الرياضيات

الكورس الثاني

10

UULA.COM 2021-2022

UULA

الـريـاضـيـات

الـكـورس الـثـاني

10

شلون تتفوق بدراستك

طريقة علا المتكاملة للدراسة تشمل الاستفادة من
المذكرة و الفيديوهات و الاختبارات

علا تخلي المذكرة أقوى

تبي أعلى الدرجات؟ لا تعتمد
على المذكرة بروحها – ادرس
صح من الفيديوهات و الاختبارات

فيديوهات تشرح لك

تابع الفيديوهات و انت تدرس
المذكرة عشان تضبط الدرس

اختبارات ذكية تدربك

حل الاختبارات الالكترونية أول
بأول عشان ترفع مستواك

اشترك بالمادة

احرص على تفعيل اشتراكك عشان تستفيد كثر ما تقدر

UULA

اكتشف عالم التفوق مع باقات علا

ادرس جميع مواد مرحلتك باشتراك واحد بسعر خيالي

UULA

المـــــــنـــــــقـــــــذ

أقوى مذكرة صارت الحين أقوى و أقوى مع خاصية **المنقذ** للمساعدة الفورية

شنو المنقذ ؟
امسح الباركود بكاميرا تلفونك
وتعرف على طريقة استخدام المنقذ

شنو فايدة هالخاصية ؟
أول ما تحتاج مساعدة بالمادة , المنقذ بينقذك .

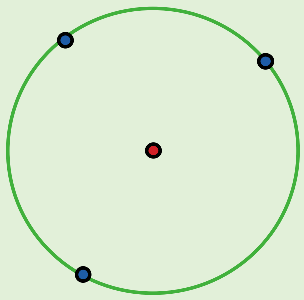
امسح الباركود بكاميرا التلفون أو اضغط عليه إذا كنت فاتح المذكرة من جهازك و يطلع لك فيديو الشرح.

قائمة المحتوى

الدائرة – مماس الدائرة

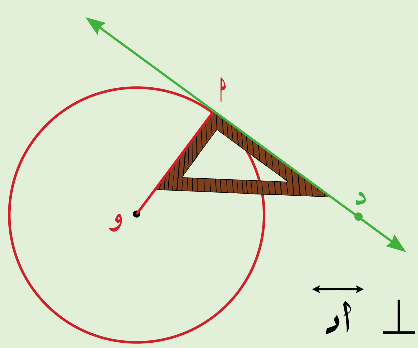
نظرية (١):

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة وحيدة

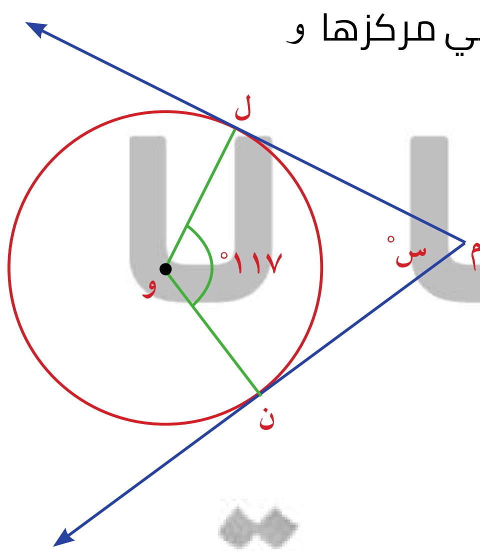


نظرية (٢):

المماس عمودي على نصف قطر التماس إذا كان مستقيم مماس لدائرة فانه يكون متعامدا مع نصف القطر المار بنقطة التماس أي أن $\overline{او} \perp \overleftrightarrow{اد}$



س في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{مل}$ ، $\overleftrightarrow{من}$ مماسان للدائرة التي مركزها و
أوجد قياس $ن\hat{م}ل$



∵ $\overleftrightarrow{مل}$ مماس، $\overline{لو}$ نصف قطر التماس

∴ ق$(\hat{ل})$ = ٩٠° (نظرية)

∵ $\overleftrightarrow{من}$ مماس، $\overline{نو}$ نصف قطر التماس

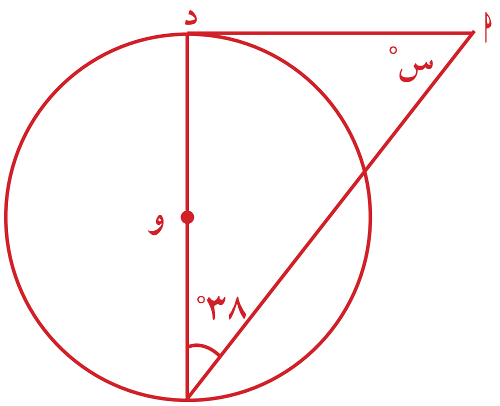
∴ ق$(\hat{ن})$ = ٩٠° (نظرية)

س = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١١٧) = ٦٣°

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°

∴ ق$(ل\hat{م}ن)$ = ٦٣°

س في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس للدائرة التي مركزها و أوجد قيمة س



الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس ، $\overline{\text{ود}}$ نصف قطر التماس

∴ ق $(\hat{\text{د}})$ = ٩٠° نظريـــــة

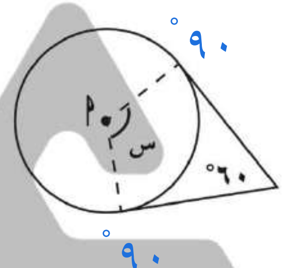
س = ١٨٠° − (٩٠ + ٣٨) = ٥٢°

مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

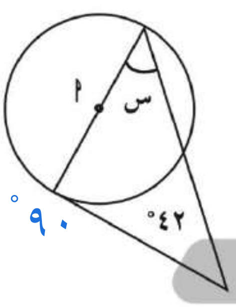
∴ ق $(\hat{\text{أ}})$ = ٥٢°

س في التمرينين (١-٢)، القطع المستقيمة تمس الدوائر، أ مركز كل دائرة.
أوجد قيمة س

(١)



(٢)

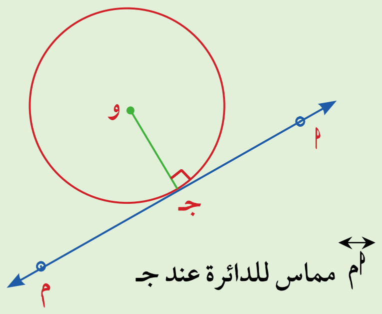


س = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٦٠)
= ١٢٠°

س = ١٨٠° − (٩٠ + ٤٢)
= ٤٨°

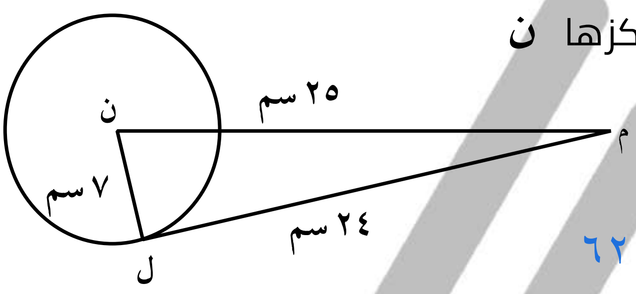
نظرية (٣) :

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي الى الدائرة يكون مماسا لهذه الدائرة عند هذه النقطة



تمرن

س أثبت أن $\overleftrightarrow{لم}$ مماس للدائرة التي مركزها **ن**



الحل :

$(م ن)^٢ = ٢٥^٢ = ٦٢٥$

$(م ل)^٢ + (ل ن)^٢ = ٢٤^٢ + ٧^٢ = ٦٢٥$

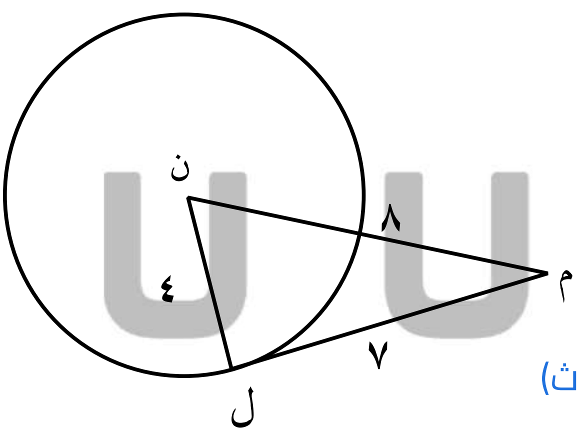
$\therefore \triangle$ م ل ن مثلث قائم في $\hat{ل}$ عكس فيثاغورث

$\therefore \overline{مل} \perp \overline{لن}$

$\therefore \overline{مل}$ مماس للدائرة (نظرية)

س في الشكل المقابل :

هل $\overleftrightarrow{لم}$ مماس للدائرة؟ فسر اجابتك



$(م ن)^٢ = ٨^٢ = ٦٤$

$(م ل)^٢ + (ل ن)^٢ = ٧^٢ + ٤^٢ = ٦٥$

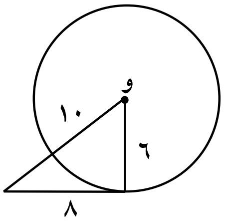
$\therefore \triangle$ م ل ن مثلث غير قائم (عكس فيثاغورث)

$ق(\hat{ل}) \neq ٩٠^\circ$

$\therefore \overline{مل}$ ليس مماس للدائرة (نظرية)

س في التمرينين, حدد ما إذا كان المستقيم مماسا للدائرة التي مركزها و.

(٣)

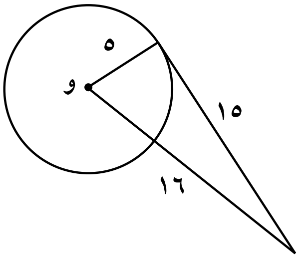


(١٠)^٢ = ١٠٠

٦^٢ + ٨^٢ = ١٠٠

مماس

(٤)



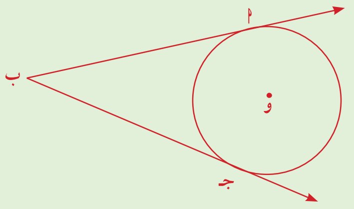
١٦^٢ = ٢٥٦

٥^٢ + ١٥^٢ = ٢٥٠

ليس مماس

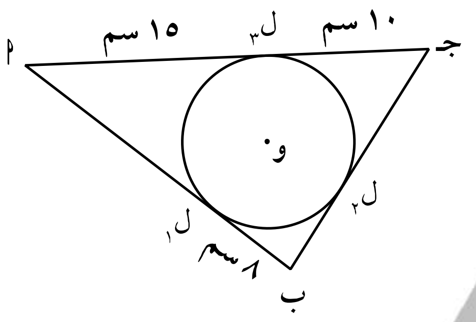
نظرية (٤):

القطعتان المماستان لدائرة و المرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان $\overline{ب ا} \cong \overline{جـ ب}$



تمرن

س في الشكل المجاور أوجد محيط المثلث ا ب جـ



∵ $\overleftrightarrow{ب ا}$ مماس للدائرة في $ل_{١}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة في $ل_{٢}$ ، $\overleftrightarrow{ا جـ}$ مماس للدائرة في $ل_{٣}$

∴ ا$ل_{١}$ = ا$ل_{٣}$ = ١٥ سم نظرية

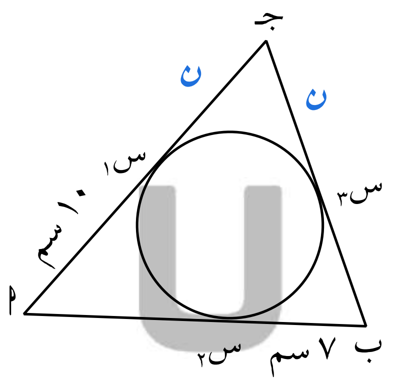
ب$ل_{١}$ = ب$ل_{٢}$ = ٨ سم نظرية

جـ$ل_{٢}$ = جـ$ل_{٣}$ = ١٠ سم نظرية

محيط المثلث ا ب جـ = ا ب + ب جـ + ا جـ

= ١٥ + ١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ = ٦٦ سم

س في الشكل المجاور إذا كان محيط المثلث ا ب جـ يساوي (٥٠) سم فاحسب طول $\overline{جـ ب}$



∵ $\overleftrightarrow{ب ا}$ مماس للدائرة في $س_{٢}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة في $س_{٣}$ ، $\overleftrightarrow{ا جـ}$ مماس للدائرة في $س_{١}$

∴ ا$س_{١}$ = ا$س_{٢}$ = ١٠ سم نظرية

ب$س_{٢}$ = ب$س_{٣}$ = ٧ سم نظرية

جـ$س_{١}$ = جـ$س_{٣}$ = ن نظرية

محيط المثلث ا ب جـ = ٥٠ سم

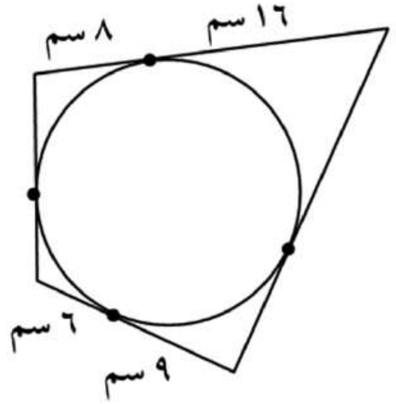
ن + ن + ١٠ + ١٠ + ٧ + ٧ = ٥٠

٢ن + ٣٤ = ٥٠

٢ن = ٥٠ − ٣٤ = ١٦ ← ن = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨

∴ طول $\overline{ب جـ}$ = ٧ + ٨ = ١٥ سم

س في التمرين (٧)، يحيط المضلع بدائرة. أوجد محيط المضلع.



محيط المضلع = ١٦ + ١٦ + ٩ + ٩ + ٦ + ٦ + ٨ + ٨

= ٧٨ سم

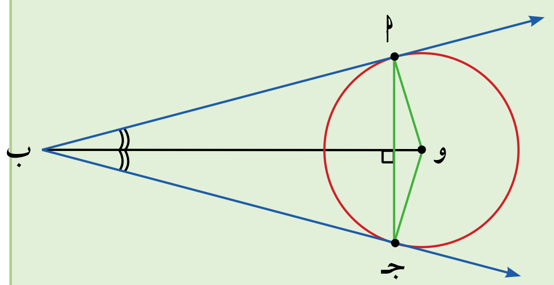
نتائج على نظرية (٤):

بأ ≅ جب

بو منصف للزاوية (أبج)

بو منصف للزاوية (أوج)

بو ⊥ أج

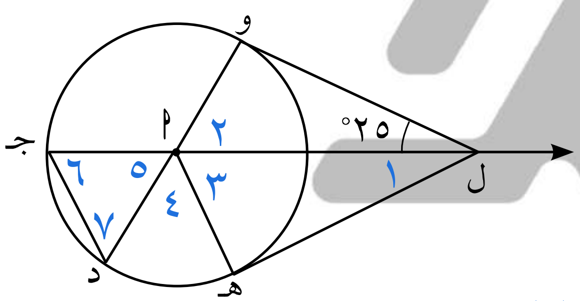


س في الشكل المجاور

أوجد ق(أدج)، ق(هـأد)

إذا كانت لو، لهـ تمسان الدائرة

حيث ود قطر للدائرة



لو مماس، أو نصف قطر التماس ∴ ق(و̂) = ٩٠° (نظرية)

لهـ مماس، أهـ نصف قطر التماس ∴ ق(هـ̂) = ٩٠° (نظرية)

ق(١̂) = ٢٥° (نتيجة)، ق(٢̂) = ق(٣̂) = ١٨٠ − (٩٠ + ٢٥) = ٦٥°

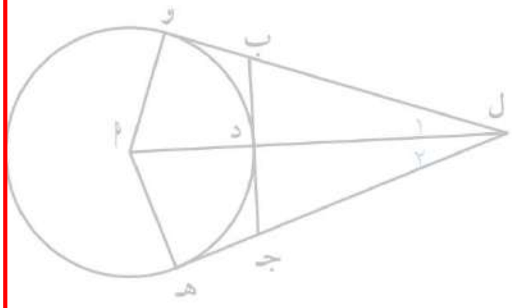
ق(٥̂) = ق(٢) = ٦٥° (تقابل بالرأس)

∴ ق(٤̂) = ق(هـأ̂د) = ١٨٠ − (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°

ق(٦̂) = ق(٧̂) = $\frac{١٨٠° - ٦٥°}{٢}$ = ٥٧,٥° (△أجد متطابق الضلعين)

∴ ق(أد̂ج) = ٥٧,٥°

س في الشكل المقابل لو، له مماسان للدائرة $\overleftrightarrow{جب}$ مماس للدائرة عند النقطة د،
أثبت أن المثلث لبج متطابق الضلعين



في المثلث $\overset{\triangle}{لبج}$

∵ $\overline{لو}$ ، $\overline{له}$ مماسان للدائرة

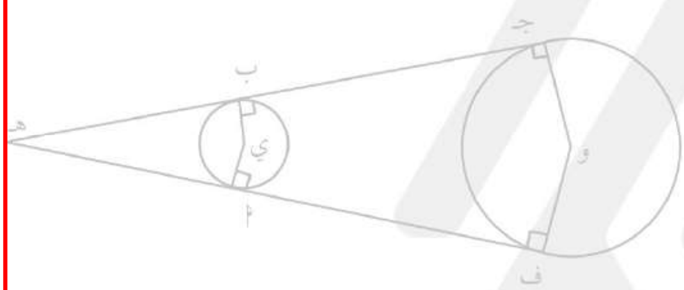
∴ $\overline{لد}$ منتصف الزاوية (نتيجة) (١)

$\overline{بج}$ مماس ، $\overline{أد}$ نصف قطر التماس ∴ $\overline{بج} \perp \overline{أل}$

∴ $\overline{لد}$ ارتفاع المثلث $\overset{\triangle}{لبج}$ (٢)

من (١) و (٢) نجد أن: المثلث لبج ملغى ...لبقان

س برهن أن:
بج = أف



∵ $\overline{هج}$ ، $\overline{هف}$ مماسان للدائرة

∴ هج = هف (نظرية)

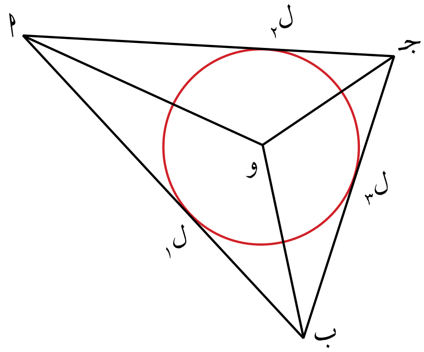
∵ $\overline{هب}$ ، $\overline{هأ}$ مماسان للدائرة

∴ هب = هأ (نظرية)

هج − هب = هف − هأ

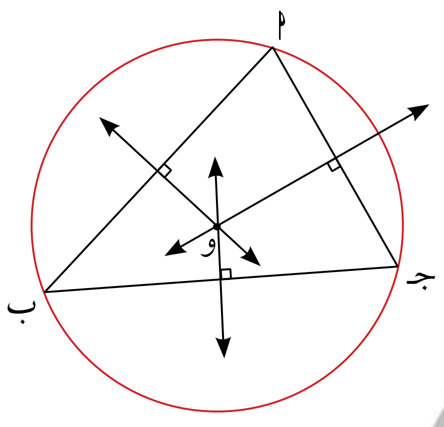
بج = أف

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)



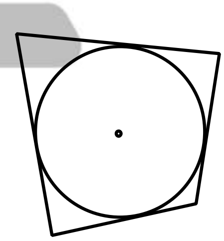
هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.

الدائرة المحيطة بمثلث (الخارجة)

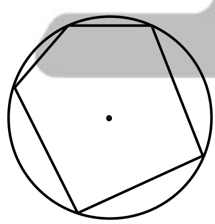


هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

س في التمرينين، حدد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة)



الدائرة محاطة بمضلع (داخلة)



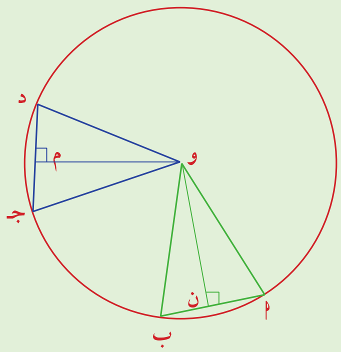
الدائرة محيطة بمضلع (خارجة)

الأوتار والاقواس

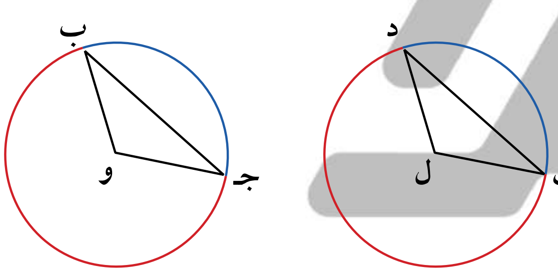
نظرية (١):

في دائرة أو دوائر متطابقة

- للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة
- الاوتار المتطابقة تقابل أقواسا" متطابقة
- للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة



س في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان ، $\overset{\frown}{\text{بجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{د ف}}$. ماذا تستنتج؟



∵ $\overset{\frown}{\text{بجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{دف}}$

∴ $\overline{\text{بجـ}} \cong \overline{\text{دف}}$

∴ ف$\hat{\text{ل}}$د ≅ جـ$\hat{\text{و}}$ب نظرية

س في الرسم أعلاه , إذا كان $\overline{\text{بجـ}} \cong \overline{\text{دف}}$, فماذا تستنتج؟

∵ $\overline{\text{بجـ}} \cong \overline{\text{دف}}$

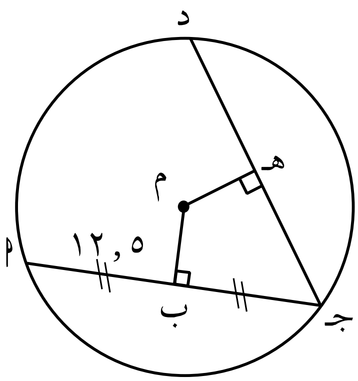
∴ $\overset{\frown}{\text{بجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{دف}}$

∴ ف$\hat{\text{ل}}$د ≅ جـ$\hat{\text{و}}$ب نظرية

نظرية (٢):

- الاوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- الاوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

تمرن



س في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة.

م ب = م هـ أوجد طول جـ د. فسر.

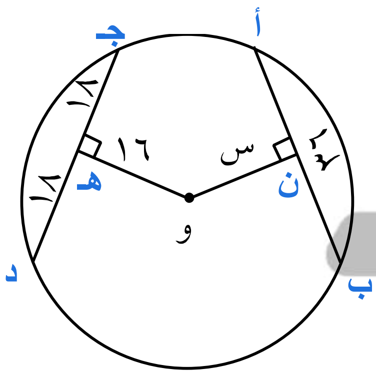
∵ م ب = م هـ ، م هـ ⊥ $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ جـ د = جـ أ   نظرية

= جـ ب + ب أ

= ١٢,٥ + ١٢,٥   (ب جـ = ب أ)

= ٢٥



س دائرة مركزها (و) أوجد قيمة س في الشكل المقابل , و فسر اجابتك.

$\overline{\text{و ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{و هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$ معطى

أ ب = ٣٦

جـ د = ١٨ + ١٨ = ٣٦

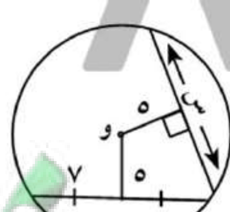
∵ أ ب = جـ د

∴ و ن = و هـ   نظرية

س = ١٦

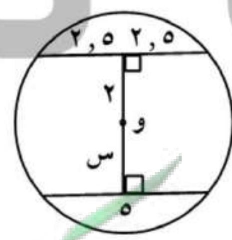
س أوجد قيمة (س) في الاشكال التالية :

(أ)



س = ٧ + ٧ = ١٤

(ب)



س = ٢

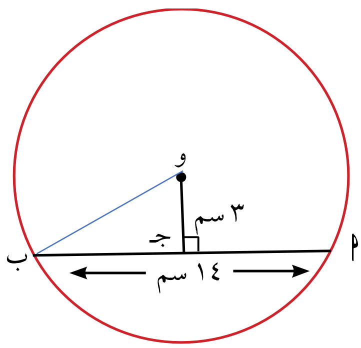
(جـ)

س = ٧

نظرية (٢) :

- القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلا من قوسيه
- القطر الذي ينصف وترا (ليس قطرا) في دائرة يكون عموديا على هذا الوتر
- العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة

س في الشكل المقابل , أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



$\because$ $\overline{وجـ} \perp \overline{أب}$ معطى

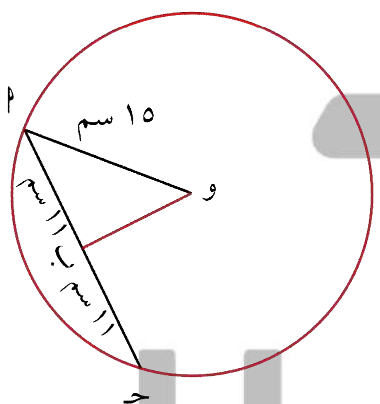
$\therefore$ أجـ = جـب = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧ سم نظرية

وب = $\sqrt{٧^{٢} + ٣^{٢}}$

= $\sqrt{٥٨}$ ≃ ٧,٦ سم

فيثاغورث

س في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر .



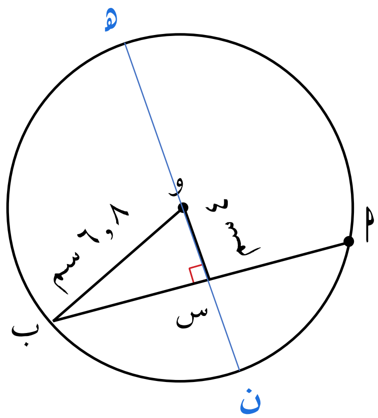
$\because$ أب = جـب = ١١ معطى

$\therefore$ $\overline{وب} \perp \overline{أجـ}$ نظرية

وب = $\sqrt{١٥^{٢} - ١١^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{٢٦}$ فيثاغورث

≃ ١٠,٢ سم

استخدم الشكل :



س أوجد طول الوتر $\overline{\text{ب أ}}$

$\because \overline{\text{وس}} \perp \overline{\text{أب}} \quad \therefore$ أس = س ب   نظرية

س ب $= \sqrt{(٦,٨)^٢ - ٤^٢} \simeq ٥,٤٩$ سم   فيثاغورث

أب = س ب + س أ

$= ٥,٤٩ + ٥,٤٩ = ١٠,٩٨$ سم

س المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أب}}$.

س ن = و ن − و س

$= ٦,٨ - ٤ = ٢,٨$ سم

س المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأكبر $\overset{\frown}{\text{أب}}$.

س هـ = س و + و هـ

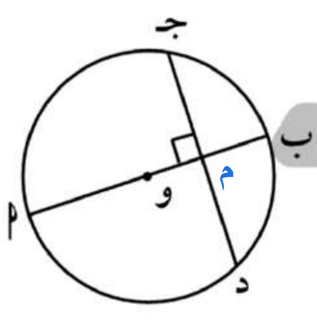
$= ٤ + ٦,٨ = ١٠,٨$ سم

س في الشكل المقابل إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ قطر الدائرة , $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{جد}}$. ماذا تستنتج؟

$\overline{\text{جم}} \cong \overline{\text{دم}}$

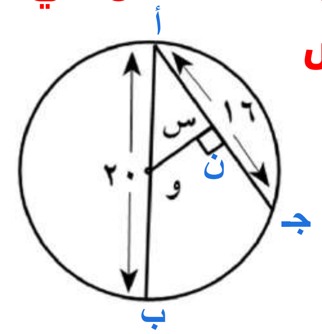
$\overset{\frown}{\text{جب}} \cong \overset{\frown}{\text{دب}}$

$\overset{\frown}{\text{جأ}} \cong \overset{\frown}{\text{دأ}}$



أوجد قيمة (س) في الاشكال التالية :

س



أو = وب = ١٠ سم

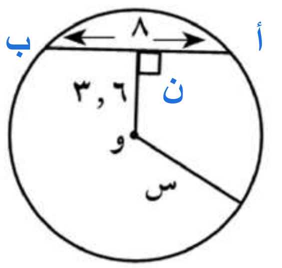
∵ $\overline{ون} \perp \overline{أجـ}$

∴ أن = نجـ = ٨ نظرية

$س = \sqrt{١٠^{٢} - ٨^{٢}}$

= ٦ نظرية فيثاغورث

س



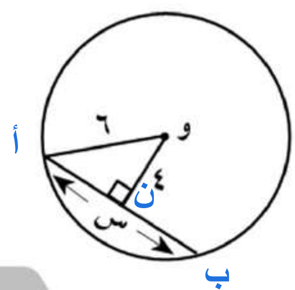
∵ $\overline{ون} \perp \overline{أب}$

∴ أن = نب = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ نظرية

$س = \sqrt{(٣,٦)^{٢} + ٤^{٢}}$

≃ ٥,٣٨ فيثاغورث

س



∵ $\overline{ون} \perp \overline{أب}$

∴ أن = نب نظرية

$أن = \sqrt{٦^{٢} - ٤^{٢}}$

= $٢\sqrt{٥}$ فيثاغورث

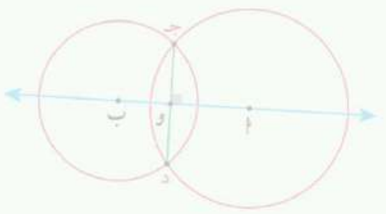
∴ أن = نب = $٢\sqrt{٥}$

$س = ٢\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥}$

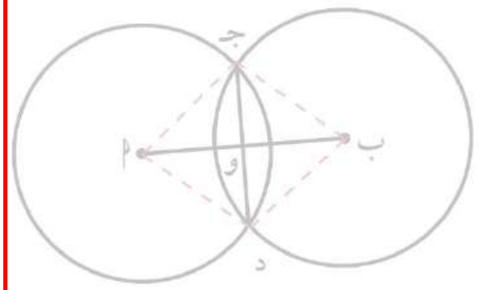
= $٤\sqrt{٥}$

نتيجة :

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك بينهما و ينصفه.



س يمثل الشكل المجاور دائرتين متطابقتين $\overline{\text{د جـ}}$ وتر مشترك إذا كان: أب = ٢٤ سم، نق = ١٣ سم فما هو طول $\overline{\text{د جـ}}$ ؟



∵ الدائرتين متطابقتان

∴ أجـ = أد = ب جـ = ب د = نق = ١٣ سم

ب د أ جـ معين

∴ $\overline{\text{بأ}} \perp \overline{\text{جـد}}$

∴ ب و = و أ = ١٢ سم ، جـ و = و د

و جـ = $\sqrt{١٣^{٢} - ١٢^{٢}}$ = ٥ سم فيثاغورث

∴ جـ د = ٥ + ٥ = ١٠ سم

ملغى

س أ،ب مركزا دائرتين متطابقتين $\overline{\text{جـد}}$ وتر مشترك للدائرتين. إذا كان أب = ٨ سم، جـ د = ٦ سم . فما طول نصف القطر ؟

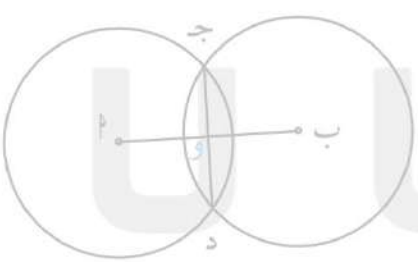
∵ الدائرتين متطابقتان

∴ أجـ = أد = ب جـ = ب د = نق

ب د أ جـ معين $\overline{\text{بأ}} \perp \overline{\text{جـد}}$

ب و = و أ = ٤ سم ، جـ و = و د = ٣ سم

نق = $\sqrt{٤^{٢} + ٣^{٢}}$ = ٥ سم فيثاغورث



الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

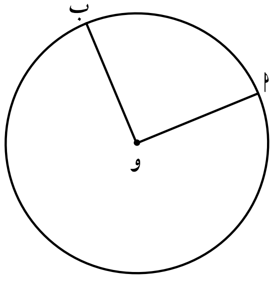
تعريف

- الزاوية التي رأسها مركز الدائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة تسمي بالزاوية المركزية.
- الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة تسمي بالزاوية المحيطة.

نظرية (١):

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة

س في الشكل المقابل دائرة مركزها و . إذا كان ق $(\overset{\frown}{\text{أب}})$ = ٩٠° فأوجد ق $(\widehat{\text{أوب}})$



ق $(\widehat{\text{أوب}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{أب}})$ = ٩٠°

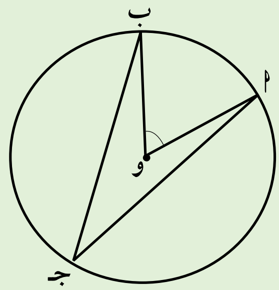
$(\widehat{\text{أوب}})$ زاوية مركزية تقابل $(\overset{\frown}{\text{أب}})$ نظرية

س إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥° فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية = ٣٥° نظرية

نظرية (٢) :

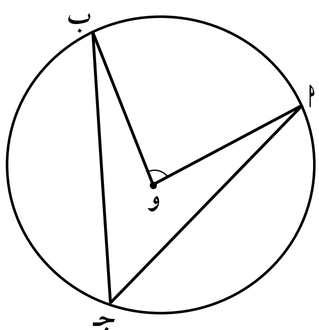
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها



$$\text{ق}(\widehat{\text{أجب}}) = \frac{1}{2}\,\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أب}})$$

$$\text{ق}(\widehat{\text{أجب}}) = \frac{1}{2}\,\text{ق}(\widehat{\text{أوب}})$$

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.



س في الشكل المجاور: إذا كان $\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أب}}) = ٨٠^\circ$

فأوجد $\text{ق}(\widehat{\text{بجأ}})$

$\text{ق}(\widehat{\text{أجب}}) = \frac{1}{2}\,\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أب}})$ نظرية ‏ ‏ ‏ ($\widehat{\text{أجب}}$) زاوية محيطية

$= \frac{1}{2} \times ٨٠^\circ$

$= ٤٠^\circ$

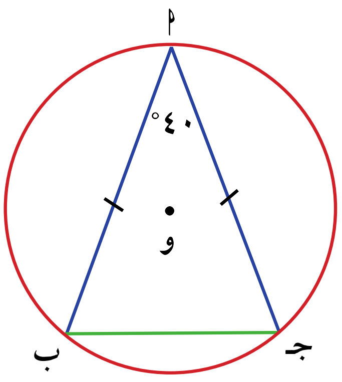
س إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي °٥٤ فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها (نظرية)

قياس القوس = ٢ × °٥٤ = °١٠٨

تمرن

س في الشكل المقابل: **جـ ب أ** مثلث متطابق الضلعين
حيث: أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و ،
$\text{ق}(\widehat{\text{ب أ جـ}}) = 40^\circ$ المطلوب :
أوجد قياس كل من الاقواس: $\overset{\frown}{\text{أب}}$ ، $\overset{\frown}{\text{بجـ}}$ ، $\overset{\frown}{\text{أجـ}}$



$$\text{ق}(\hat{\text{ب}}) = \text{ق}(\hat{\text{جـ}}) = \frac{١٨٠^\circ - ٤٠^\circ}{٢} = ٧٠^\circ$$

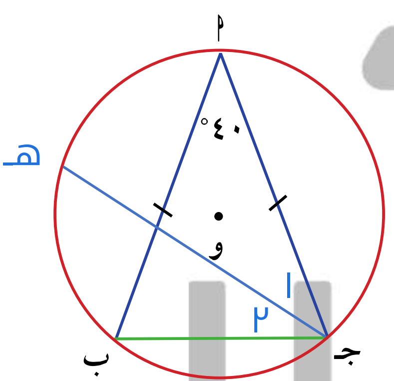
$\left(\overset{\Delta}{\text{أبجـ}} \right.$ متطابق الضلعين ، مجموع قياسات زواياه $\left. ١٨٠^\circ \right)$

$$\text{ق}(\hat{\text{أ}}) = \frac{١}{٢}\text{ق}(\overset{\frown}{\text{بجـ}}) \Leftarrow \text{ق}(\overset{\frown}{\text{بجـ}}) = ٨٠^\circ$$

$$\text{ق}(\hat{\text{جـ}}) = \frac{١}{٢}\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أب}}) \Leftarrow \text{ق}(\overset{\frown}{\text{أب}}) = ١٤٠^\circ$$

$$\text{ق}(\hat{\text{ب}}) = \frac{١}{٢}\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أجـ}}) \Leftarrow \text{ق}(\overset{\frown}{\text{أجـ}}) = ١٤٠^\circ$$

س إذا كان $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ ، منصف الزاوية الداخلية $\widehat{\text{أجـب}}$ و يقطع الدائرة في النقطة هـ ما قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أهـ}}$ ؟



$$\text{ق}(\hat{\text{ب}}) = \text{ق}(\hat{\text{جـ}}) = \frac{١٨٠^\circ - ٤٠^\circ}{٢} = ٧٠^\circ$$

$\left(\overset{\Delta}{\text{أبجـ}} \right.$ متطابق الضلعين ، مجموع قياسات زواياه $\left. ١٨٠^\circ \right)$

لدينا $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ منصف الزاوية $\widehat{\text{أجـب}}$ بالتالي:

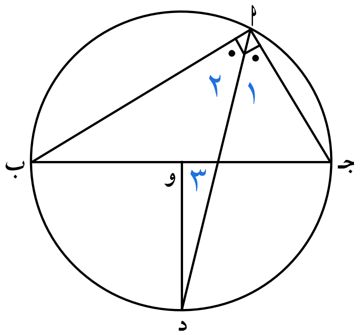
$$\text{ق}(\hat{١}) = \text{ق}(\hat{٢}) = \frac{٧٠^\circ}{٢} = ٣٥^\circ$$

$$\text{ق}(\hat{١}) = \frac{١}{٢}\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أهـ}}) \quad \text{نظرية}$$

$$\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أهـ}}) = ٣٥^\circ \times ٢ = ٧٠^\circ$$

تمرن

س في الشكل المقابل دائرة مركزها و أثبت أن: $\overline{\text{ود}} \perp \overline{\text{جب}}$



∵ ق(ب$\hat{\text{أ}}$ج) = ٩٠° (معطى)

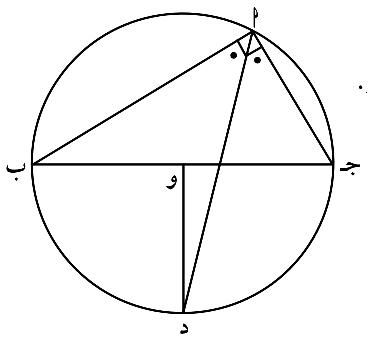
∴ ق($\hat{1}$) = ق($\hat{2}$) = $\frac{٩٠°}{٢}$ = ٤٥°

ق($\hat{1}$) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{جد}}$) نظرية ⇐ ق($\overset{\frown}{\text{جد}}$) = ٩٠°

ق($\hat{3}$) = ق($\overset{\frown}{\text{جد}}$) = ٩٠° نظرية

∴ $\overline{\text{دو}} \perp \overline{\text{بج}}$

س إذا كان ق($\overset{\frown}{\text{أبج}}$) = ٣٠°، أوجد ق($\overset{\frown}{\text{أدب}}$)



في △ أبج

ق($\hat{\text{ج}}$) = ١٨٠° − (٣٠° + ٩٠°) = ٦٠°

ق($\hat{\text{ج}}$) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) نظرية

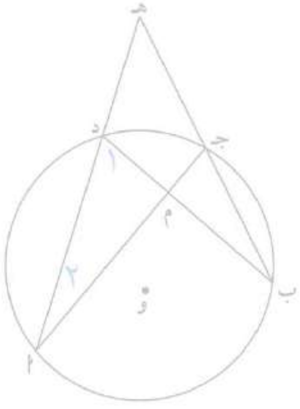
∴ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ٦٠° × ٢ = ١٢٠°

ق($\overset{\frown}{\text{أدب}}$) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) نظرية

= $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠°

تمرين

س أثبت أن ق$(\widehat{أم ب}) = \frac{ق(\widehat{د جـ}) + ق(\widehat{ب أ})}{2}$

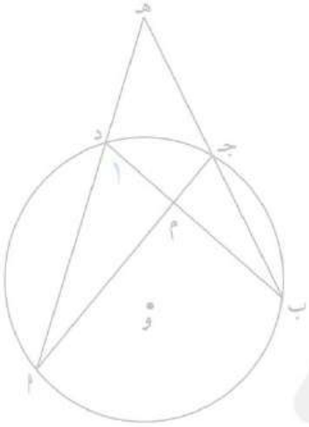


ق$(\widehat{ب م أ})$ = ق$(\hat{1})$ + ق$(\hat{2})$ زاوية خارجة من مثلث

$= \frac{ق(\widehat{أب})}{2} + \frac{ق(\widehat{جـ د})}{2}$ نظرية

$= \frac{ق(\widehat{أب}) + ق(\widehat{جـ د})}{2}$

س أثبت أن ق$(\widehat{ب هـ أ}) = \frac{ق(\widehat{ب أ}) - ق(\widehat{جـ د})}{2}$



ق$(\hat{1})$ = ق$(\hat{ب})$ + ق$(\hat{هـ})$ زاوية خارجة

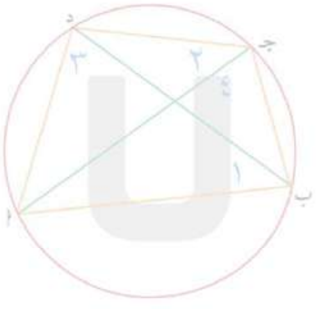
ق$(\hat{هـ})$ = ق$(\hat{1})$ − ق$(\hat{ب})$

ق$(\widehat{ب هـ أ}) = \frac{ق(\widehat{أب})}{2} - \frac{ق(\widehat{جـ د})}{2}$ نظرية

$= \frac{ق(\widehat{أب}) - ق(\widehat{جـ د})}{2}$

ملغى

س أ ب جـ د شكل رباعي دائري. أثبت أن ق$(\widehat{أ ب د})$ = ق$(\widehat{أ جـ د})$



ق$(\hat{1})$ = ق$(\widehat{أ ب د})$ = $\frac{1}{2}$ ق$(\widehat{أد})$ نظرية

ق$(\hat{2})$ = ق$(\widehat{أ جـ د})$ = $\frac{1}{2}$ ق$(\widehat{أد})$ نظرية

∴ ق$(\widehat{أ ب د})$ = ق$(\widehat{أ جـ د})$

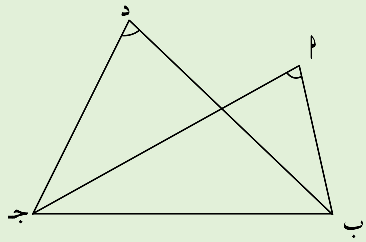
- أثبت أن ق$(\widehat{أ د ب})$ = ق$(\widehat{أ جـ ب})$

ق$(\hat{3})$ = ق$(\widehat{أ د ب})$ = $\frac{1}{2}$ ق$(\widehat{أب})$ نظرية

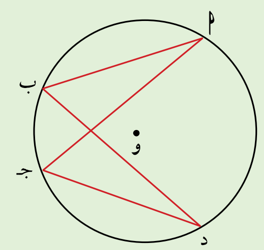
ق$(\hat{4})$ = ق$(\widehat{أ جـ ب})$ = $\frac{1}{2}$ ق$(\widehat{أب})$ نظرية

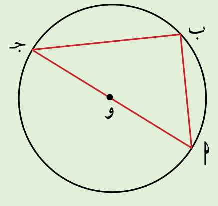
∴ ق$(\widehat{أ د ب})$ = ق$(\widehat{أ جـ ب})$

نتائج :



- كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
- كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة), تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
- في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ̂ ، د̂ المرسومات على القاعدة ب‍جـ و في جهة واحدة منها. كان الشكل أب‍جـد رباعيا دائريا.





أب̂د ، أج̂د تحصران ⌒أد

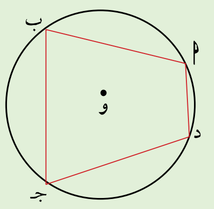
∴ ق (أب̂د) = ق (أج̂د)

أب̂جـ تحصر ⌒أجـ

(نصف دائرة)

∴ ق (أب̂جـ) = ٩٠

(أب̂جـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة و هي زاوية قائمة



ق (أ̂) + ق (ج̂) = ١٨٠°

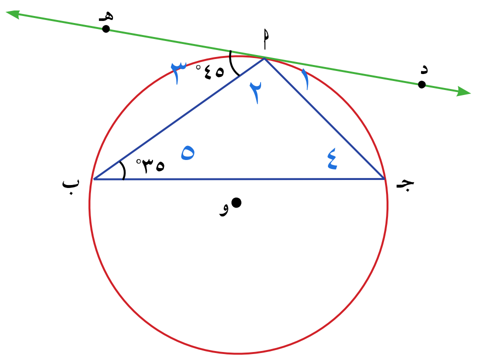
ق (ب̂) + ق (د̂) = ١٨٠°

نظرية (٣) :

- قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
- قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس و الوتر

تمرن

س اذا كان $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ مماسا للدائرة عند النقطة أ
فأوجد: ق(ب أ̂ جـ)



ق(١̂) = ق(٥̂) = ٣٥° نظرية

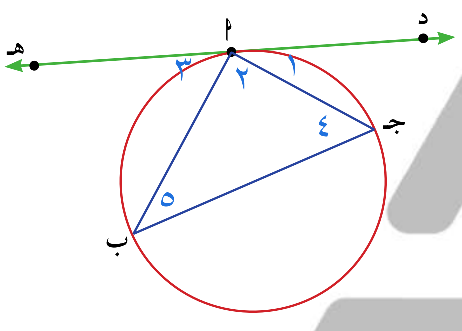
ق(٣̂) = ق(٤̂) = ٤٥° نظرية

ق(٢̂) = ١٨٠° − (٤٥° + ٣٥°)

= ١٠٠° مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(جـ أ̂ ب) = ١٠٠°

س في الشكل المقابل:



ق(د أ̂ جـ) = ٤٠° ، ق(هـ أ̂ ب) = ٥٠°

اوجد قياسات زوايا المثلث Δأب جـ

ق(١̂) = ق(٥̂) = ٤٠° نظرية

ق(٣̂) = ق(٤̂) = ٥٠° نظرية

ق(٢̂) = ١٨٠° − (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

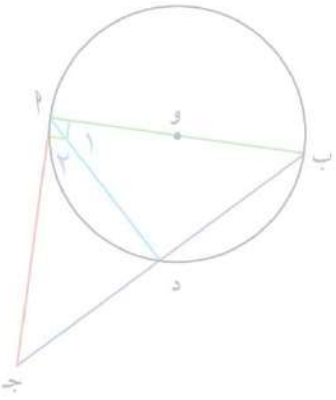
- أثبت أن $\overline{\text{ب جـ}}$ قطر للدائرة

∵ جـ أ̂ ب زاوية محيطيه قياسها ٩٠°

∴ جـ أ̂ ب مرسومة على قطر الدائرة

∴ $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة.

س $\overline{\text{أب}}$ قطر في دائرة مركزها و. نرسم $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ مماساً للدائرة بحيث يكون أجـ = ٢ نق ، $\overline{\text{بجـ}}$ تقطع الدائرة في د. أثبت أن أد = جـ د



△ أبجـ فيه

ق(أ̂) = ٩٠°

أب = أجـ = ٢نق

∴ △ أبجـ قائم متطابق الضلعين

ق(ب̂) = ق(جـ̂) = ٤٥° (نظرية)

ق(٢̂) = ق(ب̂) = ٤٥°

∴ △ أدجـ متطابق الضلعين

∴ أد = جـد

ملغى

س $\overleftrightarrow{\text{م ت}}$ مماس لدائرة مركزها و. $\overline{\text{م ن}}$ وتر في الدائرة بحيث يكون م ن = م ت . (م نقطة التماس) $\overline{\text{ت ن}}$ تقطع الدائرة في ل.

أثبت أن △ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

∵ م ن = م ت

∴ △ م ت ن متطابق الضلعين

∴ ق(ت̂) = ق(ن̂)

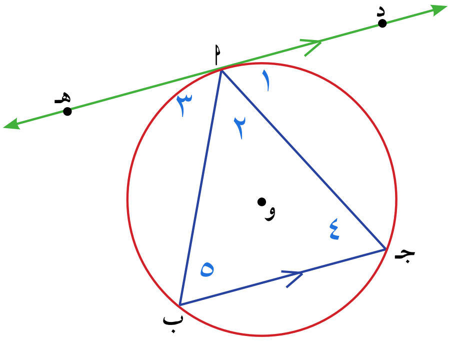
ق(ن̂) = ق(١̂) نظرية

∴ ق(ت̂) = ق(١̂)

∴ △ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

تمرن

س في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{هـ د}$ مماس للدائرة عند أ , $\overline{جـ ب}$ وتر في الدائرة ويوازي المماس $\overleftrightarrow{د هـ}$ أثبت ان المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين



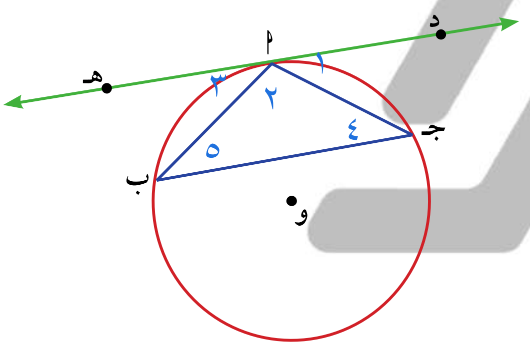
ق $(\hat{1})$ = ق $(\hat{5})$ (نظرية)

ق $(\hat{1})$ = ق $(\hat{4})$ (تبادل و توازي)

∴ ق $(\hat{4})$ = ق $(\hat{5})$

∴ المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين

س اذا كان لدينا $\overleftrightarrow{هـ د}$ مماس للدائرة عند النقطة أ. المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ) أثبت أن $\overline{جـ ب} // \overleftrightarrow{هـ د}$



ق $(\hat{1})$ = ق $(\hat{5})$ (نظرية)

ق $(\hat{4})$ = ق $(\hat{5})$ ($\triangle$ أ ب جـ متطابق الضلعين)

∴ ق $(\hat{1})$ = ق $(\hat{4})$

و هما في وضع التبادل

∴ $\overleftrightarrow{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

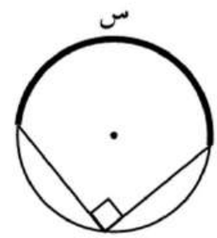
تمرن

أوجد قيمة المجهول في كل من الاشكال التالية :

س

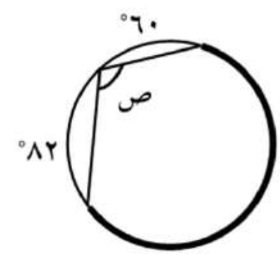
س = ١١٦°

س



س = ١٨٠°

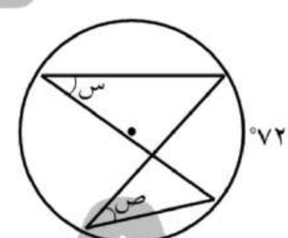
س



س = ٣٦٠ − (٦٠ + ٨٢) = ٢١٨°

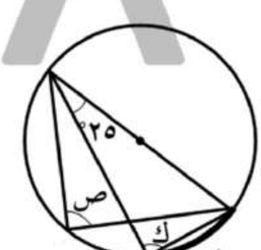
ص = $\frac{٢١٨}{٢}$ = ١٠٩°

س



س = ص = $\frac{٧٢}{٢}$ = ٣٦°

س



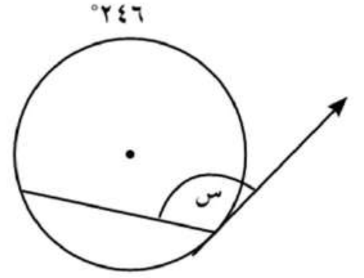
س = ٥٠°

ك = ص = ٩٠°

تمرن

أوجد قيمة المجهول في كل من الاشكال التالية :

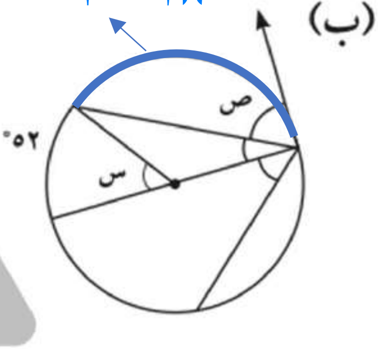
س



$س = \frac{٢٤٦}{٢}$

$= ١٢٣°$

(ب)

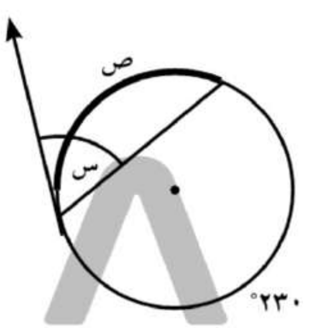


$١٨٠° - ٥٢° = ١٢٨°$

$س = ٥٢°$

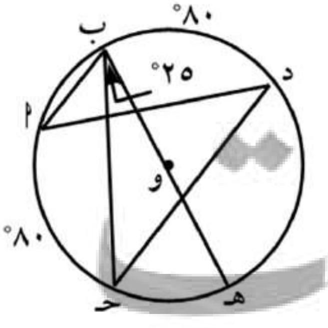
$ص = \frac{١٢٨}{٢} = ٦٤°$

س



$ص = ٣٦٠ - ٢٣٠ = ١٣٠°$

$س = \frac{١٣٠°}{٢} = ٦٥°$



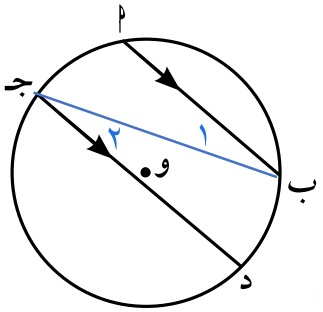
س ق(أ). $\frac{١}{٢} \times ٨٠° = ٤٠°$

س ق(جهـ⌒). $٢٥° \times ٢ = ٥٠°$

س ق(جـ). $\frac{١}{٢} \times ٨٠° = ٤٠°$

س ق(أبهـ⌒). $\frac{١}{٢} \times ١٣٠° = ٦٥°$

س في الشكل المقابل أثبت أن : $\overset{\frown}{\text{اجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{بد}}$.



نرسم $\overline{\text{بجـ}}$

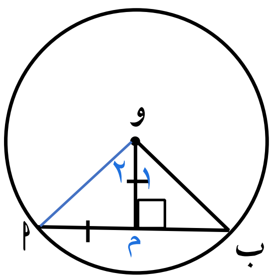
$\text{ق}(\hat{\text{١}}) = \text{ق}(\hat{\text{٢}})$ (بالتبادل و التوازي)

$\frac{1}{2}\,\text{ق}(\overset{\frown}{\text{اجـ}}) = \frac{1}{2}\,\text{ق}(\overset{\frown}{\text{بد}})$

$\text{ق}(\overset{\frown}{\text{اجـ}}) = \text{ق}(\overset{\frown}{\text{بد}})$

$\therefore \overset{\frown}{\text{اجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{بد}}$

س اوجد قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{اب}}$



$\overline{\text{وم}} \perp \overline{\text{اب}}$

$\therefore \text{بم} = \text{ام}$ نظرية

$\therefore \text{وم} = \text{ام} = \text{مب}$

$\therefore \triangle\,\text{ومب}$ قائم متطابق الضلعين

$\therefore \text{ق}(\hat{\text{١}}) = \text{٤٥}^\circ$

$\triangle\,\text{وما}$ قائم متطابق الضلعين

$\therefore \text{ق}(\hat{\text{٢}}) = \text{٤٥}^\circ$

$\text{ق}(\text{ب}\hat{\text{و}}\text{ا}) = \text{٤٥}^\circ + \text{٤٥}^\circ = \text{٩٠}^\circ$

$\therefore \text{ق}(\overset{\frown}{\text{اب}}) = \text{ق}(\text{ب}\hat{\text{و}}\text{ا}) = \text{٩٠}^\circ$ نظرية

تنظيم البيانات في مصفوفات

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

س $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٥ \\ ٢ & -٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٩ \end{bmatrix}$ ‏ ٣×٣

س $ب = \begin{bmatrix} -٤ & \frac{٢}{٣} & -٣ \end{bmatrix}$ ‏ ١×٣

س $جـ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$ ‏ ٤×١

س $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ -٢ & ٠,٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ‏ ٢×٣

س $ب = \begin{bmatrix} -٨ & ٣ & ١٠ \end{bmatrix}$ ‏ ١×٣

س $جـ = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ١ & -٥ \\ ٠,٦ & ٩ \end{bmatrix}$ ‏ ٣×٢

س $ب = \begin{bmatrix} ١٢ & ١ & ٥ & ٤ \\ ٢ & ٦ & ٢ & ٣,٥ \\ ١ & ٠ & ١ & -٤ \end{bmatrix}$ أوجد:

- $ب_{٢٢} = ٦$
- $ب_{٣١} = ١$
- $ب_{١١} = ١٢$
- $ب_{١٣} = ٥$
- $ب_{٣٤} = -٤$
- $ب_{٣٣} = ١$

المصفوفات : المربعة , الأفقية , العمودية

- **المصفوفة المربعة :** هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة. وفي ما عدا ذلك , تسمي المصفوفة : مصفوفة مستطيلة.

$$\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٩ & -١ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٧ & ٢ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة الأفقية :** هي مصفوفة مكونة من صف واحد.

$$\begin{bmatrix} ٠ & -٢ & ٩ & ٧ \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة العمودية :** هي مصفوفة مكونة من عمود واحد.

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٩ \end{bmatrix}$$

صنّف كلا من المصفوفات التالية:

س $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & -٥ & ١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

مربعة

س $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$

عمودية

س $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} -٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

أفقية

س $\underline{د} = \begin{bmatrix} ١,٤ & ٣ & -٢ \\ ٥ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$

مستطيلة

المصفوفات المتساوية : Equal Matrices

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها , و كانت عناصرهما المتناظرة متساوية و العكس صحيح.

س إذا كانت: $\begin{bmatrix} \text{٢س} - ٥ & ٤ \\ ٣ & \text{٣ص} + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & \text{ص} + ١٨ \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة كل من س ، ص

$\text{٢س} - ٥ = ٢٥$

$\text{٢س} = ٢٥ + ٥$

$\frac{\text{٢س}}{٢} = \frac{٣٠}{٢}$

$\text{س} = ١٥$

$\text{٣ص} + ١٢ = \text{ص} + ١٨$

$\text{٣ص} - \text{ص} = -١٢ + ١٨$

$\frac{\text{٢ص}}{٢} = \frac{٦}{٢}$

$\text{ص} = ٣$

س إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & \text{٤ص} - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} + ٨ & ٥ \\ ٣ & -\text{ص} \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة كل من س ، ص

$\text{س} + ٨ = ٣٨$

$\text{س} = ٣٨ - ٨$

$\text{س} = ٣٠$

$\text{٤ص} - ١٠ = -\text{ص}$

$\text{٤ص} + \text{ص} = ١٠$

$\frac{\text{٥ص}}{٥} = \frac{١٠}{٥}$

$\text{ص} = ٢$

س إذا كانت: $\begin{bmatrix} \text{٣س} & \text{س} + \text{ص} & \text{س} - \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ & ٤ & -١٠ \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة كل من س ، ص

$\text{٣س} = -٩$

$\text{س} = \frac{-٩}{٣}$

$\text{س} = -٣$

$\text{س} + \text{ص} = ٤$

$-٣ + \text{ص} = ٤$

$\text{ص} = ٤ + ٣ = ٧$

جمع وطرح المصفوفات

س أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} -12 & 24 \\ -3 & 5 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 4 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -15 & 23 \\ -8 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

س إذا كانت: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

- أوجد $\underline{جـ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$

- $(\underline{جـ} + \underline{ب}) + \underline{أ} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

خواص جمع المصفوفات :

إذا كان $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ مصفوفات من الرتبة $م \times ن$ فإن:

- $\underline{أ} + \underline{ب}$ هي من الرتبة $م \times ن$ — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$ — خاصية الإبدال Commutative
- $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} = \underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$ — خاصية التجميع Associative
- $\underline{0}_{م \times ن} + \underline{أ} = \underline{أ} + \underline{0}_{م \times ن} = \underline{أ}$ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة $م \times ن$
- $\underline{أ} + (-\underline{أ}) = \underline{0}_{م \times ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي)

طرح المصفوفات :

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين أ، ب الرتبة نفسها , فإن أ − ب = أ + (− ب).

ملاحظة :

إذا كان أ ≠ ب ولهما الرتبة نفسها فإن : أ − ب ≠ ب − أ و بالتالي , عملية طرح المصفوفات ليست إبداليه.

أوجد ناتج كل مما يلي:

س
$$\begin{bmatrix} ٦ & ٩- & ٧ \\ ٢- & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٢- & ٧ \\ ٨- & ٤- & ٢- \end{bmatrix}$$

س
$$\begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ١- & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣- & ١ \\ ٢ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٣- & ١٤ \end{bmatrix}$$

س
$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣- & ٦ \\ ٥- & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢- \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ١- & ١٠ \\ ١ & ١٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢- \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦- & ٠ \\ ٤- & ١٢ \\ ٢- & ١٠ \end{bmatrix}$$

حل المعادلات المصفوفية

أوجد قيمة س حيث :

س $X - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$

س $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 11 \\ -8 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

س $X - \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 75 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 50 \\ 50 & -10 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 5 & 50 \\ 50 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 75 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 62 \\ 125 & -11 \end{bmatrix}$

س $-X + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 12 & 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

$-X = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 12 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

$-X = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & -7 \\ -12 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 7 \\ 12 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

س

$$\begin{bmatrix}٠&٠&٠\\٢&٤&-٢٤\end{bmatrix} = \underline{س} - \begin{bmatrix}١٣&٢٤&٥\\-٦&-١٧&١\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}٠&٠&٠\\٢&٤&-٢٤\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}١٣&٢٤&٥\\-٦&-١٧&١\end{bmatrix} = \underline{س}$$

$$\begin{bmatrix}١٣&٢٤&٥\\-٤&-١٣&-٢٣\end{bmatrix} = \underline{س}$$

ضرب المصفوفات

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$ فأوجد:

س $٥\underline{ب} - ٤\underline{أ}$

$$= ٥\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix} - ٤\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ١٠ \\ -١٠ & -٥ & ١٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ١٢ & -١٦ \\ ٢٠ & ١٦ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٨ & -٧ & ٢٦ \\ -٣٠ & -٢١ & ٣ \end{bmatrix}$$

س $\underline{أ} + ٦\underline{ب}$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} + ٦\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٦ & ١٢ \\ -١٢ & -٦ & ١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٩ & ٨ \\ -٧ & -٢ & ٢١ \end{bmatrix}$$

حل كل معادلة مما يلي:

س $$2\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$2\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{س}} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

س $$-٣\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٨ \\ -١٩ & -١٨ & ١٠ \end{bmatrix}$$

$$-٣\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٨ \\ -١٩ & -١٨ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$-٣\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٩ \\ -٢١ & -١٥ & ٦ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{س}} = \frac{-١}{٣} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٩ \\ -٢١ & -١٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ & -٣ \\ ٧ & ٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

س أوجد ناتج أ × ب: $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$$أ \times ب = \begin{bmatrix} ٤\times٠ + ٣\times -٢ & ٠\times٠ + ٣\times١ \\ ٤\times(-١) + (-٤)\times -٢ & ٠\times(-١) + (-٤)\times١ \\ ٤\times١ + ٢\times -٢ & ٠\times١ + ٢\times١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ ٤ & -٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}_{٣\times٢}$$

س أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

$$\underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}} \underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -٣\times(-١) + ٠\times٥ & ٣\times(-١) + ٠\times٠ \\ -٣\times٣ + (-٤)\times٥ & ٣\times٣ + (-٤)\times٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٢٩ & ٩ \end{bmatrix}$$

س بفرض $أ = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & -١ & ٠ \\ ٢ & -٥ & ١ & ٨ \end{bmatrix}$

حدد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب أ × ب ، ب × أ معرفة أو غير معرفة

$$أ \times ب = \begin{bmatrix} ٨\times٤ + (-٢)\times٢ & ٠\times٤ + (-٢)\times -٥ & -١\times٤ + (-٢)\times١ & ٠\times٤ + (-٢)\times٨ \\ ٨\times٥ + (-٤)\times٢ & ٠\times٥ + (-٤)\times -٥ & -١\times٥ + (-٤)\times١ & ٠\times٥ + (-٤)\times٨ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٨ & ١٠ & -٦ & -١٦ \\ ٣٢ & ٢٠ & -٩ & -٣٢ \end{bmatrix}_{٢\times٤}$$

ب × أ $\quad ب_{(٢\times٤)} \times أ_{(٢\times٢)}$ غير معرفة

مربع المصفوفة

س إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ فأوجد: $\underline{ب}^{٢}$

$$\underline{ب}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times٢+١\times(-١) & ٢\times١+١\times٤ \\ -١\times٢+٤\times(-١) & -١\times١+٤\times٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$$

س إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فأوجد: $\underline{أ}^{٢}$

$$\underline{أ}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ٢\times٢+(-١)\times١ & ٢\times(-١)+(-١)\times٠ \\ ١\times٢+٠\times١ & ١\times(-١)+٠\times٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$$

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة :

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي (١) وبقية العناصر (صفر)

$$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

النظير الضربي :

$$\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{و}$$

س أثبت أن المصفوفة: $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢\times٢+١\times٥ & ٢\times٢+١\times-٤ \\ -٢\times٢,٥+١\times٥ & ٢\times٢,٥+١\times-٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \underline{و}_{٢\times٢}$$

∴ المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لـ $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

س أثبت أن : $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times٢+٣\times-١ & -٣\times٢+٣\times٢ \\ ٢\times١+٢\times-١ & -٣\times١+٢\times٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$\underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{و}$ $\therefore$ $\underline{ب}$ النظير الضربي $\underline{أ}$

يمكن القول أن المصفوفة $\underline{أ}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{ب}$.

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية :

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$ هو $|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix} = أد - ب جـ$

تمرن: أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

س $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \leftarrow |\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٤ \times ٢ - ٢ \times ٤ =$ صفر

$\therefore$ $\underline{أ}$ منفردة

س $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix} \leftarrow |\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{vmatrix} = ٨ \times ١٠ - ٢ \times ٧ = ٦٦$

س $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ك & ٣ \\ ٣-ك & -٣ \end{bmatrix} \leftarrow |\underline{جـ}| = \begin{vmatrix} ك & ٣ \\ (٣-ك) & -٣ \end{vmatrix} = -٣ك - ٣(٣-ك)$

$= \cancel{-٣ك} - ٩ + \cancel{٣ك}$

$= -٩$

تمرن: أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

س $أ = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix} = |أ| = \begin{vmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = (-٣) \times (-٥) - ٤ \times ٢ = ٧$

س $ب = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} = |ب| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = (٢) \times (-٢) - (-٣) \times (٣) = ٥$

س $جـ = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix} = |جـ| = \begin{vmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{vmatrix} = س^٢ - ٠ = س^٢$

ملاحظة :

المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى (مصفوفة منفردة)

س إذا كانت المصفوفة $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة فأوجد قيمة س

∵ ب منفردة ∴ $|ب| = $ صفر

$\begin{vmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{vmatrix} = $ صفر

$١٠س - -٤٠ = ٠$

$١٠س + ٤٠ = ٠$

$١٠س = -٤٠ \Leftarrow س = -٤$

س إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$ منفردة فأوجد قيمة س

|أ| = ٠

$\begin{vmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{vmatrix}$ = ٠

٦س − ٤٨ = ٠

٦س = ٤٨ ⟸ س = $\frac{٤٨}{٦}$ = ٨

خاصية :

بفرض أن : أ = $\begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix}$ إذا كان أد − ب جـ ≠ ٠ فإن أ لها نظير ضربي أ$^{-١}$ حيث :

أ$^{-١}$ = $\frac{١}{|أ|}$ $\begin{bmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{bmatrix}$

س هل ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسر اجابتك

|ب| = $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = ١ × ٤ − ٢ × ٣ = −٢

∵ −٢ ≠ ٠ ∴ يوجد نظير ضربي

س هل ب = $\begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسر اجابتك

|ب| = $\begin{vmatrix} ٨ & ٦ \\ -٤ & -٣ \end{vmatrix}$ = ٦ × (−٤) − ٨ × (−٣) = صفر

ب منفردة ليس لها نظير ضربي

س هل للمصفوفة: $أ = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟

في حالة الايجاب أوجده:

$$|أ| = \begin{vmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{vmatrix} = (-١) \times (-٢) - ٠ \times ٨ = \frac{٢}{١} = ٢ ، ٢ \neq ٠$$

يوجد نظير ضربي

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ -٨ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ -٤ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

حدد أي من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس) , ثم أوجده

س $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٢ \times ٣ - ٤ \times ١ = ٢$$

$\because ٢ \neq ٠ \qquad \therefore أ^{-١}$ موجودة

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢} & -٢ \\ \frac{-١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$$

س $ب = \begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$

$$|ب| = \begin{vmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{vmatrix} = ٠,٥ \times ٧,٢ - ٢,٣ \times ٣ = \frac{-٣٣}{١٠}$$

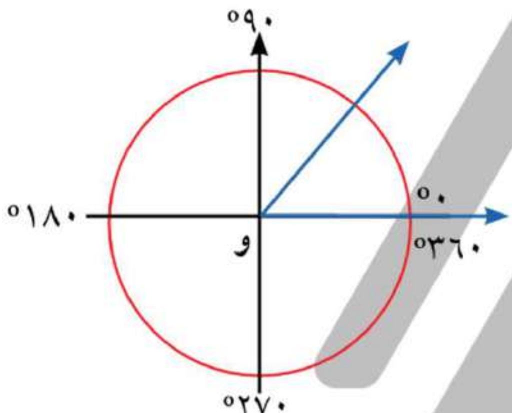
$\because |ب| \neq$ صفر $\qquad \therefore ب^{-١}$ موجودة

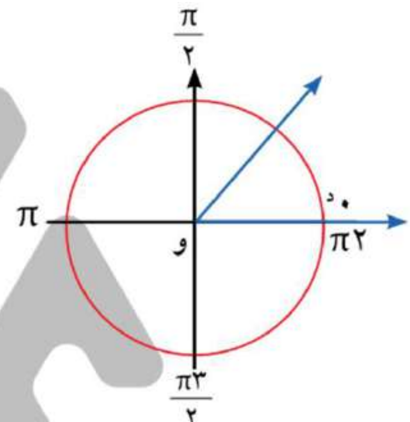
$$ب^{-١} = -\frac{١٠}{٣٣} \begin{bmatrix} ٧,٢ & -٢,٣ \\ -٣ & ٠,٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٢٤}{١١} & \frac{٢٣}{٣٣} \\ \frac{١٠}{١١} & \frac{-٥}{٣٣} \end{bmatrix}$$

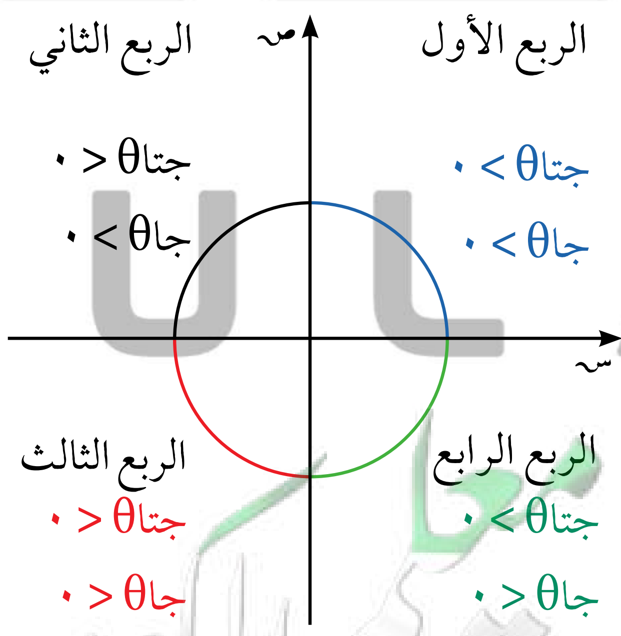
دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي و الدوال المثلثية (الدائرية)

دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل (و) وطول نصف قطرها واحد وحدة







تمرين: حدّد إشارة جا (θ) ,جتا (θ) في كل مما يلي :

س $\theta = ١٣٥°$

θ في الربع٢   جا$\theta > ٠$ جتا$\theta < ٠$ ظا$\theta < ٠$

س $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$

$\leftarrow \frac{٧ \times ١٨٠}{٦} = ٢١٠°$ θ في الربع ٣   جا$\theta < ٠$ جتا$\theta < ٠$ ظا$\theta > ٠$

س $\theta = ٣٠٥°$

θ في الربع٤   جتا$\theta > ٠$ جا$\theta < ٠$ ظا$\theta < ٠$

تمرين:

س إذا كانت $٩٠° < \theta < ٢٧٠°$ فما هي إشارة جتا(θ)؟

θ في الربع ٢ أو في الربع ٣

جتا$\theta < ٠$

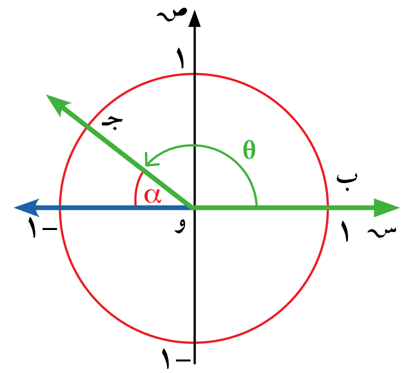
س : إذا كانت $٠ < \theta < \pi$ فما هي إشارة جا(θ) ؟

θ في الربع ١ أو في الربع ٢

$\therefore$ جا$\theta > ٠$

زاوية الاسناد :

هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha^{\circ} = ١٨٠^{\circ} - \theta^{\circ}$

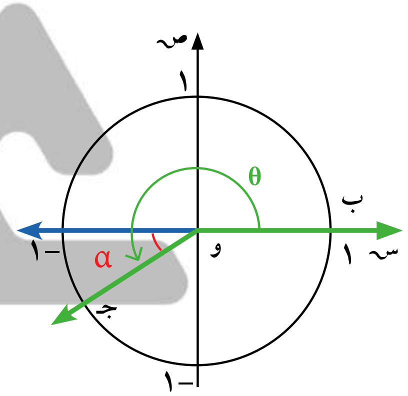
$\alpha^{د} = \pi - \theta^{د}$

$\theta = ١٢٠^{\circ}$ تقع في الربع ٢

$\alpha = ١٨٠^{\circ} - ١٢٠^{\circ} = ٦٠^{\circ}$

$\theta = \frac{٥\pi}{٦}$ تقع في الربع ٢

$\alpha = \pi - \frac{٥\pi}{٦} = \frac{\pi}{٦}$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha^{\circ} = \theta^{\circ} - ١٨٠^{\circ}$

$\alpha^{د} = \theta^{د} - \pi$

$\theta = ٢٠٠^{\circ}$ تقع في الربع ٣

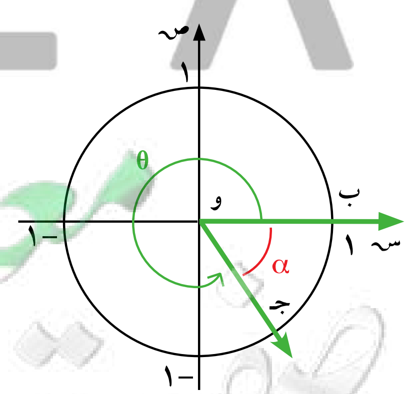
$\alpha = \theta - ١٨٠^{\circ}$

$= ٢٠٠ - ١٨٠ = ٢٠^{\circ}$

$\theta = \frac{٥\pi}{٤}$ تقع في الربع ٣

$\alpha = \theta - \pi$

$= \frac{٥\pi}{٤} - \pi = \frac{\pi}{٤}$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha^{\circ} = ٣٦٠^{\circ} - \theta^{\circ}$

$\alpha^{د} = ٢\pi - \theta^{د}$

$\theta = ٣٢٠^{\circ}$ تقع في الربع ٤

$\alpha = ٣٦٠ - ٣٢٠^{\circ} = ٤٠^{\circ}$

$\theta = \frac{٥\pi}{٣}$ تقع في الربع ٤

$\alpha = ٢\pi - \theta$

$= ٢\pi - \frac{٥\pi}{٣} = \frac{\pi}{٣}$

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

النسب المثلثية للزاويتين θ، $-\theta$

جتا$(-\theta)$ = جتا(θ) ، جا$(-\theta)$ = −جا(θ) ، ظا$(-\theta)$ = −ظا(θ)

تمرين :

س إذا كان جتا$\left(\frac{٣\pi}{٨}\right) = \frac{\sqrt{٢-\sqrt{٢}}}{٢}$ فأوجد جتا$\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$

= جتا$\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$ = جتا$\left(\frac{٣\pi}{٨}\right) = \frac{\sqrt{٢-\sqrt{٢}}}{٢}$

س إذا كان جا(٣٦°) = ٠,٥٨٧٨ ، فأوجد جا(−٣٦°)

جا(−٣٦) = −جا٣٦ = −٠,٥٨٧٨

س إذا كان ظا(٤٥°) = ١ ، فأوجد ظا(−٤٥°) ظا(−٤٥) = −ظا٤٥ = −١

س إذا كان جا(م) = ٠,٣ ، فأوجد جا(−م) جا(−م) = −جام = −٠,٣

س إذا كان جتا(ل) = ٠,٣٨ ، فأوجد جتا(−ل) جتا(−ل) = جتال = ٠,٣٨

س إذا كان ظا(س) = ٣,١٤ ، فأوجد ظا(−س) ظا(−س) = −ظاس = −٣,١٤

س إذا كان جتا(−ص) = $\frac{١}{٤}$ فأوجد جتاص = $\frac{١}{٤}$

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi-\theta)$

جتا$(\pi-\theta)$ = −جتا(θ) ، جا$(\pi-\theta)$ = جا(θ) ، ظا$(\pi-\theta)$ = −ظا(θ)

س جتا(٣٠°) = $\frac{١}{٢}$ ، فإن جا(١٥٠°) = جا(١٨٠ − ٣٠) = جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

س جتا س = $\frac{٤}{٥}$ ، فإن جتا$(\pi$ − س$)$ = −جتاس = −$\frac{٤}{٥}$

س ظا$\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فإن ظا$\frac{١١\pi}{١٢}$ = ظا$\left(\pi-\frac{\pi}{١٢}\right)$

= −ظا$\frac{\pi}{١٢}$ = −(٢ − $\sqrt{٣}$)

= −٢ + $\sqrt{٣}$

س جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$، أوجد جتا ١٢٠° = جتا(١٨٠ − ٦٠) = −جتا ٦٠ = −$\frac{١}{٢}$

س جا$\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$، أوجد جا$\frac{٣\pi}{٤}$ = جا$\left(\pi-\frac{\pi}{٤}\right)$ = +جا$\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

س ظاθ = $\frac{٣}{٥}$، أوجد ظا$(\pi-\theta)$ = −ظاθ = −$\frac{٣}{٥}$

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\theta+\pi)$

جتا$(\pi+\theta)$ = −جتا(θ) ، جا$(\pi+\theta)$ = −جا(θ) ، ظا$(\pi+\theta)$ = ظا(θ)

س بدون استخدام الآلة الحاسبة , إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°

جتا ٢٢٠ = جتا(١٨٠ + ٤٠) = −جتا ٤٠ = −٠,٧٦٦

س جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ فأوجد جا ٢١٠° .

= جا(١٨٠ + ٣٠) = −جا ٣٠ = −$\frac{١}{٢}$

س ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$ فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$.

= ظا$\left(\pi + \frac{\pi}{٨}\right)$ = ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$

س إذا كان جا٥٦° ≃ ٠,٨٢٩ . بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا٢٣٦°

جا٢٣٦ = جا(١٨٠ + ٥٦) = −جا٥٦ = −٠,٨٢٩

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$

جتا$(\frac{\pi}{٢}-\theta)$ = جا(θ) ، جا$(\frac{\pi}{٢}-\theta)$ = جتا(θ) ، ظا$(\frac{\pi}{٢}-\theta)$ = ظتا(θ)

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$

جتا$(\frac{\pi}{٢}+\theta)$ = −جا(θ) ، جا$(\frac{\pi}{٢}+\theta)$ = جتا(θ) ، ظا$(\frac{\pi}{٢}+\theta)$ = −ظتا(θ)

الدوال المثلثية (الدائرية) علي ع

$جا(\theta + ٣٦٠ك) = جا\theta$ $\qquad$ $جا(\theta + ٢ك\pi) = جا\theta$

$جتا(\theta + ٣٦٠ك) = جتا\theta$ $\qquad$ $جتا(\theta + ٢ك\pi) = جتا\theta$

$ظا(\theta + ١٨٠ك) = ظا\theta$ $\qquad$ $ظا(\theta + ك\pi) = ظا\theta$

حيث ك عدد صحيح

تمرين : بسط التعبيرات التالية لأبسط شكل :

س $جتا(\theta + ٩\pi) = جتا(\theta + \pi + \cancel{٨\pi})$

$= جتا(\theta + \pi)$

$= جتا(\pi + \theta)$

$= -جتا\theta$

س $جتا(-\frac{\pi}{٢} - \theta) = جتا\left(-\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)\right) = جتا\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = -جا\theta$

س جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س) =

$\cancel{جاس} + جتاس - \cancel{جاس} + جتاس = ٢جتاس$

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

قوانين مهمة

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} \qquad \text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$$

$$\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta} \qquad \text{قتا}\,\theta = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$$

$$\text{جا}^{٢}(\theta) + \text{جتا}^{٢}(\theta) = ١$$

$$١ + \text{ظا}^{٢}(\theta) = \text{قا}^{٢}(\theta)$$

$$١ + \text{ظتا}^{٢}(\theta) = \text{قتا}^{٢}(\theta)$$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة , إذا كان $\text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$, $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد $\text{جتا}\,\theta$ ، $\text{ظا}\,\theta$

طريقة القوانين:

$$\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$$

$$\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$$

$$\text{جتا}^{٢}\theta = ١ - \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$$

$$\text{جتا}\,\theta = \mp\sqrt{١ - \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}} = \mp\frac{٤}{٥}$$

θ في الربع الأول : $\text{جتا}\,\theta = \frac{٤}{٥}$

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{\left(\frac{٣}{٥}\right)}{\left(\frac{٤}{٥}\right)} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٣}{٤}$$

طريقة المثلث:

$\hat{\theta}$ في الربع الأول :

$\text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$ ← المقابل ← الوتر

$\sqrt{٥^{٢} - ٣^{٢}} = ٤$

ملغى

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤\text{ك}}{٥\text{ك}} = \frac{٤}{٥}$$

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣\text{ك}}{٤\text{ك}} = \frac{٣}{٤}$$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان جتا$(\theta) = ٠,٤$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد جا(θ) ، ظا(θ)

طريقة القوانين:

$$جا^{٢}\theta + جتا^{٢}\theta = ١$$

$$جا^{٢}\theta + (٠,٤)^{٢} = ١$$

$$جا^{٢}\theta = ١ - (٠,٤)^{٢}$$

$$جا\theta = \mp\sqrt{١-(٠,٤)^{٢}} = \mp\frac{\sqrt{٢١}}{٥}$$

θ في الربع الأول : $جا\theta = \frac{\sqrt{٢١}}{٥}$

$$ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta} = \frac{\left(\frac{\sqrt{٢١}}{٥}\right)}{٠,٤} = \frac{\sqrt{٢١}}{٢}$$

طريقة المثلث:

θ في الربع الأول :

$جتا\theta = ٠,٤ = \frac{٢}{٥}$ ← المجاور ، ← الوتر

ملغى

$$\sqrt{٥^{٢}-٢^{٢}} = \sqrt{٢١}$$

$$جا\theta = \frac{المقابل}{الوتر} = \frac{\sqrt{٢١}ك}{٥ك} = \frac{\sqrt{٢١}}{٥}$$

$$ظا\theta = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{\sqrt{٢١}ك}{٢ك} = \frac{\sqrt{٢١}}{٢}$$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظا$\theta = \frac{٣}{٤}$ ، جا$\theta < ٠$

فأوجد جاθ ، جتاθ .

طريقة القوانين:

θ في الربع الثالث

$$١ + \text{ظا}^{٢}\theta = \text{قا}^{٢}\theta$$

$$١ + \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} = \text{قا}^{٢}\theta$$

$$\frac{٢٥}{١٦} = \text{قا}^{٢}\theta$$

$$\frac{١٦}{٢٥} = \text{جتا}^{٢}\theta$$

$$\text{جتا}\theta = \mp\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}}$$

$$\text{جتا}\theta = \mp\frac{٤}{٥}$$

$$\text{جتا}\theta = -\frac{٤}{٥}$$ θ في الربع الثالث

$$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$$

$$\frac{٣}{٤} = \frac{\text{جا}\theta}{\left(-\frac{٤}{٥}\right)}$$

$$\text{جا}\theta = \frac{٣ \times \left(-\frac{٤}{٥}\right)}{٤} = \frac{-٣}{٥}$$

طريقة المثلث:

θ في الربع الثالث

ظا$\theta = \frac{٣}{٤}$ ← مقابل ، ← مجاور

$$\sqrt{٤^{٢} + ٣^{٢}} = ٥$$

ملغى

جا$\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جا$\theta = \frac{-٣ك}{٥ك} = \frac{-٣}{٥}$

جتا$\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، جتا$\theta = \frac{-٤ك}{٥ك} = \frac{-٤}{٥}$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = $٢\sqrt{٢}$، جتاθ < ٠
فأوجد جا(θ) ، جتا(θ)

طريقة القوانين:

θ في الربع الثالث

$١ +$ ظا$^٢\theta$ = قا$^٢\theta$

$١ + (٢\sqrt{٢})^٢$ = قا$^٢\theta$

قا$^٢\theta = ٩$

جتا$^٢\theta = \frac{١}{٩}$

جتا$\theta = \mp\sqrt{\frac{١}{٩}}$

جتا$\theta = -\frac{١}{٣}$ ← θ في الربع الثالث

ظا$\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

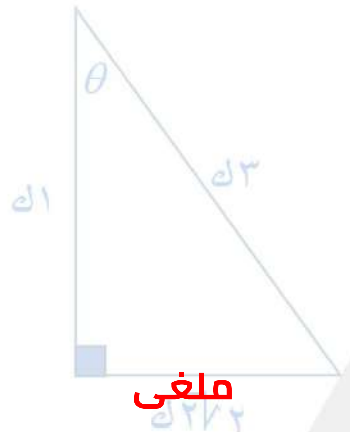
$\frac{٢\sqrt{٢}}{١} = \frac{\text{جا}\theta}{\left(-\frac{١}{٣}\right)}$

جا$\theta = \frac{٢\sqrt{٢} \times \left(\frac{-١}{٣}\right)}{١} = \frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

طريقة المثلث:

$\hat{\theta}$ في الربع الثالث

ظا$\theta = \frac{٢\sqrt{٢}}{١}$ ← مقابل ، ← مجاور



ملغى

$\sqrt{١^٢ + (٢\sqrt{٢})^٢} = ٣$

جاθ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جا$\theta = \frac{-٢\sqrt{٢}ك}{٣ك} = \frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

∵ θ في الربع الثالث. جا$\theta = \frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

جتاθ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، جتا$\theta = \frac{١ك}{٣ك} = \frac{١}{٣}$

∵ θ في الربع الثالث جتا$\theta = -\frac{١}{٣}$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظا(θ) = $\frac{٢٤}{٧}$ ، جتا$(\theta) >$ ٠ .
فأوجد جا(θ) ، جتا(θ)

طريقة القوانين:

θ في الربع الأول

$$١ + ظا^{٢}\theta = قا^{٢}\theta$$

$$١ + \left(\frac{٢٤}{٧}\right)^{٢} = قا^{٢}\theta$$

$$قا^{٢}\theta = \frac{٦٢٥}{٤٩}$$

$$جتا^{٢}\theta = \frac{٤٩}{٦٢٥}$$

$$جتا\theta = \mp\sqrt{\frac{٤٩}{٦٢٥}}$$

$$جتا\theta = + \frac{٧}{٢٥}$$ θ في الربع الأول

$$ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$$

$$\frac{٢٤}{٧} = \frac{جا\theta}{\left(\frac{٧}{٢٥}\right)}$$

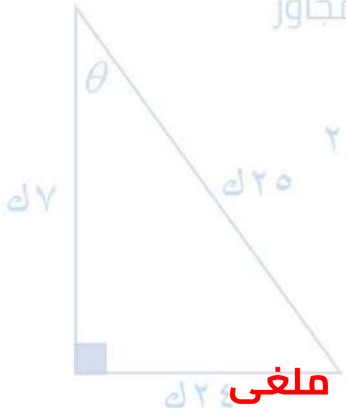
$$جا\theta = \frac{٢٤ \times \left(\frac{٧}{٢٥}\right)}{٧} = \frac{٢٤}{٢٥}$$

طريقة المثلث:

θ في الربع الأول

$$ظا\theta = \frac{٢٤}{٧} \begin{array}{l} \leftarrow مقابل \\ \leftarrow مجاور \end{array}$$

$$\sqrt{٢٤^{٢} + ٧^{٢}} = ٢٥$$



$$جا\theta = \frac{المقابل}{الوتر} = \frac{٢٤ك}{٢٥ك} = \frac{٢٤}{٢٥}$$

$$جتا\theta = \frac{المجاور}{الوتر} = \frac{٧ك}{٢٥ك} = \frac{٧}{٢٥}$$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظتا$(\theta) = \frac{٥}{٨}$ ، جتا$(\theta) > ٠$ فأوجد جا(θ)

طريقة القوانين:

θ في الربع الأول

$١ +$ ظتا$^{٢}\theta =$ قتا$^{٢}\theta$

$١ + \left(\frac{٥}{٨}\right)^{٢} =$ قتا$^{٢}\theta$

قتا$^{٢}\theta = \frac{٨٩}{٦٤}$

قتا$\theta = \mp\sqrt{\frac{٨٩}{٦٤}} = \mp\frac{\sqrt{٨٩}}{٨} \Leftarrow$

جا$\theta = \pm\frac{٨}{\sqrt{٨٩}} = \pm\frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩}$

جا$\theta = \frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩}$ θ في الربع الأول

طريقة المثلث:

θ في الربع الأول

ظتا$\theta = \frac{٥}{٨}$ ← مجاور ← مقابل

$\sqrt{٨^{٢}+٥^{٢}} = \sqrt{٨٩}$

ملغى

جا$\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٨ك}{\sqrt{٨٩}ك} = \frac{٨}{\sqrt{٨٩}}$

$= \frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩} \approx ٠٫٨٤٨$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان $\text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٧}$ ، $٠ < \text{جتا}\,\theta$ فأوجد ظتا(θ) ، ظا(θ)

$$\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$$

$$\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢} + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$$

$$\text{جتا}^{٢}\theta = ١ - \left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢} = \frac{٤٠}{٤٩}$$

$$\text{جتا}\,\theta = \mp\sqrt{\frac{٤٠}{٤٩}} = \mp\frac{\sqrt{٤٠}}{٧}$$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{\sqrt{٤٠}}{٧}$ $\hat{\theta}$ في الربع الأول

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{\left(\frac{٣}{٧}\right)}{\left(\frac{\sqrt{٤٠}}{٧}\right)}$$

$$= \frac{٣}{٧} \times \frac{٧}{\sqrt{٤٠}} = \frac{٣\sqrt{١٠}}{٢٠}$$

$$\text{ظتا}\,\theta = \frac{٢٠}{٣\sqrt{١٠}} = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٣}$$

تذكر أن

$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

$\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

$\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$

$\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$

$\text{جا}^{٢}(\theta) + \text{جتا}^{٢}(\theta) = ١$

$١ + \text{ظا}^{٢}(\theta) = \text{قا}^{٢}(\theta)$

$١ + \text{ظتا}^{٢}(\theta) = \text{قتا}^{٢}(\theta)$

ملغى

س أثبت صحة المطابقة التالية: $\text{جا}^{٣}(س) + \text{جا}(س) \times \text{جتا}^{٢}(س) = \text{جا}(س)$

الطرف الأيمن $= \text{جا}^{٣}س + \text{جا}س \times \text{جتا}^{٢}س$

$= \text{جا}س\left(\text{جا}^{٢}س + \text{جتا}^{٢}س\right)$

$= \text{جا}س\,(١)$

$= \text{جا}س$

= الطرف الأيسر

س أثبت صحة المطابقة التالية: $جتا^{٤}(س)+جا^{٢}(س)\times جتا^{٢}(س) = جتا^{٢}(س)$

الطرف الأيمن $= جتا^{٤}س + جا^{٢}س \times جتا^{٢}س$

$= جتا^{٢}س\left(جتا^{٢}س + جا^{٢}س\right)$

$= جتا^{٢}س\,(١)$

$= جتا^{٢}س$ = الطرف الأيسر

س أثبت صحة المطابقة التالية: $\frac{(قا(\theta)+١)(قا(\theta)-١)}{جا^{٢}(\theta)} = قا^{٢}(\theta)$

الطرف الأيمن $= \frac{\left(قا\theta+١\right)\left(قا\theta-١\right)}{جا^{٢}\theta}$

$= \frac{قا^{٢}\theta-١}{جا^{٢}\theta}$ $\quad ١+ظا^{٢}\theta = قا^{٢}\theta$

$= \frac{ظا^{٢}\theta}{جا^{٢}\theta} = \frac{\left(\frac{جا^{٢}\theta}{جتا^{٢}\theta}\right)}{\left(\frac{جا^{٢}\theta}{١}\right)}$

$= \frac{جا^{٢}\theta}{جتا^{٢}\theta}\cdot\frac{١}{جا^{٢}\theta} = \frac{١}{جتا^{٢}\theta} = قا^{٢}\theta$ = الطرف الأيسر

س أثبت صحة المطابقة التالية:

$\left(قا^{٢}(\theta)+قتا^{٢}(\theta)\right)-\left(ظا^{٢}(\theta)+ظتا^{٢}(\theta)\right) = ٢$

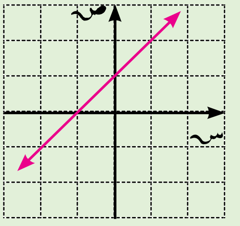
الطرف الأيمن $= \left(قا^{٢}\theta+قتا^{٢}\theta\right)-\left(ظا^{٢}\theta+ظتا^{٢}\theta\right)$

$= قا^{٢}\theta+قتا^{٢}\theta-ظا^{٢}\theta-ظتا^{٢}\theta$

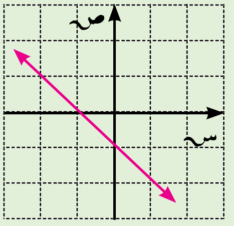
$= ١+\cancel{ظا^{٢}\theta}+١+\cancel{ظتا^{٢}\theta}-\cancel{ظا^{٢}\theta}-\cancel{ظتا^{٢}\theta}$

$= ٢$ = الطرف الأيسر

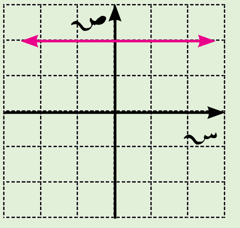
ميل الخط المستقيم



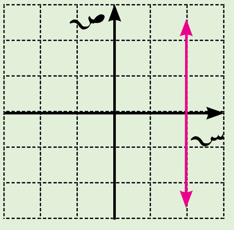
ميل المستقيم موجب



ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط:

س أ(−٢ ، ١) ، ب(٥ ، ٧)

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٧) - (١)}{(٥) - (-٢)} = \frac{٦}{٧}$$

س جـ(٢ ، ٥) ، د(٤ ، ٧)

$$\text{الميل} = \frac{(٧) - (٥)}{(٤) - (٢)} = ١$$

س ق(−١ ، ٤) ، ك(٣ ، −٢)

∴ الميل = $\frac{(-٢)-(٤)}{(٣)-(-١)} = \frac{-٣}{٢}$

س م(٤ ، ٣) ، ن(−٧ ، ٣)

الميل = $\frac{(٣)-(٣)}{(-٧)-(٤)} =$ صفر (مستقيم أفقي)

س أثبت أن النقاط أ(٢ ، −١) ، ب(−١ ، ٥) ، جـ(٣ ، −٣) علي استقامة واحدة.

ميل $\overline{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٥)-(-١)}{(-١)-(٢)} = -٢$

ميل $\overline{أجـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(-٣)-(-١)}{(٣)-(٢)} = -٢$

∴ $\overline{أب} // \overline{أجـ}$ ، مشتركان في أ

∴ أ ، ب ، جـ علي استقامة واحدة

س أ(١ ، −١) ، ب(٢ ، ٢) ، جـ(−١ ، −٧) أثبت أن النقاط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

$م_١$ = ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢-(-١)}{٢-١} = ٣$

$م_٢$ = ميل $\overleftrightarrow{أجـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٧-(-١)}{-١-١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$

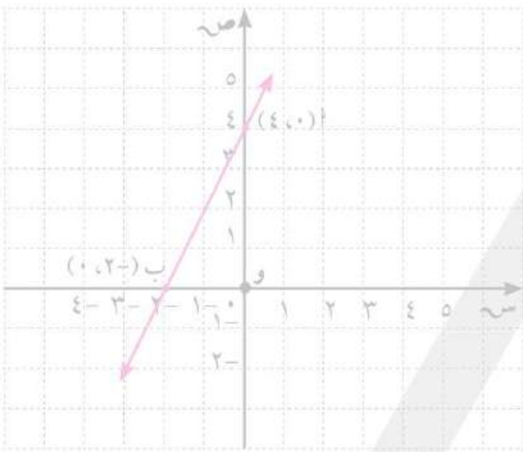
∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{أجـ}$ ، و لكنهما يشتركان في النقطة أ

∴ تكون النقاط أ ، ب ، جـ علي استقامة واحدة .

تذكر أن

العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات و ميل هذا المستقيم م هي : م $=$ ظاθ

س أوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث أ(٠ ، ٤) ، ب(−٢ ، ٠) و قارنه بظل الزاوية $\hat{\text{ب}}$ في المثلث قائم الزاوية ب و أ



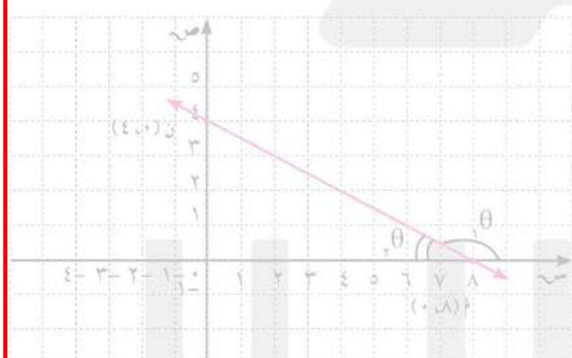
$$\text{م} = \overline{\text{أب}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{(٠)-(٤)}{(-٢)-(٠)} = ٢$$

$$\text{ظا ب} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

$$\text{ظا ب} = \text{الميل} = ٢$$

ملغى

س أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها θ_2 وظل الزاوية النفرجة التي قياسها θ_1



$$\text{م} = \overline{\text{أن}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{(٤)-(٠)}{(٠)-(٨)} = \frac{-١}{٢}$$

$$\text{ظا}\theta_2 = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

$$\theta_1 + \theta_2 = ١٨٠$$

$$\theta_1 = ١٨٠ - \theta_2$$

$$\text{ظا}\theta_1 = \text{ظا}(١٨٠ - \theta_2) = -\text{ظا}\theta_2 = -\frac{١}{٢}$$

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم الذي ميله $(م)$ و يمر بالنقطة $(س_١ ، ص_١)$

$$ص - ص_١ = م\left(س - س_١\right)$$

س اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ ويمر بالنقطة $(٤ ، -١)$

$$ص - ص_١ = م\left(س - س_١\right)$$

$$ص - (-١) = \frac{٣}{٢}\left(س - ٤\right)$$

$$ص + ١ = \frac{٣}{٢}س - ٦$$

$$ص = \frac{٣}{٢}س - ٦ - ١$$

$$ص = \frac{٣}{٢}س - ٧$$

س اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٦ ، ٥)

$$ص - ص_١ = م \left(س - س_١\right)$$

$$ص - ٥ = \frac{-٢}{٣}\left(س - (-٦)\right)$$

$$ص - ٥ = \frac{-٢}{٣} س - ٤$$

$$ص = \frac{-٢}{٣} س - ٤ + ٥$$

$$ص = \frac{-٢}{٣} س + ١$$

س اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين: أ(١ ، ٣) ، ب(−٢ ، ٠)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٠) - (٣)}{(-٢) - (١)} = ١$$

$$ص - ص_١ = م \left(س - س_١\right)$$

$$ص - ٣ = س - ١$$

$$ص = س - ١ + ٣$$

$$ص = س + ٢$$

س اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين: جـ(٣ ، −١) ، د(٢ ، −٢)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(-٢) - (-١)}{(٢) - (٣)} = ١$$

$$ص - ص_١ = م \left(س - س_١\right)$$

$$ص + ١ = س - ٣$$

$$ص = س - ٣ - ١$$

$$ص = س - ٤$$

س إذا كان المستقيم ل:ص = ٢س + ١ فأوجد : معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة(٢ ، − ٣) .

م١ = ٢ (س١ ، ص١)

(٢ ، − ٣)

∵المستقيمين متوازيان م٢ = م١ = ٢

المستقيم هـ : ص − ص١ = م٢ (س − س١)

ص − − ٣ = ٢ (س − ٢)

ص + ~~٣~~ = ٢س − ٤ − ٣

ص = ٢س − ٧

س إذا كان المستقيم ل:ص = ٢س + ١ فأوجد :

معادلة المستقيم ف العمودي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة:(٤ ، − ٣)

م١ = ٢ (س١ ، ص١)

(٤ ، − ٣)

∵المستقيمين متعامدان ∴ م١ × م٢ = −١

م٢ = $\frac{-١}{م١}$ = $\frac{-١}{٢}$

معادلة المستقيم ف : ص − ص١ = م٢ (س − س١)

ص − − ٣ = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٤)

ص = − $\frac{١}{٢}$ س + ٢ − ٣

ص = − $\frac{١}{٢}$ س − ١

س إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠ فأوجد :

$م_١ = \frac{-١}{٣}$

٣ص = −س − ٣

$ص = \frac{-١}{٣} س - ١$

- معادلة المستقيم ل الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (−٣ ، ٢)

∵ المستقيمين متوازيان $م_٢ = م_١ = \frac{-١}{٣}$

معادلة المستقيم ل $ص - ص_١ = م_٢ (س - س_١)$

$ص - ٢ = \frac{-١}{٣}(س - -٣)$

$ص \cancel{- ٢} = \frac{-١}{٣}(س + ٣) + ٢$

$ص = -\frac{١}{٣} س - ١ + ٢ \leftarrow ص = \frac{-١}{٣} س + ١$

س إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠ فأوجد :

$م_١ = \frac{-١}{٣}$

٣ص = −س − ٣

$ص = \frac{-١}{٣} س - ١$

- معادلة المستقيم ن العمودي علي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١ ، ٤)

∵ المستقيمين متعامدان ∴ $م_١ \times م_٢ = -١$

$م_٢ = \frac{-١}{م_١} = \frac{-١}{\left(-\frac{١}{٣}\right)} = ٣$

معادلة المستقيم ن $ص - ص_١ = م_٢ (س - س_١)$

$ص - ٤ = ٣(س - ١)$

$ص = ٣(س - ١) + ٤$

$ص = ٣س - ٣ + ٤ \leftarrow ص = ٣س + ١$

البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم علي الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠

فإن البعد ف بين النقطة د $(س_١ ، ص_١)$ و المستقيم ل

$$ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

س أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = ٣س − ٤ و النقطة هـ (٢ ، ١)

المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

ص = ٣س − ٤

٣س − ص − ٤ = ٠

(٢) (١)

$$ف = \frac{|٣\cancel{س} - \cancel{ص} - ٤|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-١)^٢}} = \frac{\sqrt{١٠}}{١٠} \simeq ٠,٣١٦$$ وحدة طول

س أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = −س + ٣ و النقطة د (٢ ، ٥)

ص = −س + ٣

− س − ص + ٣ = ٠

(٢) (٥)

$$ف = \frac{|-\cancel{س} - \cancel{ص} + ٣|}{\sqrt{(-١)^٢ + (-١)^٢}} = ٢\sqrt{٢} \simeq ٢,٨٢٨$$ وحدة طول

س أوجد البعد من النقطة د(−٤ ، −٣) الى المستقيم : ٢ص = ٣س − ٧

$$\text{٢ص} = \text{٣س} - ٧$$
$$\text{٣س} - \text{٢ص} - ٧ = ٠$$
$$(-٤)\quad(-٣)$$
$$\text{ف} = \frac{|\cancel{\text{٣س}} - \cancel{\text{٢ص}} - ٧|}{\sqrt{(٣)^{٢} + (-٢)^{٢}}} = \sqrt{١٣} \quad \text{وحدة طول}$$

س أوجد البعد من النقطة ط (٣ ، −٤) الى المستقيم: $\text{ص} = -\frac{٤}{٣} + \frac{\text{س}}{٦}$

$$\text{ص} = -\frac{٤}{٣} + \frac{\text{س}}{٦} \quad (\times ٦)$$
$$\text{٦ص} = -٨ + \text{س}$$
$$\text{س} - \text{٦ص} - ٨ = ٠$$
$$(٣)\quad(-٤)$$
$$\text{ف} = \frac{|\cancel{\text{س}} - \cancel{\text{٦ص}} - ٨|}{\sqrt{(١)^{٢} + (-٦)^{٢}}} \simeq ٣,١٢٤ \quad \text{وحدة طول}$$

س أوجد البعد بين نقطة الأصل و المستقيم : ٢ص = ٣س + ٤

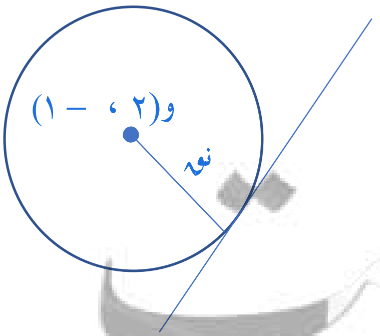
$$\text{٢ص} = \text{٣س} + ٤$$
$$\text{٣س} - \text{٢ص} + ٤ = ٠$$
$$(٠)\quad(٠)$$
$$\text{ف} = \frac{|\cancel{\text{٣س}} - \cancel{\text{٢ص}} + ٤|}{\sqrt{(٣)^{٢} + (-٢)^{٢}}} \simeq ١,١٠٩ \quad \text{وحدة طول}$$

$$\frac{|3(0) - 2(0) + 4|}{\sqrt{(3)^2 + (-2)^2}}$$

1.109400392

س أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزهاو(٢ ، −١) إذا كان المستقيم : ٣س − ٤ص + ٧ = ٠ مماسا لها.

$$(٢)\quad(-١)$$
$$\text{نو} = \frac{|\cancel{\text{٣س}} - \cancel{\text{٤ص}} + ٧|}{\sqrt{(٣)^{٢} + (-٤)^{٢}}} = \frac{١٧}{٥} \quad \text{وحدة طول}$$



س أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، -٣) على المستقيم : -٢س + ص - ٤ =٠

$$ف = \frac{|-٢\underset{(٢)}{\cancel{س}} + \underset{(-٣)}{\cancel{ص}} - ٤|}{\sqrt{(-٢)^٢ + (١)^٢}} \simeq ٤,٩٢ \text{ وحدة طول}$$

س أوجد طول العمود المرسوم من نقطة (-٤ ، ٧) على المستقيم : ص = -٥س + ١

$$ص = -٥س + ١$$

$$-٥س - ص + ١ = ٠$$

$$ف = \frac{|-٥\underset{(-٤)}{\cancel{س}} - \underset{(٧)}{\cancel{ص}} + ١|}{\sqrt{(-٥)^٢ + (-١)^٢}} \simeq ٢,٧٥ \text{ وحدة طول}$$

$$\frac{|-5(-4) - (7) + 1|}{\sqrt{(-5)^2 + (-1)^2}}$$

2.74562589193

س أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٣) ، (-٥ ، ١).

نقطة الأصل (٠ ، ٠) .

المستقيم المار بالنقطتين $(\overset{س_١}{٧} ، \overset{ص_١}{٣})$ ، $(\overset{س_٢}{-٥} ، \overset{ص_٢}{١})$.

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٣}{-٥ - ٧} = \frac{١}{٦}$$

المستقيم $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$$ص - ٣ = \frac{١}{٦}(س - ٧)$$

$$ص = \frac{١}{٦}س - \frac{٧}{٦} + ٣$$

$$ص = \frac{١}{٦}س + \frac{١١}{٦}$$

$$\frac{١}{٦}س - ص + \frac{١١}{٦} = ٠$$

$$ف = \frac{\left|\frac{١}{٦}\underset{(٠)}{\cancel{س}} - \underset{(٠)}{\cancel{ص}} + \frac{١١}{٦}\right|}{\sqrt{\left(\frac{١}{٦}\right)^٢ + (-١)^٢}}$$

$$\simeq ١,٨١ \text{ وحدة طول}$$

معادلة الدائرة

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

وتسمى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز (د ، هـ)
وطول نصف القطر نق

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، − ٢) وطول نصف قطرها (٧) وحدات

(٣ ، − ٢) ، ٧
د هـ ، نق

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$(س - ٣)^٢ + (ص - - ٢)^٢ = ٧^٢$

$(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٤٩$

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، − ٣) وطول نصف قطرها (٥) وحدات

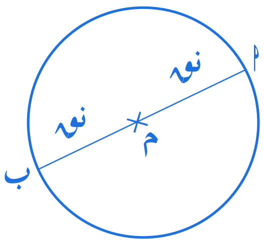
(٥ ، − ٣) ، ٥
د هـ ، نق

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$(س - ٥)^٢ + (ص - - ٣)^٢ = ٥^٢$

$(س - ٥)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٢٥$

س أوجد معادلة الدائرة التي قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(−٣ ، ٦) ، ب(١ ، −٢)



مركز الدائرة هو منتصف $\overline{\text{أب}}$

$$\text{م}\left(\frac{-٣+١}{٢} ، \frac{٦+-٢}{٢}\right) \leftarrow \text{م}(\overset{\text{د}}{-١} ، \overset{\text{هـ}}{٢})$$

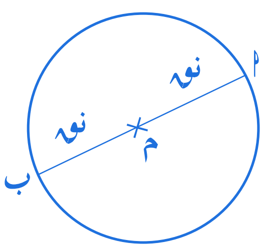
$$\text{نق} = \text{أم} = \sqrt{(-١--٣)^{٢}+(٢-٦)^{٢}} = ٢\sqrt{٥}$$ وحدة طول

معادلة الدائرة $(\text{س}-\text{د})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}=\text{نق}^{٢}$

$$(\text{س}--١)^{٢}+(\text{ص}-٢)^{٢}=(٢\sqrt{٥})^{٢}$$

$$(\text{س}+١)^{٢}+(\text{ص}-٢)^{٢}=٢٠$$

س أوجد معادلة الدائرة التي قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(٤ ، −٢) ، ب(٢ ، ٤)



مركز الدائرة هو منتصف $\overline{\text{أب}}$

$$\text{م}\left(\frac{٤+٢}{٢} ، \frac{-٢+٤}{٢}\right) \leftarrow \text{م}(٣ ، ١)$$

$$\text{نق} = \text{أم} = \sqrt{(٣-٤)^{٢}+(١--٢)^{٢}} = \sqrt{١٠}$$ وحدة طول

معادلة الدائرة $(\text{س}-\text{د})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}=\text{نق}^{٢}$

$$(\text{س}-٣)^{٢}+(\text{ص}-١)^{٢}=(\sqrt{١٠})^{٢}$$

$$(\text{س}-٣)^{٢}+(\text{ص}-١)^{٢}=١٠$$

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات

س ^{٢} + ص ^{٢} = نق ^{٢}

س ^{٢} + ص ^{٢} = ١٦

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ سم

القطر = ٦ وبالتالي نق = ٣ سم

س ^{٢} + ص ^{٢} = نق ^{٢}

س ^{٢} + ص ^{٢} = ٩

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٤) و تمس محور الصادات

(س – د) ^{٢} + (ص – هـ) ^{٢} = نق ^{٢} نق = |د| = |٣| = ٣

(س – ٣) ^{٢} + (ص – ٤) ^{٢} = ٣ ^{٢}

(س – ٣) ^{٢} + (ص – ٤) ^{٢} = ٩

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٤) و تمس محور السينات

(س – د) ^{٢} + (ص – هـ) ^{٢} = نق ^{٢} نق = |هـ| = |٤| = ٤

(س – ٣) ^{٢} + (ص – ٤) ^{٢} = ٤ ^{٢}

(س – ٣) ^{٢} + (ص – ٤) ^{٢} = ١٦

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

س $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$\left\{\begin{array}{l} - د = ٢ \Leftarrow د = -٢ \\ -هـ = -٣ \Leftarrow هـ = ٣ \end{array}\right.$ مركز الدائرة $(-٢ ، ٣)$

$نق^٢ = ٩ \Leftarrow نق = \sqrt{٩} = ٣$

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

س $س^٢ + ص^٢ = ٤٩$

$\left\{\begin{array}{l} د = ٠ \\ هـ = ٠ \end{array}\right.$ مركز الدائرة $(٠ ، ٠)$

$نق = \sqrt{٤٩} = ٧$

س $(س - ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٣٦$

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$د = ٤ \quad هـ = -٥ \Leftarrow$ مركز الدائرة $(٤ ، -٥)$

$نق = \sqrt{٣٦} = ٦$

الصورة العاملة لمعادلة الدائرة :

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ل س} + \text{ك ص} + \text{ب} = ٠$$

حيث ل ، ك ، ب ثوابت

مركز الدائرة $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right)$

نصف القطر $\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب}}$ حيث $\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب} > ٠$

س عين مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة:

$$٢\text{س}^{٢} + ٢\text{ص}^{٢} - ١٢\text{س} - ٤\text{ص} - ٣٠ = ٠$$

بالقسمة علي ٢ : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} \underbrace{- ٦}_{\text{ل}}\text{س} \underbrace{- ٢}_{\text{ك}}\text{ص} \underbrace{- ١٥}_{\text{ب}} = ٠$

مركز الدائرة $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right) = \left(\frac{٦}{٢} ، \frac{٢}{٢}\right) = (٣ ، ١)$

$$\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب}} = \frac{١}{٢}\sqrt{(-٦)^{٢} + (-٢)^{٢} - ٤(-١٥)} = ٥$$

س عين مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة:

$$٣\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢} - ٦\text{س} + ٩\text{ص} - ١٢ = ٠$$

بالقسمة علي ٣ : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} \underbrace{- ٢}_{\text{ل}}\text{س} \underbrace{+ ٣}_{\text{ك}}\text{ص} \underbrace{- ٤}_{\text{ب}} = ٠$

مركز الدائرة $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right) = \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{-٣}{٢}\right) = \left(١ ، \frac{-٣}{٢}\right)$

$$\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب}} = \frac{١}{٢}\sqrt{(-٢)^{٢} + (٣)^{٢} - ٤(-٤)} = \frac{\sqrt{٢٩}}{٢}$$

$$س^2 + ص^2 + ل س + ك ص + ب = ٠$$

حيث ل ، ك ، ب ثوابت

- عندما $ل^2 + ك^2 - ٤ب < ٠$ فإن المعادلة لا تمثل دائرة.
- عندما $ل^2 + ك^2 - ٤ب = ٠$ فإن المعادلة تمثل نقطة.
- عندما $ل^2 + ك^2 - ٤ب > ٠$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسر.

س $س^2 + ص^2 - ٤س + ٧ص + ١٧ = ٠$

$ل = -٦$
$ك = -٢$
$جـ = -١٥$

$ل^2 + ك^2 - ٤ب = (-٤)^2 + (٧)^2 - ٤(١٧) = -٣$

$\because -٣ <$ صفر

$\therefore$ ليست دائرة.

س $س^2 + ص^2 + ٥س - ٦ص - ٤ = ٠$

$ل = -٢$
$ك = ٣$
$جـ = -٤$

$ل^2 + ك^2 - ٤ب = (٥)^2 + (-٦)^2 - ٤(-٤) = ٧٧$

$\because ٧٧ >$ صفر $\therefore$ معادلة دائرة.

مركزها $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(\frac{-٥}{٢} ، \frac{٦}{٢}\right) = \left(\frac{-٥}{٢} ، ٣\right)$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^2 + ك^2 - ٤ب} = \frac{١}{٢}\sqrt{٧٧}$

س $س^2 + ص^2 - ٢س - ٢ص + ٢ = ٠$

$ل^2 + ك^2 - ٤ب = (-٢)^2 + (-٢)^2 - ٤ \times (٢) =$ صفر

$\therefore$ تمثل نقطة. $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right)$

$\left(\frac{٢}{٢} ، \frac{٢}{٢}\right)$

$(١ ، ١)$

س $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - ٣\text{س} + ٥\text{ص} - \frac{١٥}{٤} = ٠$

ل ك ب

$\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - ٤\text{ب} = ٩ + ٢٥ - ٤\left(\frac{-١٥}{٤}\right) = ٩ + ٢٥ + ١٥ = ٤٩ > ٠$

$٤٩ > ٠$ ∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة.

مركزها $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢} ، \frac{-٥}{٢}\right)$

نق $= \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - ٤\text{ب}} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤٩} = \frac{٧}{٢}$

س $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٤\text{س} - ٧\text{ص} + ٢٠ = ٠$

ل ك ب

$\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - ٤\text{ب} = ١٦ + ٤٩ - ٤ \times ٢٠ = -١٥ < ٠$

∴ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

س $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - ٦\text{س} + ٨\text{ص} + ٢٥ = ٠$

ل ك ب

$\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - ٤\text{ب} = ٣٦ + ٦٤ - ٤ \times ٢٥ = ٠$

∴ المعادلة تمثل نقطة $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right)$

$\left(\frac{٦}{٢} ، \frac{-٨}{٢}\right)$

$(٣ ، -٤)$

معادلة مماس لدائرة بالصورة القياسية :

س أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س - ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ = ٢٥$
عند نقطة التماس أ$(٦ ، ٤)$

المركز $(٢ ، ١)$

نق $= \sqrt{٢٥} = ٥$

ميل نصف القطر $= \dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \dfrac{١ - ٤}{٢ - ٦} = \dfrac{٣}{٤}$

المماس ⊥ نصف القطر

م المماس $= \dfrac{-١}{\left(\dfrac{٣}{٤}\right)} = \dfrac{-٤}{٣}$

معادلة المماس :

$ص - ص_١ = م\left(س - س_١\right)$

$ص - ٤ = \dfrac{-٤}{٣}\left(س - ٦\right)$

$ص = \dfrac{-٤}{٣} س + ٨ + ٤$

$ص = \dfrac{-٤}{٣} س + ١٢$

س أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٥$
عند نقطة التماس أ$(٣ ، ١)$

المركز $(١ ، ٢)$

نق $= \sqrt{٥}$

ميل نصف القطر $= \dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \dfrac{٢ - ١}{١ - ٣} = \dfrac{-١}{٢}$

∵ المماس ⊥ نصف القطر

ميل المماس $= \dfrac{-١}{\left(\dfrac{-١}{٢}\right)} = ٢$

معادلة المماس :

$ص - ص_١ = م\left(س - س_١\right)$

$ص - ١ = ٢\left(س - ٣\right)$

$ص = ٢س - ٦ + ١$

$ص = ٢س - ٥$

معادلة مماس لدائرة بالصورة العامة :

س أثبت أن النقطة أ(١ ، ١) تنتمى الى الدائرة التي مركزها (و) ومعادلتها: $س^٢ + ص^٢ + ٦س + ٨ص - ١٦ = ٠$
ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

بالتعويض : $(١)^٢ + (١)^٢ + ٦(١) + ٨(١) - ١٦ = ٠$

∴ أ(١ ، ١) تنتمي إلي الدائرة

مركزها $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right)$

$\left(\frac{-٦}{٢} ، \frac{-٨}{٢}\right)$

$(-٣ ، -٤)$

نق $= \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{٦^٢ + ٨^٢ - ٤(-١٦)} = \sqrt{٤١}$

ميل نصف القطر $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{-٤ - ١}{-٣ - ١} = \frac{٥}{٤}$

∵ المماس ⊥ نصف القطر

ميل المماس $= \frac{-١}{\left(\frac{٥}{٤}\right)} = \frac{-٤}{٥}$

معادلة المماس :

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ١ = \frac{-٤}{٥}(س - ١)$

$ص = \frac{-٤}{٥}س + \frac{٤}{٥} + ١$

$ص = \frac{-٤}{٥}س + \frac{٩}{٥}$

س أثبت أن النقطة $a(٦ ، -٤)$ تنتمي الى الدائرة التي مركزها (و) ومعادلتها:

$س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص - ٢٠ = ٠$

ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة

بالتعويض عن النقطة $(٦ ، -٤)$: $(٦)^٢ + (-٤)^٢ - ٤(٦) + ٢(-٤) - ٢٠ = ٠$

$\therefore$ $a(٦ ، -٤)$ تنتمي إلي الدائرة

مركزها $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right)$

$(٢ ، -١)$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ٤ب}$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{(-٤)^٢ + ٢^٢ - ٤(-٢٠)} = ٥$

ميل نصف القطر $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{(-١) - (-٤)}{٢ - ٦} = \frac{-٣}{٤}$

$\because$ المماس $\perp$ نصف القطر

م المماس $= \frac{-١}{\left(\frac{-٣}{٤}\right)} = \frac{٤}{٣}$

معادلة المماس:

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - (-٤) = \frac{٤}{٣}(س - ٦)$

$ص = \frac{٤}{٣}س - ٨ - ٤$

$ص = \frac{٤}{٣}س - ١٢$