٦٠ سم²

Midnight
KuwaitTeacher.Com

١٠-٢ حجم الهرم
Volume of The Pyramid

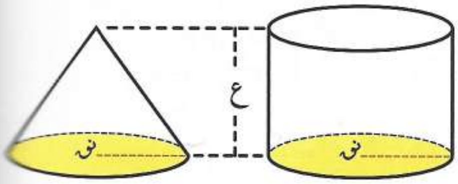
سوف تتعلّم : إيجاد حجم هرم .

العبارات والمفردات :

هرم **Pyramid**

حجم **Volume**

درست فيما سبق العلاقة بين حجم الأسطوانة الدائرية القائمة والمخروط الدائري القائم اللذين لهما نفس القاعدة ونفس الارتفاع .



حجم المخروط الدائري القائم

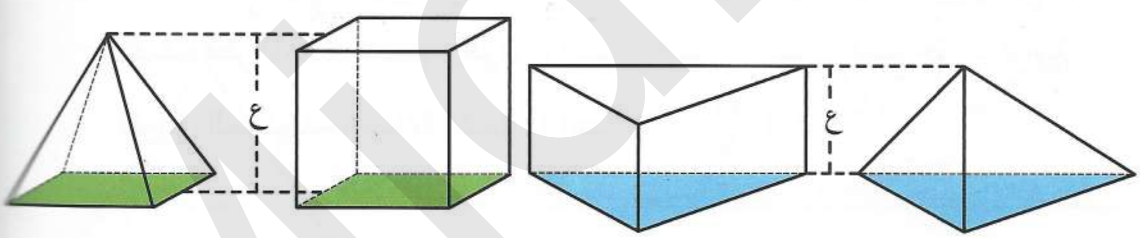
$= \frac{١}{٣} \times$ **حجم الأسطوانة الدائرية القائمة المشترَكة معه في القاعدة والارتفاع**

$= \frac{١}{٣} \times$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٣} \times$ م × ع

$= \frac{١}{٣} \times \pi$ نق^{٢} ع

وبالمثل :



حجم الهرم القائم $= \frac{١}{٣} \times$ حجم المنشور القائم المشترَك معه في القاعدة والارتفاع

حجم الهرم القائم $= \frac{١}{٣} \times$ مساحة القاعدة × الارتفاع

ح $= \frac{١}{٣} \times$ م × ع

معلومات مفيدة :

بُنيت الأهرامات في الجيزة في مصر من قبل الفراعنة لتحمل معنى الخلود ، فهي عبارة عن مقابر أثرية من ممالك مصر القديمة وشُيِّدت بسبب اعتقاد الفراعنة بالحياة الآخرة .

KuwaitTeacher.Com

مثال (١) :

أوجِد حجم الهرم المنتظم الذي قاعدته على شكل مربّع طول ضلعه ٩ سم وارتفاع الهرم ٢٠ سم .

الحلّ :

حجم الهرم المنتظم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

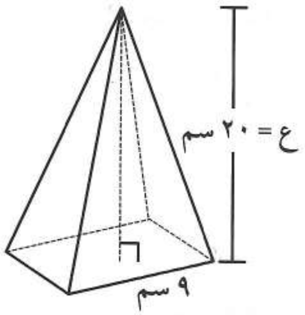
ح = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

ح = $\frac{١}{٣}$ × $(٩)^{٢}$ × ٢٠

ح = $\frac{١}{٣}$ × ٨١ × ٢٠

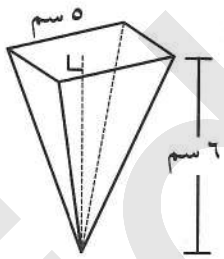
ح = ٥٤٠ $سم^{٣}$

∴ حجم الهرم = ٥٤٠ $سم^{٣}$



تدرّب (١) :

أوجِد حجم الهرم الرباعي القائم الذي قاعدته على شكل مربّع كما في الشكل :



حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

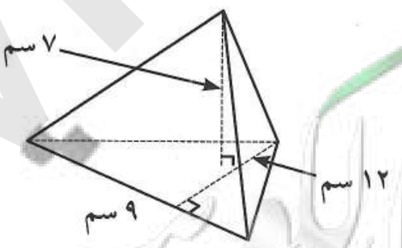
= $\frac{١}{٣}$ × $(٥)^{٢}$ × ٦

= $\frac{١}{٣}$ × ٢٥ × ٦

= ٥٠ $سم^{٣}$

تدرّب (٢) :

أوجِد حجم المجسّم في الشكل المقابِل :



مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ١٢

= ٥٤ $سم^{٢}$

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٣}$ × ٥٤ × ٧

= ١٢٦ $سم^{٣}$

Kuwaitteacher.com

مثال (٢) :

ينتج أحد مصانع الحلوى قطعًا من الكاكاو على شكل هرم منتظم ، حجم القطعة الواحدة منها ١٦ سم^{٣} وارتفاعها ٦ سم ، أوجِد مساحة قاعدة قطعة الكاكاو .

الحل :

حجم الهرم المنتظم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

١٦ = $\frac{١}{٣}$ × م × $\cancel{٦}$

١٦ = ٢ م

م = ٨

∴ مساحة قاعدة قطعة الكاكاو = ٨ سم^{٢}

تدرّب (٣) :

تصنع رنا علبة على شكل هرم منتظم ، إذا كان حجم العلبة ٥٥ سم^{٣} ، مساحة قاعدتها ١٥ سم^{٢} ، فما ارتفاع هذه العلبة ؟

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

٥٥ = $\frac{١}{٣}$ × ١٥ × ع

٥٥ = ٥ × ع

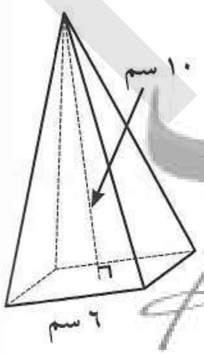
ع = ١١ سم

∴ ارتفاع العلبة = ١١ سم

تمـرَّنْ :

١ **أوجد حجم المجسّم في كلّ ممّا يلي :**

أ هرم منتظم قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها ٦ سم وارتفاع الهرم ١٠ سم .



حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

= $\frac{١}{٣}$ × (٦)^{٢} × ١٠

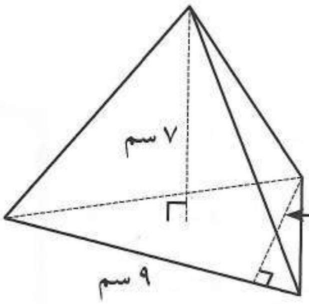
= $\frac{١}{٣}$ × ٣٦ × ١٠

= ١٢ × ١٠

= ١٢٠ سم^{٣}

KuwaitTeacher.Com

ب هرم قاعدته مثلّثة الشكل طول قاعدتها ٩ سم وارتفاعها ٤ سم وارتفاع الهرم ٧ سم .



مساحة القاعدة = $\frac{1}{2}$ × ق × ع

= $\frac{1}{2}$ × ٩ × ٤ = ١٨ سم

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3}$ × ١٨ × ٧

= ٦ × ٧

= ٤٢ سم³

---

٢ هرم ثلاثي حجمه ١٥٠ سم³ ، إذا كانت مساحة قاعدة الهرم ٢٥ سم² ، فما ارتفاع هذا الهرم ؟

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

١٥٠ = $\frac{1}{3}$ × ٢٥ × ع

$\frac{3}{25}$ × ١٥٠ = $\frac{25}{3}$ × ع × $\frac{3}{25}$

ع = ١٨

∴ ارتفاع الهرم = ١٨

---

٣ صنع وليد نموذجًا لهرم رباعي منتظم حجمه ٤٠٠ سم³ ، إذا كان ارتفاع الهرم ١٢ سم ، فما طول ضلع قاعدة الهرم ؟

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

٤٠٠ = $\frac{1}{3}$ × ص × ١٢

٤٠٠ = ٤ ص

$\frac{400}{4}$ = $\frac{4ص}{4}$

ص = ١٠٠

∴ مساحة القاعدة = ١٠٠ سم²

∴ طول ضلع القاعدة = $\sqrt{100}$ = ١٠ سم

KuwaitTeacher.Com

١٠-٣ حجم الكرة

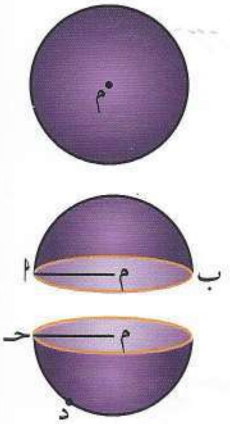
Volume of The Sphere

العبارات والمفردات :

حجم
Volume

كرة
Sphere

سوف تتعلّم : حساب حجم كرة .

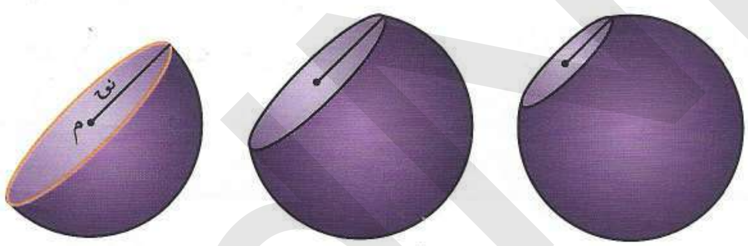


- في الشكل المقابِل كرة مركزها م .
- كلّ نقطة على سطح الكرة تبعد بمقدار ثابت (نق) عن مركز الكرة م .

أي أنّ :

م أ = م ب = م جـ = م د = طول نصف قطر الكرة = نق .

- أيّ مقطع في الكرة هو دائرة .
- الدائرة التي مركزها هو مركز الكرة وطول نصف قطرها نق تُسمّى **دائرة عظمى** للكرة .



اللوازم :

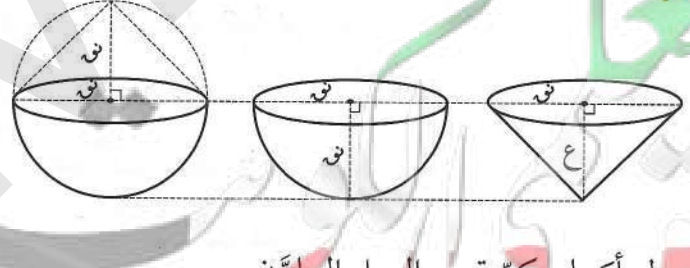
- مخروط قائم وكرة طول نصف قطرها يساوي ارتفاع المخروط ويساوي طول نصف قطر قاعدة المخروط .
- رمل ملوَّن .

نشاط :

لديك كرة ومخروط وكانت قاعدة المخروط دائرة عظمى في الكرة ، وارتفاع المخروط يساوي طول نصف قطر الكرة .

(قطعت الكرة عند دائرتها العظمى) .

لإيجاد حجم الكرة :



١ اِملأ المخروط بأكمله بكمّية من الرمل الملوَّن .

٢ أفرِغ محتوى المخروط في نصف الكرة الأوّل .

KuwaitTeacher.Com

٣ كرِّر ما سبق حتّى يمتلئ نصفي الكرة بالرمل الملوَّن .

٤ كم مرّة ملأت المخروط لتعبئة الكرة بأكملها بالرمل الملوَّن ؟ ....

٥ ما العلاقة بين حجم الكرة وحجم المخروط الذي قاعدته دائرة عظمى في الكرة ، وارتفاع المخروط يساوي طول نصف قطر الكرة ؟

حجم المخروط = $\frac{١}{٤}$ حجم الكرة

حجم الكرة = ..٤.. أمثال حجم المخروط

حجم الكرة = ..٤.. × $\boxed{\frac{١}{٣} \times \pi\ \text{نق}^{٢}\ \text{ع}}$ ← حجم المخروط

$\because$ ع = ..نق..

$\therefore$ حجم الكرة = ..٤.. × $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} × ..نق..

$\therefore$ حجم الكرة = ..$\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^{٣}..

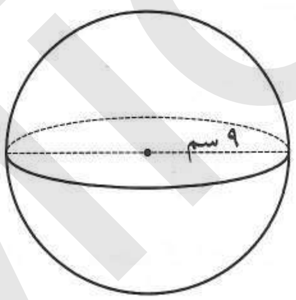
ممّا سبق نستنتج أنّ :

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

مثال (١) :

أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم . (بدلالة π)

الحلّ :



حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times (٩)^{٣}$

= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times ٩ \times ٩ \times ٩$

= $١٢ \times \pi \times ٨١$

= ٩٧٢π سم^{٣}

Midlight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

تدرّب (١) :

أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم . (بدلالة π)

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

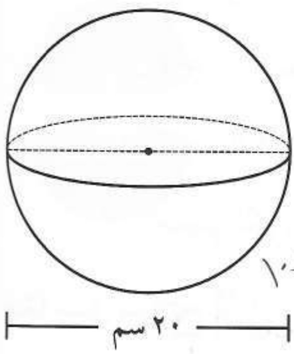
= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times (٣)^{٣}$

= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times ٣ \times ٣ \times ٣$

= ٣٦π سم^{٣}

مثال (٢) :

من خلال الشكل المقابِل :



أوجِد حجم الكرة المرسومة . (اعتبر π = ٣,١٤)

الحل :

نق = ١٠ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times ٣,١٤ \times (١٠)^{٣}$

= $\frac{٤}{٣} \times ٣,١٤ \times ١٠٠٠$

= $\frac{٤}{٣} \times ٣١٤٠$

= $\frac{١٢٥٦٠}{٣}$

≈ ٤١٨٦,٧ سم^{٣}

تدرّب (٢) :

نق = $\frac{١}{٢}$ م

أوجد حجم كرة طول قطرها ١ م . (اعتبر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

نق = $\frac{١}{٢}$ م

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times (\frac{١}{٢})^{٣}$

= $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

= $\frac{١١}{٢١}$ م^{٣}

Midnight
KuwaitTeacher.Com

تدرّب (٣) :

أوجِد حجم قبّة مسجد إذا عُلِم أنّها على شكل نصف كرة طول قطرها ١٢ م .
(بدلالة π)

نق = ٦ م

حجم القبّة = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤}{٣}$ × π × (٦)^{٣}

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤}{٣}$ × π × ٦ × ٦ × ٦

= ١٤٤ π م^{٣}

=

مثال (٣) :

شركة عطور تصمّم زجاجة عطر على شكل كرة حجمها ٣٦ π سم^{٣} ،
أوجِد طول قطر الزجاجة .

الحلّ :

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ × π نق^{٣}

∴ $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = ٣٦ π

$\frac{٣}{٤\pi}$ × $\frac{٤\pi}{٣}$ نق^{٣} = $\frac{٣}{٤\pi}$ × ٣٦ π

نق^{٣} = ٢٧

∴ نق = $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣ سم

∴ طول قطر زجاجة العطر = ٦ سم

تدرّب (٤) :

كرة حجمها $\frac{٣٢}{٣}$ π م^{٣} . أوجِد طول نصف قطرها.

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

$\frac{٣}{٤\pi}$ × $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = $\frac{٣٢}{٣}$ π × $\frac{٣}{٤\pi}$

نق^{٣} = ٨

نق = $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢ م

Midnight
kuwaitteacher.com

تمـــرَّنْ :

١ أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٦ سم . (بدلالة π)

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣}$ × ط × $(٦)^{٣}$

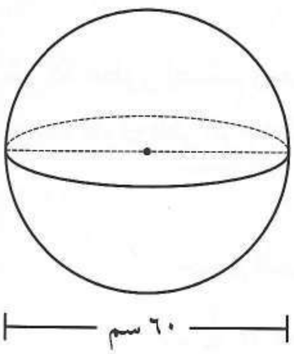
= $\frac{٤}{\cancel{٣}}$ × ط × $\cancel{٦}$ × ٦ × ٦

= ٢٨٨ ط سم^{٣}

٧٢ × ٤ = ٢٨٨

---

٢ من خلال الشكل المقابِل :



أوجِد حجم الكرة المرسومة . (بدلالة π)

نق = ٣٠ سم

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣}$ × ط × $(٣٠)^{٣}$

= $\frac{٤}{\cancel{٣}}$ × ط × $\cancel{٣٠}$ × ٣٠ × ٣٠

= ٣٦٠٠٠ ط سم^{٣}

Midnight
معلمي الكويت صفوة
KuwaitTeacher.Com

٣ خزّان على شكل نصف كرة ، إذا كان طول قطر الخزّان ٢ م ، نصف ق = ١ م
فاحسب حجمه . (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

حجم الخزان = $\frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times (١)^{٣}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ١ \times ١ \times ١$

$= \frac{٤٤}{٢١}$

$= \frac{٢}{٢١}$ ٢ م^{٣}

٤ إذا كان حجم كرة $\frac{٢٥٦}{٣} \pi$ م^{٣} ، فاحسب طول نصف قطرها .

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \pi$ نق^{٣}

$\frac{٣}{\pi ٤} \times \pi \frac{٢٥٦}{٣} = \frac{٤}{٣} \pi$ نق^{٣} $\times \frac{٣}{\pi ٤}$

نق^{٣} = ٦٤

∴ نق = $\sqrt[٣]{٦٤}$ = ٤ م

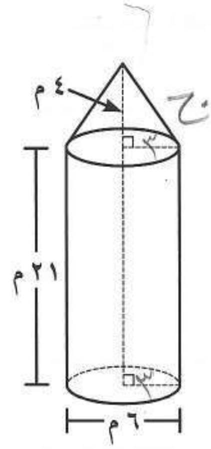
∴ طول نصف القطر = ٤ م

$٢٥٦ \div ٤ = ٦٤$

Midlight
KuwaitTeacher.Com

١٠-٤ تطبيقات على المساحات السطحية والحجوم
Applications on Surface Areas and Volumes

تدرّب (١) :



صمّم مهندس معماري مئذنة مسجد على شكل أسطوانة دائرية قائمة يعلوها مخروط دائري قائم كما في الشكل ، طول قطر قاعدة الأسطوانة الدائرية القائمة ٦ م وارتفاعها ٢١ م وارتفاع المخروط الدائري القائم ٤ م .

نق = ٣

أوجد مساحة سطح المئذنة الظاهر . (بدلالة π)

طول نصف القطر = ٣ م

طول الراسم = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦}$

= $\sqrt{٢٥} = ٥$ م

المساحة السطحية للمئذنة = المساحة الجانبية للمخروط + المساحة الجانبية للأسطوانة

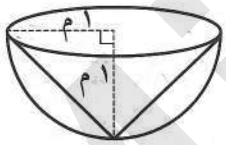
= π نق ل + ٢π نق ع

= π × ٣ × ٥ + ٢ × π × ٣ × ٢١

= ١٥π + ١٢٦π

= ١٤١π م^٢

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابل :

نصف كرة طول نصف قطرها ١ م ، حفر بداخلها مخروط دائري قائم قاعدته دائرة عظمى لنصف الكرة وارتفاع المخروط يساوي طول نصف قطر الكرة .

أُحسب حجم الجزء المتبقّي من المجسم . (بدلالة π)

حجم نصف الكرة = $\frac{١}{٢} × \frac{٤}{٣} \pi$ نق^٣

= $\frac{١}{٢} × \frac{٤}{٣} × \pi × (١)^٣ = \frac{٢}{٣}\pi$ م^٣

حجم المخروط = $\frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣} × \pi × (١)^٢ × ١ = \frac{١}{٣}\pi$ م^٣

حجم الجزء المتبقّي = $\frac{٢}{٣}\pi - \frac{١}{٣}\pi = \frac{١}{٣}\pi$ م^٣

ماذا تلاحظ؟ حجم المخروط = $\frac{١}{٢}$ حجم نصف الكرة

حجم المخروط = $\frac{١}{٤}$ حجم الكرة

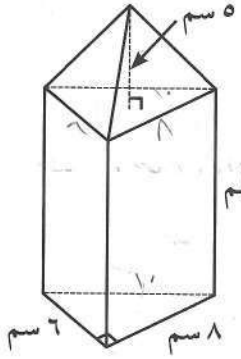
Midnight
Kuwaitteacher.Com

فكِّر وناقِش

ما أوجه الشبه بين حجم الهرم وحجم المخروط ؟ حجم كل منهما = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

تمـرَّنْ :

1 في الشكل المقابِل : منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ١٠ سم وقاعدته على شكل مثلّث قائم طول ضلعي القائمة فيه ٨ سم ، ٦ سم ، يعلوه هرم ثلاثي قائم له نفس القاعدة وارتفاعه ٥ سم ، أوجد حجم هذا المجسَّم .



حجم المجسم = حجم الهرم + حجم المنشور

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × ع

= $\frac{1}{3}$ × $\frac{1}{2}$ × ٨ × ٦ × ٥ = ٤٠ سم³

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ × ٨ × ٦ × ١٠ = ٢٤٠ سم³

حجم المجسم = ٤٠ + ٢٤٠ = ٢٨٠ سم³

2 * أرادت ياسمين تغليف علبة على شكل منشور ثلاثي قائم يعلوه هرم ثلاثي منتظم مساحة قاعدته $9\sqrt{3}$ سم² كما في الشكل . أوجِد المساحة السطحية للورق المستخدم لتغليف العلبة.

المساحة الكلية للمجسم = المساحة الجانبية للهرم + المساحة الجانبية للمنشور + مساحة قاعدة المنشور (قاعدة واحدة فقط السفلية)

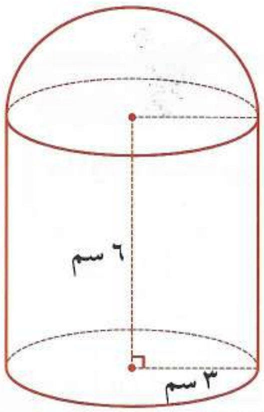
المساحة الجانبية للهرم = ٣ × $\frac{1}{2}$ × طول ضلع × ع = ٣ × $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٤ = ٣٦ سم²

المساحة الجانبية للمنشور = محيط القاعدة × الارتفاع = (٦ + ٦ + ٦) × ١٠ = ١٨ × ١٠ = ١٨٠ سم²

مساحة قاعدة المنشور = $9\sqrt{3}$ سم²

المساحة الكلية = ٣٦ + ١٨٠ + $9\sqrt{3}$ = ٢١٦ + $9\sqrt{3}$ سم²

٣ في الشكل المقابِل : أسطوانة يعلوها نصف كرة .
أوجد حجم المجسَّم . (بدلالة π)



حجم المجسم = حجم الاسطوانة + حجم نصف الكرة

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع
$= \pi$ نق^2 ع
$= \pi \times ٣ \times ٣ \times ٦ = ٥٤\pi$ سم^3

حجم نصف الكرة $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi$ نق^3
$= \cancel{\frac{1}{2}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \pi \times \cancel{٣} \times ٣ \times ٣$
$= ١٨\pi$ سم^3

حجم المجسم $= ٥٤\pi + ١٨\pi$
$= ٧٢\pi$ سم^3

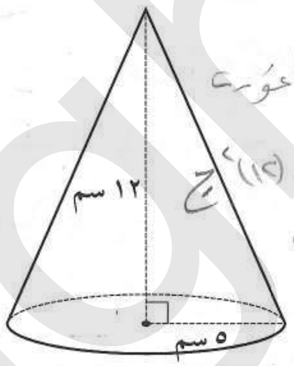
Midnight
صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

١٠-٥ مراجعة الوحدة العاشرة
Revision Unit Ten

أوّلًا : التمارين المقالية

١ أوجِد كلًّا ممّا يلي (بدلالة π) :

أ المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم .



من نظرية فيثاغورث

$ل^2 = (٥)^2 + (١٢)^2$

$ل^2 = ٢٥ + ١٤٤$

$ل^2 = ١٦٩$

$ل = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

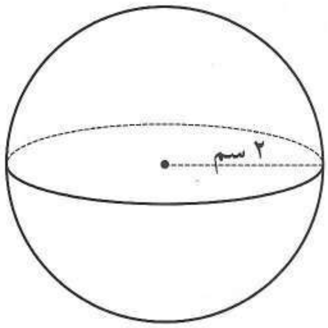
المساحة السطحية للمخروط $= \pi نق (ل + نق)$

$= \pi \times ٥ (١٣ + ٥)$

$= ٥\pi \times ١٨$

$= ٩٠\pi$ سم^2

ب حجم الكرة .



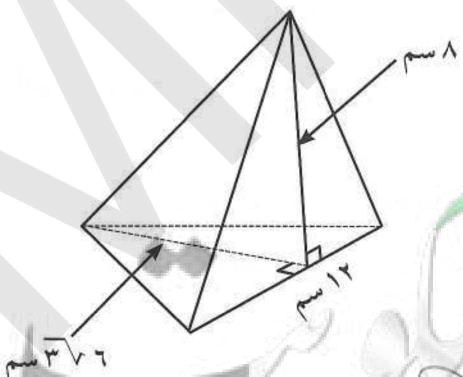
حجم الكرة $= \frac{٤}{٣} \pi نق^3$

$= \frac{٤}{٣} \times \pi \times (٢)^3$

$= \frac{٤}{٣} \times \pi \times ٢ \times ٢ \times ٢$

$= \frac{٣٢}{٣} \pi$ سم^3

٢ في الشكل المقابل : أوجد المساحة السطحية للهرم الثلاثي المنتظم .



مساحة سطح الهرم =

عدد الأوجه × م الوجه الجانبي + م القاعدة

م الوجه الجانبي $= \frac{١}{٢} \times$ ق × ع

$= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٨ = ٤٨$ سم^2

م القاعدة $= \frac{١}{٢} \times$ ق × ع

$= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٦\sqrt{٣} = ٣٦\sqrt{٣}$ سم^2

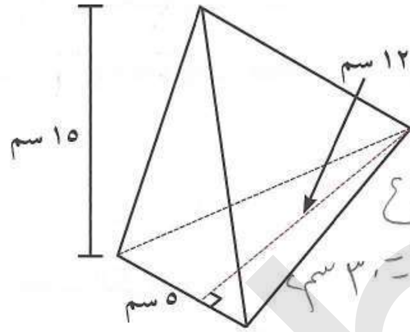
م ح سطح الهرم $= ٣ \times ٤٨ + ٣٦\sqrt{٣}$ سم^2

$= ١٤٤ + ٣٦\sqrt{٣}$ سم^2

KuwaitTeacher.Com

٣ أوجِد حجم كلّ مجسَّم ممّا يلي :

أ



م القاعدة = $\frac{1}{2}$ × ق × ع

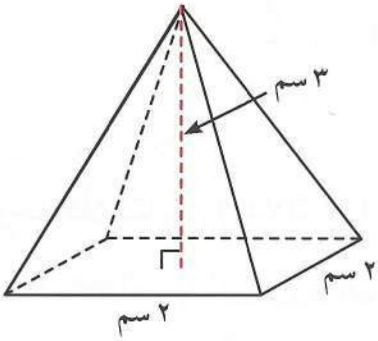
= $\frac{1}{2}$ × ٥ × ١٢ = ٣٠ سم²

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3}$ × ٣٠ × ١٥

= ١٥٠ سم³

ب



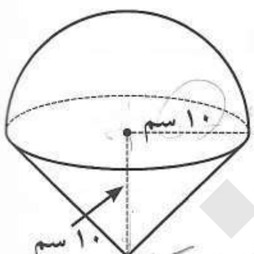
حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3}$ × (٢)² × ٣

= $\frac{1}{3}$ × ٤ × ٣

= ٤ سم³

٤ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٠ سم ، يعلوه نصف كرة (كما في الشكل) . أحسب حجم المجسَّم (بدلالة π) :



حجم المجسم = حجم نصف الكرة + حجم المخروط

حجم نصف الكرة = $\frac{1}{2}$ × $\frac{4}{3}$ × π × نق³

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{4}{3}$ × π × ١٠ × ١٠ × ١٠

= $\frac{2000}{3}$ π سم³

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق² ع (أو) حجم المخروط = $\frac{1}{2}$ حجم نصف الكرة

= $\frac{1}{3}$ × π × ١٠ × ١٠ × ١٠ = $\frac{1000}{3}$ π سم³

حجم المجسم = $\frac{2000}{3}$ π + $\frac{1000}{3}$ π = $\frac{3000}{3}$ π = ١٠٠٠ π سم³

٥ خزّان مياه على شكل كرة ، حجمه ٣٦٠٠٠ π دسم³ . أوجد طول نصف قطر الخزّان .

حجم الكرة (الخزان) = $\frac{4}{3}$ π نق³

$\frac{4}{3}$ π نق³ = ٣٦٠٠٠ π × $\frac{3}{4\pi}$

نق³ = ٩٠٠٠ × ٣

نق³ = ٢٧٠٠٠

نق = $\sqrt[3]{27000}$ = ٣٠ دسم

Midnight
KuwaitTeacher.Com

ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ حجم الكرة التي طول نصف قطرها ١ سم يساوي $\frac{٤}{٣}\pi$ سم^٣ .	(أ)	(ب)
٢ منشور ثلاثي قائم حجمه ٣٠ سم^٣ ، فإنّ حجم الهرم الثلاثي القائم المشترَك معه في القاعدة والارتفاع يساوي ٩٠ سم^٣ .	(أ)	(ب)
٣ إذا كان ارتفاع هرم ١ م ، وقاعدته على شكل مربّع طول ضلعه ٣ م ، فإنّ حجم المنشور القائم الذي له نفس الارتفاع والقاعدة هو ٩ م^٣ .	(أ)	(ب)
٤ هرم قائم حجمه ١٠٠٠ سم^٣ ومساحة قاعدته ٥٠٠ سم^٢ ، فإنّ ارتفاعه ٢٠ سم .	(أ)	(ب)

ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

٥ هرم قائم مساحة قاعدته ٦ سم^٢ وارتفاعه ١٠ سم ، فإنّ حجمه يساوي :

(أ) ٢٠ سم^٣ (ب) ٦٠ سم^٣ (جـ) ١٨٠ سم^٣ (د) ٦٠٠٠ سم^٣

٦ هرم ثلاثي منتظم مساحة قاعدته ٥٠ وحدة مربّعة ومساحة أحد أوجهه الجانبية تساوي ٣٠ وحدة مربّعة ، فإنّ مساحته السطحية بالوحدة المربّعة هي :

(أ) ٨٠ (ب) ١٤٠ (جـ) ١٨٠ (د) ١٥٠٠

٧ مخروط دائري قائم قاعدته دائرة عظمى في كرة وارتفاعه يساوي طول نصف قطر الكرة ، إذا كان حجمه ٣π وحدة مكعّبة ، فإنّ حجم الكرة بالوحدة المكعّبة هو :

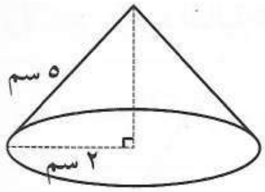
(أ) π (ب) ٤π (جـ) ٩π (د) ١٢π

٨ حجم كرة طول نصف قطرها ٥ سم يساوي :

(أ) $\frac{٤}{٣} \times ١٢٥$ سم^٣ (ب) $\frac{٣}{٤} \times ١٢٥\pi$ سم^٣ (جـ) $\pi \times ١٢٥$ سم^٣ (د) $\frac{٤}{٣}\pi \times ١٢٥$ سم^٣

KuwaitTeacher.Com

٩ من خلال الشكل المرسوم : المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم تساوي :



π نق (ل + نق)
π × ٢ × (٥ + ٢)
٢π × ٧ = ١٤π

(أ) ١٠ π سم^{٢} (ب) ١٤ π سم^{٢}

(جـ) ٢٠ π سم^{٢} (د) ٢٥ π سم^{٢}

---

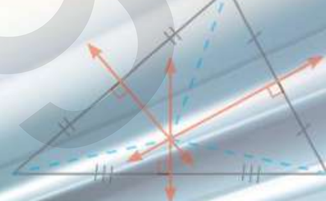
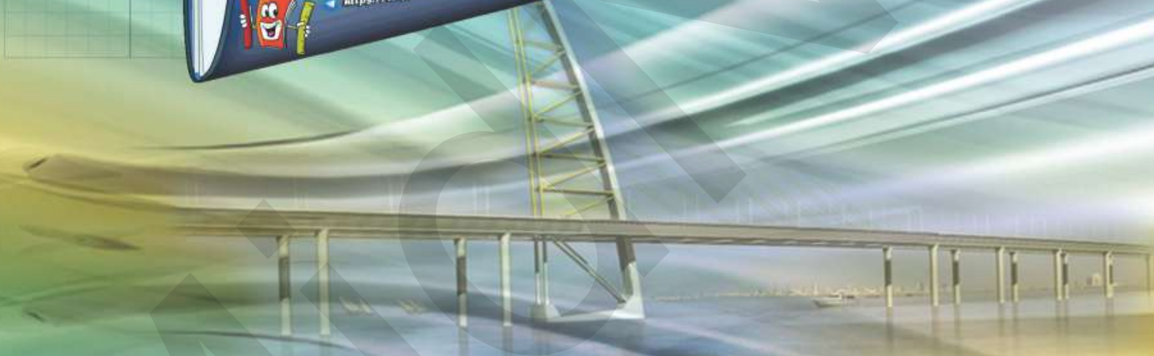
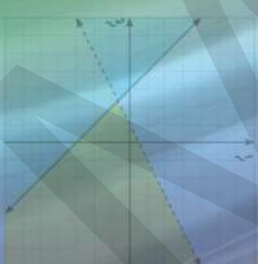
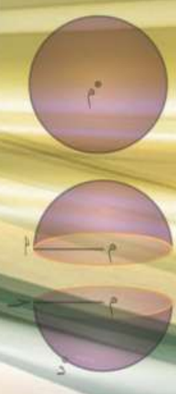
١٠ كرتان طول نصف قطر الأولى يساوي ٧ سم وطول نصف قطر الثانية يساوي ١٤ سم ، فإن النسبة بين حجم الكرة الأولى إلى حجم الكرة الثانية هي :

$\left(\frac{٧}{١٤}\right)^{٣} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

(أ) ١ : ٨ (ب) ١ : ٢ (جـ) ١ : ٦ (د) ٨ : ١

$\frac{\text{حجم الكرة الأولى}}{\text{حجم الكرة الثانية}} = \frac{\frac{٤}{٣} \times \pi \times ٧ \times ٧ \times ٧}{\frac{٤}{٣} \times \pi \times ١٤ \times ١٤ \times ١٤} = \frac{١}{٨}$

KuwaitTeacher.Com

صفوة معلمي الكويت

ISBN: 978-614-406-911-0

9 786144 069110

KuwaitTeacher.Com