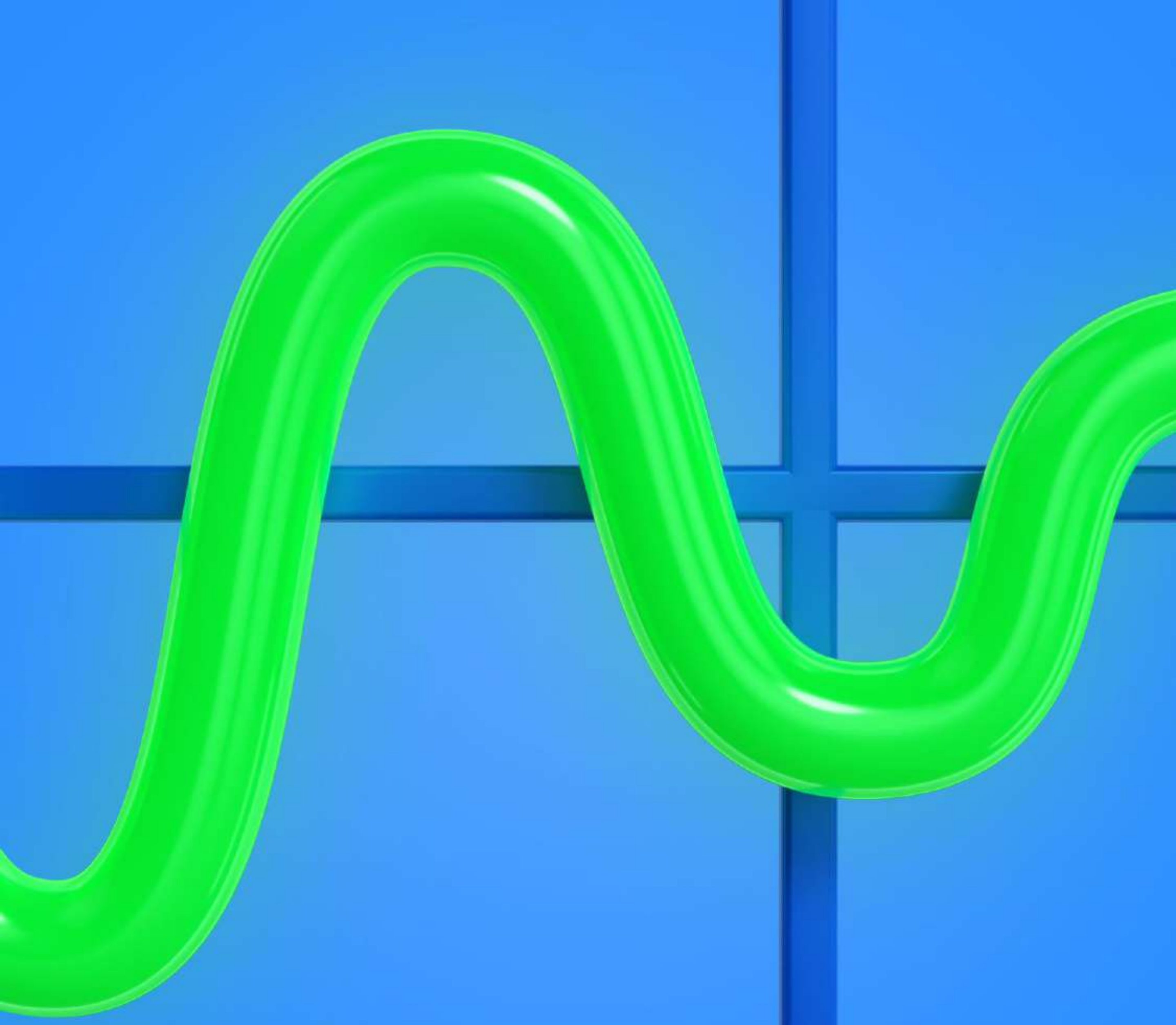


الـريـاضـيـات

الـكـورس الثاني

11

UULA.COM 2021-2022

UULA

الرياضيات

الكورس الثاني

١١

شلون تتفوق بدراستك

طريقة علا المتكاملة للدراسة تشمل الاستفادة من المذكرة و الفيديوهات و الاختبارات

علا تخلي المذكرة أقوى

تبي أعلى الدرجات؟ لا تعتمد على المذكرة بروحها – ادرس صح من الفيديوهات و الاختبارات

فيديوهات تشرح لك

تابع الفيديوهات و انت تدرس المذكرة عشان تضبط الدرس

اختبارات ذكية تدربك

حل الاختبارات الالكترونية أول بأول عشان ترفع مستواك

اشترك بالمادة

ادرس على تفعيل اشتراكك عشان تستفيد كثر ما تقدر

UULA

اكتشف عالم التفوق مع باقات علا

ادرس جميع مواد مرحلتك باشتراك واحد بسعر خيالي

UULA

المنقذ

أقوى مذكرة صارت الحين أقوى و أقوى مع خاصية
المنقذ للمساعدة الفورية

شنو المنقذ ؟

امسح الباركود بكاميرا تلفونك
وتعرف على طريقة استخدام المنقذ

شنو فايدة هالخاصية ؟

أول ما تحتاج مساعدة بالمادة , المنقذ بينقذك .

امسح الباركود بكاميرا التلفون أو اضغط عليه إذا كنت فاتح
المذكرة من جهازك و يطلع لك فيديو الشرح.

قائمة المحتوى

الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

الوحدة التخيلية

هي العدد الذى مربعه (-1) ويرمز له بالرمز i

$i = \sqrt{-1}\ , i^2 = -1$

الأعداد التخيلية

- لأى عدد حقيقي موجب m ،

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$$

- تسمى الأعداد الحقيقية التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ أعداد تخيلية

س بسط كل مما يلى مستخدماً الوحدة التخيلية i:

- $\sqrt{-4}$
  $= 2i$
- $\sqrt{-8}$
  $= 2\sqrt{2}\, i$
- $\sqrt{-2}$
  $= \sqrt{2}\, i$
- $-\sqrt{-12}$
  $= -2\sqrt{3}\, i$
- $\sqrt{-36}$
  $= 6\, i$

تعريف: العدد المركب

العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a, b عددان حقيقيان , i الوحدة التخيلية.

$$\underbrace{z = a}_{\text{الجزء الحقيقي}} + \underbrace{bi}_{\text{الجزء التخيلي}}$$

س أكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

- $\frac{\sqrt{-9}+5}{7}$

$= \frac{3i+5}{7}$

$= \frac{5}{7} + \frac{3}{7}i$

- $\frac{10-\sqrt{-100}}{5}$

$= \frac{10-10i}{5}$

$= 2 - 2i$

- $\sqrt{-18} + 7$

$= 3\sqrt{2}\,i + 7$

$= 7 + 3\sqrt{2}\,i$

س أكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

- $1 - \sqrt{-20}$

$= 1 - \sqrt{20}\,i$

$= 1 - 2\sqrt{5}\,i$

- $\frac{1+\sqrt{-25}}{4}$

$= \frac{1+5i}{4}$

$= \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$

- $\sqrt{-9} + 6$

$= 3i + 6$

$= 6 + 3i$

تساوى عددين مركبين

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.
ليكن:

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad , z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , b_1 = b_2$$

س أوجد قيم كل من $x,y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

- $x + 5i = 7 - 3yi$

$x = 7$

$$\frac{5}{-3} = \frac{\cancel{-3}y}{\cancel{-3}}$$

$$-\frac{5}{3} = y$$

- $(x+3) + y^2 i = 5 - yi$

$x + 3 = 5$

$x = 5 - 3$

$x = 2$

$y^2 = -y$

$y^2 + y = 0$

$y(y+1) = 0$

$y = 0 \qquad y = -1$

- $3i = 2x - 5yi$

$0 + 3i = 2x - 5yi$

$2x = 0$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{0}{2}$$

$x = 0$

$-5y = 3$

$$\frac{\cancel{-5}y}{\cancel{-5}} = \frac{3}{-5}$$

$$y = -\frac{3}{5}$$

س أوجد قيم كل من $x,y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

- $12 + 3i = 4x - 9yi$

$12 + 3i = 4x - 9yi$

$\therefore 4x = 12 \Rightarrow x = 3 \quad , \quad -9y = 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

- $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$

$x^2 - y^2 i = 9 - 25i$

$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$

$\Rightarrow x = -3 , x = 3$

$-y^2 = -25 \Rightarrow$

$y^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{25} \Rightarrow y = \pm 5$

$\Rightarrow y = -5 , y = 5$

- $2x + yi = 1$

$2x + yi = 1 + 0i$

$\therefore 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y = 0$

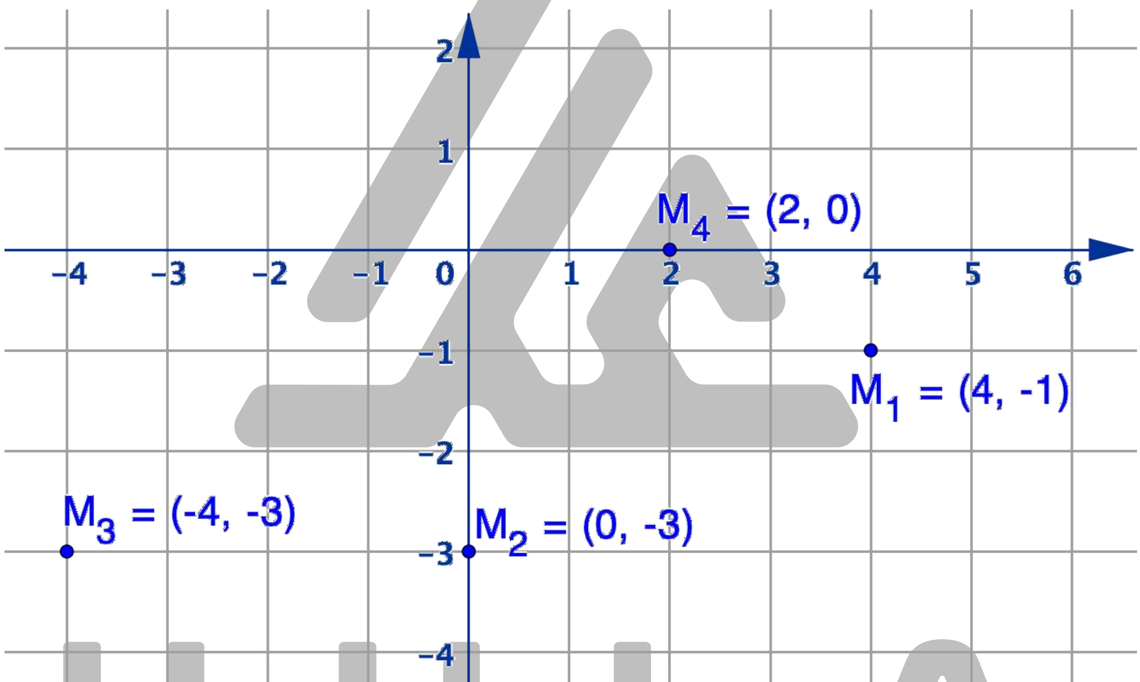
التمثيل البياني لعدد مركب

$z = a + bi \longleftrightarrow M(a\,, b)$

الصورة الجبرية — الصورة الديكارتية

س مثل كلاً مما يلي في المستوي المركب:

- $z_1 = 4 - i$ $\quad M_1(4\,, -1)$
- $z_2 = -3i$ $\quad M_2(0\,, -3)$
- $z_3 = -4 - 3i$ $\quad M_3(-4, -3)$
- $z_4 = 2$ $\quad M_4(2\,, 0)$



س أكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط:

- $K(7{,}0)$ $\quad Z_1 = 7$
- $H(1, -2)$ $\quad Z_2 = 1 - 2i$
- $N(-4, 1)$ $\quad Z_3 = -4 + i$
- $J(0, -5)$ $\quad Z_1 = -5i$
- $L(2, -1)$ $\quad Z_2 = 2 - i$
- $M(3, 2)$ $\quad Z_3 = 3 + 2i$

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

أولاً: جمع وطرح الأعداد المركبة

س إذا كان $z_1 = -2 + 5i\ ,\ z_2 = 3.4 - 1.2i\ ,\ z_3 = -0.3i$ فأوجد:

- $z_1 + z_2$

$$= (-2 + 5i) + (3.4 - 1.2i)$$

$$= -2 + 5i + 3.4 - 1.2i$$

$$= 1.4 + 3.8i$$

- $z_2 - z_1$

$$= (3.4 - 1.2i) - (-2 + 5i)$$

$$= 3.4 - 1.2i + 2 - 5i$$

$$= 5.4 - 6.2i$$

- $z_3 - z_2 - z_1$

$$= (-0.3i) - (3.4 - 1.2i) - (-2 + 5i)$$

$$= -0.3i - 3.4 + 1.2i + 2 - 5i$$

$$= -1.4 - 4.1i$$

س إذا كان $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 4-7i$, $z_3 = 2i$ فأوجد:

- $z_1 + z_2$

$= (2+3i) + (4-7i)$

$= 2+3i+4-7i = 6-4i$

- $z_1 - z_2$

$= (2+3i) - (4-7i)$

$= 2+3i-4+7i = -2+10i$

- $z_3 + z_2 + z_1$

$= (2i) + (4-7i) + (2+3i)$

$= 2i+4-7i \ + \ 2+3i$

$= 6-2i$

ثانياً: ضرب الأعداد المركبة

إذا كان $z_1 , z_2 \in \mathbb{C} , c \in \mathbb{R}$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i \, , z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن:

- $cz_1 = ca_1 + cb_1 i$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

س أوجد الناتج:

- $(6 - 5i)(4 - 3i)$

$= 24 - 18i - 20i + 15i^2$

$= 24 - 18i - 20i - 15$

$= 9 - 38i$

- $(9 + 4i)(4 - 9i)$

$= 36 - 81i + 16i - 36i^2$

$= 36 - 81i + 16i + 36$

$= 72 \; - 56i$

- $\underbrace{(12i)(7i)}(i + 1)$

$= 84i^2(i + 1)$

$= -84(i + 1) = -84i - 84$

$= -84 - 84i$

س أوجد الناتج:

- $(5i)(-4i)$

$= -20i^2$

$= -20(-1)$

$= 20$

- $3(7+5i)$

$= 3\times 7 + 3\times 5i$

$= 21 + 15i$

- $(2+3i)(-3+5i)$

$= -6 + 10i - 9i + 15i^2$

$= -6 + i + 15(-1)$

$= -21 + i$

- $(4i)(1-\frac{1}{2}i)(1+\frac{1}{2}i)$

$= 4i\left((1)^2 - \left(\frac{1}{2}i\right)^2\right)$

$= 4i\left(1 - \frac{1}{4}(-1)\right)$

$= 4i\left(\frac{5}{4}\right)$

$= 5i$

س إذا كان $z_1 = 2 - 3i \;,\; z_2 = 1 + 4i$ فأوجد:

- $z_1 \cdot z_2$

$= (2 - 3i).(1 + 4i)$

$= 2 + 8i - 3i - 12i^2$

$= 2 + 8i - 3i + 12$

$= 14 + 5i$

- $\frac{1}{2} z_1$

$= \frac{1}{2}(2 - 3i)$

$= 1 - \frac{3}{2}\, i$

س إذا كان $z_1 = 2 + 3i \;,\; z_2 = 5 - i$ فأوجد:

- $z_1 \cdot z_2$

$= (2 + 3i)(5 - i)$

$= 10 - 2i + 15i - 3i^2$

$= 10 - 2i + 15i + 3$

$= 13 + 13i$

- $-3z_2$

$= -3(5 - i)$

$= -3(5) - 3(-i)$

$= -15 + 3i$

قوى العدد المركب

س أوجد:

- $5(i)^{73}$

$= 5(i)^{18\times4+1} \quad = 5(i)^{1} \quad = 5i$

- $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{3}$

$z = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i$

$z^{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i\right)^{2}$ $\quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2}i\right)^{2} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ملغى

$z^{3} = z^{2}.z = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,.\,\frac{1}{2}i$

$= i$

- $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$

$z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$

ملغى

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2=i$

$\therefore z^4=z^2.z^2=i.i=i^2=-1$

س إذا كان: $z_3=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$, $z_2=-2i$, $z_1=i$ فأوجد:

- $(z_1)^{21}$

$z_1^{21}=i^{21}=i^{5\times4+1}=i$

- $(z_2)^6$

$z_2^6=(-2i)^6=(-2)^6\times i^6=64\ i^6$

$=64\times\ i^{1\times4+2}$

$=64\times\ i^2=64(-1)=-64$

- $(z_3)^2$

$$z_3^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- $z_3^3 = z_3^2 . z_3$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{-1}{4} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}i} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}i} + \frac{3}{4}i^2$$

ملغى

$$= \frac{-1}{4} - \frac{3}{4} = -1$$

ثالثاً: قسمة الأعداد المركبة

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب

$z = a + bi$ هو $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

خواص مرافق العدد المركب

$z = a + bi \quad , \quad \bar{z} = a - bi$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

$\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

① $z + \bar{z} = 2a$

② $z - \bar{z} = 2bi$

③ $z.\bar{z} = a^2 + b^2$

④ $\bar{\bar{z}} = z$

ثالثاً: قسمة الأعداد المركبة

مرافق العدد المركب

س إذا كان $z_2 = 3 + 5i$, $z_1 = 2 - 7i$ فأوجد:

- $\overline{Z_1 + Z_2}$

$= \overline{z_1} + \overline{z_2} = (2 + 7i) + (3 - 5i)$

$= 2 + 7i + 3 - 5i$

$= 5 + 2i$

- $\overline{z_1 - z_2}$

$= \overline{z_1} - \overline{z_2} = (2 + 7i) - (3 - 5i)$

$= 2 + 7i - 3 + 5i$

$= -1 + 12i$

- $\overline{z_1 \cdot z_2}$

$= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (2 + 7i).(3 - 5i)$

$= 6 - 10i + 21i - 35i^2$

$= 6 - 10i + 21i + 35$

$= 41 + 11i$

س إذا كان $z_1 = 3 + 4i \ , \ \ z_2 = 5 - 2i$ فأوجد:

- $z_1 + \overline{z_1}$

  $= (3 + 4i) + (3 - 4i)$

  $= 3 + 4i + 3 - 4i = 6$

- $z_1 - \overline{z_1}$

  $= (3 + 4i) - (3 - 4i)$

  $= 3 + 4i - 3 + 4i = 8i$

- $\overline{(\overline{z_1})}$

  $= Z_1 = 3 + 4i$

- $\overline{z_1 + z_2}$

  $= \ \overline{z_1} + \overline{z_2} = (3 - 4i) + (5 + 2i)$

  $= 3 - 4i + 5 + 2i$

  $= 8 \ - 2i$

- $\overline{z_1 . z_2}$

  $= \overline{z_1} . \overline{z_2} = (3 - 4i).(5 + 2i)$

  $= 15 + 6i \ - 20i \ \ - 8\,i^2$

  $= 15 + 6i \ - 20i + 8$

  $= 23 \ - 14i$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$
ويرمز له بالرمز z^{-1}

ويكون: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi}$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2} \qquad z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

س أوجد المعكوس الضربي لكل من:

- $z_1 = -3i - 7 \quad = -7 - 3i$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{-7-3i} \times \frac{-7+3i}{-7+3i} \qquad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$= \frac{3i-7}{(-7)^2+(-3)^2} = \frac{-7+3i}{58} = \frac{-7}{58} + \frac{3}{58} i$$

- $z_2 = 5 + 11i$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{5+11i} \cdot \frac{5-11i}{5-11i}$$

$$= \frac{5-11i}{(5)^2+(11)^2} = \frac{5-11i}{146} = \frac{5}{146} - \frac{11}{146} i$$

- $z_3 = 6i$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{6i} \times \frac{i}{i}$$

$$= \frac{i}{6i^2} = \frac{i}{-6} = -\frac{1}{6} i$$

س أوجد المعكوس الضربي لكل من:

- $z_1 = 3 - 5i$

$$Z_1^{-1} = \frac{1}{3-5i} \times \frac{3+5i}{3+5i}$$

$$= \frac{3+5i}{(3)^2 + (5)^2}$$

$$= \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i$$

- $z_2 = 2i - 1 \quad = -1 + 2i$

$$Z_2^{-1} = \frac{1}{-1+2i}$$

$$= \frac{1}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i}$$

$$= \frac{-1-2i}{(-1)^2 + (2)^2}$$

$$= \frac{-1}{5} - \frac{2}{5}i$$

- $z_3 = -7i$

$$Z_3^{-1} = \frac{1}{-7i}$$

$$= \frac{1}{-7i} \times \frac{i}{i}$$

$$= \frac{i}{-7 \times (-1)} = \frac{i}{7} = \frac{1}{7}i$$

س أوجد ناتج قسمة $2i - 3$ على $1 + 2i$

$$\frac{2i-3}{1+2i} = \frac{2i-3}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{2i - 4i^2 - 3 + 6i}{(1)^2 + (2)^2}$$

$$= \frac{2i + 4 - 3 + 6i}{5} = \frac{1+8i}{5}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$$

س أوجد ناتج قسمة $5 - 6i$ على $2 + 3i$

$$\frac{5-6i}{2+3i} = \frac{5-6i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i}$$

$$= \frac{10 - 15i - 12i + 18i^2}{(2)^2 + (3)^2}$$

$$= \frac{10 - 15i - 12i - 18}{(2)^2 + (3)^2}$$

$$= \frac{-8 - 27i}{13}$$

$$= \frac{-8}{13} - \frac{27}{13}i$$

س أكتب كلاً مما يلي في الصورة الجبرية :

■ $\frac{3+i}{2+5i}$ $= \frac{3+i}{2+5i} \times \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{6-15i+2i-5i^2}{(2)^2+(5)^2}$

$= \frac{6-15i+2i+5}{29}$

$= \frac{11-13i}{29} \quad = \frac{11}{29} - \frac{13}{29}i$

■ $\frac{2-i}{2+i}$ $= \frac{2-i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{4-2i-2i+i^2}{(2)^2+(1)^2}$

$= \frac{4-2i-2i-1}{5}$

$= \frac{3-4i}{5} \quad = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

■ $\frac{5+i}{2-3i}$

$= \frac{5-i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i}$

ملغى

$= \frac{10-15i-2i+3i^2}{(2)^2+(3)^2}$

$= \frac{10-15i-2i-3}{13} \quad = \frac{7-17i}{13} \quad = \frac{7}{13} - \frac{17}{13}i$

س أكتب كلاً مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

- $\frac{2}{3-i}$

$$= \frac{2}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i}$$

$$= \frac{6+2i}{3^2+1^2}$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{2}{10}i \quad = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

- $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$

$$\frac{5+i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$$

$$= \frac{10+15i+2i+3i^2}{(2)^2+(3)^2}$$

$$= \frac{10+15i+2i-3}{(2)^2+(3)^2}$$

$$= \frac{7+17i}{13} = \frac{7}{13} + \frac{17}{13}i$$

$$\therefore \bar{Z} = \overline{\frac{7}{13} + \frac{17}{13}i}$$

$$= \frac{7}{13} - \frac{17}{13}i$$

طريقة ثانية

- $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)} = \frac{\overline{5+i}}{\overline{2-3i}} = \frac{5-i}{2+3i}$

$$= \frac{5-i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i}$$

$$= \frac{10-15i-2i+3i^2}{(2)^2+(3)^2}$$

$$= \frac{10-15i-2i-3}{13}$$

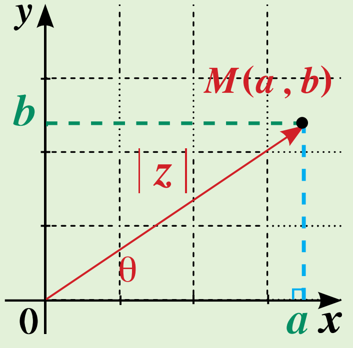
$$= \frac{7-17i}{13}$$

$$= \frac{7}{13} - \frac{17}{13}i$$

ملغى

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

القيمة المطلقة لعدد مركب

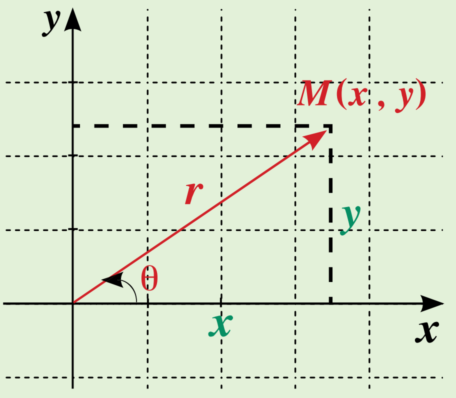


$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

س أوجد:

- $|6 - 4i| = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{13}$
- $|-2 + 5i| = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2} = \sqrt{29}$
- $|5i| = \sqrt{(0)^2 + (5)^2} = 5$
- $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

الاحداثيات القطبية



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

س أوجد الزوج المرتب (x , y) الذى يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

- $\underset{r\quad\theta}{A(5,300°)}$ $\quad r = 5 , \theta = 300°$

$$x = r\cos\theta = 5\cos(300°) = \frac{5}{2}$$

$$y = r\sin\theta = 5\sin(300°) = \frac{-5\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$$

- $B(2, \frac{2\pi}{3})$ $\quad r = 2 , \theta = \frac{2\pi}{3}$

$$x = r\cos\theta = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\therefore (x, y) = (-1, \sqrt{3})$$

س حول الاحداثيات القطبية الى احداثيات ديكارتية:

- $N(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6})$

$$r = \sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = r\cos\theta = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{6} = \sqrt{2} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{6}}{2}$$

$$y = r\sin\theta = \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{6} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

الاحداثيات الديكارتية للنقطة N : $\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

- $M(5, \frac{\pi}{4})$

مثل الاحداثيات القطبية للنقطة M حيث:

$$r = 5, \theta = \frac{\pi}{4}$$

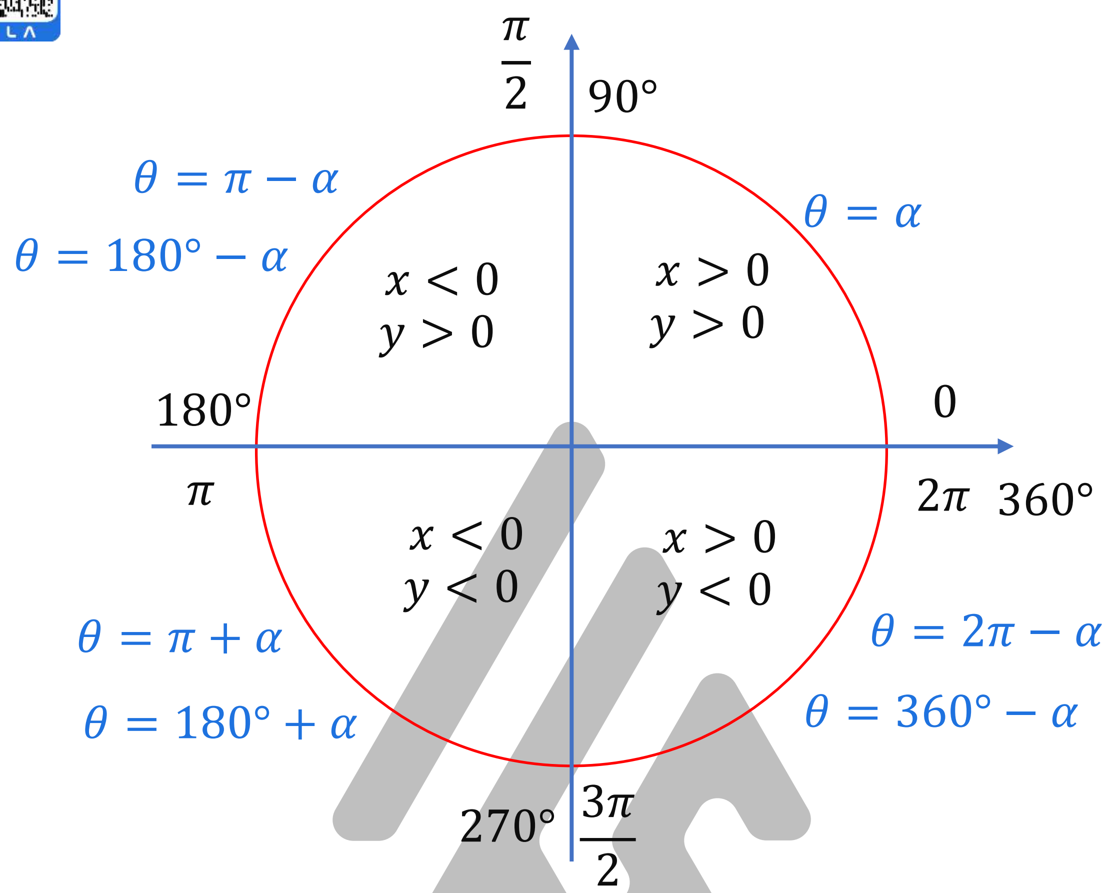
$$x = r\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{4} = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$y = r\sin\theta = \sqrt{5}\sin\frac{\pi}{4} = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

الاحداثيات الديكارتية للنقطة M : $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

تذكر: دائرة الوحدة

زاوية الاسناد α



س حول من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) لكل مما يلي:

- $D(\underset{x}{3\sqrt{3}}, \underset{y}{3})$ $: 0 \leq \theta < 2\pi$

الحل بالراديان

$\because x > 0 , y > 0$

$\therefore$ θ في الربع 1

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore (r, \theta) = \left(6 , \frac{\pi}{6}\right)$$

زاوية الاسناد α

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$$

$$= \tan^{-1}\left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right|$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2}$$

$$= 6$$

الحل بالدرجات

س أوجد الزوج المرتب (r, θ) للنقطة $(-2,5)$

$x < 0 \,, y > 0$

θ في الربع الثاني

$\theta = 180^\circ - \alpha$

$= 180^\circ - 68.2^\circ$

$= 111.8^\circ$

α زاوية الاسناد

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{5}{-2}\right|$

$\approx 68.2^\circ$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{29}$

$$(r\,,\theta) = (\sqrt{29}\,, 111.8^\circ)$$

الحل بالراديان

س أوجد الزوج المرتب (r, θ) للنقطة $(-2,5)$

$x < 0 \,, y > 0$

θ في الربع الثاني

$\theta = \pi - \alpha$

$= \pi - 1.19$

$= 1.95$

α زاوية الاسناد

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{5}{-2}\right|$

$= 1.19$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{29}$

$$(r\,,\theta) = (\sqrt{29}\,, 1.95)$$

س حول من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r,θ) لكل مما يلي:

- $M(-3,-4) \quad : \ 0° \le \theta < 360°$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$

$= 5$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{-4}{-3}\right|$

$= 53.13°$

$x < 0 , y < 0$

$\therefore$ θ في الربع 3

$\theta = 180 + \alpha$

$= 180° + 53.13°$

$= 233.13°$

$\therefore (r,\theta) = (5 , 233.13°)$

- $C(4, -2\sqrt{5}) \quad : 0 \le \theta < 2\pi$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{4^2 + \left(-2\sqrt{5}\right)^2}$

$= 6$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{-2\sqrt{5}}{4}\right|$

$= 0.84$

$x > 0 , y < 0$

$\therefore$ θ في الربع 4

$\theta = 2\pi - \alpha$

$= 2\pi - 0.84$

$= 5.44$

$\therefore (r,\theta) = (6 , 5.44)$

الصورة المثلثية

يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وتعرف **بالصورة المثلثية** للعدد المركب z.

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية:

- $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

الحل بنظام الدرجات

$x > 0 , y < 0$

$\therefore$ θ في الربع 4

$$\theta = 360° - \alpha$$
$$= 360° - 45°$$
$$= 315°$$

زاوية الاسناد

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$$
$$= \tan^{-1}\left|\frac{-\frac{5}{\sqrt{2}}}{\frac{5}{\sqrt{2}}}\right|$$
$$= \tan^{-1}(1) = 45°$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{-5}{\sqrt{2}}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-5}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= 5$$

الصورة المثلثية: $z = 5(\cos 315° + i\ \sin 315°)$

- $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

الحل بنظام الراديان

$\therefore$ θ في الربع 4

$$\theta = 2\pi - \alpha$$
$$= 2\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{7\pi}{4}$$

زاوية الاسناد

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$$
$$= \tan^{-1}\left|\frac{-\frac{5}{\sqrt{2}}}{\frac{5}{\sqrt{2}}}\right|$$
$$= \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{-5}{\sqrt{2}}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-5}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= 5$$

الصورة المثلثية: $z = 5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\ \sin\frac{7\pi}{4}\right)$

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية:

- $z_2 = -1 - i$

$x = -1\,,\ y = -1$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{2}$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right|$

$= \tan^{-1} 1 = 45°$

الحل بنظام الدرجات

$x < 0\,, y < 0$

$\therefore$ θ في الربع 3

$\theta = 180° + \alpha$

$= 180° + 45$

$= 225°$

الصورة المثلثية:

$$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta) = \sqrt{2}(\cos 225° + i\ \sin 225°)$$

- $z_2 = -1 - i$

$x = -1\,,\ y = -1$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{2}$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right|$

$= \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

الحل بنظام الراديان

$x < 0\,, y < 0$

$\therefore$ θ في الربع 3

$\theta = \pi + \alpha$

$= \pi + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{5\pi}{4}$

الصورة المثلثية:

$$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta) = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\ \sin\frac{5\pi}{4})$$

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية:

- $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}\, i$

الحل بنظام الدرجات

$x < 0 , y > 0$

$\therefore\ \theta$ في الربع 2

$\theta = 180° - \alpha$

$= 180° - 60$

$= 120°$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right|$

$= 60°$

$x = -2 \quad y = 2\sqrt{3}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}$

$= 4$

الصورة المثلثية:

$$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta) = 4\ (\cos 120° + i\ \sin 120°)$$

- $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}\, i$

الحل بنظام الراديان

$x < 0 , y > 0$

$\therefore\ \theta$ في الربع 2

$\theta = \pi - \alpha$

$= \pi - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2\pi}{3}$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right|$

$= \frac{\pi}{3}$

$x = -2 \quad y = 2\sqrt{3}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}$

$= 4$

الصورة المثلثية:

$$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta) = 4\ (\cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\frac{2\pi}{3})$$

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية:

- $z_2 = 1 + \sqrt{3}\, i$

الحل بنظام الدرجات

$x > 0 , y > 0$

$\therefore \theta$ في الربع 1

$\theta = \alpha = 60°$

زاوية الاسناد α

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$$

$$= \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right|$$

$$= 60°$$

$x = 1 \quad y = \sqrt{3}$

$$r = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= 2$$

الصورة المثلثية:

$$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta) = 2\,(\cos 60° + i\ \sin 60°)$$

- $z_2 = 1 + \sqrt{3}\, i$

الحل بنظام الراديان

$x > 0 , y > 0$

$\therefore \theta$ في الربع 1

$\theta = \alpha = \frac{\pi}{3}$

زاوية الاسناد α

$$= \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right|$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

$x = 1 \quad y = \sqrt{3}$

$$r = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= 2$$

الصورة المثلثية:

$$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta) = 2\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \sin\frac{\pi}{3})$$

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية:

- $z_2 = -2 - 2i$

الحل بنظام الدرجات

$x = -2\,, \quad y = -2$

$r = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نفرض أن α زاوية الاسناد:

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-2}{-2}\right| = 1$

$\therefore \alpha = 45^o$

$\because x < 0\,, y < 0$

θ تقع في الربع الثالث.

$\therefore \theta = 180^o + \alpha = 180^o + 45^o = 225^o$

الصورة المثلثية:

$z_2 = 2\sqrt{2}(\cos 225^o + \sin 225^o)$

- $z_2 = -2 - 2i$

الحل بنظام الراديان

$x = -2\,, \quad y = -2$

$r = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نفرض أن α زاوية الاسناد:

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-2}{-2}\right| = 1$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\because x < 0\,, y < 0$

θ تقع في الربع الثالث.

$\therefore \theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

الصورة المثلثية:

$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}\right)$

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية:

- $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i$

الحل بنظام الدرجات

$x < 0 , y > 0$

θ في الربع 2

$\theta = 180° - \alpha$

$= 180° - 30°$
$= 150°$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\right|$

$= 30°$

$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y = \frac{1}{2}$

$r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= 1$

الصورة المثلثية:

$$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta) = 1\ (\cos 150° + i\ \sin 150°)$$

- $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i$

الحل بنظام الراديان

$x < 0 , y > 0$

θ في الربع 2

$\theta = \pi - \alpha$

$= \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\right|$

$= \frac{\pi}{6}$

$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y = \frac{1}{2}$

$r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= 1$

الصورة المثلثية:

$$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta) = 1\ (\cos\frac{5\pi}{6} + i\ \sin\frac{5\pi}{6})$$

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية $z=r(\cos\theta + i \sin\theta)$:

- $2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad x > 0 , y > 0$

$$= r\,(\cos\theta + i\ \sin\theta)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

- $\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad x > 0 , y > 0$

ملغى

$$z_2 = r\,(\cos\theta + i\ \sin\theta)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\frac{2\pi}{3}$$

- $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$$

$$x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$y = \sqrt{2}(-\sin\frac{\pi}{4})$$

$$x > 0 , y < 0$$

$$\theta = 2\pi - \alpha$$

- $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$x=-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}$

$y=-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}$

$x<0\,,y<0$

$\theta=\pi+\alpha$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

- $\frac{9}{2}(\cos 30^o+i\,sin\,390^o)$

$x=\frac{9}{2}\cos 30°$

$y=\frac{9}{2}\sin 390°$

$x>0\,,y>0$

$\theta=\alpha$

$$=\frac{9}{2}\,(\cos 30^o+i\,sin\,30^o)$$

ملغى

- $3\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$x=3(-\cos\frac{\pi}{3})$

$y=3\sin\frac{\pi}{3}$

$x<0\,,y>0$

$\theta=\pi-\alpha$

$$=3\left(\cos(\pi-\frac{\pi}{3})+i\ \sin(\pi-\frac{\pi}{3})\right)$$

$$=3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

- $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$x=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}$

$y=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$x>0\,,y>0$

$\theta=\alpha$

$$=\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

س ضع كلاً مما يلى في الصورة المثلثية $z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$:

- $3(\cos 50^o - i\sin(-130^o))$

$= 3(\cos(50°) + i\ \sin(50°))$ ملغى

$x = 3\cos 50°$

$y = 3(-\sin(-130°))$

$x > 0\ , y > 0$

$\theta = \alpha$

س ضع كلاً مما يلى في الصورة الجبرية :

- $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\ i$

- $\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ $= \frac{1}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ i$

- $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ $= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= -\sqrt{3} - i$

- $3\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$ $= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\ i\right)$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\ i$

الصورة المثلثية في حالات خاصة

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية :

- $z_2 = 5$

$x = 5 , y = 0$

$r = 5 , \theta = 0$

$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$

$= 5(\cos 0 + i\ \sin\ 0)$

- $z_1 = 2i$

$x = 0 , y = 2$

$r = 2 , \theta = \frac{\pi}{2}$

$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2}\right)$

- $z_4 = -\frac{5}{2}i$

$x = 0 , y = \frac{-5}{2}$

$r = \frac{5}{2} , \theta = \frac{3\pi}{2}$

$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$

$= \frac{5}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\ \sin\frac{3\pi}{2}\right)$

- $z_3 = \frac{-3}{4}$

$x = \frac{-3}{4} , y = 0$

$r = \left|\frac{-3}{4}\right| = \frac{3}{4} \qquad \theta = \pi$

$z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$

$= \frac{3}{4}(\cos\pi + i\ \sin\pi)$

حل معادلات

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$
في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

$$2z = 3 + 2i - i$$

$$\frac{2z}{2} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,i$$

$$\left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,i\right\} = \text{م.ح}$$

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$
في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

$$3z + 1 - i = 7 + 3i$$

$$3z = 7 + 3i - 1 + i$$

$$3z = 6 + 4i$$

$$\frac{3z}{3} = \frac{6}{3} + \frac{4i}{3}$$

$$z = 2 + \frac{4}{3}\,i$$

$$\left\{2 + \frac{4}{3}\,i\right\} = \text{م.ح}$$

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $z+i=2\bar{z}+1$ في $\mathbb{C}$.

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$z = x + y\,i \quad , \bar{z} = x - y\,i$$

$$z + i = 2\bar{z} + 1$$

$$x + y\,i + i = 2(x - y\,i) + 1$$

$$x + i(y+1) = 2x - 2y\,i + 1$$

$$x + (y+1)i = (2x+1) - 2y\,i$$

$$x = 2x + 1$$

$$x - 2x = 1$$

$$-x = 1$$

$$x = -1$$

$$y + 1 = -2y$$

$$y + 2y = -1$$

$$3y = -1$$

$$y = \frac{-1}{3}$$

$$\therefore z = x + y\,i = -1 - \frac{1}{3}i$$

$$\left\{-1 - \frac{1}{3}i\right\} = \text{م.ح}$$

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$z = x + y\,i\,, \quad \bar{z} = x - y\,i$$

$$2z + i\bar{z} = 5 - 2i$$

$$2(x + y\,i) + i(x - y\,i) = 5 - 2i$$

$$2x + 2y\,i + x\,i - y\,i^2 = 5 - 2i$$

$$2x + 2y\,i + x\,i + y = 5 - 2i$$

$$(2x + y) + (x + 2y)i = 5 - 2i$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

$$x = 4$$

$$y = -3$$

$$\therefore z = x + y\,i = 4 - 3i$$

$$\{4 - 3i\} = \text{م.ح}$$

س أوجد مجموعة حل كل معادلة ما يلي:

- $8x^2 + 2 = 0$

$$\frac{8x^2}{8} = \frac{-2}{8}$$

$$x^2 = \frac{-1}{4}$$

$$x = \mp\sqrt{\frac{-1}{4}}$$

$$= \mp\frac{1}{2}i$$

م.ح =

$$\left\{-\frac{1}{2}i , +\frac{1}{2}i\right\}$$

- $-5x^2 - 150 = 0$

$$\frac{-5x^2}{-5} = \frac{150}{-5}$$

$$x^2 = -30$$

$$x = \mp\sqrt{-30}$$

$$x = \mp\sqrt{30}\, i$$

م.ح =

$$\{-\sqrt{30}\, i , \sqrt{30}\, i\}$$

- $3x^2 + 48 = 0$

$$3x^2 = -48$$

$$x^2 = \frac{-48}{3}$$

$$x^2 = -16$$

$$x = \mp\sqrt{-16} = \mp 4i$$

$\{-4i , 4i\} =$ م.ح

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^2 + 100 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

$$4x^2 + 100 = 0$$

$$4x^2 = -100$$

$$x^2 = -25$$

$$x = \pm\sqrt{-25}$$

$$x = \pm 5i$$

$\{-5i , 5i\} =$ م.ح

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$.

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4(1)(2)$

$= -4$

$z = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{2 \mp \sqrt{-4}}{2}$

$= \dfrac{2 \mp 2\,i}{2} = 1 \mp i$

$\{1 - i\,, 1 + i\} =$ م.ح

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في $\mathbb{C}$.

$a = 4 \quad b = 16 \quad c = 25$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (16)^2 - 4(4)(25)$

$= -144$

$z = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-16 \mp \sqrt{-144}}{8}$

$= \dfrac{-16 \mp 12\,i}{8}$

$= -2 \mp \dfrac{3}{2} i$

$\therefore$ م.ح $= \left\{-2 + \dfrac{3}{2} i\,, -2 - \dfrac{3}{2} i\right\}$

س لتكن المعادلة: $2z^2 - 6z + 5 = 0$

- أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{3-i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

$$2z^2 - 6z + 5 = 2\left(\frac{3-i}{2}\right)^2 - \cancel{6}^{3}\left(\frac{3-i}{\cancel{2}}\right) + 5$$

$$= 2\left(\frac{3^2 - 2 \times 3 \times i + i^2}{4}\right) - 3(3-i) + 5$$

$$= \frac{1}{2}(9 - 6i - 1) - 3(3-i) + 5 = 0$$

$\therefore$ $z_1 = \frac{3-i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة

- أوجد الجذر الثاني.

ملغى

$\because$ الجذران مترافقان $\therefore$ $z_2 = \frac{3+i}{2}$

طريقة ثانية $2z^2 - 6z + 5 = 0$

$a = 2 \qquad b = -6 \qquad c = 5$

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\frac{3-i}{2} + z_2 = \frac{6}{2}$$

$$\frac{3-i}{2} + z_2 = 3$$

$$z_2 = 3 - \frac{3-i}{2} = \frac{3+i}{2}$$

س لتكن المعادلة: $z^2+z+1=0$

- بدون حل المعادلة: أثبت أن المركب $z_1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

$$z_1^2+z_1+1=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)+1$$

$$=\frac{(-1)^2-2(-1)(\sqrt{3}i)+(\sqrt{3}i)^2}{4}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)+1=0$$

$\therefore\ z_1=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$ هو جذر لهذه المعادلة

- أوجد الجذر الثاني.

$\because$ الجذرين مترافقان $z_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

ملغى

- اذا كان z_2 هو الجذر الثاني فيكون $z_1+z_2=\frac{-b}{a}$

$$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+z_2=-1$$

و منه

$$z_2=-1-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

س أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

بفرض $w = m + ni$ جذرا "تربيعيا" ل Z

$$\rightarrow \omega^2 = z$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$$

$$m^2 - n^2 = -3 \quad \rightarrow (1)$$

$$2mn = -4$$

$$mn = -2 \quad \rightarrow (2)$$

$$\rightarrow |\omega|^2 = |z|$$

$$m^2 + n^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \quad \rightarrow (3)$$

نجمع (1) مع (3):

$$2m^2 = 2 \implies m^2 = 1$$

بالتعويض في (3):

$$1 + n^2 = 5 \implies n^2 = 4$$

$$m = \mp 1 \,, n = \mp 2$$

← من المعادلة (2) نجد أن
m , n متعاكسان بالإشارة

$n = 2 \qquad m = -1$

$n = -2 \qquad m = 1$

الجذران :

$$w_1 = -1 + 2i \qquad w_2 = 1 - 2i$$

ملغى

س أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$

بفرض $w = m + ni$ جذرا" تربيعيا" ل Z

$$\rightarrow \omega^2 = z$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = 5 + 12\,i$$

$$m^2 - n^2 = 5 \quad \rightarrow (1)$$

$$mn = 6 \quad \rightarrow (2)$$

$$\rightarrow |\omega|^2 = |z|$$

$$m^2 + n^2 = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$m^2 + n^2 = 13 \quad \rightarrow (3)$$

نجمع (1) مع (3):

$$2m^2 = 18 \implies m^2 = 9$$

تعوض في (3):

$$9 + n^2 = 13 \implies n^2 = 4$$

$$m = \mp 3 \,, n = \mp 2$$

←من المعادلة (2) نجد أن
m , n لهما نفس الإشارة

$$m = -3 \qquad n = -2$$

$$m = 3 \qquad n = 2$$

∴ الجذران هما :

$$w_1 = -3 - 2i \qquad w_2 = 3 + 2i$$

ملغى

س أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

ملغى

بفرض $w = m + ni$ جذرا" تربيعيا" ل Z

$$\to w^2 = z$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = 7 + 24\,i$$

$$m^2 - n^2 = 7 \quad \to (1)$$

$$mn = 12 \quad \to (2)$$

$$\to |\omega|^2 = |z|$$

$$m^2 + n^2 = \sqrt{7^2 + 24^2}$$

$$m^2 + n^2 = 25 \quad \to (3)$$

نجمع (1) مع (3):

$$2m^2 = 32 \implies m^2 = 16$$

تعوض في (3):

$$16 + n^2 = 25 \implies n^2 = 9$$

$$m = \mp 4\,,\, n = \mp 3$$

← من المعادلة (2) نجد أن
m , n لهما نفس الإشارة

$$m = -4 \qquad n = -3$$

$$m = 4 \qquad n = 3$$

الجذران :

$$w_1 = -4 - 3i \qquad w_2 = 4 + 3i$$

UULA

تــــدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية

الدوال الجيبية

$y = a\cos bx \quad y = a\sin bx \qquad a \neq 0 \ , b \neq 0$

- تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
- $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0 ,2\pi]$
- $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي:

- $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

$a = \frac{1}{2} \qquad b = -1$

السعة $= |a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

- $y = -2\cos 5x$

$a = -2 \qquad b = 5$

السعة $= |a| = |-2| = 2$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|5|} = \frac{2\pi}{5}$

- $y = 2\cos x$

هي دالة على الصورة

$y = a\cos bx$

فيكون: $a = 2 , b = 1$

∴ سعة الدالة : $|a| = 2$

دورة الدالة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

- $y = -5\cos\frac{x}{3}$

هي دالة على الصورة

$y = a\cos bx$

فيكون: $a = -5 , b = \frac{1}{3}$

∴ سعة الدالة : $|a| = |-5| = 5$

دورة الدالة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

س اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت :

▪ الدورة: $\frac{\pi}{3}$, $a = -2$

$$y = a\cos bx$$

$$y = -2\cos(6x)$$

$$y = -2\cos(-6x)$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{3}$$

$$|b| = \frac{2\pi \times 3}{\pi}$$

$$|b| = 6$$

$$\therefore b = \mp 6$$

ملغى

▪ الدورة: π, $a = 0.25$

$$y = a\cos bx$$

$$y = 0.25\cos(2x)$$

$$y = 0.25\cos(-2x)$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1}$$

$$|b| = \frac{2\pi}{\pi}$$

$$|b| = 2$$

$$\therefore b = \mp 2$$

▪ الدورة: 2, $a = 1$

$$y = a\cos bx$$

$$y = \cos(\pi x)$$

$$y = \cos(-\pi x)$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2}{1}$$

$$|b| = \frac{2\pi}{2}$$

$$|b| = \pi$$

$$b = \mp\pi$$

س اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ إذا كانت :

- الدورة: $\frac{\pi}{2}$, $a = 3$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$$

$$|b| = \frac{2 \times 2\pi}{\pi} = 4$$

$$b = \mp 4$$

$$y = a\sin bx$$

$$y = 3\sin(4x)$$

$$y = 3\sin(-4x)$$

- الدورة: 2π, $a = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi$$

$$|b| = 1 \Leftrightarrow b = 1 , b = -1$$

ملغى

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = -\frac{1}{2}\sin(-x)$ أو $y = -\frac{1}{2}\sin x$

س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

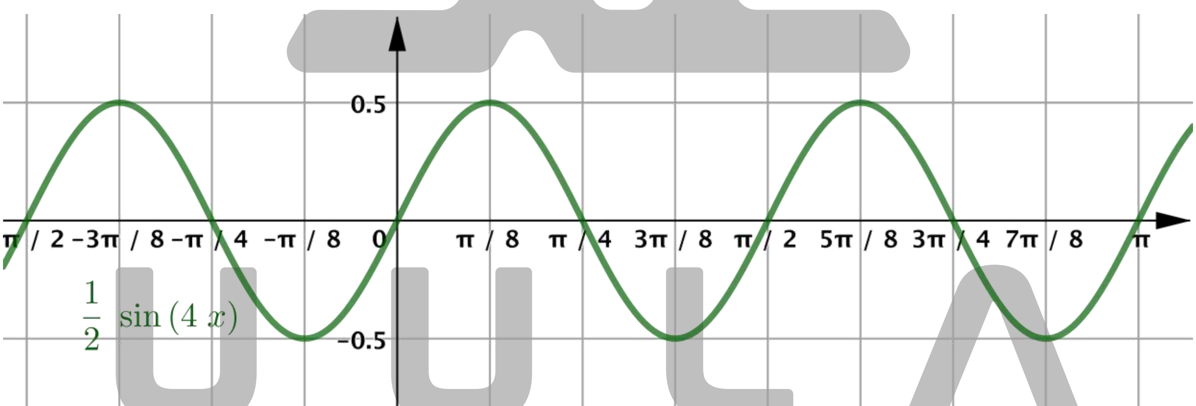
- $y = \frac{1}{2}\sin 4x$

$$\text{السعة} = |a| = \frac{1}{2}$$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}sin4x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0



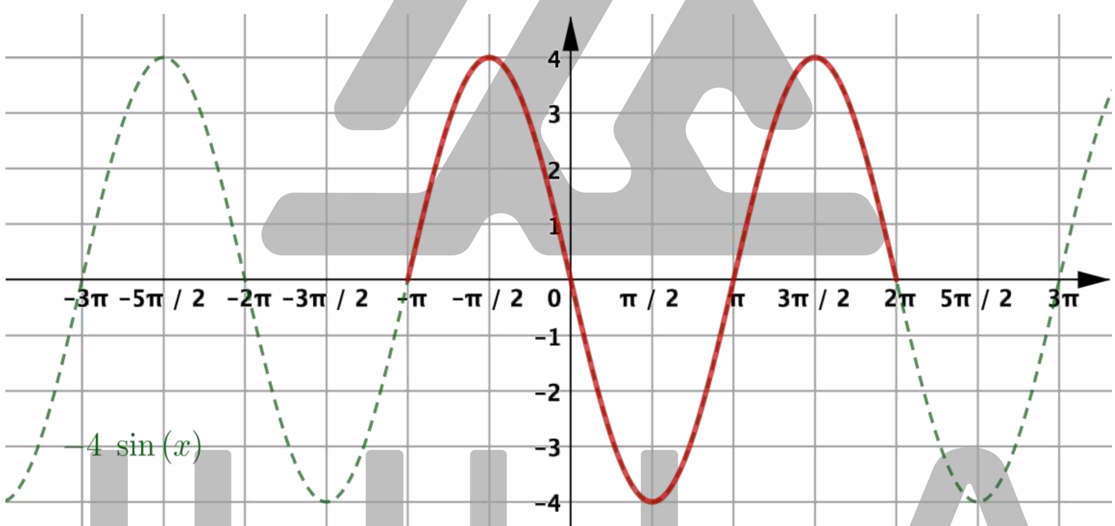
- $y = -4\sin x \ , x \in [-\pi \, , 2\pi]$

السعة $= \ |a| = 4$

الدورة$= \dfrac{2\pi}{|b|} = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

ربع الدورة $= 2\pi \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-4sinx$	0	-4	0	4	0



س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

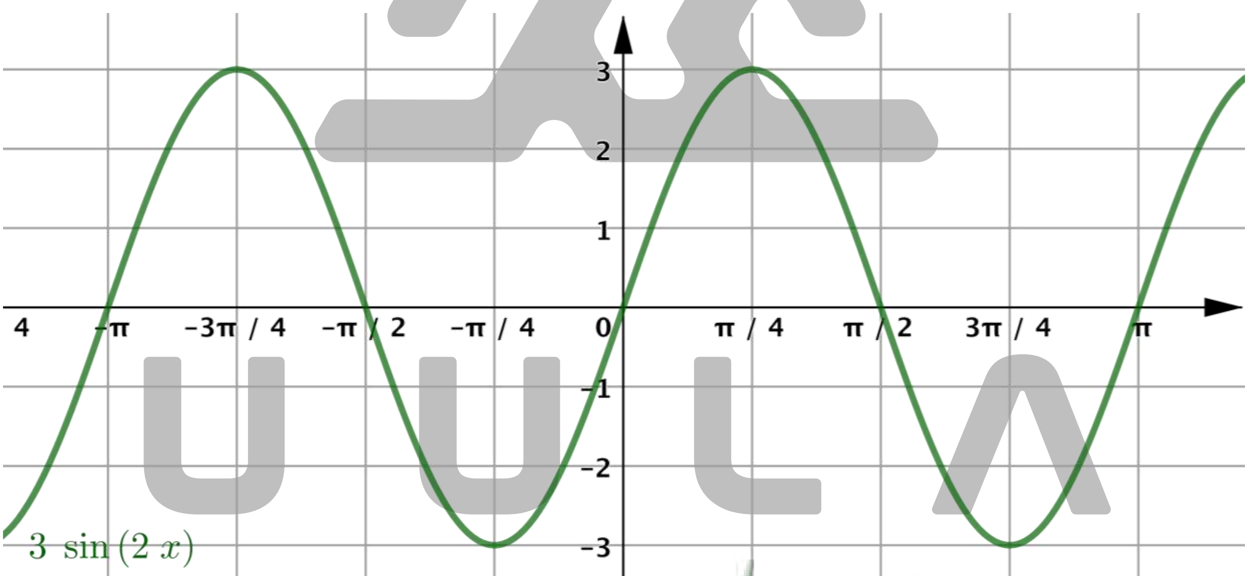
- $y = 3sin2x$

السعة $|a| = |3| = 3$

الدورة $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ربع الدورة: $\frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = 3sin2x$	0	3	0	-3	0



س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

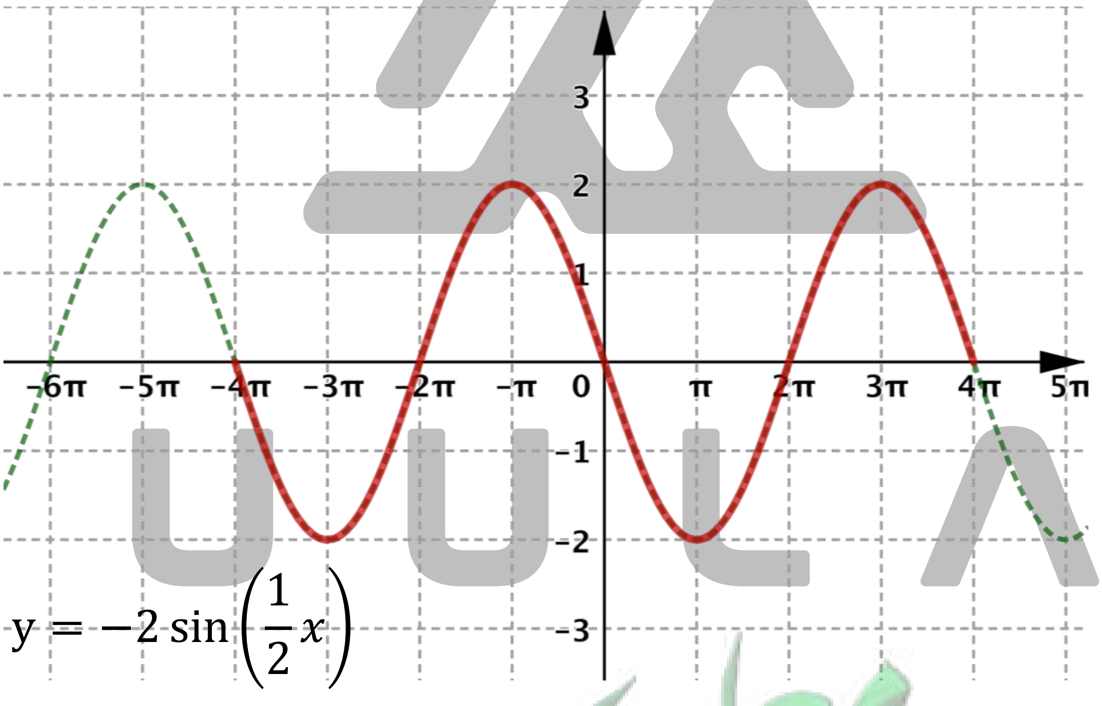
- $y = -2\sin(\frac{1}{2}x) \qquad : -4\pi \le x \le 4\pi$

السعة $|a| = |-2| = 2$

الدورة $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

∴ربع الدورة π

x	0	π	2π	3π	4π
$y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	-2	0	2	0



س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

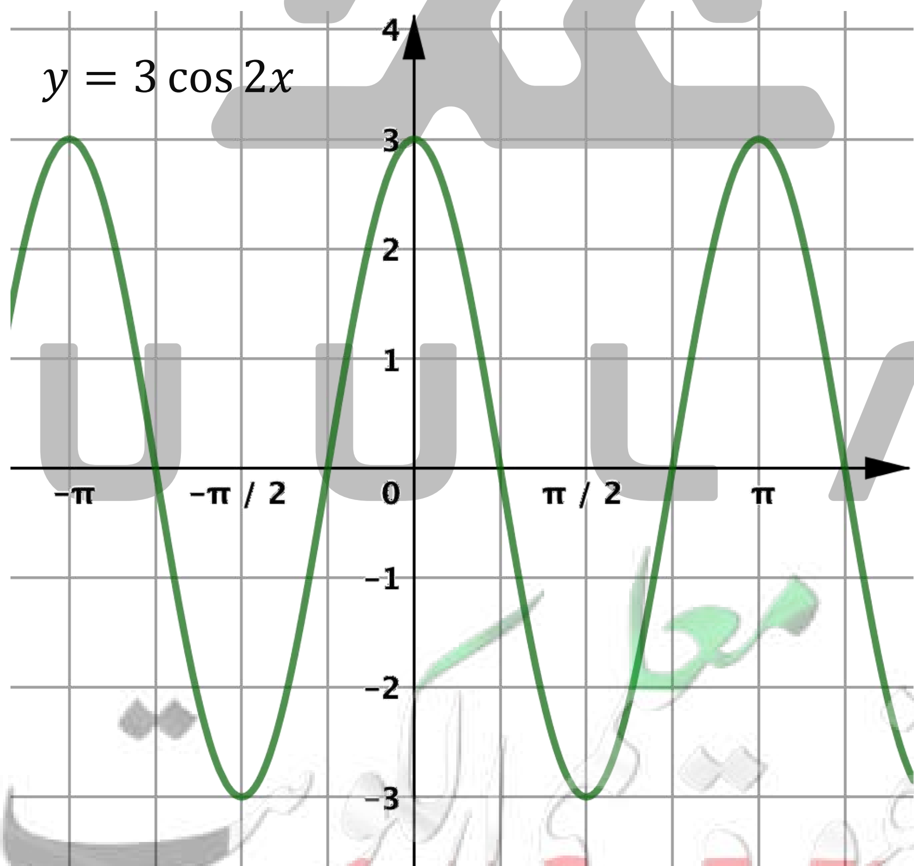
- $y = 3\cos 2x$

السعة $= |a| = 3$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	3	0	-3	0	3



س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

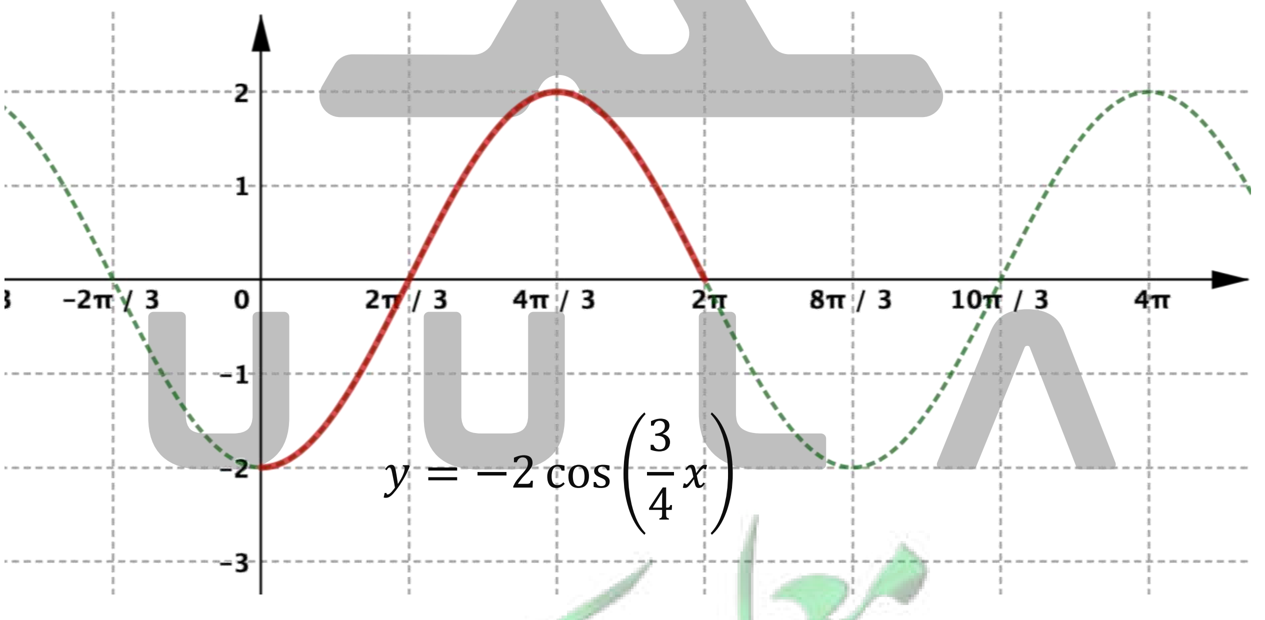
- $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\ , 0 \le x \le 2\pi$

السعة $= |a| = |-2| = 2$

الدورة$= \dfrac{2\pi}{|b|} = \dfrac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \dfrac{8\pi}{3}$

ربع الدورة $= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	$\frac{8\pi}{3}$
y	-2	0	2	0	-2



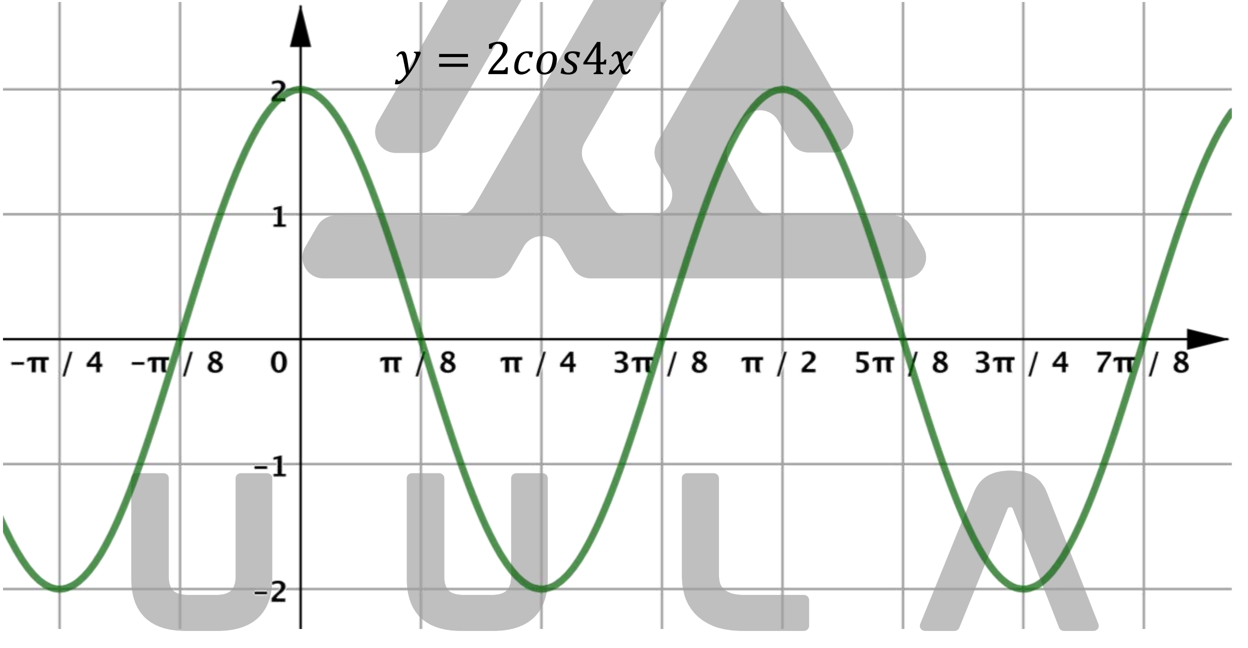
س الدالة $y = 2\cos 4x$ هي دالة دورية.

السعة: $|a| = |2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$

∴ربع الدورة: $\frac{\pi}{8}$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = 2cos4x$	2	0	−2	0	2



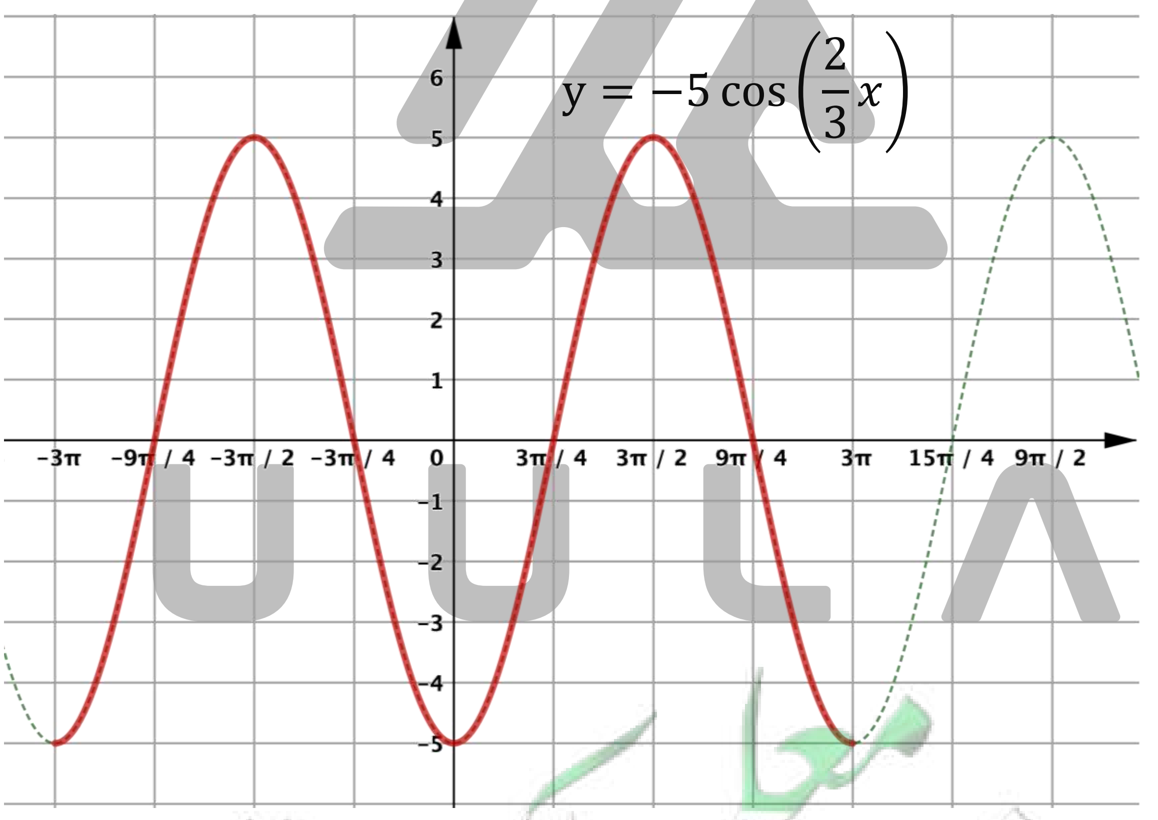
▪ الدالة $y=-5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$: $x\in[-3\pi,3\pi]$

السعة: $|a|=|-5|=5$

الدورة: $\frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|}=\frac{3}{2}\times 2\pi=3\pi$

∴ربع الدورة = $\frac{3\pi}{4}$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	3π
$y=-5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$	-5	0	5	0	-5



س أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

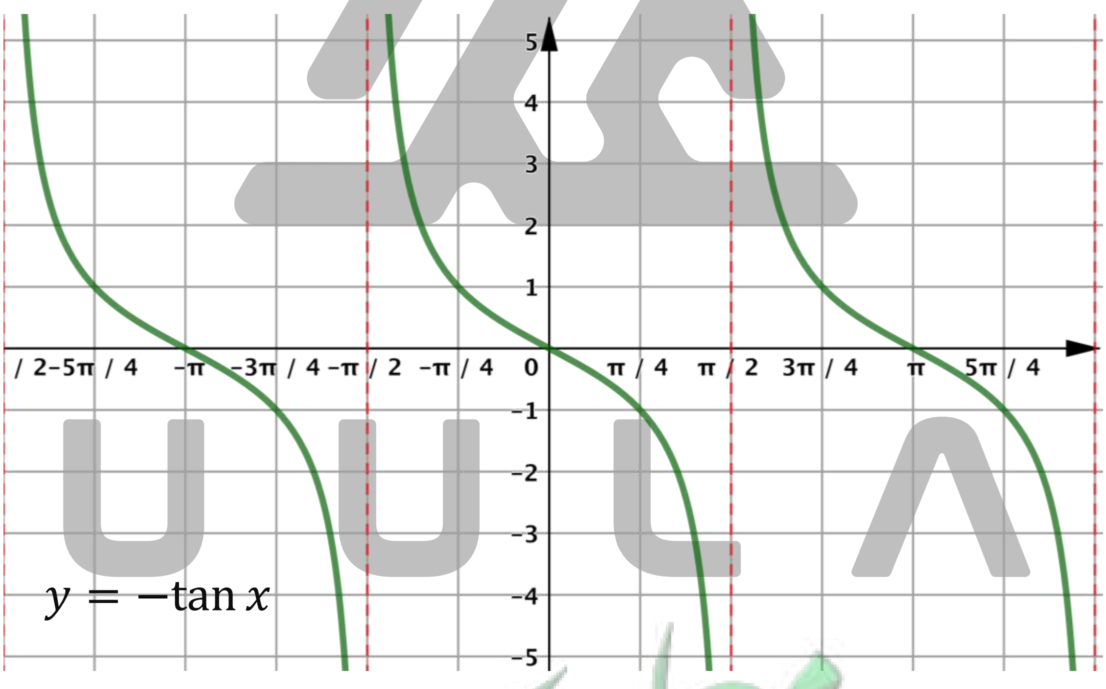
- $y = -\tan x$

$a = -1 \qquad b = 1$

$$\text{الدورة} = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} = \pi$$

$$\text{ربع الدورة} = \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = -\tan x$	غير معرف	1	0	-1	غير معرف



س أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

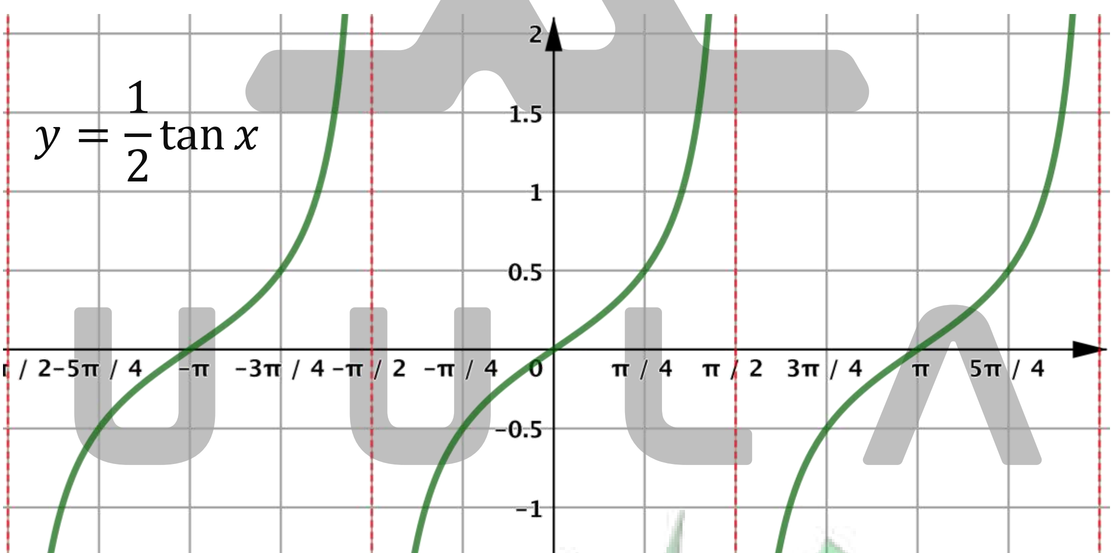
- $y = \frac{1}{2}\tan x$

$a = \frac{1}{2}$ $\qquad b = 1$

الدورة $= \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	غير معرف	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	غير معرف



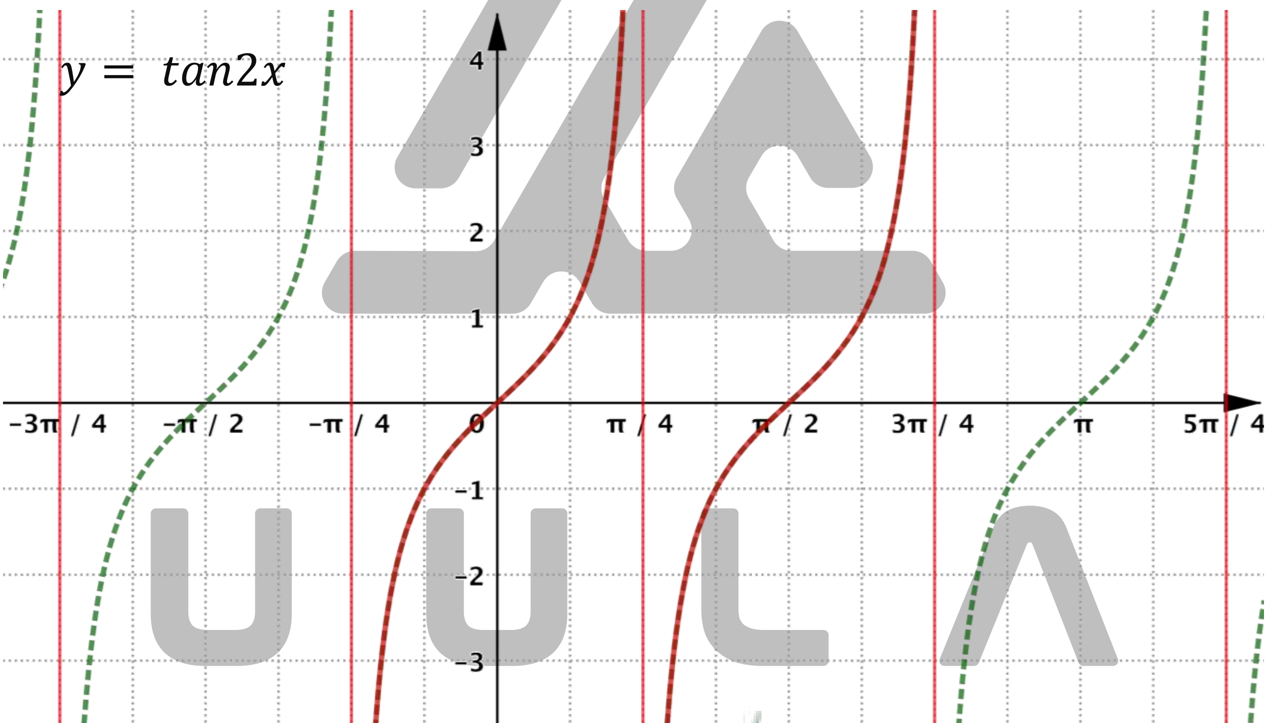
س أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

- الدالة $y = \ tan2x$ هي دالة دورية, $x \in (\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

∴ربع الدورة $\frac{\pi}{8}$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$y = \tan 2x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

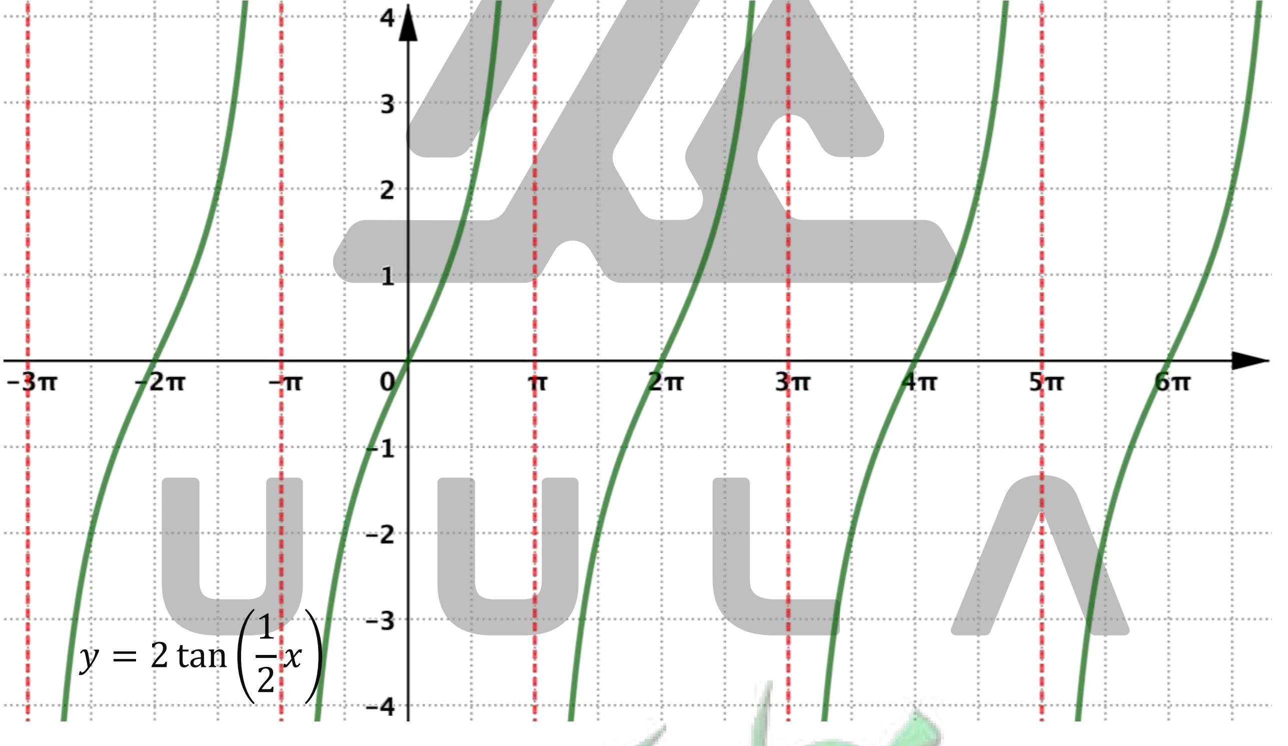


▪ الدالة $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

ربع الدورة: $\frac{\pi}{2}$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-2	0	2	غير معرف

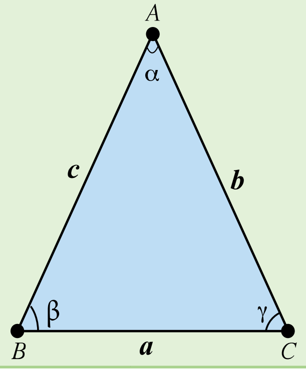


خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

$\tan x$	$\cos x$	$\sin x$	الخاصية
π	2π	2π	الدورة
$\mathbb{R}-\{x, x=\frac{\pi}{2}+n\pi\}$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$	المجال
$(-\infty,\infty)$	$[-1\,,1]$	$[-1\,,1]$	المدى
$x=n\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$	$x=n\pi$	الأصفار
فردية	زوجية	فردية	زوجية أو فردية

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$



س حل ΔABC حيث : $\alpha = 36°\ ,\ \beta = 48°\ ,\ a = 8cm$

مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$

$$\gamma = 180° - (36° + 48°) = 96°$$

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36°}{8}=\frac{\sin 48°}{b}=\frac{\sin 96°}{c}$$

$$b = \frac{8\times\sin 48°}{\sin 36°} \approx 10.11cm$$

$$c = \frac{8\times\sin 96°}{\sin 36°} \approx 13.54\ cm$$

س حل ΔABC حيث : $\alpha = 40°\,,\ \beta = 60°\ ,\ a = 4cm$

مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$ $\quad \gamma = 180° - (40° + 60°) = 80°$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 40°}{4} = \frac{\sin 60°}{b} = \frac{\sin 80°}{c}$$

$$b = \frac{4 \times \sin 60°}{\sin 40°} \Longrightarrow b \approx 5.389\ cm$$

$$c = \frac{4 \times \sin 80°}{\sin 40°} \Longrightarrow c \approx 6.128\ cm$$

س حل ΔABC حيث : $a = 7\ cm\ ,\ b = 6\ cm\ ,\ \alpha = 26.3°$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 26.3°}{7} = \frac{\sin\beta}{6}$$

$$\sin\beta = \frac{6\sin 26.3°}{7} \approx 0.3798$$

$$\beta_1 = \sin^{-1}(0.3798) \approx 22.3°$$

$$\alpha + \beta_1 = 48.6° < 180°$$

$$\gamma_1 = 180° - (26.3° + 22.3°) = 131.4°$$

$$\frac{\sin 26.3°}{7} = \frac{\sin 131.4°}{c}$$

$$c = \frac{7\sin 131.4°}{\sin 26.3°} \approx 11.9cm$$

$$\beta_2 = 180° - 22.3° = 157.7°$$

$$\alpha + \beta_2 = 184° > 180°$$

مرفوضة

س حل ΔABC حيث : $a = 3\ cm\ ,\ b = 2\ cm\ ,\ \alpha = 40°$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 40°}{3} = \frac{\sin\beta}{2}$$

$$\sin\beta = \frac{2 \times \sin 40°}{3} \approx 0.43$$

$$\beta_1 = \sin^{-1}(0.43) \approx 25.4°$$

$$\alpha + \beta_1 = 65.4° < 180°$$

$$\gamma_1 = 180° - (40° + 25.4°) = 114.6°$$

$$\frac{\sin 40°}{3} = \frac{\sin 114.6°}{c}$$

$$c = \frac{3\sin 114.6°}{\sin 40°} \approx 4.24cm$$

$$\beta_2 = 180° - 25.4° \approx 154.6°$$

$$\alpha + \beta_2 = 194.6° > 180°$$

مرفوضة

س حل ΔABC حيث : $a = 6\ cm\ ,\ b = 7\ cm\ ,\ \alpha = 45°$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45}{6} = \frac{\sin\beta}{7}$$

$$\sin\beta = \frac{7\sin 45°}{6} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

$$\beta_1 = \sin^{-1}\frac{7\sqrt{2}}{12} \approx 55.6°$$

$$\alpha + \beta_1 \approx 100.6° < 180°$$

$$\gamma_1 = 180° - (45° + 55.6°) = 79.4°$$

$$\frac{\sin 45}{6} = \frac{\sin 79.4}{c_1}$$

ملغى

$$c_1 = \frac{6\sin 79.4°}{\sin 45°} \approx 8.34cm$$

$$\beta_2 = 180° - 55.6° \approx 124.4°$$

$$\alpha + \beta_2 \approx 169.4° < 180°$$

$$\gamma_2 = 180° - (45° + 124.4°) = 10.6°$$

$$\frac{\sin 45°}{6} = \frac{\sin 10.6°}{c_2}$$

$$c_2 = \frac{6\sin 10.6°}{\sin 45°} \approx 1.56cm$$

س حل ΔABC حيث : $a = 5\ cm\ ,\ b = 8\ cm\ ,\ \alpha = 30^\circ$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin\beta}{8}$$

$$\sin\beta = \frac{8 \times \sin 30^\circ}{5} = 0.8$$

$$\beta_1 = \sin^{-1}(0.8) \approx 53.13^\circ$$

$$\alpha + \beta_1 \approx 83.13^\circ < 180^\circ$$

$$\gamma_1 = 180^\circ - (30^\circ + 53.13^\circ) \approx 96.87^\circ$$

ملغى

$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 69.87^\circ}{c_1}$$

$$c_1 = \frac{5 \sin 96.87^\circ}{\sin 30} \approx 9.9cm$$

$$\beta_2 = 180^\circ - 53.13^\circ \approx 126.87^\circ$$

$$\alpha + \beta_2 \approx 156.87^\circ < 180^\circ$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - (30^\circ + 126.87^\circ) \approx 23.13^\circ$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 23.13^\circ}{c_2} \qquad c_2 = \frac{5 \sin 23.13^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 3.9cm$$

قانون جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta \qquad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

س حل ΔABC حيث : $a = 11\ cm\ ,\ b = 5\ cm\ ,\ \gamma = 20°$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$= 11^2 + 5^2 - 2\times 11\times 5\cos(20°) \approx 42.63$$
$$c = \sqrt{42.63} \approx 6.53cm$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + (6.53)^2 - 11^2}{2\times 5\times 6.53} \approx -0.817$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-0.817) \approx 144.8°$$

$$\beta = 180° - (20° + 144.8°) \approx 15.2°$$

س حل ΔABC حيث : $a = 2\ cm\ ,\ b = 3\ cm\ ,\ \gamma = 60°$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$= (2)^2 + (3)^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 60° = 7$$

$$c = \sqrt{7} cm$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(3)^2 + (\sqrt{7})^2 - (2)^2}{2 \times 3 \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right) \approx 40.9°$$

$$\beta = 180° - (60° + 40.9°) \approx 79.1°$$

س في ΔABC حيث : $a = 9\ cm\ ,\ b = 7\ cm\ ,\ c = 5\ cm$
أوجد قياس الزاوية الأكبر.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 52 - 92}{2 \times 7 \times 5} = \frac{-1}{10}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{10}\right) \approx 95.7°$$

س حل ΔABC حيث : $a = 4\ cm\ ,\ b = 3\ cm\ ,\ c = 6\ cm$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 3 \times 6} = \frac{29}{36}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{29}{36}\right) \approx 36.4°$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4^2 + 6^2 - 3^2}{2 \times 4 \times 6} = \frac{43}{48}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{43}{48}\right) \approx 26.4°$$

$$\gamma = 180° - (36.4° + 26.4°) \approx 117.2°$$

س حل ΔABC حيث : $a = 6\ cm \ , \ b = 7\ cm \ , \ \alpha = 30°$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 30°}{6} = \frac{\sin\beta}{7}$$

$$\sin\beta = \frac{7\sin 30°}{6} = \frac{7}{12}$$

$$\beta_1 = \sin^{-1}\frac{7}{12} \approx 35.7°$$

$$\alpha + \beta_1 = 65.7° < 180°$$

$$\gamma_1 = 180° - (30° + 35.7°) = 114.3°$$

$$\frac{\sin 30°}{6} = \frac{\sin 114.3}{c_1}$$

$$c_1 = \frac{6\sin 114.3°}{\sin 30°} \approx 10.9cm$$

$$\beta_2 = 180° - 35.7° \approx 144.3°$$

$$\alpha + \beta_2 = 174.3° < 180°$$

$$\gamma_2 = 180° - (30° + 144.3°) = 5.7°$$

$$\frac{\sin 30°}{6} = \frac{\sin 5.7}{c_2}$$

$$c_2 = \frac{6\sin 5.7}{\sin 30°} \approx 1.19cm$$

ملغى

س حل ΔABC حيث : $a = 5\ cm\ ,\ b = 6.5\ cm\ ,\ \alpha = 25°$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 25°}{5} = \frac{\sin\beta}{6.5}$$

$$\sin\beta = \frac{6.5\sin 25°}{5} \approx 0.549$$

$$\beta_1 = \sin^{-1}(0.549) \approx 33.3°$$

$$\alpha + \beta_1 = 58.3° < 180°$$

$$\gamma_1 = 180° - (25° + 33.3°) = 121.7°$$

$$\frac{\sin 25°}{5} = \frac{\sin 121.7}{c_1}$$

ملغى

$$c_1 = \frac{5\sin 121.7}{\sin 25} \approx 10.07cm$$

$$\beta_2 = 180° - 33.3° \approx 146.7°$$

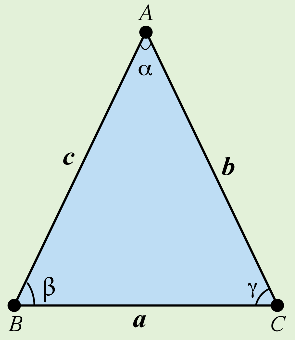
$$\alpha + \beta_2 = 171.7° < 180°$$

$$\gamma_2 = 180° - (25° + 146.7°) = 8.3°$$

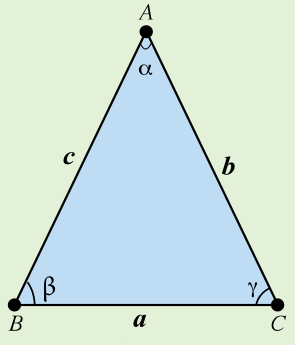
$$\frac{\sin 25°}{5} = \frac{\sin 8.3°}{c_2}$$

$$c_2 = \frac{5\sin 8.3°}{\sin 25°} \approx 1.7cm$$

مساحة المثلث



$$Area(ABC) = \frac{1}{2}bc\ \sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2}ac\ \sin\beta$$
$$= \frac{1}{2}ab\ \sin\gamma$$



قاعدة هيرون

أولاً نوجد نصف محيط المثلث

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

ثانياً نوجد المساحة وفق هذه القاعدة

$$Area(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

س أوجد مساحة المثلث ABC حيث:

$$a = 8\ cm\ ,\ \ b = 5\ cm\ \ ,c = 7\ cm$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(8+5+7) = 10\ cm$$

$$Area(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)}$$

$$\approx 17.32 cm^2$$

س أوجد مساحة المثلث ABC حيث:

$$a = 5\ cm\ ,\ \ b = 6\ cm\ \ ,c = 8\ cm$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(5+6+8) = 9.5\ cm$$

$$Area(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{9.5(9.5-5)(9.5-6)(9.5-8)}$$

$$\approx 14.98 cm^2$$

س أوجد مساحة المثلث ABC حيث:

$$a = 4\ cm \ , \ b = 4\ cm \ , c = 3\ cm$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(4+4+3) = 5.5cm$$

$$Area(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{5.5(5.5-4)(5.5-4)(5.5-3)}$$

$$= \frac{3\sqrt{55}}{4}\ cm^2 \approx 5.56\ cm^2$$

س أوجد مساحة المثلث ABC حيث:

$$a = 7\ cm \ , \ b = 5\ cm \ , \ c = 8\ cm$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(8+5+7) = 10\ cm$$

$$Area = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)}$$

$$= 10\sqrt{3} \approx 17.32\ cm^2$$

حل معادلات مثلثية

س حل المعادلة: $\sqrt{2}\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \cos^{-1}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|$

$= 45°$

$\because \cos x > 0 \Rightarrow$ x في الربع 1 أو في الربع 4

x في الربع 1

$x = 45° + 360°k$

x في الربع 4

$x = 360° - \alpha + 360°k$

$= 315° + 360°k$

$k \in \mathbb{Z}$

س حل المعادلة: $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

$2\cos x = -\sqrt{3}$

$\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \cos^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{2}\right|$

$= \frac{\pi}{6}$

$\because \cos x < 0 \Rightarrow$ x في الربع 3 أو في الربع 2

x في الربع 2

$x = \pi - \alpha + 2k\pi$

$= \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

x في الربع 3

$x = \pi + \alpha + 2k\pi$

$= \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$= \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

- $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد α

$$\alpha = \cos^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$= 30°$$

$\because \cos x > 0 \Rightarrow$ x في الربع 4 أو في الربع 1

x في الربع 1

$$x = 30° + 360°k$$

x في الربع 4

$$x = 360° - \alpha + 360°k$$

$$= 330° + 360°k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

- $2\cos x = -1$

$$\cos x = \frac{-1}{2}$$

زاوية الاسناد α

$$\alpha = \cos^{-1}\left|\frac{-1}{2}\right|$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

$\because \cos x < 0 \Rightarrow$ x في الربع 2 أو في الربع 3

x في الربع 2

$$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

$$= \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

x في الربع 3

$$x = \pi + \alpha + 2k\pi$$

$$= \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

س حل المعادلة: $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

$$5\sin\theta - \sin\theta = 3$$

$$4\sin\theta = 3$$

$$\sin\theta = \frac{3}{4}$$

زاوية الاسناد α

$$\alpha = \sin^{-1}\left|\frac{3}{4}\right|$$

$$\approx 48.6°$$

$\because \sin\theta > 0 \Rightarrow$ θ في الربع 1 أو في الربع 2

θ في الربع 1

$$\theta = 48.6° + 360°k$$

θ في الربع 2

$$\theta = 180° - 48.6° + 360°k$$

$$= 131.4° + 360°k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

س حل المعادلة: $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$, حيث $0 \le \theta < 2\pi$

$$4\sin\theta - \sin\theta = -1$$

$$3\sin\theta = -1$$

$$\sin\theta = \frac{-1}{3}$$

زاوية الاسناد α

$$\alpha = \sin^{-1}\left|\frac{-1}{3}\right|$$

$$\approx 0.34$$

$\because \sin\theta < 0 \Rightarrow$ θ في الربع 3 أو في الربع 4

θ في الربع 3

$$\theta = \pi + 0.34$$

$$\approx 3.48$$

6.2

$$3.48 \in [0.2\pi)$$

θ في الربع 4

$$\theta = 2\pi - 0.34$$

$$\approx 5.94$$

$$5.94 \in [0.2\pi)$$

حل المعادلة: $\theta = 3.48 , \theta = 5.94$

- $\sin x = \frac{-1}{2}$

زاوية الاسناد α

$$\alpha = \sin^{-1}\left|\frac{-1}{2}\right|$$

$$= 30°$$

$\because \sin x < 0 \Rightarrow$ x في الربع 3 أو في الربع 4

x في الربع 3

$$x = 180° + 30° + 360°k$$

$$= 210° + 360°k$$

x في الربع 4

$$x = 360° - 30° + 360°k$$

$$= 330° + 360°k$$

س حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

زاوية الاسناد α $\quad \alpha = \tan^{-1}|\sqrt{3}| = \frac{\pi}{3}$

$\because \tan x > 0$

$\therefore$ x في الربع 1 أو الربع 3

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad .\, k \in \mathbb{Z}$

$\tan x = \tan(\pi + x)$ $\quad$ $\tan x$ دالة دورية دورتها π

س حل المعادلة: $\tan x = 1$

زاوية الاسناد α $\quad \alpha = \tan^{-1}|1| = 45°$

$\because \tan x > 0$

$\therefore$ x في الربع 1 أو الربع 3

$x = 45° + 180°k \qquad : k \in \mathbb{Z}$

$\tan x = \tan(180° + x)$ $\quad$ $\tan x$ دالة دورية دورتها 180°

- $\sqrt{3}\tan a = 1 \quad \Longrightarrow \tan a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

زاوية الاسناد α

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = 30°$$

$$\because \tan a > 0$$

$\therefore$ a في الربع 1 أو الربع 3

$$a = 30° + 180°k \qquad : k \in \mathbb{Z}$$

$\tan a = \tan(180° + a)$ دالة $\tan a$ دورية دورتها $180°$

- $\tan^2 x = 3 \quad \Longrightarrow \tan x = \mp\sqrt{3}$

$$\tan x = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}|\sqrt{3}| = \frac{\pi}{3}$$

$$\because \tan x > 0$$

$\therefore$ x تقع في الربع 1 أو الربع 3

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad : k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = -\sqrt{3}$$

زاوية الاسناد α

$$\alpha = \tan^{-1}|-\sqrt{3}| = \frac{\pi}{3}$$

$$\because \tan x < 0$$

$\therefore$ x تقع في الربع 2, الربع 4

$$x = \pi - \alpha + k\pi$$

$$= \pi - \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$= \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

دالة $\tan x$ دورية دورتها π

س حل المعادلة: $2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

$$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0 \rightarrow \sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$$

$$\sin\theta = 0$$

θ زاوية ربعية

$$\theta = 0 + 2k\pi$$

$$\theta = \pi + 2k\pi$$

$: k \in \mathbb{Z}$

$$2\cos\theta + 1 = 0$$

$$2\cos\theta = -1 \qquad \cos\theta = \frac{-1}{2}$$

زاوية الاسناد α

$$\alpha = \cos^{-1}\left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{\pi}{3}$$

$$\because \cos\theta < 0 \Rightarrow$$

θ في الربع 2

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

θ في الربع 3

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

س حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

$$\cos\theta(\sin\theta - 1) = 0$$

$$\cos\theta = 0$$

θ زاوية ربعية

$$\theta = 90° + 360°k$$

$$\theta = 270° + 360°k$$

$$\sin\theta - 1 = 0$$

$$\sin\theta = 1$$

θ زاوية ربعية

$$\theta = 90° + 360°k$$

$: k \in \mathbb{Z}$

س حل المعادلة: $2\cos x \sin x - \cos x = 0$

- $2\cos x \sin x - \cos x = 0 \quad \rightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0$

x زاوية ربعية

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$2\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\alpha = \sin^{-1}\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$ زاوية الاسناد α

$\because \sin x > 0 \Rightarrow$

x في الربع 1

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

x في الربع 2

$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$: k \in \mathbb{Z}$

- $\tan x \sin^2 x = \tan x \quad \rightarrow \tan x \sin^2 x - \tan x = 0$

$\tan x\,(\sin^2 x - 1) = 0$

$\tan x = 0$

$x = 0 + k\pi$

$\sin^2 x - 1 = 0$

$\sin^2 x = 1 \rightarrow \sin x = \mp\sqrt{1}$

$\sin x = 1$

x زاوية ربعية

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\sin x = -1$

x زاوية ربعية

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

س حل المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

$$(2\sin x - 3)(2\sin x - 1) = 0$$

$2\sin x - 3 = 0$

$2\sin x = 3$

$\sin x = \frac{3}{2}$

$-1 \le \sin x \le 1$

$\frac{3}{2} \notin [-1,1]$

لا يوجد حل

$2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \sin^{-1}\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$

$\because \sin x > 0 \Rightarrow$

x في الربع 1

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

x في الربع 2

$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

س حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

$$(\cos x + 1)(\cos x + 2) = 0$$

$\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -1$

x زاوية ربعية

$x = \pi + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$\cos x + 2 = 0$

$\cos x = -2$

$-1 \le \cos x \le 1$

$-2 \notin [-1,1]$

ليس لها حل

س حل المعادلة: $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

$$(2\cos x - 1)^2 = 0$$

$$2\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{3}$$ زاوية الاسناد α

$$\because \cos x > 0 \Rightarrow$$

x في الربع 1

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

x في الربع 4

$$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

معادلات تحتوي على مضاعفات الزوايا

س حل المعادلة: $2\cos 3x = \sqrt{2}$ حيث $0 \le x < \pi$

$3x$ تقع في دورة ونصف $\quad 0 \le 3x < 3\pi$

زاوية الاسناد α $\quad \alpha = \cos^{-1}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\pi}{4} \quad \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 3x > 0 \Longrightarrow$ $3x$ تقع في

الربع 1

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$k = 0 \ \rightarrow x = \frac{\pi}{12} \in [0, \pi]$$

$$k = 1 \ \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$$

$$k = 2 \ \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}$$

$$x = \frac{17\pi}{12} \notin [0, \pi]$$

الربع 4

$$3x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$k = 0 \ \rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \in [0, \pi]$$

$$k = 1 \ \rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{4} \notin [0, \pi]$$

ملغى

∴ حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{12}, x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{12}$

س حل المعادلة: $4\cos 2x = 2$ حيث $0° \leq x < 360°$

$2x$ تقع في دورتين $\qquad 0° \leq 2x \leq 720°$

زاوية الاسناد α $\qquad \cos 2x = \frac{2}{4} \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left|\frac{2}{4}\right| = 60°$

$\because \cos 2x > 0 \rightarrow$ $2x$ تقع في

الربع 1

$$2x = 60° + 360°k$$

$$x = 30° + 180°k$$

$$k = 0 \rightarrow x = 30° \in [0°, 360°)$$

$$k = 1 \rightarrow x = 30° + 180° = 210° \in [0°, 360°)$$

$$k = 2 \rightarrow x = 30° + 360° = 390° \notin [0°, 360°)$$

ملغى

الربع 4

$$2x = 360° - 60° + 360°k = 300° + 360k$$

$$x = 150° + 180°k$$

$$k = 0 \rightarrow x = 150° \in [0°, 360°)$$

$$k = 1 \rightarrow x = 150° + 180° = 330° \in [0°, 360°)$$

$$k = 2 \rightarrow x = 150° + 360° = 510° \notin [0°, 360°)$$

حل المعادلة: $x = 30°, x = 210°, x = 150°, x = 330°$

س أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0,2\pi)$

- $\sin 2x = 1$

$0 \le x < 2\pi$ $\qquad$ $0 \le 2x < 4\pi$

$2x$ زاوية ربعية $\qquad$ $2x$ تقع في دورتين

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0,2\pi)$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \in [0,2\pi)$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \notin [0,2\pi)$$

ملغى

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \frac{\pi}{4} , x = \frac{5\pi}{4}$

- $\tan 2x = 1$ $\quad 0 \le x < 2\pi \quad 0 \le 2x < 4\pi$

$2x$ تقع في دورتين $\quad \alpha = \tan^{-1}|1| = \frac{\pi}{4} \quad$ زاوية الاسناد α

$\because \tan 2x > 0 \quad \therefore$ $2x$ تقع في الربع 3 أو1

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{8} \in [0,2\pi)$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8} \in [0,2\pi)$$

$$k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8} \in [0,2\pi)$$

$$k = 3 \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{8} \in [0,2\pi)$$

$$k = 4 \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + 2\pi = \frac{17\pi}{8} \notin [0,2\pi)$$

حل المعادلة :

$$x = \frac{\pi}{8}, \quad x = \frac{5\pi}{8}, \quad x = \frac{9\pi}{8}, \quad x = \frac{13\pi}{8}$$

ملغى

متطابقات مجموع وفرق زاويتين

متطابقات الدوال المتكافئة: (فاقد تعليمي)

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

س أثبت أن: $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=sin\,\theta$

$$LHS=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\sin\theta$$
$$=RHS$$

س أثبت أن: $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$

$$LHS=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=-\cos\theta$$

$$=RHS$$

س أثبت أن: $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=csc\,\theta$

$$LHS=\frac{1}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)}$$

$$=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\csc\theta=RHS$$

س أثبت أن: $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$

$$LHS=\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)}=\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$=RHS$$

متطابقات المجموع والفرق:

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

س أوجد دون استخدام الالة الحاسبة كلا مما يلي:

- $\sin 15^o$ $= \sin(45° - 30°)$

$$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

- $\cos 75^o$ $= \cos(30° + 45°)$

$$= \cos 30° \cos 45° - \sin 30° \ \sin 45°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

- $\tan 105^o = \tan(45° + 60°)$

$$= \frac{\tan 45° + \tan 60°}{1 - \tan 45° \times \tan 60°} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - (1)(\sqrt{3})}$$

$$= -2 - \sqrt{3}$$

- $\cos 15^o = \cos(60° - 45°)$

$$= \cos 60° \ \cos 45° + \sin 60° \ \sin 45°$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

- $\sin 105°$

$\because 105° = 60° + 45°$

$\therefore \ \sin 105° = \sin(60° + 45°)$

$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

- $\tan 75^o$

$\because 75° = 45° + 30°$

$\therefore \ \tan 75° = \tan(45° + 30°)$

$$= \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

س إذا كان:

- $\cos\beta = \frac{-12}{13} \quad , \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$
- $\sin\alpha = \frac{4}{5} \quad , 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

أوجد كلا مما يلي:

- $\cos(\alpha + \beta)$
- $\tan(\alpha + \beta)$
- $\sin(\beta - \alpha)$

$$\sin\alpha = \frac{4}{5} \quad , 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

ربع 1

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \mp\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$\because \cos\alpha > 0$$

$$\therefore \cos\alpha = +\frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{-12}{13} \quad , \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$$

ربع 3

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin\beta = \mp\sqrt{1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2}$$

$$\because \sin\beta < 0$$

$$\therefore \sin\beta = -\frac{5}{13}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \frac{5}{12}$$

$$\sin\beta = \frac{-5}{13}$$

$$\cos\beta = \frac{-12}{13}$$

$$\tan\beta = \frac{5}{12}$$

س أوجد كلا مما يلي:

- $\cos(\alpha+\beta)$ $= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{3}{5}\times\left(\frac{-12}{13}\right) - \frac{4}{5}\times\left(\frac{-5}{13}\right)$$

$$= \frac{-16}{65}$$

- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{5}{12}} = \dfrac{63}{16}$

- $\sin(\beta-\alpha)$ $= \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$

$$= \left(\frac{-5}{13}\right)\times\frac{3}{5} - \left(\frac{-12}{13}\right)\times\frac{4}{5}$$

$$= \frac{33}{65}$$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

متطابقات ضعف الزاوية

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$tan\,(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

س إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ أستخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{-7}{25}$$

س إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ أستخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}$$

س إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد: $\sin 2\theta$.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin\theta = \mp\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$\because \sin\theta > 0$$

$$\therefore \sin\theta = +\frac{4}{5}$$

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{24}{25}$$

س إذا كان $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ فأوجد: $\sin 2\theta$.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos\theta = \mp\sqrt{1-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\because \cos\theta < 0$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 1$$

س إذا كان: $\tan\theta = \sqrt{3}$,

استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

- $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$$= \frac{2(\sqrt{3})}{1-(\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3}$$

س إذا كان: $\tan\theta = -1+\sqrt{2}$,
استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

- $\tan 20 = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad = \dfrac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(-1+\sqrt{2})^2} = 1$

س أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$\begin{aligned}
\text{LHS} = \cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) &= \cos\theta\ \cos\theta - \sin\theta\ \sin\theta \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) \\
&= \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta \\
&= 2\cos^2\theta - 1 = \text{RHS}
\end{aligned}$$

س أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$$\begin{aligned}
\text{LHS} = \cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) &= \cos\theta\ \cos\theta - \sin\theta\ \sin\theta \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta \\
&= 1 - 2\sin^2\theta \\
&= \text{RHS}
\end{aligned}$$

س أثبت صحة المتطابقة: $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\begin{aligned}
\text{LHS} = \sin 2\theta &= \sin(\theta+\theta) \\
&= \sin\theta\ \cos\theta + \cos\theta\ \sin\theta \\
&= 2\sin\theta\ \cos\theta \\
&= \text{RHS}
\end{aligned}$$

س أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$$\text{RHS} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) \times \cos^2\theta}{\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) \times \cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{\cos 2\theta}{1} = \cos 2\theta$$

$$= \text{LHS}$$

س أثبت صحة المتطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

$$\text{LHS} = 2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1)$$

$$= 4\cos^2\theta - 2$$

$$= \text{RHS}$$

س أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$LHS = \sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta\ \cos\theta + \cos 2\theta\ \sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\ \cos\theta\ \cos\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\ \cos^2\theta + \sin\theta - 2\ \sin^3\theta$$

$$= 2\sin\theta\,(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 2\ \sin^3\theta$$

$$= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\ \sin^3\theta$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = RHS$$

س أثبت صحة المتطابقة: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$$LHS = \cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta\ \cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$$

$$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta\ - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta$$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta\ - 2\sin^2\theta\cos\theta$$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta\ - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta\ - 2\cos\theta\,(1 - \cos^2\theta)$$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta\ - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$$

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = RHS$$

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

س استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\sin 15°$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \frac{\alpha}{2} = 15° \qquad \alpha = 30°$$

$15°$في الربع الأول

$$\therefore \sin 15° = +\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

س استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15°$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \frac{\alpha}{2} = 15° \qquad \alpha = 30°$$

15° في الربع الأول

$$\cos 15° = +\sqrt{\frac{1+\cos 30}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

س إذا كانت: $180° < \theta < 270°$, $\sin\theta = \frac{-24}{25}$, فأوجد:

$\sin\frac{\theta}{2}$ $\tan\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$

θ في الربع 3

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos\theta = \mp\sqrt{1-\left(-\frac{24}{25}\right)^2}$$

$$\because \cos\theta < 0$$

$$\cos\theta = -\frac{7}{25}$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$\frac{\theta}{2}$ في الربع 2

$$\sin\frac{\theta}{2} > 0$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1-\frac{-7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \mp\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$\frac{\theta}{2}$ في الربع 2

$$\cos\frac{\theta}{2} < 0$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{-7}{25}}{2}} = \frac{-3}{5}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$\frac{\theta}{2}$ في الربع 2

$$\tan\frac{\theta}{2} < 0$$

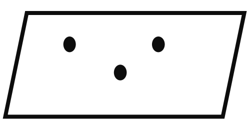
$$\tan\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{1+\left(\frac{-7}{25}\right)}} = -\frac{4}{3}$$

المستقيمات والمستويات في الفضاء

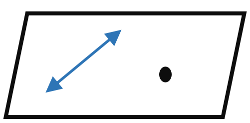
مسلمات (موضوعات) الفضاء

- من نقطة واحدة يمر عدد لا نهائي من المستقيمات.
- أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد.
- كل مستقيم يحوى على الأقل نقطتين مختلفتين.
- من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازى المستقيم المعلوم.
- في كل مستو يوجد على الأقل ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة.
- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين مستوياً وحيداً

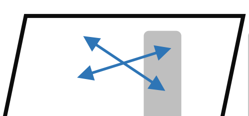
حالات تعيين المستوي في الفضاء



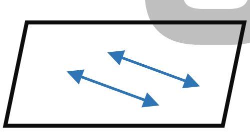
- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعين مستويا واحد فقط



- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعينان مستويا واحداً فقط

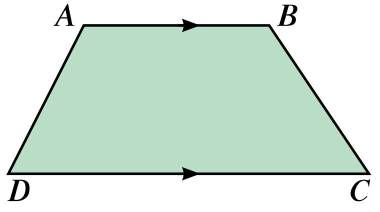


- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويا واحدا فقط



- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويا واحدا فقط

س أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد.



$\because \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

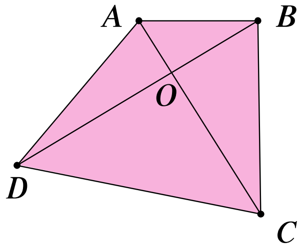
$\therefore \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{DC}$ يشكلان مستوى π وحيد

$A, D \in \pi \Longrightarrow \overline{AD} \subset \pi$

$B, C \in \pi \Longrightarrow \overline{BC} \subset \pi$

$\therefore \overline{AB}, \overline{DC}, \overline{AD}, \overline{BC}$ تقع في مستوى واحد

س في الشكل المقابل $\overline{BD}, \overline{AC}$ يتقاطعان في O ،
أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.



$\because \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان في O

$\therefore$ يعينان مستوى π وحيد

$\because A, B \in \pi \Longrightarrow \overline{AB} \subset \pi$

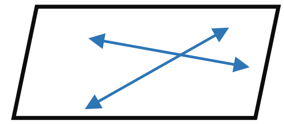
$\because A, D \in \pi \Longrightarrow \overline{AD} \subset \pi$

$\because D, C \in \pi \Longrightarrow \overline{DC} \subset \pi$

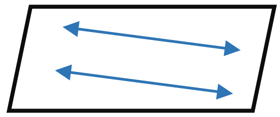
$\because B, C \in \pi \Longrightarrow \overline{BC} \subset \pi$

$\therefore$ أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوى واحد

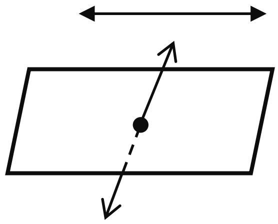
أوضاع المستقيمات في الفضاء



- متقاطعان

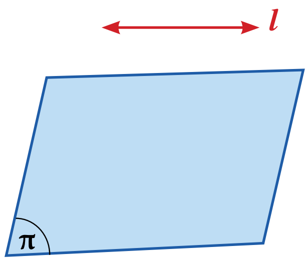


- متوازيان



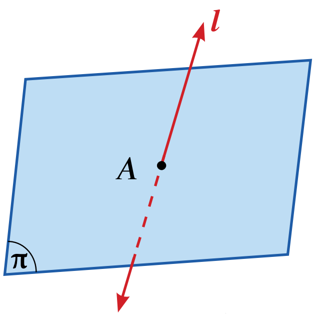
- متخالفان

أوضاع مستقيم ومستو في الفضاء



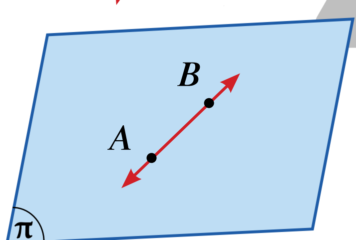
- صفر نقطة مشتركة (المستقيم مواز المستوى)

$$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$$



- نقطة مشتركة واحدة (المستقيم يقطع المستوى)

$$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$$

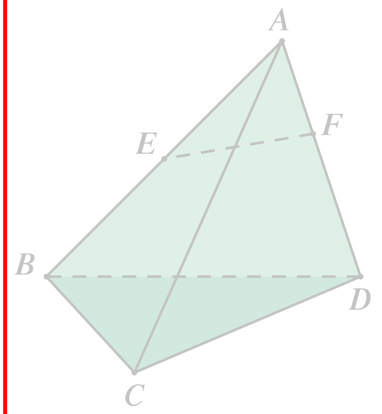


- نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل (المستقيم يقع بكامله في المستوى)

$$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi \qquad \therefore \ \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$$

س إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.
النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$, النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$
$\overline{EF}$ لايوازي $\overline{BD}$. أثبت أن:

- $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$
- $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)



$\because E \in \overline{AB}, \overline{AB} \subseteq (ABD)$

$\therefore E \in (ABD)$

$\because F \in \overline{AD}, \overline{AD} \subseteq (ABD)$

$\therefore F \in (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$ النقطتان E, F تنتميان الى (ABD)

$\because F \in \overline{AD}$ ملغى $\overline{AD} \subseteq (ACD)$

$\therefore F \in (ACD)$

$E \notin (ACD)$

$\because$ E, F نقطتان مختلفتن $\therefore$ تحددان مستقيم وحيد $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)

- $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD)

$\overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{EF}$ يقعان في (ABD) ، غير متوازيين

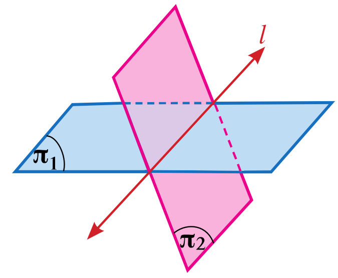
$\therefore \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{EF}$ متقاطعان في النقطة M

$M \in \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BD} \subseteq (BCD)$

$\therefore M \in (BCD)$

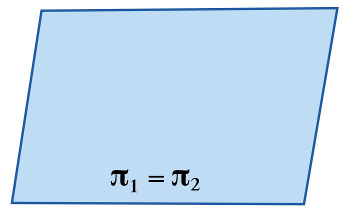
$\therefore \overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD) في النقطة M

أوضاع مستويين في الفضاء



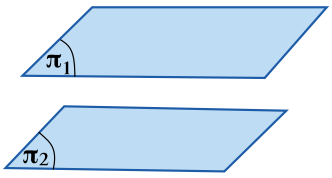
- المستويان متقاطعان في مستقيم

$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$



- المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط)

$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$



- المستويان متوازيان: لا يشتركان في أي نقطة

$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$

س l,m,n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستو واحد تتقاطع مثنى مثنى
أثبت أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

$\because$ المستقيمان m,n متقاطعان $\therefore$ يعينان مستويا وحيدا وليكن π_1

$\because$ المستقيمان l,n متقاطعان $\therefore$ يعينان مستويا وحيدا وليكن π_2

ولتكن O نقطة تقاطع المستقيمين l,m

$$O \in \overleftrightarrow{m} \quad \therefore O \in \pi_1$$

$$O \in \overleftrightarrow{l} \quad \therefore O \in \pi_2$$

$$O \in \pi_1 \cap \pi_2$$

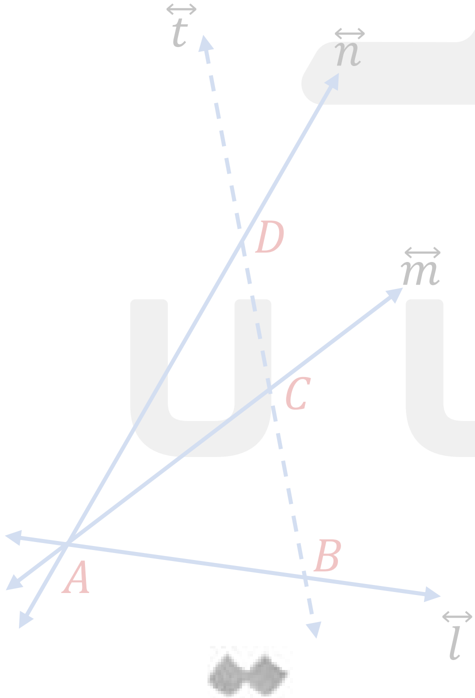
$$\because \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n} \quad \therefore O \in \overleftrightarrow{n}$$

$\therefore$ O نقطة مشتركة بين المستقيمات الثلاثة و بالتالي تتقاطع المستقيمات l,m,n في نقطة واحدة.

س $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A

ملغى

المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B,C,D على الترتيب
أثبت أن المستقيمات l,m,n,t تقع في مستو واحد.



البرهان:

$\because$ $\overleftrightarrow{l}$,$\overleftrightarrow{m}$ متقاطعان في A

$\therefore$ يشكلان مستوى π

$$\because B \in \overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{l} \subseteq \pi \Longrightarrow B \in \pi$$

$$\because C \in \overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{m} \subseteq \pi \Longrightarrow C \in \pi$$

$$\Longrightarrow \overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{t} \subseteq \pi$$

$$\because A \in \overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{l} \subseteq \pi \Longrightarrow A \in \pi$$

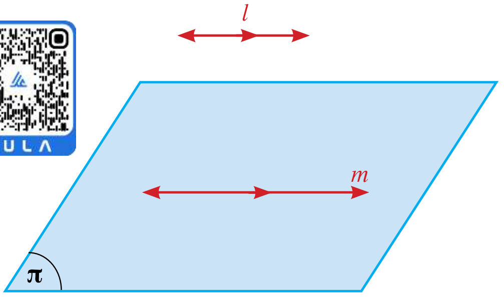
$$\because D \in \overleftrightarrow{t}, \overleftrightarrow{t} \subseteq \pi \Longrightarrow D \in \pi$$

$$\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{n} \subseteq \pi$$

$\therefore$ المستقيمات l,m,n,t تقع في π

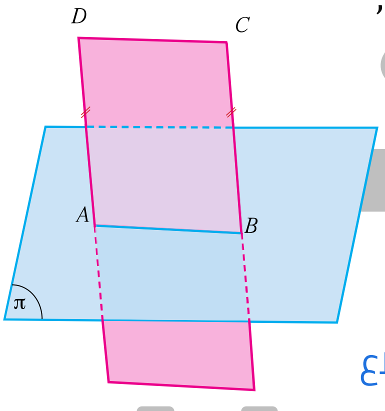
المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

نظرية ١:
إذا وازى مستقيم خارج مستو مستقيماً في المستوى فإنه يوازي المستوى.



$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \,,\, \overleftrightarrow{m} \subset \pi \quad \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$$

س في الشكل المقابل: $AD = BC$, $\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$,
أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \,//\, \pi$



$\because$ $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ $\therefore$ يشكلان مستوى $ABCD$

$\because$ $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}, AD = BC$ $\therefore$ $ABCD$ متوازي أضلاع

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}\ , \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

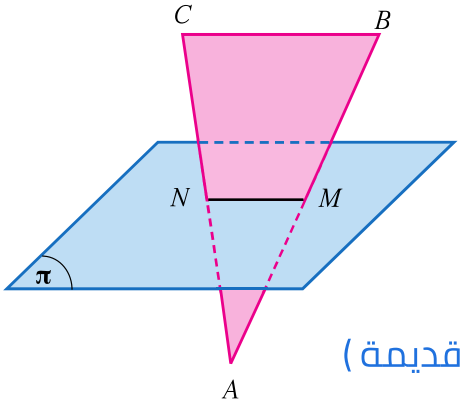
(نظرية) $\Longrightarrow \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

س في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه

M منتصف $\overline{AB}$, N منتصف $\overline{AC}$,

N, M تنتميان الى المستوى π

اثبت أن $\overleftrightarrow{BC} // \pi$



$\because$ M منتصف $\overline{AB}$, N منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \quad \overline{MN} \parallel \overline{BC} \quad ①$ (نظرية قديمة)

$\because$ N, M تنتميان الى المستوى π

$\therefore \quad \overleftrightarrow{MN} \subset \pi \quad ②$

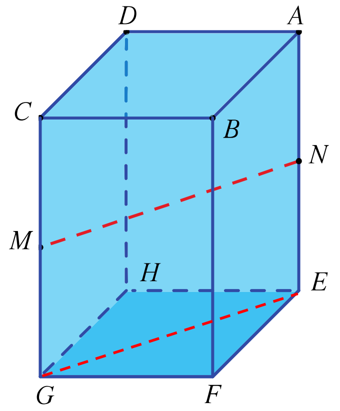
$① \; ② \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$

نظرية ①

س $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$



نرسم $\overline{GE}$

$\overline{CG} \parallel \overline{AE}\ , CG = AE$

(خواص شبه الكعب)

$\because$ M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$

$\therefore\ \overline{MG} \parallel \overline{NE}, MG = NE$

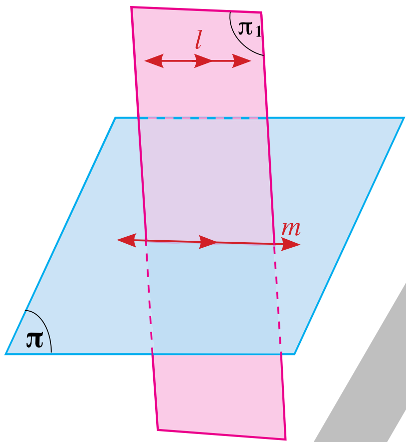
$\therefore$ $MNEG$ متوازي أضلاع

$\overline{MN} \parallel \overline{GE}, \overline{GE} \subset (EFGH)$

(نظرية) $\Longrightarrow \overline{MN} \parallel (EFGH)$

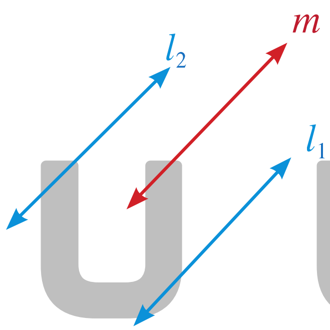
نظرية 2 - نظرية 3

نظرية 2:
إذا وازى مستقيم مستوياً , فكل مستو مار بالمستقيم ويقطع المستوى , يقطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم.



$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{l} \parallel \pi \\ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1 \\ \pi_1 \cap \pi = \{\overleftrightarrow{m}\} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

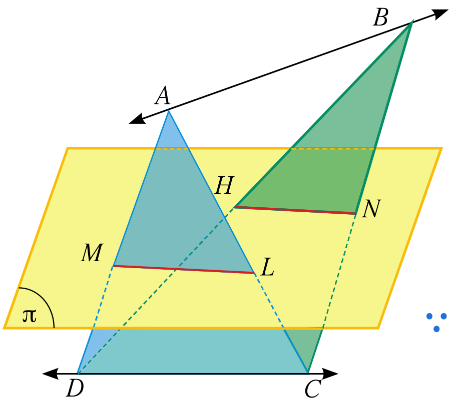
نظرية 3:
المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.



$$\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m} \Rightarrow \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$$

س

في الشكل المقابل: اذا كان $\overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ متخالفان π // $\overleftrightarrow{CD}$.
$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L
$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N
أثبت أن: $\overleftrightarrow{NH}$ // $\overleftrightarrow{LM}$



$\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}$ متقاطعان يعينان مستوى (ACD)

$$\because\ \overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}, \qquad \overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$$

$$\therefore\ (ACD) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$$

$$\longrightarrow \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi\ , \overleftrightarrow{CD} \subset (ACD)\ , (ACD) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$$

$$\Longrightarrow \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{ML} \longrightarrow ①$$ (نظرية)

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان يعينان مستوى (BCD)

$$\because\ \overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}\ , \qquad \overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}$$

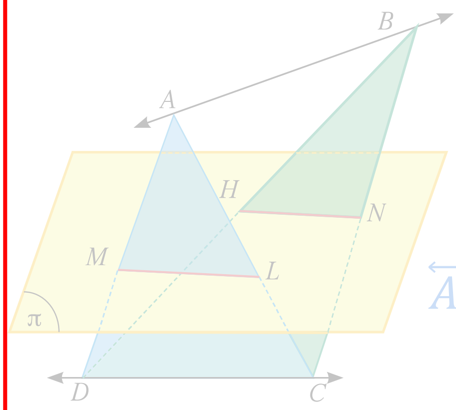
$$\therefore\ (BCD) \cap \pi = \overleftrightarrow{NH}$$

$$\longrightarrow \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi\ , \overleftrightarrow{CD} \subset (BCD), \pi \cap (BCD) = \overleftrightarrow{NH}$$

$$\Longrightarrow \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{NH} \longrightarrow ②$$ (نظرية)

$$① \quad ② \quad \Longrightarrow \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{NH}$$ (نظرية)

س إذا كان $\overleftrightarrow{AB} // \pi$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع



$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان يشكلان مستوى (ABC)

$\overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}, \qquad \overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$

$\Longrightarrow (ABC) \cap \pi = \overleftrightarrow{LN}$

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi \,, \overleftrightarrow{AB} \subset (ABC), \pi \cap (ABC) = \overleftrightarrow{LN}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{LN} \longrightarrow ③$ نظرية

$\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان يشكلان مستوى (ABD)

$\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\} \,, \qquad \overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\} \Longrightarrow (ABD) \cap \pi = \overleftrightarrow{MH}$

ملغى

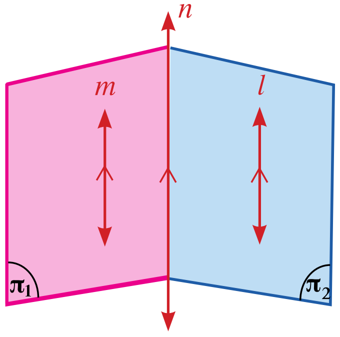
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi \,, \overleftrightarrow{AB} \subset (ABD), \pi \cap (ABD) = \overleftrightarrow{MH}$

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MH} \longrightarrow ④$ نظرية

$③ \quad ④ \quad \Longrightarrow \overleftrightarrow{LN} \parallel \overleftrightarrow{MH}$ نظرية

$\because \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{NH}, \overleftrightarrow{LN} \parallel \overleftrightarrow{MH} \Longrightarrow$ $LMHN$ متوازي أضلاع

نتيجة ١:
إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان، فإن خط تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين.

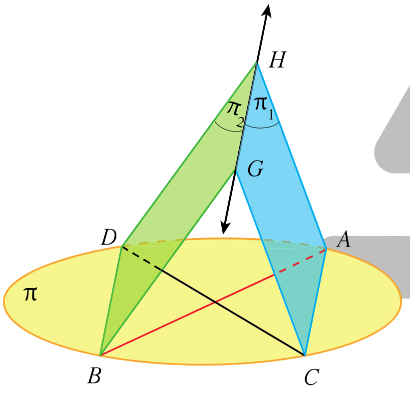


$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 ,\ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2 \\ \pi_1 \cap \pi_2 = \{\overleftrightarrow{n}\} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$$

س في الشكل المقابل: $\overline{CD}$ ، $\overline{AB}$ قطران في مستوى الدائرة π

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوى الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$



$\overline{AB}$,$\overline{CD}$ قطران في الدائرة. ينصف كل منهما الاخر ومتطابقان ∴ الشكل $ACBD$ مستطيل

$\therefore\ \overline{AC} \parallel \overline{DB}$

$\because\ \overline{AC} \subset \pi_1 \,.\, \overline{DB} \subset \pi_2 \,.\, \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

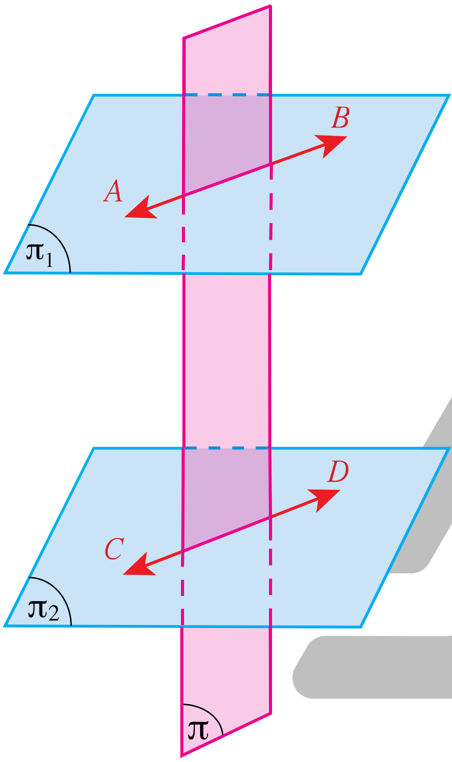
$\therefore\ \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$ نتيجة

$\because\ \overleftrightarrow{GH} \parallel \overline{AC} \,,\, \overline{AC} \subset \pi$

$\therefore\ \overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$ (نظرية 1)

نظرية 4

نظرية 4:
إذا قطع مستو مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



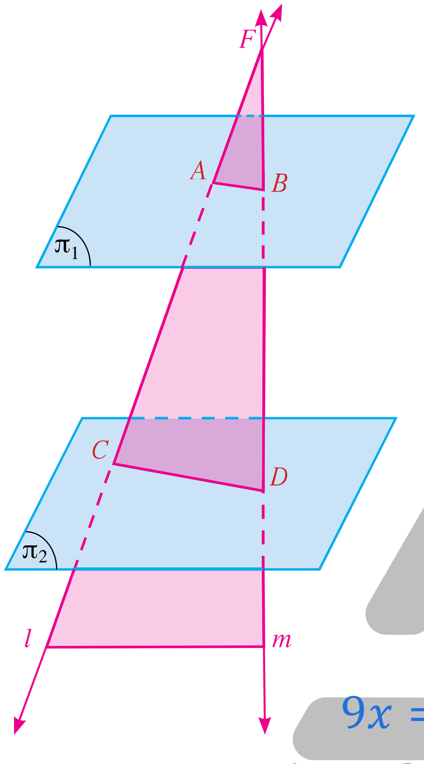
$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \parallel \pi_2 \\ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \\ \pi_2 \cap \pi = \overleftrightarrow{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

س في الشكل المقابل: $\pi 1$, $\pi 2$ مستويين متوازيين

$\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلاً من π_1 في A,B , π_2 في C,D

إذا $FB = 5cm\ ,\ CD = 9cm\ ,\ \ AC = 6cm\ ,\ BD = 4cm$

فأوجد محيط المثلثات FAB



l,m متقاطعان ∴ يشكلان مستوى $FCD = \pi$

$\because\ \pi_1 \parallel \pi_2\ ,\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}, \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\because\ \overset{\Delta}{FAB} \sim \overset{\Delta}{FCD} \Longrightarrow \dfrac{FA}{FC} = \dfrac{FB}{FD} = \dfrac{AB}{CD}$

$$\frac{x}{x+6} = \frac{5}{9} = \frac{y}{9}$$

$9x = 5x + 30$

$4x = 30 \Longrightarrow x = 7.5$

$9y = 45 \Longrightarrow y = 5$

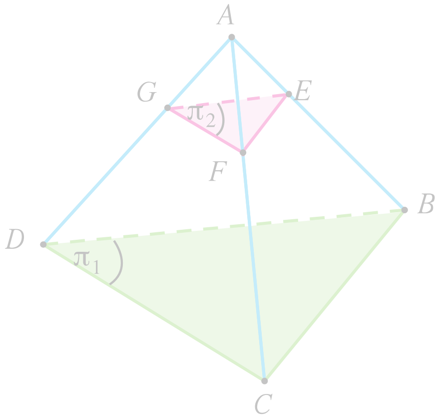
محيط المثلث FAB = $7.5 + 5 + 5 = 17.5\ cm$

س في الشكل المقابل: $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_1 , π_2 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$, $FG = 6cm$

فأوجد DC



$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \parallel \pi_2 \\ (ACD)\cap\pi_1 = \overleftrightarrow{CD} \\ (ACD)\cap\pi_2 = \overleftrightarrow{GF}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{GF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

نظرية

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \parallel \pi_2 \\ (ABC)\cap\pi_1 = \overleftrightarrow{BC} \\ (ABC)\cap\pi_2 = \overleftrightarrow{EF}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{EF}$$

نظرية

ملغى

$$\because \overset{\Delta}{AGF} \sim \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow$$

$$\frac{AG}{AD} = \frac{GF}{DC} = \frac{AF}{AC}$$

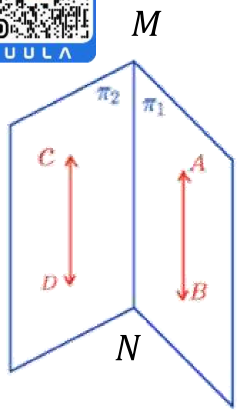
$$\because \overset{\Delta}{AFE} \sim \overset{\Delta}{ACB} \Rightarrow$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{FE}{CB} = \frac{AE}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{GF}{DC} = \frac{AE}{AB}$$

$$\frac{6}{DC} = \frac{1}{4} \Rightarrow DC = 24\ cm$$

س ليكن π_1, π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث
$\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$,$\overleftrightarrow{CD} // \pi_1$ و $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$,$\overleftrightarrow{AB} // \pi_2$,
أثبت أن : $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

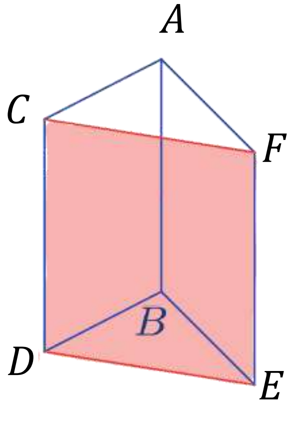


$\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2 , \overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1 , \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ ① (نظرية)

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1 , \overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2 , \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN} \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ ②

① , ② $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (نظرية 3)

س $ABEF$,$ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معا و يتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$
أثبت أن : $CDEF$ متوازي أضلاع



الحل

$ABCD$ متوازي أضلاع

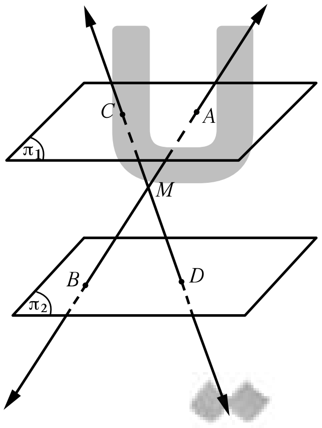
$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} , AB = CD$ ①

$ABEF$ متوازي أضلاع

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF} , AB = EF$ ②

① , ② $\Rightarrow \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD} , EF = CD \Rightarrow$
$CDEF$ متوازي أضلاع

س في الشكل المقابل π_1, π_2 مستويان متوازيان , M نقطة واقعة بينهما ,
حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$
أثبت أن : $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان يعينان مستوى π

$\pi \cap \pi_1 , = \overleftrightarrow{AC} , \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{BD} , \pi_1 \parallel \pi_2$

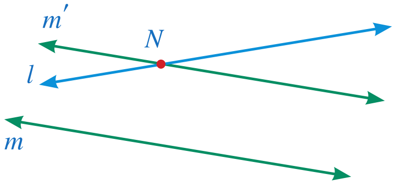
$\Rightarrow \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ (نظرية 4)

$\Rightarrow \Delta AMC \sim \Delta BMD$

$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{CM}{MD} = \frac{AC}{BD}$

$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

تعامد مستقيم مع مستوٍ

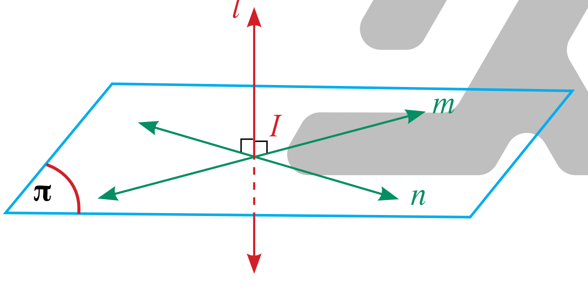


الزاوية بين مستقيمين متخالفين

هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم قاطع له و موازٍ للأخر.

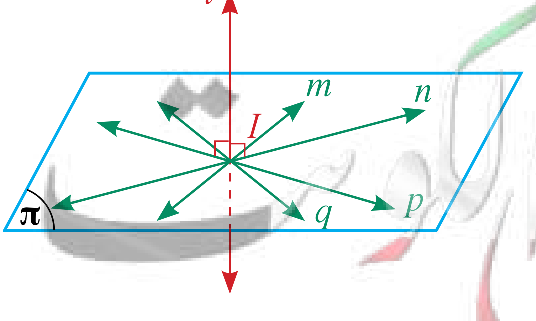
يكون المستقيم عمودي على المستوى ، إذا كان عمودياً على كل المستقيمات الواقعة في هذا المستوي. $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

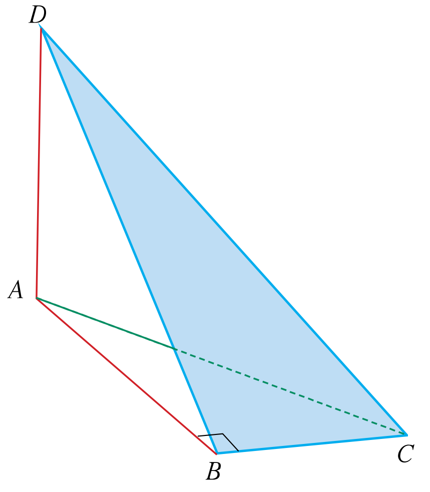
نظرية 5:
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عمودياً على مستويهما.



$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m} \\ \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi$$

نتيجة 2:
جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواه في مستوٍ واحد عمودياً على المستقيم المعلوم.





س في الشكل المقابل, المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

$$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC), \overleftrightarrow{BC} \subset (ABC)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC} \rightarrow 1$$

$\because$ ABC قائم في $\hat{B}$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC} \rightarrow 2$$

$\overline{AD}, \overline{AB}$ متقاطعان يشكلان مستوى ABD 3

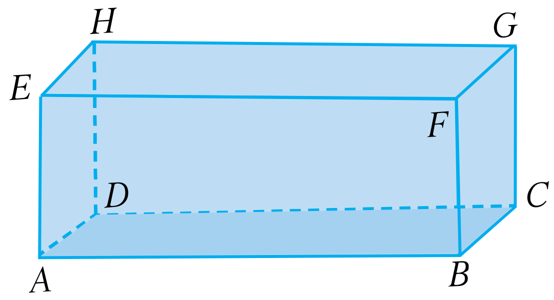
1 2 3 $\Longrightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp (ABD)$ (نظرية 5)

$$\because \overleftrightarrow{BD} \subset (ABD)$$

$$\Longrightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{BD}$$

اذا المثلث DBC قائم في $\hat{B}$

س في شبه المكعب المقابل ،
أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$



(خواص شبه المكعب) $\overleftrightarrow{HE} \perp \overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{HE} \perp \overleftrightarrow{EA}$

نظرية 5 $\therefore \overleftrightarrow{HE} \perp (ABFE)$

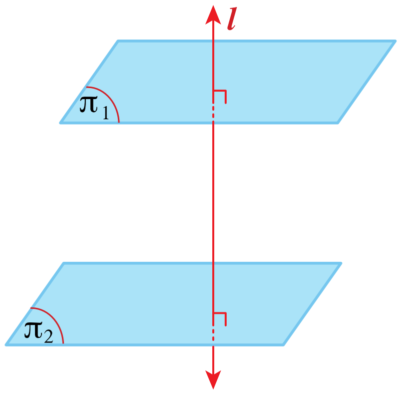
$\because \overleftrightarrow{EB} \subset (ABFE)$

$\therefore \overleftrightarrow{HE} \perp \overleftrightarrow{EB}$

$\therefore$ المثلث BEH قائم في $\hat{E}$.

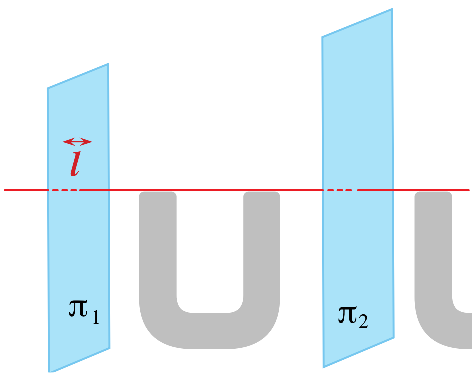
نظرية 6 - نظرية 7

نظرية ٦:
إذ كان مستقيم عمودياً على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيان.



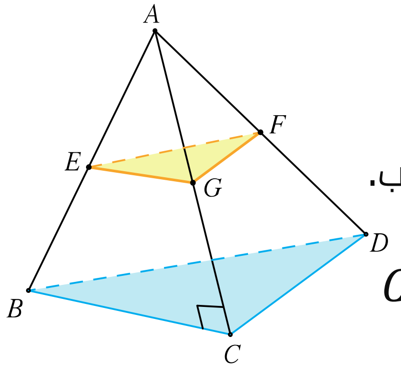
$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 , \quad \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \backslash\backslash \pi_2$$

نظرية ٧:
إذ كان مستقيم عمودياً على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عمودياً على المستوى الأخر



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 , \pi_1 \backslash\backslash \pi_2 \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

س



في الشكل المقابل :

A نقطه خارج المستوى BCD,

والنقاط E,G,F منتصفات $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ على الترتيب.

اذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $CD = 5CM$, $AC = 12CM$, $AD = 13CM$

فأثبت أن: $(EGF)//(BCD)$

البرهان:

في $\Delta\ ACD$: $(AC)^2 + (CD)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$

$(AD)^2 = (13)^2 = 169$

$\Delta\ ACD$ قائم الزاوية في C

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$ $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp (BCD) \quad \rightarrow ①$ (نظرية 5)

في $\Delta\ ABC \because E$ منتصف $\overline{AB}, G$ منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{EG} \parallel \overleftrightarrow{CB} \quad \therefore m(\widehat{AGE}) = m(\widehat{BCA}) = 90°$

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$

وبالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

$\because \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}, \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$ $\overleftrightarrow{EG}, \overleftrightarrow{GF}$ متقاطعان

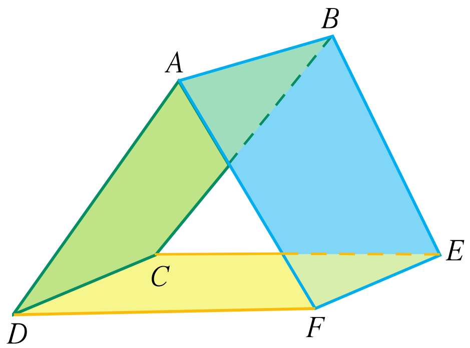
$\therefore \overleftrightarrow{AG} \perp (EGF) \quad \rightarrow ②$ (نظرية 5)

$① \quad ② \Longrightarrow (BCD) \parallel (EGF)$ (نظرية 6)

س في الشكل المقابل :

$ABCD$,$ABEF$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD)//(BEC)$



$\because$ $ABEF, ABCD$ مستطيلان

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AF}, \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ $\overleftrightarrow{AF}$,$\overleftrightarrow{AD}$ متقاطعان

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp (AFD)$ (نظرية 5)   ①

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{BC}$ متقاطعان

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp (BEC)$ (نظرية 5)   ②

① ② $\Longrightarrow (AFD) \parallel (BEC)$ (نظرية 6)

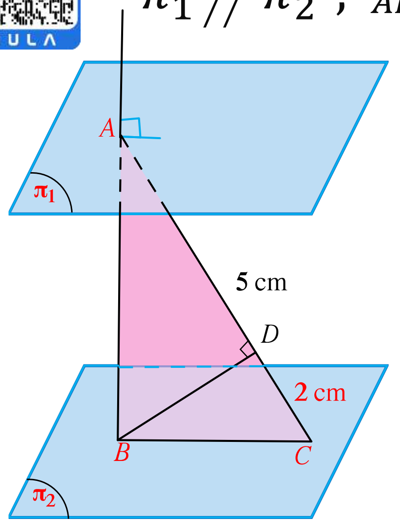
س

في الشكل المقابل , $\pi_1 // \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1 , A \in \pi_1 , \overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى ABC

اذاكان $AD = 5CM , DC = 2CM$

أوجد: BD



$\because \pi_1 \parallel \pi_2, \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ نظرية 7

$\because \overline{BC} \subset \pi_2$ $\therefore \overline{AB} \perp \overline{BC}$

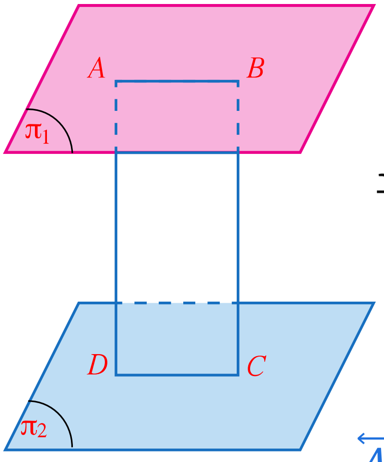
$\therefore$ المثلث ABC القائم الزاوية في B

$(BD)^2 = AD \times DC$ (نظرية صف عاشر)

$= 5 \times 2 = 10$

$\Longrightarrow BD = \sqrt{10} cm$

س



في الشكل المقابل : $\pi_1 \;//\; \pi_2$

A,B نقطتان في π_1

C,D نقطتان في π_2 حيث: A,B,C,D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2$, $\overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل

نظرية 7

$$\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2 \,, \pi_1 \parallel \pi_2 \Longrightarrow \overleftrightarrow{AD} \perp \pi_1$$

$$\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2 , \pi_1 \parallel \pi_2 \Longrightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \pi_1$$

$$A, B \in \pi_1 \Longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$$

$$C, D \in \pi_2 \Longrightarrow \overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$$

$$\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_1 \Longrightarrow \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

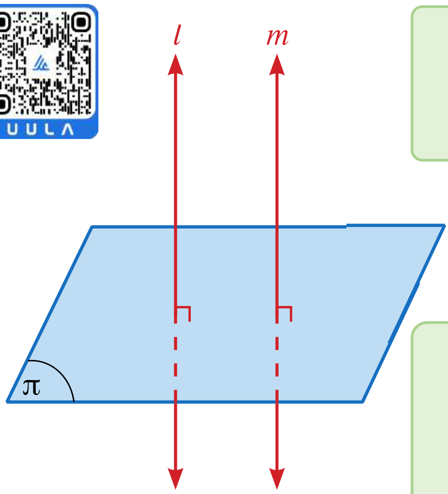
$$\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2 \Longrightarrow \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

$$\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_1 \Longrightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

$$\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2 \Longrightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

$\therefore$ $ABCD$ مستطيل لأن زواياه الأربع قائمة

نظرية 8 - نظرية 9

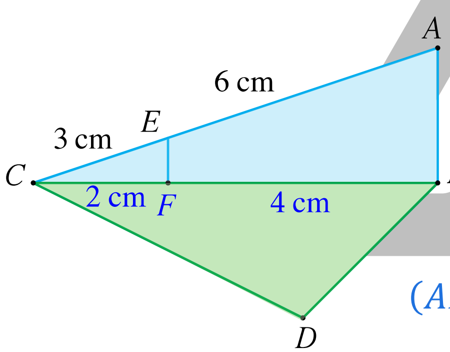


نظرية 8:
المستقيمان العموديان على مستو متوازيان

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \,, \overleftrightarrow{m} \perp \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \setminus\setminus \overleftrightarrow{m}$$

نظرية 9:
إذا توازى مستقيمان أحدهما عمودياً على مستو كان المستقيم الآخر عمودياً على المستوى أيضاً

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \,, \overleftrightarrow{l} \setminus\setminus \overleftrightarrow{m} \Rightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$



س في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$
وكان $CF = 2CM \,, FB = 4CM$
$CE = 3CM \,, EA = 6CM$
أثبت ان: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

$\because$ $\overline{CA}, \overline{AB}$ متقاطعان $\therefore$ يعينان مستو وحيد (ABC)

في المثلث CAB :

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \overline{EF} \parallel \overline{AB}$ نظرية طاليس

$\because \overline{AB} \perp (CBD)$

$\therefore \overline{EF} \perp (CBD)$ نظرية

$\because \overline{DB} \subset (CBD)$ $\therefore \overline{EF} \perp \overline{DB}$

س

في الشكل المقابل:

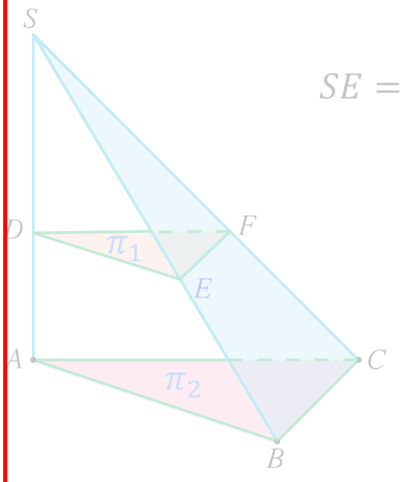
المستويان (DEF) , (ABC) متوازيان

$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان:

$SE = 5cm ,SD = 3\ cm ,DA = 2\ cm ,BC = 5\ cm ,AC = 6\ cm$

فأوجد محيط المثلث DEF



بفرض: $(ABC) = \pi_2 , (DEF) = \pi_1$

نظرية $\because \overleftrightarrow{SA} \perp \pi_2, \pi_1 \parallel \pi_2 \Longrightarrow \overleftrightarrow{SA} \perp \pi_1$

$\because\ \overline{DE} \subset \pi_1 \Longrightarrow \overline{SD} \perp \overline{DE}$

نظرية فيثاغورث في المثلث SDE $\left[DE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\ cm\right]$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \parallel \pi_2, (SAC) \cap \pi_1 = \overline{DF} \\ (SAC) \cap \pi_2 = \overline{AC} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{DF} \parallel \overline{AC}$$

ملغى

$$\overset{\Delta}{SDF} \sim \overset{\Delta}{SAC} \Longrightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{DF}{AC} = \frac{SF}{SC} \Longrightarrow \frac{3}{5} = \frac{DF}{6}$$

نظرية 4 $\Longrightarrow 5\ DF = 18 \Longrightarrow DF = 3.6\ cm$

بالمثل نجد $\overline{EF} \parallel \overline{BC} \Longleftarrow \overset{\Delta}{SEF} \sim \overset{\Delta}{SBC} \Longleftarrow \frac{SF}{SC} = \frac{EF}{BC} = \frac{SE}{SB}$

$$\frac{EF}{5} = \frac{3}{5}\ , 5\ EF = 15\ , EF = 3$$

محيط المثلث $DEF = 4 + 3.6 + 3 = 10.6\ Cm$

تـــدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية