UULA

التمارين المقالية

الرياضيات

الكورس الثاني

11

2021 - 2022

تمارين على:
الأعداد المركبة

س بسط كل عدد مستخدما الوحدة التخيلية i

- $\sqrt{-15} \quad = \sqrt{15}i$
- $\sqrt{-16} \quad = 4i$
- $-\frac{1}{2}\sqrt{-100} \quad = -5i$
- $3\sqrt{-9} \quad = 9i$

س اكتب كل عدد في الصورة الجبرية .

- $\sqrt{-1}+2 \quad = 2+i$
- $2+\sqrt{-3} \quad = 2+\sqrt{3}i$
- $\frac{\sqrt{-8}+8}{2} \quad = 4+\sqrt{2}i$
- $\frac{-\sqrt{-50}-2}{6} \quad = -\frac{1}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{6}i$

س حل المعادلات التالية :

- $2x+3yi=-14+9i$

  $2x=-14 \qquad 3y=9$

  $x=-7 \qquad y=3$

- $3x+19i=16-8yi$

  $3x=16 \qquad 19=-8y$

  $x=\frac{16}{3} \qquad y=\frac{-19}{8}$

- $14i^2-3i=2x+(y+5)i$

  $-14-3i=2x+(y+5)i$

  $2x=-14 \qquad -3=y+5$

  $x=-7 \qquad y=-8$

س مثل كلا مما يلي في المستوى المركب :

- $z_1 = -2 + 3i$

  $M_1(-2\,,3)$

- $z_2 = -4$

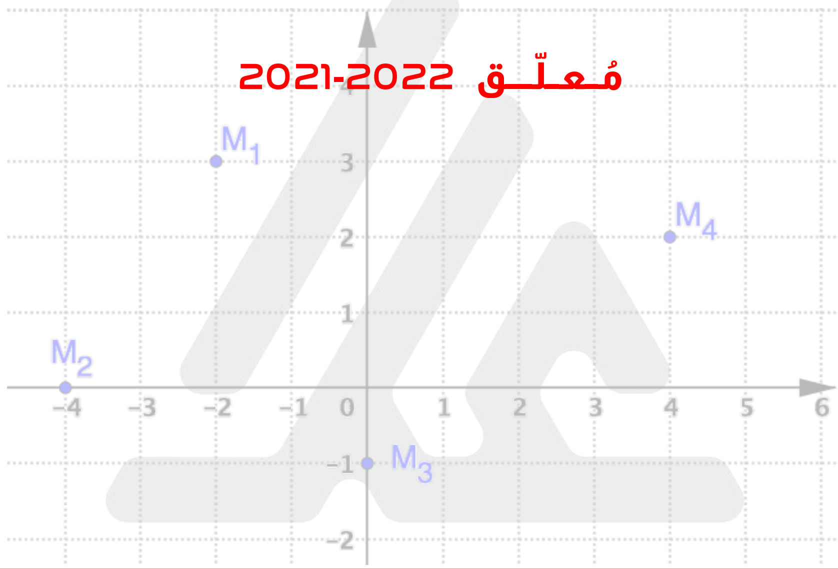
  $M_2(-4\,,0)$

- $z_3 = -i$

  $M_3(0\,,-1)$

- $z_4 = 2(2 + i)$

  $= 4 + 2i = M_4(4\,,2)$



س اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية :

- $L(4\,,5)$

  $Z = 4 + 5i$

- $M(-4\,,-2)$

  $2 = -4 - 2i$

- $N(-2\,,6)$

  $Z = -2 + 6i$

- $P(0\,,-3)$

  $Z = -3i$

س بسط كل تعيير مما يلي :

- $(2 + 4i) + (4 - i)$

  $= 6 + 3i$

- $6 - (8 + 3i)$

  $= 6 - 8 - 3i$

  $= -2 - 3i$

- $\left(4+\sqrt{-9}\right)+\left(6-\sqrt{-49}\right)$

$= 4 + 3i + 6 - 7i$

$= 10 - 4i$

- $\left(8-\sqrt{-1}\right)-\left(-3+\sqrt{-16}\right)$

$= (8 - i) - (-3 + 4i)$

$= 8 - i + 3 - 4i$

$= 11 - 5i$

- $(-2i)\,(5i)$

$= -10i^2 = 10$

- $(4i)\,(-9i)^2$

$= (4i)\,(81i^2)$

$= (4i)\,(-81)$

$= -324i$

- $-5(1+2i)+3i(3-4i)$

$= -5 - 10i + 9i - 12i^2$

$= -5 - 10i + 9i + 12$

$= 7 - i$

- $(-6-5i)\,(1+3i)$

$= -6 - 18i - 5i - 15i^2$

$= -6 - 18i - 5i + 15$

$= 9 - 23i$

- $\left(-2+\sqrt{-9}\right)\left(6+\sqrt{-25}\right)$

$= (-2 + 3i)(6 + 5i)$

$= -12 - 10i + 18i + 15i^2$

$= -12 - 10i + 18i - 15$

$= -27 + 8i$

- $i\,(-6i)^3$

$= i \cdot (-6)^3\, i^3$

$= -216i^4$

$= -216\times 1$

$= -216$

س إذا كان $z = \frac{1-i}{1+i}$ فأوجد : $z^{12}\ , z^{27}$

$z = \frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i-i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{-2i}{2} = -i$

مُعلّق 2021-2022

$\Longrightarrow z^{12} = (-i)^{12} = i^{12} = i^{3\times4+0} = (i)^0 = 1$

$z^{27} = (-i)^{27} = -i^{4\times6+3} = -i^3 = -(-i) = i$

س إذا كان $z_1 = 2+i\ , z_2 = -3+4i$ فأوجد :

- $-\frac{1}{3}z_2$

  $= -\frac{1}{3}(-3+4i) = 1-\frac{4}{3}i$

- $z_1 . z_2$

  $= (2+i)(-3+4i) = -6+8i-3i+4i^2 = -10+5i$

- z_1^3

  $= (2+i)^3 = (2+i)(2+i)^2$

  $= (2+i)(4+4i+i^2)$ مُعلّق 2021-2022

  $= (2+i)(3+4i)$

  $= 6+8i+3i+4i^2 = 2+11i$

- $\overline{\overline{z_1}\cdot z_2}$

  $= \overline{\overline{z_1}}\cdot\overline{z_2} = z_1\cdot\overline{z_2} = (2+i)(-3-4i)$

  $= -6-8i-3i-4i^2 = -2-11i$

- $\overline{z_1} - \overline{z_2}$

  $= (2-i)-(-3-4i) = 2-i+3+4i = 5+3i$

- $z_1\cdot\overline{z_2}$

  $= (2+i)(-3-4i)$

  $= -6-8i-3i-4i^2 = -2-11i$

س إذا كان $z = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد : $\bar{z}$

$$z = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}} \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{4i+4\sqrt{3}i^2}{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{4i-4\sqrt{3}}{4}$$

$$= -\sqrt{3} + i$$

$$\bar{z} = -\sqrt{3} - i$$

س أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي :

- $-3 - 2i$

$$= \frac{1}{-3-2i} \cdot \frac{-3+2i}{-3+2i}$$

$$= \frac{-3+2i}{(-3)^2+(2)^2} = \frac{-3+2i}{13}$$

$$= \frac{-3}{13} + \frac{2}{13}i$$

- $5i$

$$= \frac{1}{5i} \cdot \frac{i}{i}$$

$$= \frac{i}{5i^2} = \frac{-i}{5} = \frac{-1}{5}i$$

- $3i - 4$

$$= -4 + 3i$$

$$= \frac{1}{-4+3i} \cdot \frac{-4-3i}{-4-3i} = \frac{-4-3i}{(-4)^2+3^2}$$

$$= \frac{-4-3i}{25} = \frac{-4}{25} - \frac{3}{25}i$$

س إذا كان $z_1 = \sqrt{3} + i$,$z_2 = -\sqrt{3} + 2i$ فأوجد $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$, $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$:

- $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$

$$= \frac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}+2i} \cdot \frac{-\sqrt{3}-2i}{-\sqrt{3}-2i} = \frac{-3-2\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+2i^2}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(2)^2}$$

$$= \frac{-5-\sqrt{3}i}{7}$$

- $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}-2i} \cdot \frac{-\sqrt{3}+2i}{-\sqrt{3}+2i} = \frac{-3+2\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+2i^2}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}$$

$$= \frac{-5+\sqrt{3}i}{7}$$

- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$

$$= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-2i} \cdot \frac{-\sqrt{3}+2i}{-\sqrt{3}+2i} = \frac{-3+2\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-2i^2}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}$$

$$= \frac{-1+3\sqrt{3}i}{7}$$

الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية

س أوجد :

- $|2-2i|$

  $= \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$

- $|5+12i|$

  $= \sqrt{5^2+12^2} = 13$

- $|2i| = 2$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

س حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية :

- $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$

  $\rightarrow \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

  $x = 1 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

  $y = 1 \cdot \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

  $\rightarrow (1, \sqrt{3})$

  $x = 2 \quad \cos\frac{\pi}{3} = 1$

  $y = 2 \quad \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

- $(2, \pi)$

  $\rightarrow (-2, 0)$

  $x = 2 \quad \cos\pi = -2$

  $y = 2 \ \sin\pi = 0$

- $\left(1.5, \frac{7\pi}{3}\right)$

  $\rightarrow \left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

  $x = 1.5 \quad \cos\frac{7\pi}{3} = \frac{3}{4}$

  $y = 1.5 \quad \sin\frac{7\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

- $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$

$\rightarrow \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

$x = \sqrt{2} \ \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$y = \sqrt{2} \ \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

- $(2, 270°)$

$\rightarrow (0, -2)$

$x = 2 \quad \cos 270° = 0$

$y = 2 \quad \sin 270° = -1$

س أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية :

- $(-3, 0)$

$r = 3$

$\theta = 180°$

$(r, \theta) = (3, 180°)$

- $(-2, 5)$

$r = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{5}{-2}\right| \approx 68.2°$

$x < 0 \ , y > 0$ θ تقع في الربع 2

$\theta = 180° - 68.2° = 111.8$

$\therefore (r, \theta) = (\sqrt{29}, 111.8)$

- $(-2, -2\sqrt{3})$

$r = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = 4$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{-2\sqrt{3}}{-2}\right| = 60°$

$x < 0 \ , y < 0$ θ تقع في الربع 3

$\theta = 180° + \propto$

$= 180° + 60° = 240°$

$\therefore (r, \theta) = (4, 240°)$

- $(0, 4)$

$r = 4$

$\theta = 90°$

$(r, \theta) = (4, 90°)$

- $(3\sqrt{3}, -3)$

$r = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = 6$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{-3}{3\sqrt{3}}\right| = 30°$

$x > 0 \ , y < 0$ θ تقع في الربع 4

$\theta = 360° - 30° = 330°$

$\therefore (r, \theta) = (6, 330°)$

س ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية :

- $3i$

$x = 0 \quad , \quad y = 3 \qquad r = 3 \qquad \theta = 90°$

$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 3(\cos 90° + i\sin 90°)$

- $2 + 2i$

$x = 2 \quad , \quad y = 2$

$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{2}{2}\right|$

$= 45°$

$x > 0 \quad , \quad y > 0$

θ في الربع 1

$\theta = \propto = 45°$

$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$

- $-2 + 2i\sqrt{3}$

$r = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = 60°$

$x < 0 \ , y > 0$ $\quad$ θ في الربع 2

$\theta = 180° - 60° = 120°$

$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 4(\cos 120° + i\sin 120°)$

- $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right| = 60°$

$x > 0 \ , y < 0$ $\quad$ θ في الربع 4

$\theta = 360° - 60° = 300°$

$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \cos 300° + i\sin 300°$

- $-2i$

$x = 0 \quad , \quad y = -2$

$r = |-2| = 2$

$\theta = 270°$

$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2(\cos 270° + i\sin 270°)$

- $\sqrt{3} + i$

$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1} = 2$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = 30°$

$x > 0 \ , y > 0$ $\quad$ θ في الربع 1

$\theta = \propto = 30°$

$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$

- $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$x=\frac{-\sqrt{3}}{2} \quad , \quad y=\frac{-1}{2}$

$r=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=1$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\right| = 30°$

$x<0\ ,y<0$ في الربع 3 θ

$\theta = 180° + 30° = 210°$

$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= \cos 210° + i \sin 210°$

- 8

$x=8 \quad , \quad y=0$

$r=8 \quad , \quad \theta=0$

$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 8(\cos 0 + i \sin 0)$

س اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$

- $5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$x>0 \quad , \quad y<0$ في الربع 4 θ

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$z = 5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

- $8(\cos 30° - i\sin(-150°))$

$x>0 \quad , \quad y>0$ في الربع 1 θ

$\theta = 30°$

$z = 8(\cos 30° + i \sin 30°)$

- $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$= -\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= -\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

- $2(\cos 45° + i\sin 405°)$

$x > 0 \quad , \quad y > 0$ $\qquad$ θ في الربع 1

$\theta = 45°$

$z = 2(\cos 45° + i\sin 45°)$

- $4\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$x < 0 \quad , \quad y > 0$ $\qquad$ θ في الربع 2

$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

- $5(\cos(-60°) + i\sin(-60°))$

$= 5(\cos 60° - i\sin 60°)$

$x > 0 \quad , \quad y < 0$ $\qquad$ θ في الربع 4

$\theta = 360 - 60 = 300°$

$z = 5(\cos 300° + i\sin 300°)$

- $3\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

$= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

س ضع كلا مما يلي في الصورة الجبرية :

- $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

  $z = -\sqrt{3} - i$

- $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

  $z = 1 - i$

- $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$

  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

- $7\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

  $z = \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{2}i$

- $\sqrt{3}(\cos 225° + i\sin 225°)$

  $z = \frac{-\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

تمارين على:

حل المعادلات في مجموعة الأعداد المركبة

في التمارين (4 – 1)

س أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية :

- $3z - 1 + i = 5 - 2i$

$3z = 5 - 2i + 1 - i$

$3z = 6 - 3i \Longrightarrow$

$z = \frac{6-3i}{3} = 2 - i$

$\{2 - i\} =$ م · ح

- $z + 2\bar{z} = 4 + i$

$z = x + yi$

$x + yi + 2(x - yi) = 4 + i$

$x + yi + 2x - 2yi = 4 + i$

$3x - yi = 4 + i$

$3x = 4 \Longrightarrow x = \frac{4}{3}$

$-y = 1 \Longrightarrow y = -1$

$\Longrightarrow z = \frac{4}{3} - i$

$\left\{\frac{4}{3} - i\right\} =$ م · ح

- $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

$5z - 3z = 1 - 4i + 4 - 2i$

$2z = 5 - 6i$

$z = \frac{5}{2} - 3i$

$\left\{\frac{5}{2} - 3i\right\}$ = م · ح

- $z + 3(1 + i)z - 8(2 - i) = 0$

$z + 3z + 3iz - 16 + 8i = 0$

$4z + 3iz = 16 - 8i$

$z(4 + 3i) = (16 - 8i)$

$z = \frac{16-8i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{64-48i-32i+24i^2}{4^2+3^2}$

$= \frac{8}{5} - \frac{16}{5}i$

$\left\{\frac{8}{5} - \frac{16}{5}i\right\}$ = م · ح

في التمارين (9 – 5)

س أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية :

- $16x^2 + 64 = 0$

$x^2 = \frac{-64}{16} = -4$

$x = \mp\sqrt{-4} = \mp 2i$

$\{-2i , 2i\}$ = م · ح

- $x^2 - 5x + 7 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$(-5)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -3$

$x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \mp \sqrt{-3}}{2} = \frac{5}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\left\{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ , \ \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ = م · ح

- $x^2+6x+25=0$

$\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times1\times25=-64$

$x=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6\mp\sqrt{-64}}{2\times1}=-3\mp4i$

$\{-3+4i\ \ ,-3-4i\}=$ م . ح

- $z^2-2z+4=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times4=-12$

$z=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\mp\sqrt{-12}}{2}=1\mp\sqrt{3}i$

$\{1+\sqrt{3}i\ \ ,\ 1-\sqrt{3}i\}=$ م . ح

- $z+\frac{4}{z}=2$

$(\times z)\Longrightarrow z^2+4=2z$

$z^2-2z+4=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times4=-12$

$z=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\mp\sqrt{-12}}{2}=1\mp\sqrt{3}i$

$\{1+\sqrt{3}i\ \ ,1-\sqrt{3}i\}=$ م . ح

س لتكن المعادلة $z^2+z+2=0$, بدون حل للمعادلة , أثبت أن $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ هو جذر للمعادلة ثم أوجد الجذر الثاني .

$z^2+z+2=\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)+2$

$=\frac{(-1)^2+2(-1)\sqrt{7}i+(\sqrt{7}i)^2}{4}+\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+2$

$=\frac{1-2\sqrt{7}i-7}{4}+\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+2=0$

$\therefore\ \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ هو جذر للمعادلة

$\because$ الجذران مترافقان

$\therefore\ z_2=\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$

س أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = -3 + 4i$

نفرض $w = m + ni$ جذر لـ z

$\longrightarrow w^2 = z$

$(m + ni)^2 = -3 + 4i$

$m^2 - n^2 + 2mni = -3 + 4i$

$m^2 - n^2 = -3 \qquad (1)$

$mn = 2 \qquad (2)$

$\longrightarrow |w|^2 = |z|$

$m^2 + n^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$

$m^2 + n^2 = 5 \qquad (3)$

$\longleftarrow$ نجمع (1) مع (3)

$2m^2 = 2 \Longrightarrow m^2 = 1$

$\longleftarrow$ نعوض في (3)

$1 + n^2 = 5 \Longrightarrow n^2 = 4$

$m = \mp 1 \quad , \quad n = \mp 2$

$\longleftarrow$ من المعادلة (2) نجد أن m , n لهما نفس الإشارة

$m = 1 \Longrightarrow n = 2 \Longrightarrow 1 + 2i = w_1$

$m = -1 \Longrightarrow n = 2 \Longrightarrow -1 - 2i = w_2$

س أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 5 + 12i$

نفرض $w = m + ni$ جذر لـ z

$\longrightarrow w^2 = z$

$(m + ni)^2 = 5 + 12i$

$m^2 - n^2 + 2mni = 5 + 12i$

$m^2 - n^2 = 5 \qquad (1)$

$mn = 6 \qquad (2)$

$\longrightarrow |w|^2 = |z|$

$m^2 + n^2 = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$

$m^2 + n^2 = 13 \qquad (3)$

$\longleftarrow$ نجمع (1) مع (3)

$2m^2 = 18 \Longrightarrow m^2 = 9$

$\longleftarrow$ نعوض في (3)

$9 + n^2 = 13 \Longrightarrow n^2 = 4$

$m = \mp 3 \quad , \quad n = \mp 2$

$\longleftarrow$ من المعادلة (2) نجد أن m , n من نفس الإشارة

$m = -3 \Longrightarrow n = -2$

$\Longrightarrow w_1 = -3 - 2i$

$m = 3 \Longrightarrow n = 2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow w_2 = 3 + 2i$

س أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z=-7-24i$

نفرض $w=m+ni$ جذر لـ z

$w^2=z$

$(m+ni)^2=-7-24i$

$m^2-n^2+2mni=-7-24i$

$m^2-n^2=-7 \quad (1)$

$mn=-12 \quad (2)$

$|w|^2=|z|$

$m^2+n^2=\sqrt{(-7)^2+(-24)^2}$

$m^2+n^2=25 \quad (3)$

نجمع (1) مع (3)

$2m^2=18 \Longrightarrow m^2=9$

نعوض في (3)

$9+n^2=25 \Longrightarrow n^2=16$

$m=\mp 3 \quad , \quad n=\mp 4$

من المعادلة (2) نجد أن m,n مختلفان بالإشارة

$m=-3 \Longrightarrow n=4 \Longrightarrow w_1=-3+4i$

$m=3 \Longrightarrow n=-4 \Longrightarrow w_2=3-4i$

س حل المعادلة : $(2+i)z^2=22-19i$

$z^2=\frac{22-19i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{44-22i-38i+19i^2}{2^2+1^2}$

$=\frac{25-60i}{5} \Longrightarrow z^2=5-12i$

لإيجاد قيمة z نوجد الجذرين التربيعيين لـ $5-12i$

نفرض $w=m+ni$ جذر لـ $5-12i$

$w^2=5-12i$

$(m+ni)^2=5-12i$

$m^2-n^2+2mni=5-12i$

$m^2-n^2=5 \quad (1)$

$mn=-6 \quad (2)$

$|w|^2=|z|$

$m^2+n^2=\sqrt{(5)^2+(-12)^2}$

$m^2+n^2=13 \quad (3)$

نجمع (1) مع (3)

$2m^2=18 \Longrightarrow m^2=9$

نعوض في (3)

$9+n^2=13 \Longrightarrow n^2=4$

$m=\mp 3 \quad , \quad n=\mp 2$

من المعادلة (2) نجد أن m,n مختلفان بالإشارة

$m=-3 \Longrightarrow n=2 \Longrightarrow -3+2i=w_1$

$m=3 \Longrightarrow n=-2 \Longrightarrow 3-2i=w_2$

م · ح $=\{-3+2i\,,3-2i\}$

تمارين على:

التمثيل البياني للدوال المثلثية

س حدد دورة كل دالة مما يلي وسعتها :

- $y = \sin(2x)$

$a = 1 \quad , \; b = 2$

السعة$= |a| = |1| = 1$

الدورة$= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

- $y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$

$a = \frac{1}{3}, \; b = \frac{1}{2}$

السعة$= |a| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

الدورة$= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

- $y = 3\cos x$

$a = 3 \quad , \; b = 1$

السعة $= |a| = |3| = 3$

الدورة$= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

- $y = 3\sin\frac{x}{3}$

$a = 3 \quad , \; b = \frac{1}{3}$

السعة$= |a| = |3| = 3$

الدورة$= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

س اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin(bx)$ في كل من الحالات التالية :

- الدورة $\frac{2\pi}{3}$, $a = 1$

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|}$

$|b| = 3$

$b = \mp 3$

$\therefore y = \sin(-3x) \qquad y = \sin(3x)$

- الدورة π, $a = \frac{1}{3}$

$\frac{2\pi}{|b|} = \pi$

$|b| = 2$

$b = \mp 2$

$\therefore y = \frac{1}{3}\sin(-2x) \qquad y = \frac{1}{3}\sin(2x)$

- الدورة 4π , $a = -4$

$\frac{2\pi}{|b|} = 4\pi$

$|b| = \frac{1}{2}$

$b = \mp\frac{1}{2}$

$\therefore y = -4\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \qquad y = -4\sin\left(\frac{-1}{2}x\right)$

س اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos(bx)$ في كل من الحالات التالية :

- الدورة 3π, $a = 5$

$\frac{2\pi}{|b|} = 3\pi$

$|b| = \frac{2}{3}$

$b = \mp\frac{2}{3}$

$\therefore y = 5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$

- الدورة π , $a = -\frac{1}{2}$

$\frac{2\pi}{|b|} = \pi$

$|b| = 2$

$b = \mp 2$

$\therefore y = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

- الدورة $\frac{\pi}{2}$, $a = \frac{3}{5}$

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

$|b| = 4$

$b = \mp 4$

$\therefore y = \frac{3}{5}\cos(4x)$

س مثل بيانيا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية :

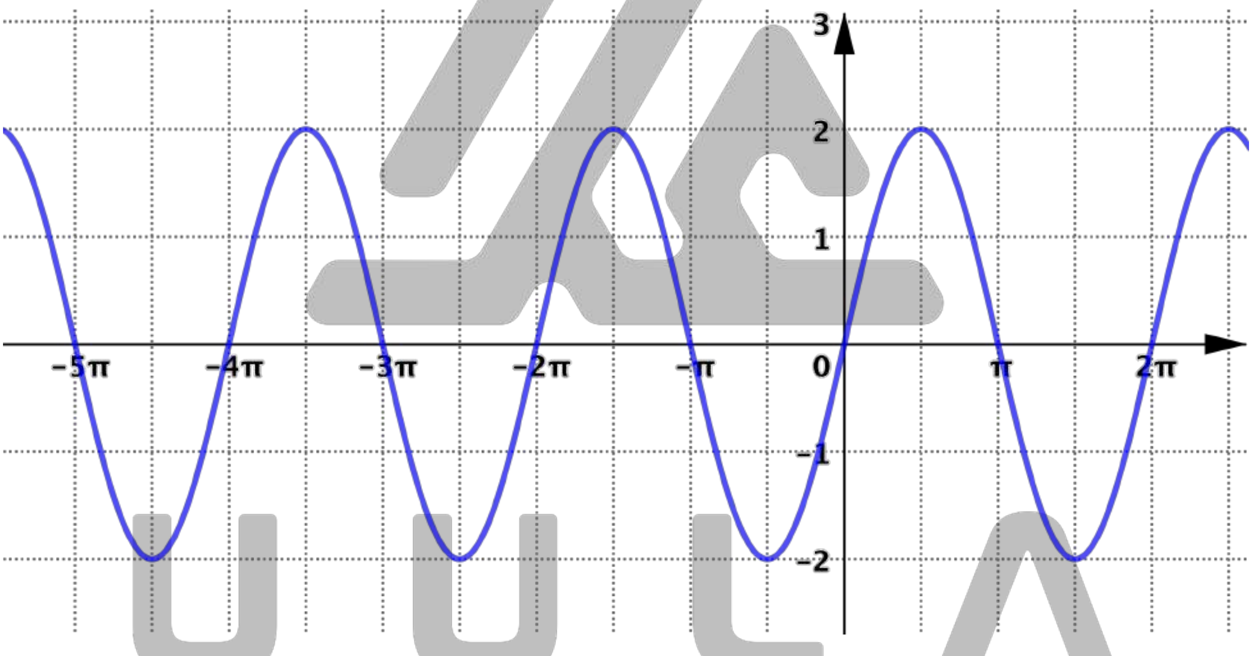
- $y = 2\sin x$

السعة= $|2| = 2$

الدورة= $\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi$

ربع الدورة= $\frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	2	0	-2	0



س مثل بيانيا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية :

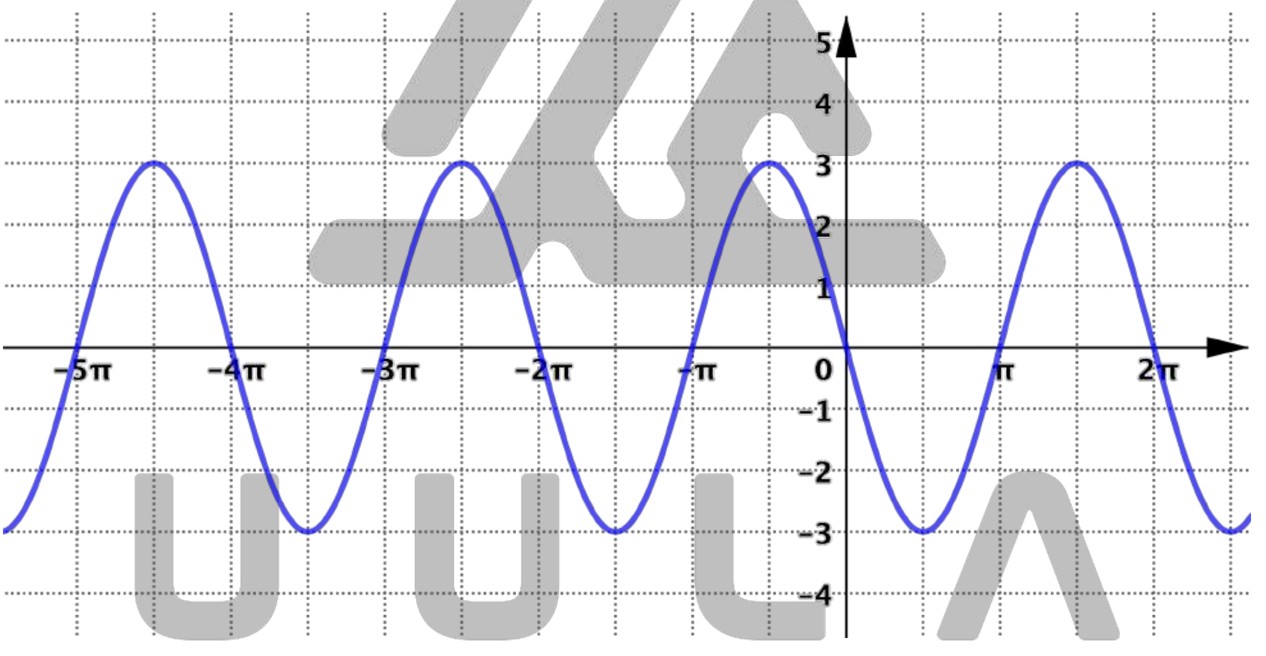
- $y = -3\sin x$

السعة$= |-3| = 3$

الدورة$= \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi$

ربع الدورة$= \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	-3	0	3	0



س مثل بيانيا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية :

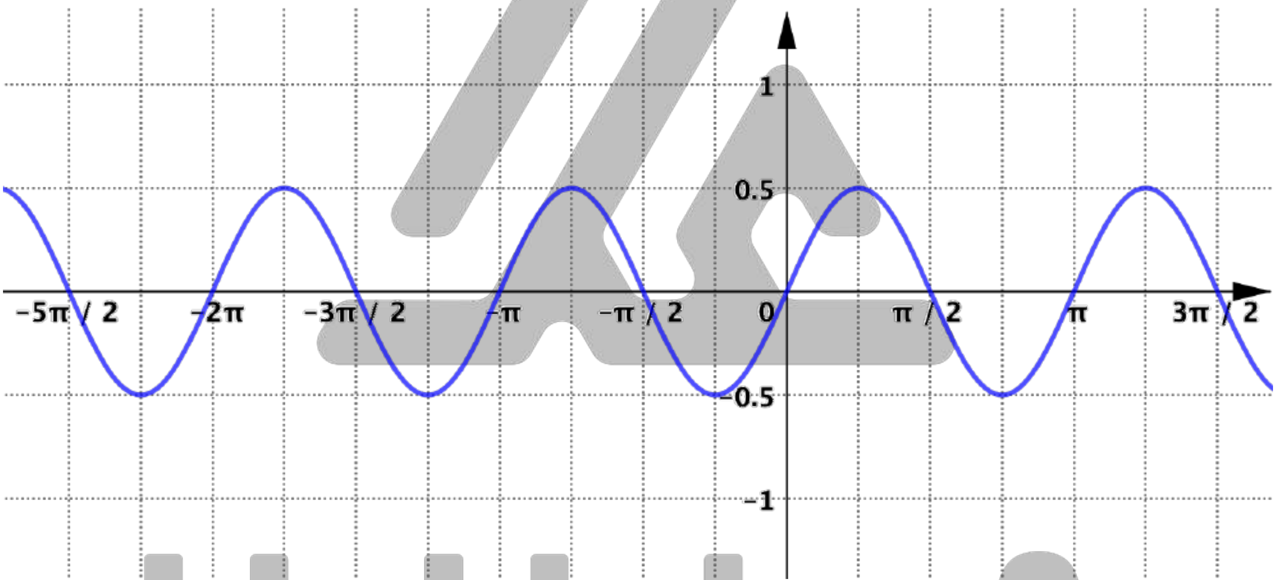
- $y = 0.5\sin 2x$

السعة $= |0.5| = 0.5$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	0	0.5	0	-0.5	0



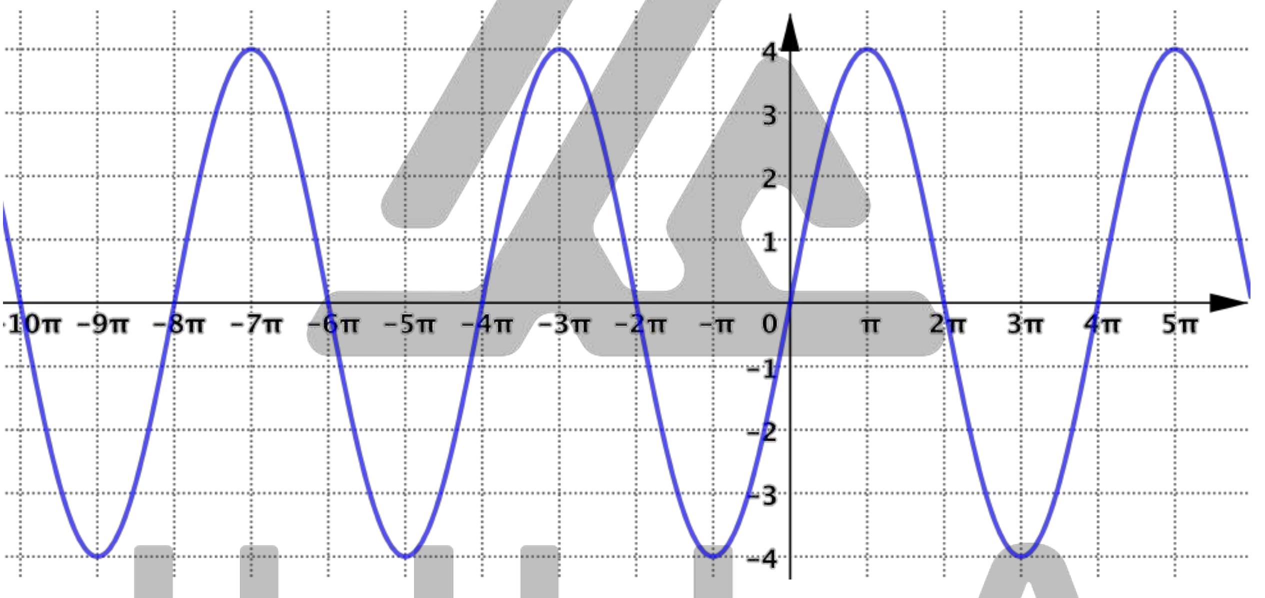
- $y = 4\sin\frac{1}{2}x$

  السعة$= |4| = 4$

  الدورة$= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 4\pi$

  ربع الدورة$= \frac{1}{4} \times 4\pi = \pi$

x	0	π	2π	3π	4π
y	0	4	0	-4	0



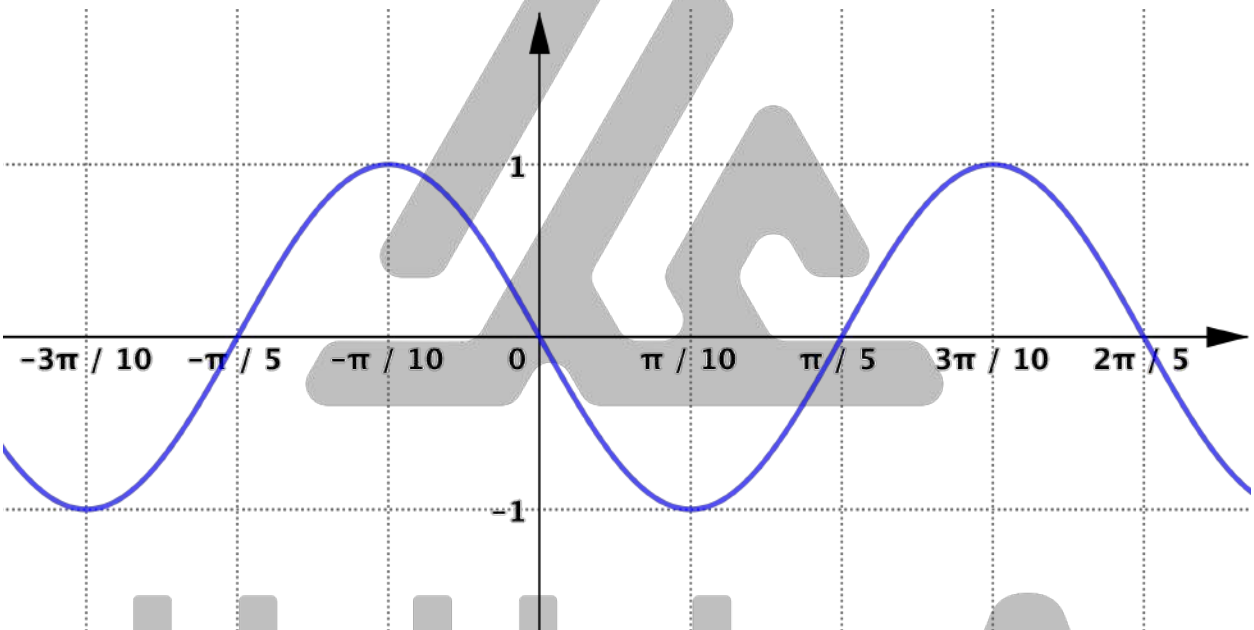
- $y = -\sin 5x$

السعة= $|-1| = 1$

الدورة= $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{5}$

ربع الدورة= $\frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$

x	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$
y	0	-1	0	1	0



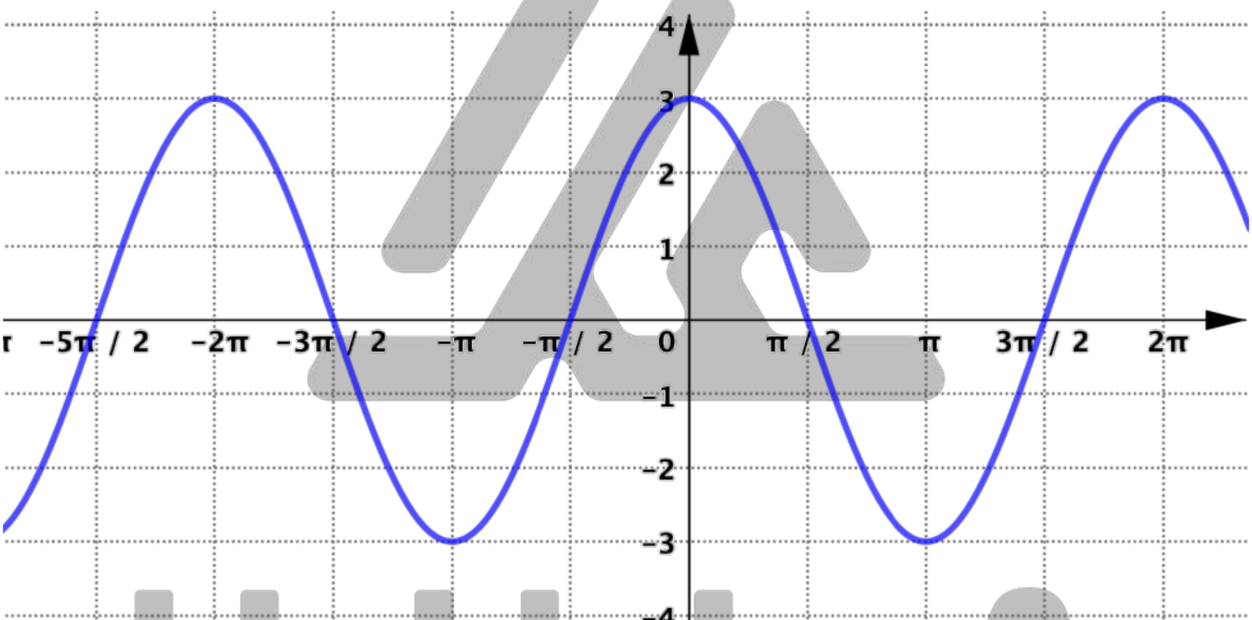
- $y = 3\cos x$

السعة$= |3| = 3$

الدورة$= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ربع الدورة$= \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	3	0	-3	0	3



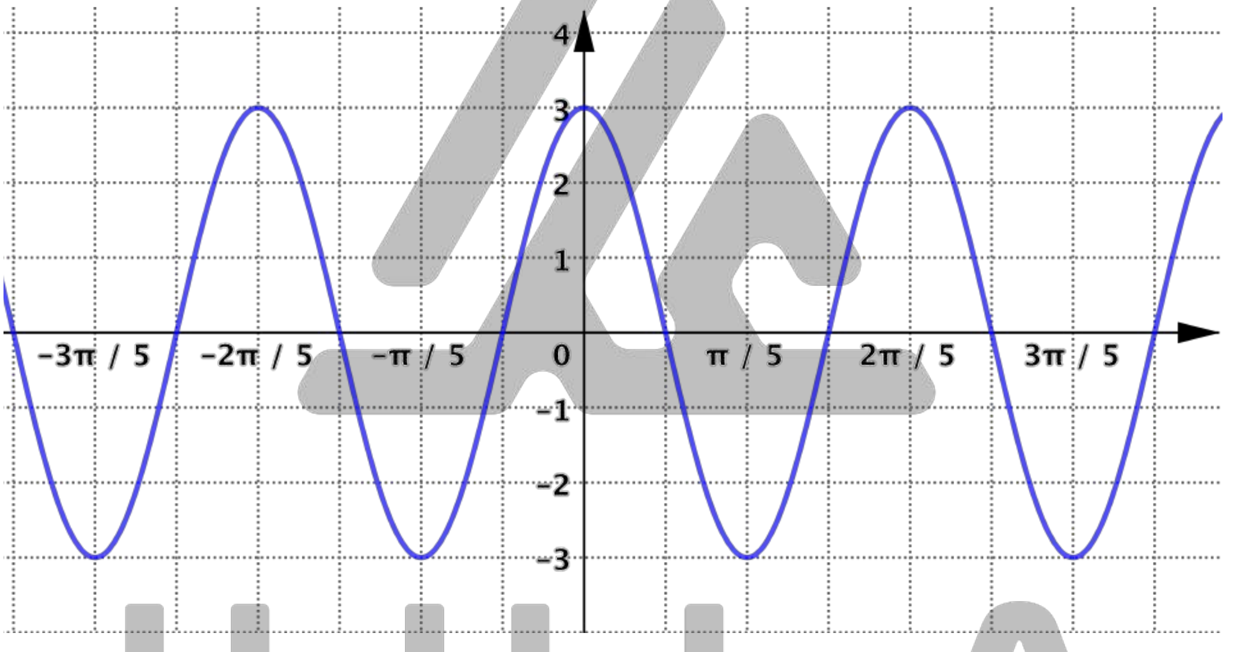
- $y = 3\cos 5x$

السعة $= |3| = 3$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{5}$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$

x	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$
y	3	0	-3	0	3



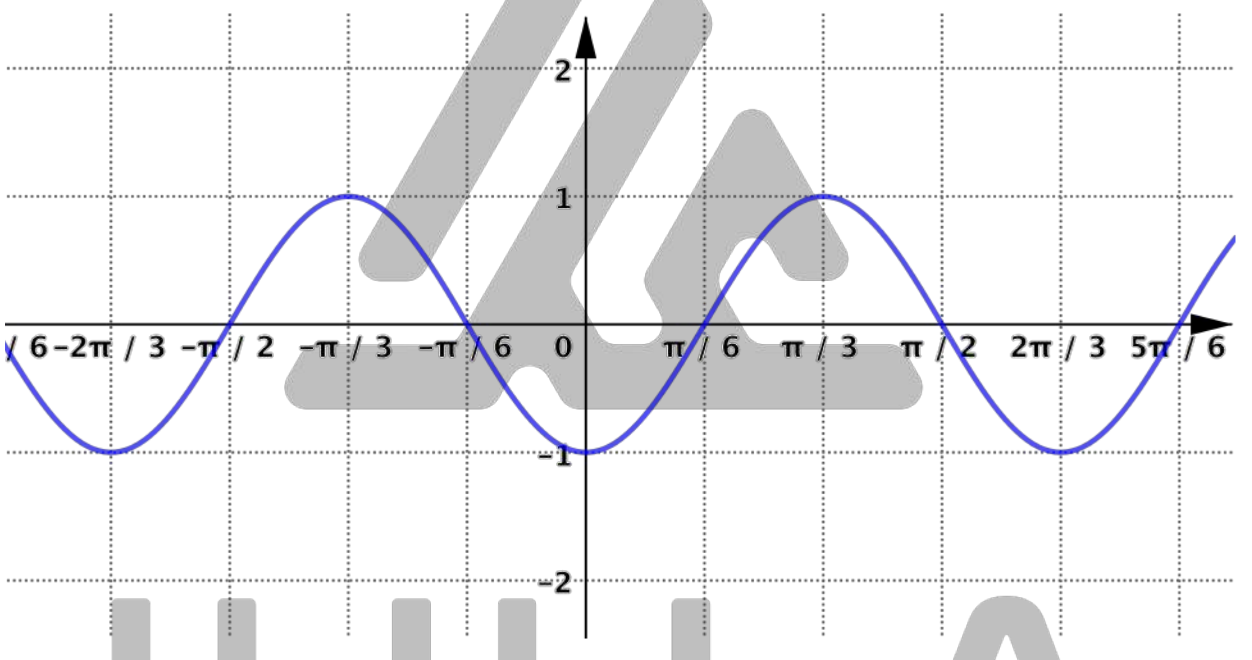
- $y = -\cos 3x$

السعة= $|-1| = 1$

الدورة= $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$

ربع الدورة= $\frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
y	-1	0	1	0	-1



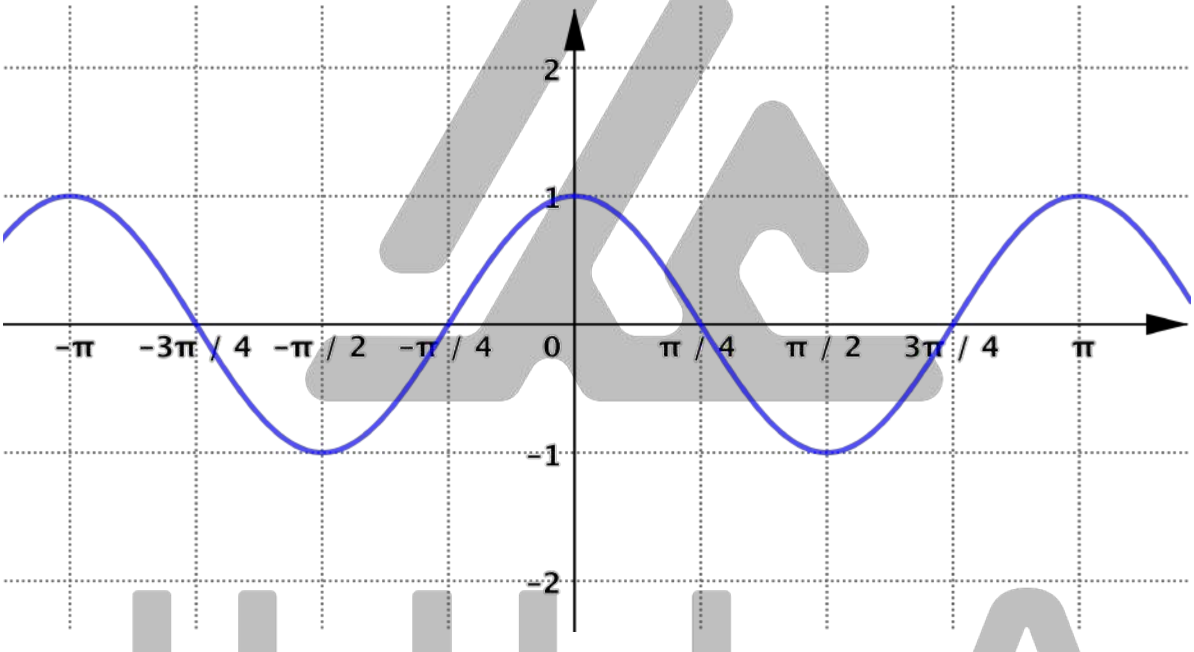
- $y = \cos 2x$

السعة$= |1| = 1$

الدورة$= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ربع الدورة$= \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	1	0	-1	0	1



س حدد دورة كل دالة مما يلي :

- $y = \tan\frac{3x}{2}$

$\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\left|\frac{3}{2}\right|} = \frac{2\pi}{3}$

- $y = \tan 5x$

$\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5}$

س اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = \tan(bx)$ في كل من الحالات التالية :

- الدورة $\frac{\pi}{5}$

$\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Longrightarrow |b| = 5 \Longrightarrow b = \mp 5$

$\therefore y = \tan(-5x) \quad , \quad y = \tan(5x)$

- الدورة $\frac{2\pi}{3}$

$\frac{\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Longrightarrow |b| = \frac{3}{2} \Longrightarrow b = \mp\frac{3}{2}$

$\therefore y = \tan\left(\frac{3}{2}x\right) \quad , \quad y = \tan\left(\frac{-3}{2}x\right)$

- الدورة $\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow |b| = 4 \Longrightarrow b = \mp 4$

$\therefore y = \tan(-4x) \quad , \quad y = \tan(4x)$

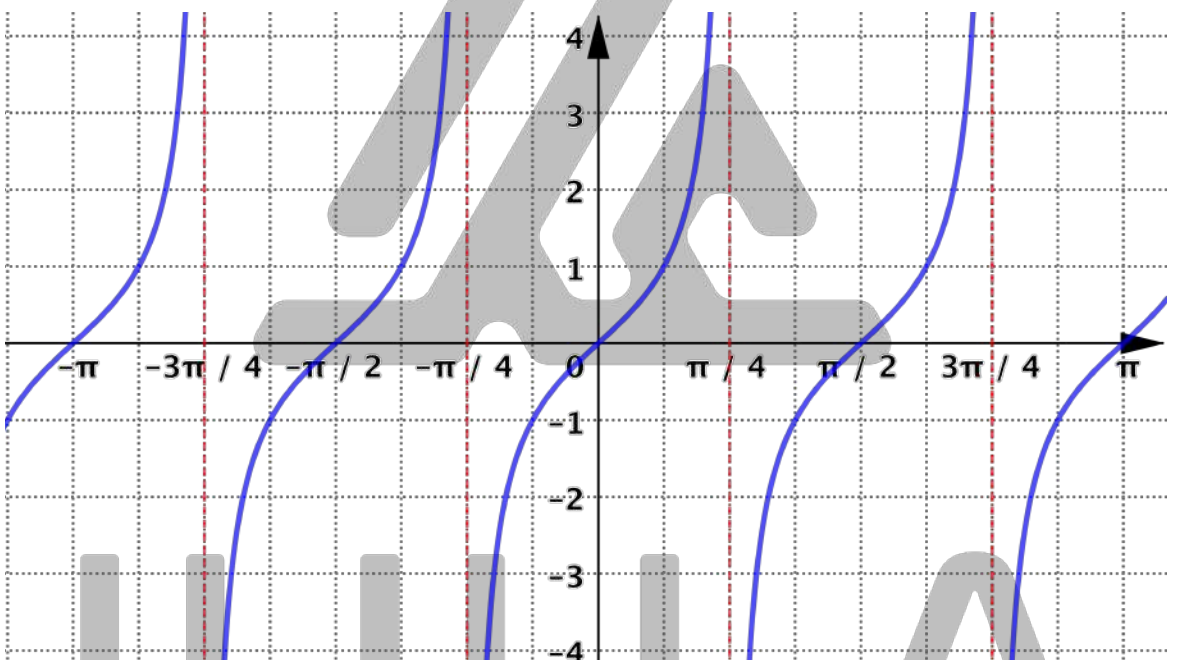
س مثل بيانيا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية :

- $y = \tan 2x$

الدورة= $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

ربع الدورة= $\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$

x	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
y	غ.م	-1	0	1	غ.م



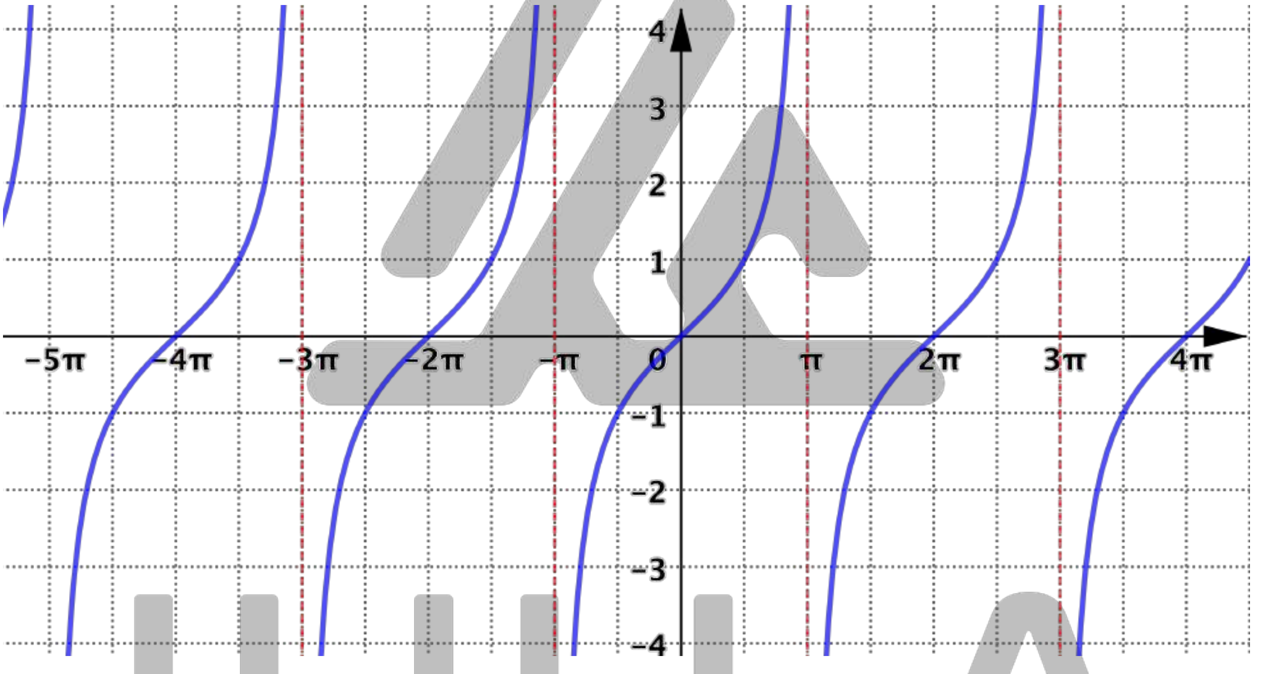
س مثل بيانيا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية :

- $y = \tan \frac{x}{2}$

الدورة= $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

ربع الدورة= $\frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$

x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y	غ.م	-1	0	1	غ.م



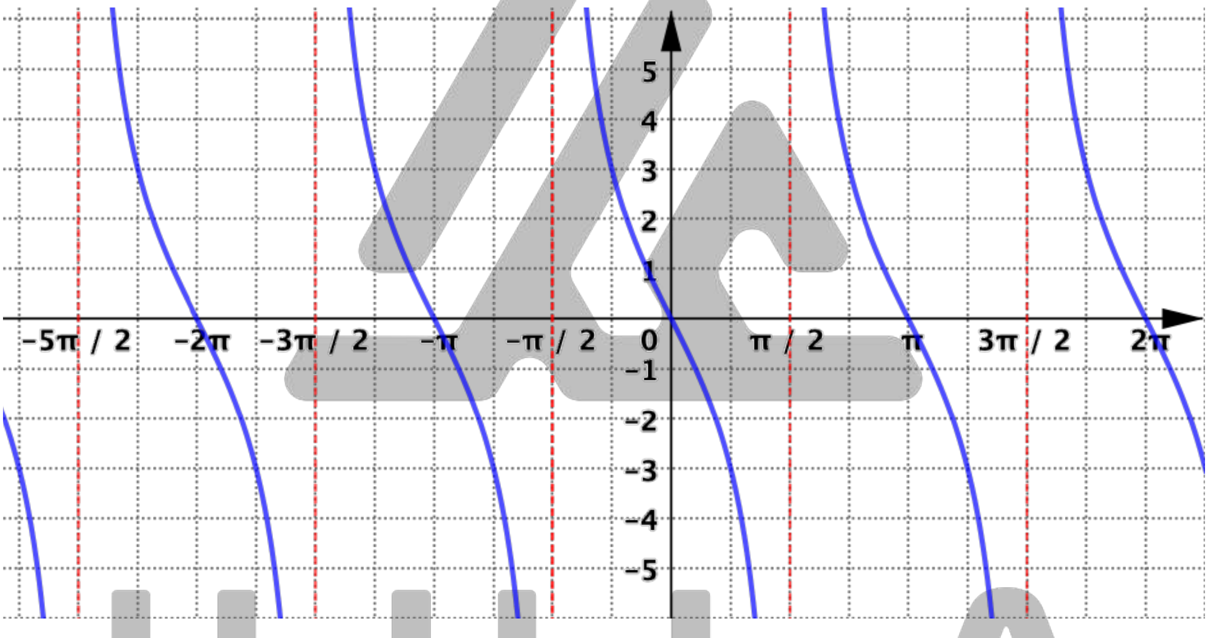
س مثل بيانيا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية :

- $y = -3\tan x$

الدورة$= \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

ربع الدورة$= \frac{\pi}{4}$

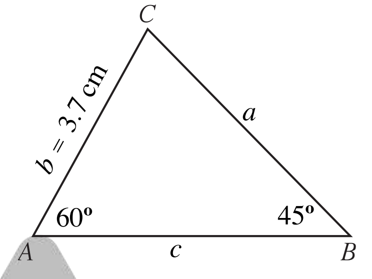
x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	غ.م	3	0	-3	غ.م



تمارين على:
قانون الجيب

في التمرينين (2 – 1)

س حل كلا من المثلثين التاليين :



$\propto = 60°\quad \beta = 45° \quad b = 3.7cm$

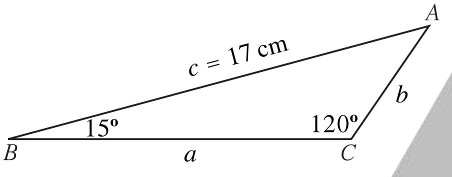
$\gamma = 180° - (60° + 45°) = 75°$

$\frac{\sin\propto}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\frac{\sin 60°}{a} = \frac{\sin 45°}{3.7} = \frac{\sin 75°}{c}$

$a = \frac{3.7\sin 60°}{\sin 45°} = 4.53cm$

$c = \frac{3.7\sin 75°}{\sin 45°} = 5.05cm$



$\beta = 15° \quad \gamma = 120° \quad c = 17cm$

$\propto = 180 - (15° + 120°) = 45°$

$\frac{\sin\propto}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\frac{\sin 45°}{a} = \frac{\sin 15°}{b} = \frac{\sin 120°}{17}$

$a = \frac{17\sin 45°}{\sin 120°} = \frac{17\sqrt{6}}{3} \approx 13.88\ cm$

$b = \frac{17\sin 15°}{\sin 120°} = 5.08cm$

في التمرينين (4 – 3)

س حل المثلث ABC :

- $m(\hat{A}) = 32°, a = 17cm, b = 11cm$

$\frac{\sin\propto}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\frac{\sin 32°}{17} = \frac{\sin\beta}{11}$

$\sin\beta = \frac{11\sin 32°}{17} \simeq 0.4329$

$\beta_1 = \sin^{-1}(0.4329) = 20.1°$

$\propto + \beta_1 = 52.1° < 180°$

$\gamma_1 = 180° - (32° + 20.1°)$

$= 127.9°$

$\frac{\sin 32°}{17} = \frac{\sin 127.9°}{C_1}$

$C_1 = \frac{17\sin 127.9°}{\sin 32°} \simeq 25.3cm$

$\beta_2 = 180° - 20.1° = 159.9°$

$\propto + \beta_2 = 191.9 > 180°$

مرفوض

- $m(\hat{A}) = 43°, a = 32cm, b = 28cm$

$\propto = 43°$

$\frac{\sin\propto}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\frac{\sin 43°}{32} = \frac{\sin\beta}{28} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\sin\beta = \frac{28\sin 43°}{32} \simeq 0.5967$

$\beta_1 = \sin^{-1}(0.5967) \simeq 36.6°$

$\propto + \beta_1 < 180°$

$\gamma_1 = 180° - (43° + 36.8°) = 100.4°$

$\frac{\sin 43°}{32} = \frac{\sin 100.4°}{C_1}$

$C_1 = \frac{32\sin 100.4°}{\sin 43°} \simeq 46.15cm$

$\beta_2 = 180° - 36.6° = 143.4$

$\propto + \beta_2 > 180°$

مرفوض

في التمرينين (6 – 5)

س يمكن تكوين مثلثين باستخدام القياسات المعطاة , حل كلا منهما :

- $m(\hat{c}) = 68°\ , a = 19cm\ \ , c = 18cm$

$$\frac{\sin\propto}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin\propto}{19} \qquad \frac{\sin 68°}{18}$$

$$\sin\propto = \frac{19\sin 68°}{18} \simeq 0.9787$$

$$\propto_1 = \sin^{-1}(0.9787) = 78.2°$$

$$\propto_1 + \gamma = 146.2° < 180°$$

$$\beta_1 = 180° - (78.2° + 68°) = 33.8°$$

$$\frac{\sin 33.8°}{b_1} = \frac{\sin 68°}{18}$$

$$b_1 = \frac{18\sin 33.8°}{\sin 68°} \approx 10.8cm$$

$$\propto_2 = 180° - 78.2° = 101.8°$$

$$\propto_2 + \gamma = 169.8° < 180°$$

$$\beta_2 = 180° - (101.8° + 68°) = 10.2°$$

$$\frac{\sin 10.2°}{b_2} = \frac{\sin 68°}{18}$$

$$b_2 = \frac{18\sin 10.2°}{\sin 68°} \approx 3.44cm$$

- $m(\hat{B}) = 57°\ , a = 11cm\ , b = 10cm$

$$\frac{\sin\propto}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin\propto}{11} = \frac{\sin 57°}{10}$$

$$\sin\propto = \frac{11\sin 57°}{10} \simeq 0.9225$$

$$\propto_1 = \sin^{-1}(0.9225) = 67.3°$$

$$\propto_1 + \beta < 180°$$

$$\gamma_1 = 180° - (67.3° + 57°) = 55.7°$$

$$\frac{\sin 57°}{10} = \frac{\sin 55.7°}{C_1}$$

$$C_1 = \frac{10\sin 55.7°}{\sin 57°} \approx 9.85cm$$

$$\propto_2 = 180° - 67.3° = 112.7°$$

$$\propto_2 + \beta < 180°$$

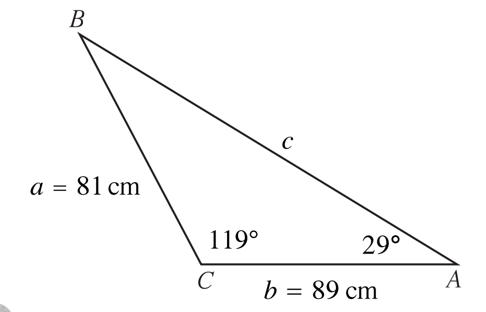
$$\gamma_2 = 180 - (112.7° + 57°) = 10.3°$$

$$\frac{\sin 57°}{10} = \frac{\sin 10.3°}{C_2}$$

$$C_2 = \frac{10\sin 10.3°}{\sin 57°} \approx 2.13cm$$

في التمرينين (8 – 7)

س قرر ما إذا كان يمكن حل المثلث باستخدام قانون الجيب , ثم حلة إذا كان ذلك ممكنا , و إذا لم يكن ممكنا فاشرح السبب .



$\alpha = 29^\circ$ $\quad\gamma = 119^\circ$

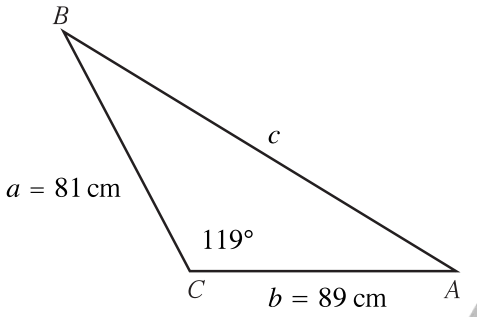
$a = 81cm$ $\quad b = 89cm$

$\beta = 180^\circ - (29^\circ + 119^\circ) = 32^\circ$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 29^\circ}{81} = \frac{\sin 32^\circ}{89} = \frac{\sin 119^\circ}{c}$$

$$c = \frac{89\sin 119^\circ}{\sin 32^\circ} \simeq 146.9cm$$



$a = 81cm$ $\quad b = 89cm$ $\quad \gamma = 119^\circ$

لا يمكن استخدام قانون الـ Sin

لأن الزاوية بين الضلعين وليست مقابلة لأحد الضلعين

تمارين على:

قانون جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\propto$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\cos\propto = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

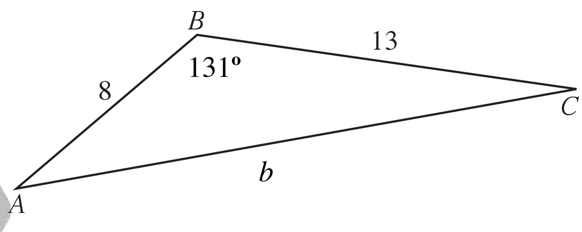
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

في التمرينين (2 – 1)

س حل كلا من المثلثين التاليين :

■



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$\simeq 13^2 + 8^2 - 2\times 13\times 8\cos(131^\circ)$$

$$= 369.46$$

$$b = \sqrt{369.46} = 19.2$$

$$\cos\propto = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

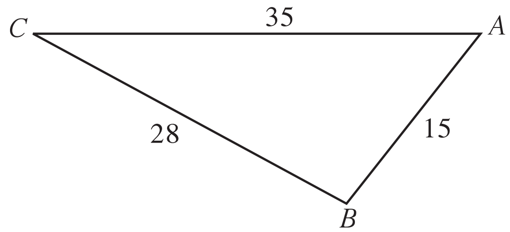
$$= \frac{(19.2)^2+8^2-13^2}{2\times(19.2)\times 8} \simeq 0.858$$

$$\propto = \cos^{-1}(0.858) \simeq 30.1^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (131^\circ + 30.1^\circ)$$

$$= 18.9^\circ$$

■



$$\cos\propto = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{35^2+15^2-28^2}{2\times 35\times 15} = \frac{111}{175}$$

$$\propto = \cos^{-1}\frac{111}{175} = 50.6^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$= \frac{28^2+15^2-35^2}{2\times 28\times 15} = \frac{-9}{35}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-9}{35}\right) \simeq 104.9^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (104.9^\circ + 50.8^\circ)$$

$$\simeq 24.5^\circ$$

في التمرينين (8 – 3)

س حل كل مثلث مما يلي :

- $a = 12 \ , b = 21 \ , m(\hat{c}) = 95° = \gamma$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac \cos\gamma$

$= 12^2 + 21^2 - 2\times12\times21 \cos 95° \simeq 628.926$

$c = \sqrt{628.926} \simeq 25.08$

$\cos \propto = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$= \frac{21^2+(25.08)^2-12^2}{2\times21\times25.08} \simeq 0.8791$

$\propto \simeq \cos^{-1}(0.8791) \simeq 28.5°$

$\beta = 180° - (95° + 28.5°) \simeq 56.5°$

- $b = 22 \ , c = 31 \ , m(\hat{A}) = 82° = \propto$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\propto$

$\simeq 22^2 + 31^2 - 2\times22\times31 \cos 82 \simeq 1255.1679$

$a = \sqrt{1255.1679} \simeq 35.43cm$

$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$= \frac{(35.43)^2+31^2-22^2}{2(33\times43)(31)} \simeq 0.79$

$\Longrightarrow \beta = \cos^{-1}(0.79) = 37.8°$

$\gamma = 180° - (37.8° + 82°) = 60.2°$

- $a = 1 \ , b = 5 \ , c = 4$

$\cos \propto = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$= \frac{5^2+4^2-1^2}{2\times5\times4} = 1$

$\propto = \cos^{-1}(1) = 0$

و هذا مرفوض

لا يوجد مثلث فيه زاوية قياسها صفر

- $a = 3.2$, $b = 7.6$, $c = 6.4$

$\cos \propto = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$= \frac{(7.6)^2+(6.4)^2-(3.2)^2}{2(7.6)(6.4)} = \frac{553}{608}$

$\propto = \cos^{-1}\left(\frac{553}{608}\right) = 24.6$

$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$= \frac{(3.2)^2+(6.4)^2-(7.6)^2}{2(3.2)(6.4)} = \frac{-41}{256}$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-41}{256}\right) \simeq 99.2°$

$\gamma = 180 - (24.6 + 99.2) = 56.2°$

- $m(\hat{A}) = 63°$, $a = 8.6$, $b = 11.1$

$\frac{\sin\propto}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\frac{\sin 63}{8.6} = \frac{\sin\beta}{11.1}$

$\sin\beta = \frac{11.1\sin 63}{8.6} = 1.15$

$\because \sin\beta > 1$

∴ لا يوجد مثلث يحقق هذه الشروط

- $m(\hat{A}) = 71°$, $a = 9.3$, $b = 8.5$

مُعلّق 2021-2022

$\frac{\sin\propto}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\frac{\sin 71}{9.3} = \frac{\sin\beta}{8.5}$

$\sin\beta = \frac{8.5\sin 71}{9.3} = 0.8642$

$\beta_1 = \sin^{-1}(0.8642) \simeq 59.8°$

$\propto + \beta_1 = 130.8 \quad < 180°$

$\gamma_1 = 180 - (71 + 59.8) = 49.2$

$C_1 = \frac{9.3\sin 49.2}{\sin 71} \simeq 7.4$

$\beta_2 = 180 - \beta_1$

$= 180 - 59.8 = 120.2$

$\propto + \beta_2 = 191.2 > 180$

مرفوض

مساحة المثلث

في التمرينين (2 – 1)

س أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين .

- $m(\hat{A}) = 47°\,, b = 32cm\,, c = 19cm$

$\propto$

$A = \frac{1}{2} bc \sin \propto$

$= \frac{1}{2} \times 32 \times 19 \times \sin(47°) \simeq 222.3cm^2$

- $a = 4cm\,, b = 5cm\,, c = 8cm$

$S = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$= \frac{1}{2}(4 + 5 + 8) = 8.5$

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{8.5(8.5-4)(8.5-5)(8.5-8)}$

$= \frac{3\sqrt{119}}{4} = 8.18cm^2$

في التمرينين (6 – 3)

س استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه كالتالي .
(الأطوال بالسنتيمتر) .

- $a = 5\,, b = 9\,, c = 7$

$S = \frac{1}{2}(5 + 9 + 7) = 10.5$

$A = \sqrt{10.5(10.5-5)(10.5-9)(10.5-7)}$

$= \frac{21\sqrt{11}}{4} \simeq 17.41cm^2$

- $a = 23\ , b = 19\ , c = 12$

  $S = \frac{1}{2}(23 + 19 + 12) = 27$

  $A = \sqrt{27\ (27 - 23)(27 - 19)(27 - 12)}$
  $= 36\sqrt{10} \simeq 113.84 cm^2$

- $a = 19.3\ , b = 22.5\ , c = 31$

  $S = \frac{1}{2}(19.3 + 22.5 + 31) = 36.4$

  $A = \sqrt{36.4\ (36.4 - 19.3)(36.4 - 22.5)(36.4 - 31)}$
  $= 216.15 cm^2$

- $a = 18.2\ , b = 17.1\ , c = 12.3$

  $S = \frac{1}{2}(18.2 + 17.1 + 12.3) = 23.8$

  $A = \sqrt{23.8\ (23.8 - 18.2)(23.8 - 17.1)(23.8 - 12.3)}$
  $\simeq 101.34 cm^2$

إثبات صحة متطابقات مثلثية

س اثبت صحة كل من المتطابقات

- $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

$LHS = \cos x \tan x + \cos x \sin x \cot x$

$= \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x \sin x \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \sin x + \cos^2 x = RHS$

- $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

$LHS = \sin x \cot x + \sin x \cos x \tan x$

$= \sin x \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \cos x \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \cos x + \sin^2 x = RHS$

- $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$

$LHS = (1)^2 - 2(1)\tan x + \tan^2 x$

$= 1 + \tan^2 x - 2\tan x$

$= \sec^2 x - 2\tan x$

$= RHS$

- $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

$LHS = \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x}$

$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

$= \csc x \cdot \sec x = RHS$

- $\tan x + \cot x + 2 = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

$RHS = \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin x}{\cos x} + 2 + \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \tan x + \cot x + 2 = LHS$

- $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$

$LHS = \frac{(1+\cos x)+(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{1+\cos x+1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$= \frac{2}{1^2-\cos^2 x} = \frac{2}{\sin^2 x} = 2 \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$

$= 2 \cdot \csc^2 x = RHS$

- $\frac{\tan^2 x}{\sec x+1} = \frac{1-\cos x}{\cos x}$

$LHS = \frac{\tan^2 x}{\sec x+1} \cdot \frac{\sec x-1}{\sec x-1} = \frac{\tan^2 x(\sec x-1)}{\sec^2 x-1^2}$

$= \frac{\cancel{\tan^2 x}(\sec x-1)}{\cancel{\sec^2 x-1}} = \sec x - 1$

$RHS = \frac{1-\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} = \sec x - 1$

$\Longrightarrow LHS = RHS$

- $\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$

$LHS = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - cos^2 x$

$= \cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)$

$= \cos^2 x (\csc^2 x - 1)$

$= \cos^2 x \cot^2 x$

$= RHS$

- $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$LHS = \cos^4 x - \sin^4 x$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(1)$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= RHS$

- $\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sec x + 1}{\tan x}$

$LHS = \frac{\tan x}{\sec x - 1} \cdot \frac{\sec x + 1}{\sec x + 1} = \frac{\tan x(\sec x + 1)}{\sec^2 x - 1^2}$

$= \frac{\tan x(\sec x + 1)}{\tan^2 x}$

$= \frac{(\sec x + 1)}{\tan x}$

$= RHS$

- $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{2\sin^2 x - 1}{1 + 2\sin x \cos x}$

$RHS = \frac{2\sin^2 x - 1}{1 + 2\sin x \cos x}$ $\qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$= \frac{2\sin^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x}$

$= \frac{2\sin^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$

$= \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = LHS$

- $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2(1+\cos x)}{\sin x}$

$LHS=\frac{\sin^2 x+(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)\sin x}$

$=\frac{\sin^2 x+1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\sin x}=\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{(1-\cos x)\sin x}$

$=\frac{2\sin^2 x}{(1-\cos x)\sin x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$

$RHS=\frac{2(1+\cos x)}{\sin x}\cdot\frac{(1-\cos x)}{(1-\cos x)}=\frac{2(1-\cos^2 x)}{\sin x(1-\cos x)}$

$=\frac{2\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$

$\Longrightarrow LHS=RHS$

- $\sin^2 x\cos^3 x=(\sin^2 x-\sin^4 x)(\cos x)$

$RHS=(\sin^2 x-\sin^4 x)(\cos x)$

$=\sin^2 x\,(1-\sin^2 x)\cos x$

$=\sin^2 x\ \cos^2 x\ \cos x$

$=\sin^2 x\ \cos^3 x=LHS$

- $\sin^3 x\cos^3 x=(\sin^3 x-\sin^5 x)(\cos x)$

$RHS=(\sin^3 x-\sin^5 x)(\cos x)$

$=\sin^3 x\,(1-\sin^2 x)(\cos x)$

$=\sin^3 x\ \cos^2 x\ \cos x$

$=\sin^3 x\ \cos^3 x=LHS$

حل معادلات مثلثية

س حل كلا من المعادلات التالية :

- $\sin x = \frac{-1}{2}$

$\propto = \sin^{-1}\left|\frac{-1}{2}\right| = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$

$\sin x < 0$

x في الربع 3

$x = 180 + 30 + 360k$

$= 210 + 360k \qquad k \in \mathbb{Z}$

x في الربع 4

$x = 360 - 30 + 360k$

$= 330 + 360k \qquad k \in \mathbb{Z}$

- $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\propto = \cos^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$

$\cos x > 0$

x في الربع 1

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

x في الربع 4

$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$= \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

- $2\cos x = -1$

$\cos x = \frac{-1}{2}$

$\propto = \cos^{-1}\left|-\frac{1}{2}\right| = 60°$

$\cos x < 0$

x في الربع 2

$x = 180 - 60 + 360k$

$= 120 + 360k \qquad k \in \mathbb{Z}$

x في الربع 3

$x = 180 + 60 + 360k$

$= 240 + 360k \qquad k \in \mathbb{Z}$

- $\sqrt{3}\tan a = 1$

$\tan a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\propto = \tan^{-1}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{\pi}{6}$

$\tan a > 0 \Longrightarrow 1\,,3$ في الربع a

$a = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$

- $2\cos x \sin x - \cos x = 0$

$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0$

x زاوية ربعية

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ موجب

$\alpha = \sin^{-1}\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$

x في الربع 1

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

x في الربع 2

$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

- $\tan x \sin^2 x = \tan x$

$\tan x \sin^2 x - \tan x = 0$

$\tan x\,(\sin^2 x - 1) = 0$

$\tan x = 0$

$x = 0 + k\pi$

$= k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\sin^2 x - 1 = 0 \Longrightarrow \sin^2 x = 1$

$\sin x = 1$

x زاوية ربعية

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -1$

x زاوية ربعية

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

- $\tan^2 x = 3$

$\tan x = \sqrt{3}$

$\propto = \tan^{-1}|\sqrt{3}| = \frac{\pi}{3}$

$\tan x > 0 \Longrightarrow$

x في الربع $1 , 3$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\tan x = -\sqrt{3}$

$\propto = \tan^{-1}|\sqrt{3}| = \frac{\pi}{3}$

$\tan x < 0 \Longrightarrow$

x في الربع $2 , 4$

$x = \pi - \frac{\pi}{3} + k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + k\pi$

- $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

$(2\cos x - 1)^2 = 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$\alpha = \cos^{-1}\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{3}$

$\cos x > 0$

x في الربع 1

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

x في الربع 4

$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

س أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0,2\pi)$

- $\sin 2x = 1$

$0 \le x < 2\pi \Longrightarrow 0 \le 2x < 4\pi$ $2x$ تقع في دورتين

$2x$ زاوية ربعية

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$k = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0\,,2\pi)$

$k = 1 \longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \in [0\,,2\pi)$

$k = 2 \longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \notin [0\,,2\pi)$

$\therefore$ حلول المعادلة $x = \frac{5\pi}{4}$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{4}$

- $2\cos 3x = 1$

$\Longrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2}$

$0 \le x < 2\pi \longrightarrow 0 \le 3x < 6\pi$ دورات 3 في $3x$

$\propto = \cos^{-1}\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{3}$

$\cos 3x > 0$

$3x$ في الربع 1

$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$

$k = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{9} \in [0\,,2\pi)$

$k = 1 \longrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}$

$= \frac{7\pi}{9} \in [0\,,2\pi)$

$k = 2 \longrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}$

$= \frac{13\pi}{9} \in [0\,,2\pi)$

$k = 3 \longrightarrow x = \frac{\pi}{9} + 2\pi$

$= \frac{19\pi}{9} \notin [0\,,2\pi)$

$3x$ في الربع 4

$3x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$

$k = 0 \longrightarrow x = \frac{5\pi}{9} \in [0\,,2\pi)$

$k = 1 \longrightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}$

$= \frac{11\pi}{9} \in [0\,,2\pi)$

$k = 2 \longrightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}$

$= \frac{17\pi}{9} \in [0\,,2\pi)$

$k = 3 \longrightarrow x = \frac{5\pi}{9} + 2\pi$

$= \frac{23\pi}{9} \notin [0\,,2\pi)$

حلول المعادلة هي: $\frac{\pi}{9}\,,\frac{5\pi}{9}\,,\frac{7\pi}{9}\,,\frac{11\pi}{9}\,,\frac{13\pi}{9}\,,\frac{17\pi}{9}$

- $\tan 2x = 1$

$0 \leq x < 2\pi \Longrightarrow 0 \leq 2x < 4\pi$ في دورتين $2x$

$\propto = \tan^{-1}|-1| = \frac{\pi}{4}$

$\tan 2x > 0 \Longrightarrow 1 , 3$ في الربع $2x$

$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

حلول المعادلة هي:

$k = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{8} \in [0 , 2\pi)$

$k = 1 \longrightarrow x = \frac{5\pi}{8} \in [0 , 2\pi)$

$k = 2 \longrightarrow x = \frac{9\pi}{8} \in [0 , 2\pi)$

$k = 3 \longrightarrow x = \frac{13\pi}{8} \in [0 , 2\pi)$

$k = 4 \longrightarrow x = \frac{17\pi}{8} \notin [0 , 2\pi)$

س حل المعادلات التالية :

- $\sin^2 x - 2\sin x = 0$

$\sin x (\sin x - 2) = 0$

$\sin x = 0$	$\sin x - 2 = 0$
زاوية ربعية x	$\sin x = 2$
$x = 0 + 2k\pi$	$2 \notin [-1 , 1]$
$x = \pi + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$	لا يوجد حل

- $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\alpha = \sin^{-1}\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$

$\sin x > 0$

x في الربع 1

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

x في الربع 2

$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x + 2 = 0$

$\sin x = -2$

$-2 \notin [-1, 1]$

لا يوجد حل

تمارين على:

متطابقات المجموع و الفرق

س استخدم متطابقات المجموع و الفرق في إيجاد القيمة الدقيقة .

- $\sin 15°$

$= \sin(45 - 30)$

$= \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

- $\tan 135°$

$= \tan(180 - 45)$

$= \frac{\tan 180 - \tan 45}{1 + \tan 180 \cdot \tan 45} = \frac{0-1}{1+0} = -1$

- $\cos 75°$

$= \cos(45 + 30)$

$= \cos 45 \cos 30 - \sin 45 \sin 30$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

- إذا كان $\sin \gamma = \frac{4}{5}$,$0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$

γ في الربع 1

$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$

$\cos \gamma = \mp\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$, $\cos \gamma > 0$

$\cos \gamma = \frac{3}{5}$

$\tan \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{4}{3}$

- $\cos \beta = \frac{-8}{17}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

β في الربع 2

$\sin \beta = \mp\sqrt{1 - \left(\frac{-8}{17}\right)^2}$

$\sin \beta > 0 \Longrightarrow \sin \beta = +\frac{15}{17}$

$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{-15}{8}$

▪ أوجد: $\sin(\beta+\gamma)$

$$\sin(\beta+\gamma)=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma$$
$$=\frac{15}{17}\cdot\frac{3}{5}+\left(\frac{-8}{17}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{13}{85}$$

▪ أوجد: $\cos(\beta-\gamma)$

$$\cos(\beta-\gamma)=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma$$
$$=\frac{-8}{17}\cdot\frac{3}{5}+\frac{15}{17}\cdot\frac{4}{5}=\frac{36}{85}$$

▪ أوجد: $\tan(\gamma+\beta)$

$$\tan(\gamma+\beta)=\frac{\tan\gamma+\tan\beta}{1-\tan\gamma\tan\beta}$$
$$=\frac{\frac{4}{3}+\left(-\frac{15}{8}\right)}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-15}{8}\right)}=\frac{-13}{85}$$

في التمارين (10 – 5)

س اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أو ظل الزاوية .

- $\sin 42^\circ\cos 17^\circ-\cos 42^\circ\sin 17^\circ$

  $=\sin(42-17)=\sin(25)$

- $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{5}$

  $=\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{10}\right)$

- $\frac{\tan 19^\circ+\tan 47^\circ}{1-\tan 19^\circ\ \tan 47^\circ}$

  $=\tan(19+47)=\tan 66$

- $\cos\frac{\pi}{7}\cos x+\sin\frac{\pi}{7}\sin x$

  $=\cos\left(\frac{\pi}{7}-x\right)$

- $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x$

  $=\sin(3x-x)=\sin(2x)$

- $\frac{\tan 2y+\tan 3x}{1-\tan 2y\ \tan 3x}$

$= \tan(2y + 3x)$

- اختصر $\frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\sin x}$

$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(2x)}{\sin x \cos x}$

متطابقات ضعف الزاوية و نصفها

في التمارين (1 – 4)

س اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$

- $\sin 2x + \cos x$

  $= 2\sin x \cos x + \cos x$

- $\sin 2x + \cos 2x$

  $= 2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

- $\cos 3x$

  $= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

  $= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x \cos x \sin n$

  $= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x \cos x$

- $\cos 4x$

  $= \cos\big(2(2x)\big)$

  $= \cos^2(2x) - \sin^2(2x)$

  $= (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - (2\sin x \cos x)^2$

  $= (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x \cos^2 x$

في التمارين (7 – 5)

س أثبت صحة كل من المتطابقات التالية :

- $2\csc 2x = \csc^2 x \tan x$

$LHS = 2\csc 2x = \frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{\sin x}\frac{1}{\cos x}$

$RHS = \csc^2 x \tan x = \frac{1}{\sin^2 x}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x}\frac{1}{\cos x}$

$\Longrightarrow LHS = RHS$

- $\sin 3x = (\sin x)(4\cos^2 x - 1)$

$LHS = \sin(2x + x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x$

$= (2\sin x\cos x)\cos x + (2\cos^2 x - 1)\sin x$

$= \sin x\left(2\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)\right)$

$= \sin x\,(4\cos^2 x - 1) = RHS$

- $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

$LHS = \cos 4x = \cos 2\,(2x) = 1 - 2\sin^2(2x)$

$= 1 - 2(2\sin x\cos x)^2$

$= 1 - 2\cdot(4\sin^2 x\cos^2 x)$

$= 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x = RHS$

في التمارين (10 – 8)

س استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من :

- $\sin 15°$

$= \sin\left(\frac{30}{2}\right) = \mp\sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}}$

$= \sin 15° > 0 \Longrightarrow \sin 15 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

- $\tan 195°$

$= \mp\sqrt{\frac{1-\cos 390}{1+\cos 390}} = \mp\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$= \tan 195 > 0$

$\Longrightarrow \tan 195 = 2-\sqrt{3}$

- $\cos 75°$

$= \cos\frac{150}{2} = \mp\sqrt{\frac{1+\cos 150}{2}}$

$= \mp\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = \mp\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$\cos 75 > 0 \Longrightarrow \cos 75 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

س اختصر كلا من التعابير التالية :

- $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

$= \frac{2\sin x\cos x}{1+2\cos^2 x-1}$

$= \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}$

$= \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \tan x$

- $\frac{1-\cos x}{\sin x}$

$= \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x$

- $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$= \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x} = \frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}$

$= \frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x} = \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2$

$= (\csc x - \cot x)^2$

- إذا كانت $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\sin x = -\frac{12}{13}$ فأوجد $\sin\frac{x}{2}$

x في الربع 4 بالتالي $\frac{x}{2}$ في الربع 2

$\cos x = \mp\sqrt{1-\left(\frac{-12}{13}\right)^2} = \pm\frac{5}{13}$, $\cos x > 0 \Longrightarrow \cos x = \frac{5}{13}$

$\sin\frac{x}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$\sin\frac{x}{2} > 0 \Longrightarrow \sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{5}{13}\right)}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

تمارين على:

المستقيمات و المستويات في الفضاء

في التمارين (1 – 5)

س هل الشكل يجب أن يكون موجودا في مستو واحد فقط ؟

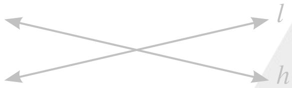
(1)

لا

(2)

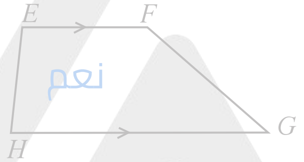
لا

(3)



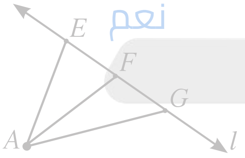
نعم

(4)



نعم

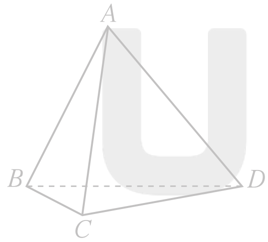
(5)



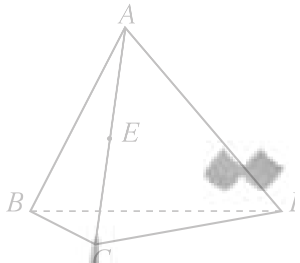
نعم

س هرم ثلاثي القاعدة $ABCD$ سمّ المستويات الأربعة التي تجدها في الرسم .

$(ADC)\,,(ABC)\,,(ABD)\,,(BCD)$



س أثبت أن النقطة E تقع في المستوى ADC و في المستوى ABC

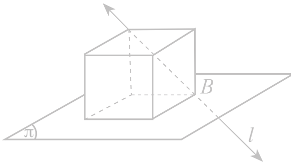


$(ABC) \cap (ADC) = \{\overleftrightarrow{AC}\}$

$\because E \in \overleftrightarrow{AC}\,,\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ABC) \Longrightarrow E \in (ABC)$

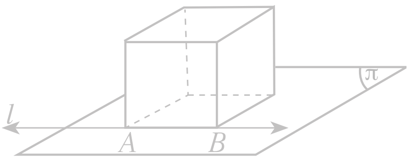
$\because E \in \overleftrightarrow{AC}\,,\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ADC) \Longrightarrow E \in (ADC)$

س أوجد نقطة تقاطع المستوي π و المستقيم l



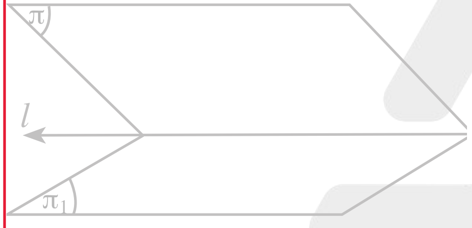
$\pi \cap \overleftrightarrow{l} = \{B\}$

س أوجد تقاطع المستوي π و المستقيم l



$\overleftrightarrow{l} \subseteq \pi \Longrightarrow \pi \cap \overleftrightarrow{l} = \{\overleftrightarrow{\ell}\}$

س أوجد تقاطع المستوي π و المستقيم π_1



$\pi \cap \pi_1 = \{\overleftrightarrow{\ell}\}$

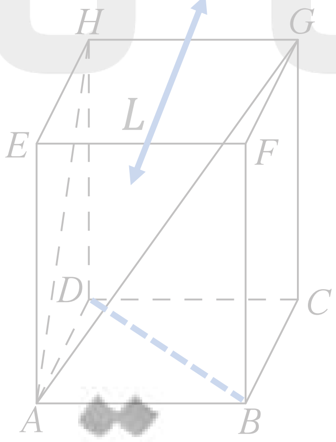
مُعلّق 2021-2022

س في شبة المكعب المقابل ، أكمل :

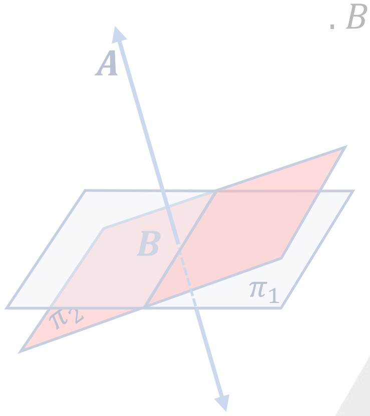
- $(AGH) \cap (ABC) =$ $\overleftrightarrow{AB}$

- ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين $ABCD$, BFH

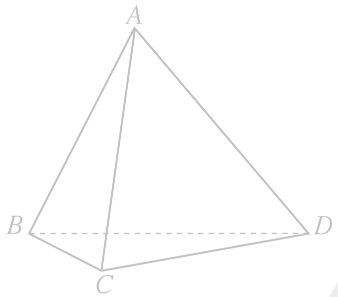
- إذا كانت L نقطة تنتمي إلى $\overline{EF}$ ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين BCL, ADL



س ارسم $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع مستويا π_1 في النقطة B , ثم ارسم المستوي π_2 يقطع المستوي π_1 في مستقيم يمر بالنقطة B .

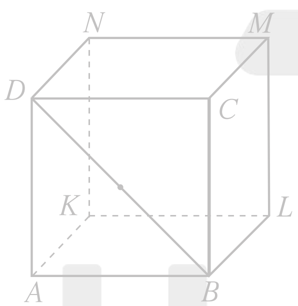


س $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة .



- ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي BCD ؟ B
- ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي ACD ؟ A
- ما نقطة تقاطع (ABC) مع المستوي BCD ؟ $\overleftrightarrow{BC}$

س في الرسم المقابل $ABCDKLMN$ مكعب .



- ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ND}, \overleftrightarrow{BD}$؟ D

- ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}$؟ **لا يوجد (متوازيان)**
- ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{ML}$؟ **لا يوجد (متخالفان)**
- ما نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{ML}$ و المستوي $ABLK$ ؟ L
- سم المستقيم الذي هو تقاطع المستويين NBD, $ABCD$ $\overleftrightarrow{BD}$
- أثبت أن النقاط N, D, B, L تنتمي إلى مستو واحد .

$\overleftrightarrow{LB} \ // \ \overleftrightarrow{ND} \Leftarrow$ يمينان مستوي وحيد $(LBDN)$

$\Rightarrow L , B , D , N \ \in (LBDN)$

- هل $\overleftrightarrow{ND}, \overleftrightarrow{ML}$ يعينان مستويا واحدا ؟ **لا , لأنهما متخالفان**

■ أثبت أن المستويين ADK ,CMN يتقاطعان .

$(CMN) \subseteq (CMND)$

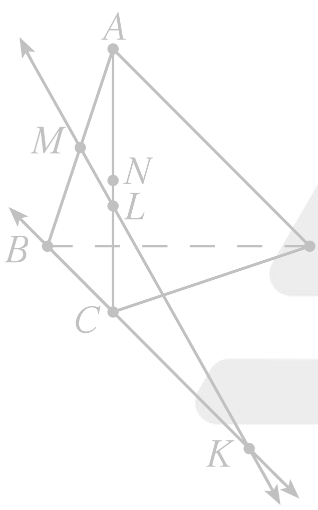
$(ADK) \subseteq (ADNK)$

$(CMND) \cap (ADNK) = \{\overleftrightarrow{DN}\} \Longrightarrow$

$(CMN) \cap (ADK) = \{\overleftrightarrow{DN}\}$

المستويان :إذا $(CMN),(ADK)$ متقاطعان

س $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة . M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ، $L \in \overline{AC}$ ، $L \neq N$



■ أثبت أن : $\overleftrightarrow{ML}$ يقع في المستوى ABC

$\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان , يعينان مستوى (ABC)

$M \in \overline{AB}\ , \overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABC) \Longrightarrow M \in (ABC)$

$L \in \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AC} \subseteq (ABC) \Longrightarrow L \in (ABC)$

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{ML} \subseteq (ABC)$

■ أثبت أن : $\overleftrightarrow{CB}$,$\overleftrightarrow{ML}$ يتقاطعان في النقطة K

$\because$ M منتصف $\overline{AB}$, N منتصف $\overline{AC}$

$\therefore$ $\overline{MN} \, // \, \overline{BC}$

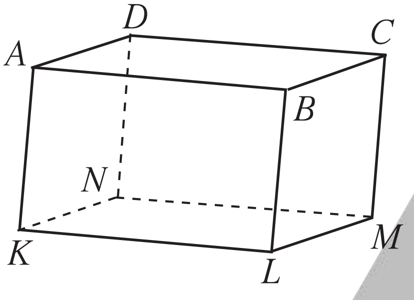
و لدينا $\overline{ML}$ لا يوازي $\overline{BC}$ ويقعان في نفس المستوى

إذا $\overline{ML}$, $\overline{BC}$ متقاطعان في النقطة K

■ ما نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{ML}$ مع المستوى BCD ؟

$\overleftrightarrow{ML} \cap (BCD) = \{K\}$

المستقيمات و المستويات المتوازية في الفضاء



س $ABCDKLMN$ شبه مكعب

- أثبت أن : $\overleftrightarrow{AK} \,//\, \overleftrightarrow{CM}$

∵ الشكل شبه مكعب

∴ $ABLK$ مستطيل , $BLMC$ مستطيل

∴ $\overleftrightarrow{BL} \,//\, \overleftrightarrow{CM}, \overleftrightarrow{AK} \,//\, \overleftrightarrow{BL}$

بالتالي $\overleftrightarrow{AK} \,//\, \overleftrightarrow{CM}$ (نظرية 3)

- أثبت أن النقاط : A ,K ,M ,C تنتمي إلي مستوٍ واحد .

$\overline{AK}, \overline{CM}$ متوازيان يعينان مستوي واحد $(AKMC)$

$A\,,K \in \overline{AK}\,,\overline{AK} \subseteq (AKMC) \Rightarrow A\,,K \in (AKMC)$

$C\,,M \in \overline{CM}\,,\overline{CM} \subseteq (AKMC) \Rightarrow C\,,M \in (AKMC)$

$\therefore A\,,K\,,C\,,M \in (AKMC)$

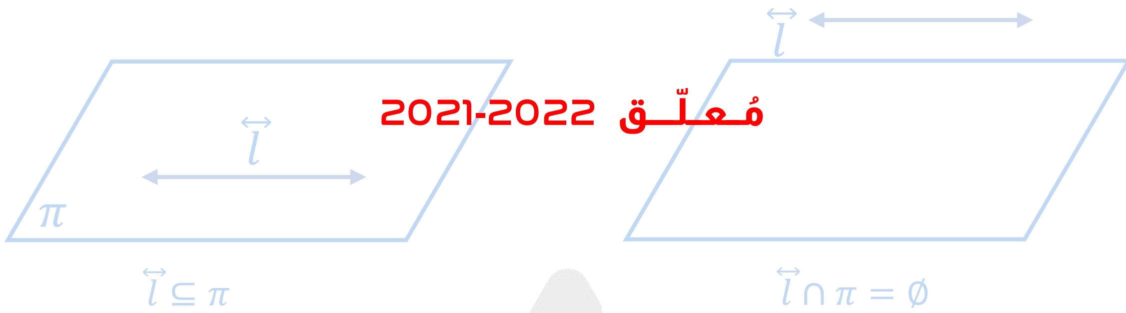
- أثبت أن : $\overleftrightarrow{AD}$ يوازي المستوى MKN

$\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{KN}$

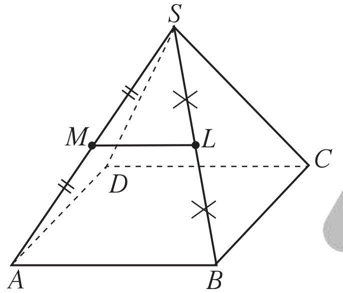
$\overleftrightarrow{KN} \subset (MKN)$

نظرية $\Rightarrow \overleftrightarrow{AD} \,//\, (MKN)$

س متى يكون المستقيم l موازيا للمستوي π ؟ وضح ذلك بالرسم .
ارسم مستقيما آخرا يوازي المستوي π



س $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل . M منتصف $\overline{SA}$, L منتصف $\overline{SB}$
أثبت أن : $\overleftrightarrow{ML} \,//\, (ABCD)$



الحل

$\because$ M منتصف $\overline{SA}$, L منتصف $\overline{SB}$

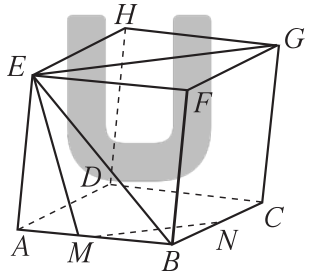
$\Rightarrow \overleftrightarrow{ML} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABCD)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ML} \,//\, (ABCD)$ نظرية

س $ABCDEFGH$ مكعب . $M \in \overline{AB}$, المستوي GEM يقطع $\overline{BC}$ في النقطة N
أثبت أن : $\overleftrightarrow{GE} \,//\, \overleftrightarrow{MN}$

G, E, M ثلاث نقط ليست على استقامة تعين مستويا (MEG)



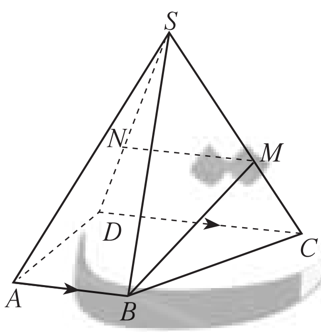
① $(MEG) \cap (EFGH) = \overleftrightarrow{EG}$

② $(MEG) \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{MN}$

③ $(EFGH) \,//\, (ABCD)$

①, ②, ③ $\Rightarrow \overleftrightarrow{EG} \,//\, \overleftrightarrow{MN}$ (نظرية 4)

س $SABCD$ هرم قاعدته شبة منحرف $ABCD$ حيث إن $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{DC}$ $M \in \overline{SC}$,
المستوي ABM يقطع $\overleftrightarrow{SD}$ في N



- أثبت أن : $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوي SDC

$\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{CD} \subseteq (SDC) \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \,//\, (SDC)$ (نظرية)

- أثبت أن : $\overleftrightarrow{MN} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABMN) \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \,//\, (SDC)$

$(SDC) \cap (ABMN) = \overleftrightarrow{MN} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{MN} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ (نتيجة)

س $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة , $I \in \overline{AB}$

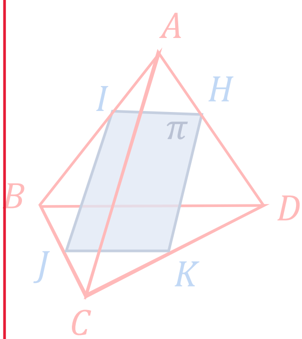
المستقيم الموازي لـ $\overleftrightarrow{AC}$ و المار بالنقطة I يقطع $\overleftrightarrow{BC}$ في J .

المستقيم الموازي لـ $\overleftrightarrow{BD}$ و المار بالنقطة J يقطع $\overleftrightarrow{CD}$ في K .

المستقيم الموازي لـ $\overleftrightarrow{AC}$ و المار بالنقطة K يقطع $\overleftrightarrow{AD}$ في H .

ضع رسما مناسبا .

أثبت أن : $\overleftrightarrow{IH} // \overleftrightarrow{BD}$



مُعلّق 2021-2022

$\overleftrightarrow{IJ} // \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{HK} // \overleftrightarrow{AC} \Rightarrow \overleftrightarrow{IJ} // \overleftrightarrow{HK}$ (نظرية 3)

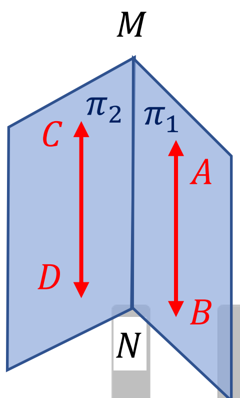
$\Leftarrow \overleftrightarrow{IJ}, \overleftrightarrow{HK}$ يعينان مستوى وحيدا π

$\overleftrightarrow{BD} // \overleftrightarrow{JK}, \overleftrightarrow{JK} \subseteq \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{BD} // \pi$ (نظرية 1)

$\overleftrightarrow{BD} // \pi \, , \overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABD) \, , \pi \cap (ABD) = \overleftrightarrow{IH}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BD} // \overleftrightarrow{IH}$ (نظرية 2)

س ليكن π_1 ,π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث , $\overleftrightarrow{AB} // \pi_2$,$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$
و $\overleftrightarrow{CD} // \pi_1$,$\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$ أثبت أن : $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

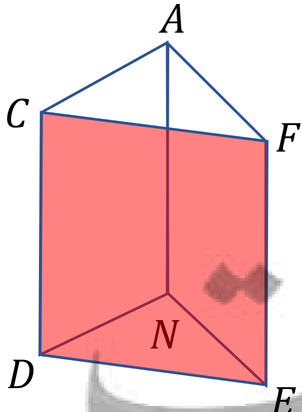


$\overleftrightarrow{AB} // \pi_2 \, , \overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1 \, , \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{MN}$ (1) (نظرية)

$\overleftrightarrow{CD} // \pi_1 , \overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2 \, , \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN} \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{MN}$ (2)

(1) , (2) $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (نظرية 3)

س $ABEF$, $ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معا و يتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$
أثبت أن : $CDEF$ متوازي أضلاع



الحل

$ABCD$ متوازي أضلاع

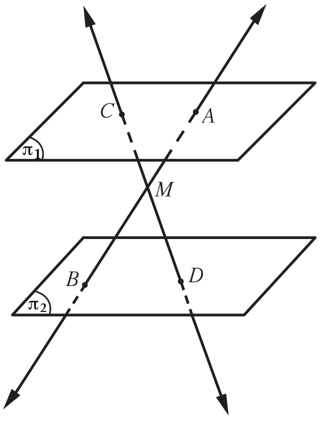
$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \, , AB = CD$ (1)

$ABEF$ متوازي أضلاع

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}, AB = EF$ (2)

(1) , (2) $\Rightarrow \overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{CD} \, , EF = CD \Rightarrow$
$CDEF$ متوازي أضلاع

س في الشكل المقابل π_2, π_1 مستويان متوازيان , M نقطة واقعة بينهما ,
حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$
أثبت أن : $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان يعينان مستوي π

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AC}, \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{BD}, \pi_1 // \pi_2$

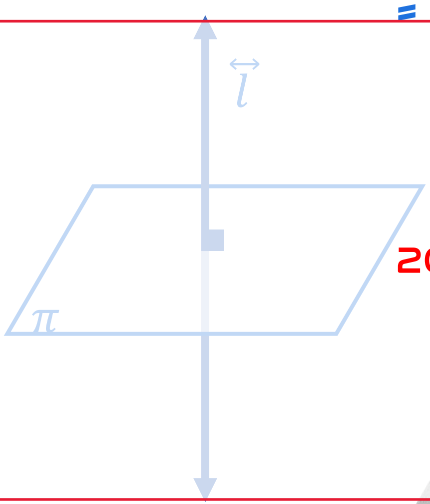
$\Rightarrow \overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BD}$ (نظرية 4)

$\Rightarrow \Delta AMC \sim \Delta BMD$

$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{CM}{MD} = \frac{AC}{BD}$

$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

تعامد مستقيم مع مستوٍ



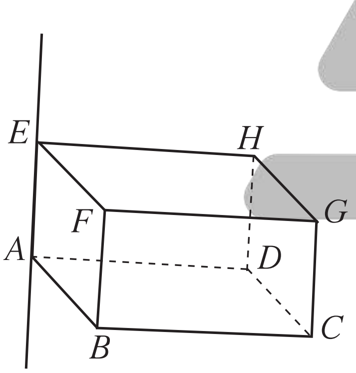
س متى يكون المستقيم عموديا علي المستوي ؟

عندما يعامد مستقيمين متقاطعين فيه

س ارسم مستقيما عموديا على مستوٍ .

$\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

س $ABCDEFGH$ شبه مكعب .



- سم المستقيمات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

$\overline{EF}\ ,\ \overline{EH}\ ,\overline{FG}\ ,\overline{HG}\ ,\overline{AB}\ ,\overline{AD}\ ,\overline{BC}\ ,\overline{CD}$

- سم المستويات المتعامدة مع $\overleftrightarrow{AE}$

$(EFGH)\ ,(ABCD)$

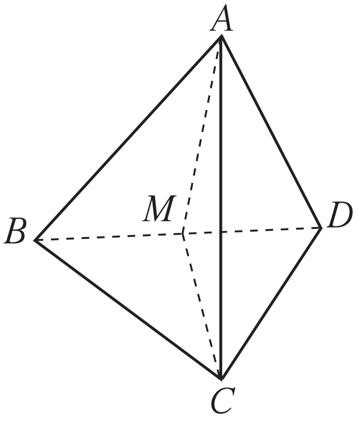
- أثبت أن $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على المستوى CGH

$\overline{AD} \perp \overline{CD}\ ,\overline{AD} \perp \overline{DH}$ (خواص شبه المكعب)

$\Rightarrow \overline{AD} \perp (CDHG)$(نظرية 5)

$\overline{AD} \perp (CGH)$

س $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة .
$AD = AB \,, CD = CB$ النقطة M منتصف $\overline{DB}$



- أثبت أن : $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

متطابق الضلعين $\underset{ADB}{\Delta} \Longleftarrow AD = AB$

$(1) \longleftarrow \overline{AM} \perp \overline{BD} \Longleftarrow \overline{BD}$ منتصف M

متطابق الضلعين $\underset{BCD}{\Delta} \Longleftarrow BC = CD$

$(2) \longleftarrow \overline{CM} \perp \overline{BD} \Longleftarrow \overline{BD}$ منتصف M

$(1)\,,(2) \Longrightarrow \overline{BD} \perp \overline{AM} \,, \overline{BD} \perp \overline{CM}$

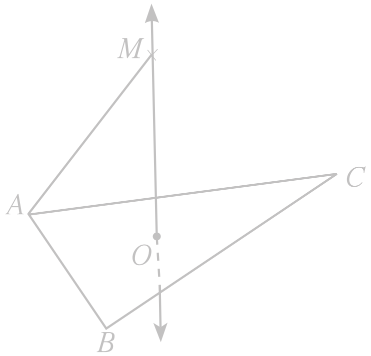
$\Longrightarrow \overline{BD} \perp (AMC)$ (نظرية 5)

- استنتج أن : $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\overline{BD} \perp (AMC) \,, \overline{AC} \subseteq (AMC)$

$\Longrightarrow \overline{BD} \perp \overline{AC}$

س ABC مثلث متطابق الأضلاع مركزه O , $\overleftrightarrow{MO}$ متعامد مع (ABC)
اثبت أن: $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CB}$



$\overline{MO} \perp (ABC)\,, \overline{BC} \subseteq (ABC)$

$\Rightarrow \overline{MO} \perp \overline{BC} \longrightarrow ①$

$\overleftrightarrow{AO} \perp \overline{BC} \longrightarrow ②$ (خواص المثلث متطابق الأضلاع)

مُعلّق 2021-2022

③ ← (OAM) متقاطعان يشكلان مستوى $\overleftrightarrow{OA}, \overline{MO}$

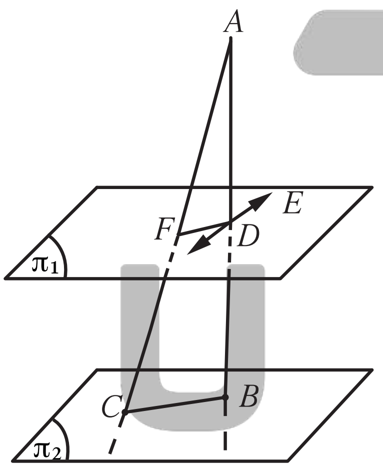
$①, ②, ③ \Rightarrow \overline{BC} \perp (OAM)$ (نظرية 5)

$\because \overleftrightarrow{AM} \subseteq (OAM)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$

س في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي علي المستوي π_1, π_2، $\overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$
أثبت أن: $\pi_1 \;//\; \pi_2$

الحل



$\because \overline{AB} \perp \pi_2\,, \overline{BC} \subseteq \pi_2$

$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC} \Rightarrow m(\hat{B}) = 90°$

في المثلث $ABC\Delta$

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$, F منتصف $\overline{AC}$

$\Rightarrow \overline{FD} \;//\; \overline{BC}$

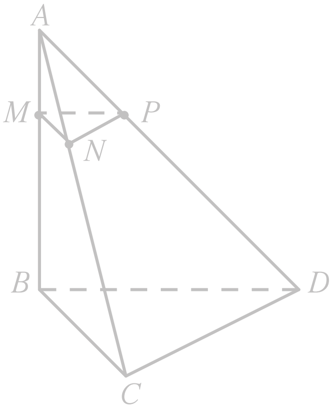
$\Rightarrow m(\hat{D}) = m(\hat{B}) = 90°$

$\because \overline{AD} \perp \overline{FD}, \overline{AD} \perp \overline{DE}$: (متقاطعان $\overline{FD}, \overline{DE}$)

$\Rightarrow \overline{AD} \perp \pi_1$ (نظرية 5)

$\because \overline{AD} \perp \pi_1\,, \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \;//\; \pi_2$ (نظرية 6)

س في الشكل المقابل , $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة حيث $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ فإذا كان :
$AD = 3AP$, $AC = 3AN$, $AB = 3AM$
اثبت أن : $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (MNP)



بفرض :

$$AP = x \Longrightarrow AD = 3x \Longrightarrow PD = 2x$$

$$AN = y \Longrightarrow AC = 3y \Longrightarrow NC = 2y$$

$$AM = z \Longrightarrow AB = 3z \Longrightarrow MB = 2z$$

$$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (BCD), \overline{BC} \subseteq (BCD), \overline{BD} \subseteq (BCD) \Longrightarrow$$

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{BC}, \overleftrightarrow{AB} \perp \overline{BD} \Longrightarrow m(A\hat{B}C) = m(A\hat{B}D) = 90°$$

في المثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ لدينا :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \overline{MN} \,//\, \overline{BC}$$

$$\Longrightarrow m(A\hat{M}N) = m(A\hat{B}C) = 90°$$

تناظر

$$\Longrightarrow \overline{AM} \perp \overline{MN} \longrightarrow ①$$

بالمثل في المثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ لدينا :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PD} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \overline{MP} \,//\, \overline{PD}$$

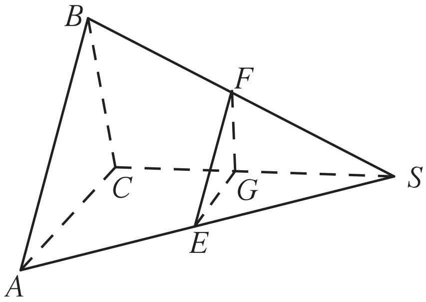
$$\Longrightarrow m(A\hat{M}P) = m(A\hat{B}D) = 90°$$

$$\Longrightarrow \overline{AM} \perp \overline{MP} \longrightarrow ②$$

$$①, ② \Longrightarrow \overline{AM} \perp (MPN)$$

$$\Longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp (MPN)$$

س في الشكل المقابل , $(ABC) // (EFG)$, S نقطة خارج (ABC) , (EFG)
بحيث $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC}$ فإذا كان : $SB = 10CM$, $SC = 8CM$, $BC = 6CM$
اثبت أن : $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{FE}$



في المثلث $SBC\Delta$:

$(BS)^2 = 10^2 = 100$

$(SC)^2 + (BS)^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$\Leftarrow SBC\Delta$ قائم في $\hat{C}$

$\overline{SC} \perp \overline{CA}$, $\overline{SC} \perp \overline{CB} \Longrightarrow$

$\overline{SC} \perp (CAB)$ (نظرية 5)

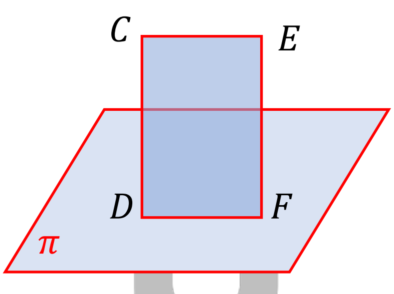
$\because (EFG) // (CAB)$

$\Longrightarrow \overline{SC} \perp (EFG)$ (نظرية 7)

$\overline{FE} \subseteq (EFG)$

$\Longrightarrow \overline{SC} \perp \overline{FE}$

س ليكن $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{EF}$ عموديان على المستوي π و يقطعانه في F, D على الترتيب
فإذا كان $\overleftrightarrow{CE}$: يوازي π . اثبت أن : $CDFE$ مستطيل .



$\overline{CD} \perp \pi, \overline{EF} \perp \pi \Longrightarrow \overline{CD} // \overline{EF} \longrightarrow ①$ (نظرية)

$\Leftarrow \overline{CD}$, $\overline{EF}$ يعينان مستوي $(CDFE)$

$\overline{CE} // \pi_1$ $\quad \overline{CE} \subseteq (CDFE)$, $\pi \cap (CDFE) = \overline{DF}$

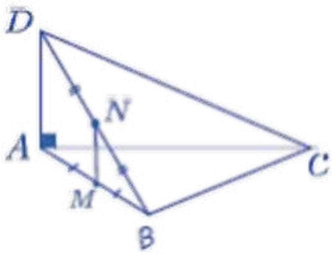
$\Longrightarrow \overline{CE} // \overline{DF} \longrightarrow ②$ (نظرية 2)

من ① , ② نجد $(CDFE)$ متوازي أضلاع

$\because \overline{CD} \perp \pi_1$, $\overline{DF} \subseteq \pi \Longrightarrow \overline{CD} \perp \overline{DF}$

$\Leftarrow (CDFE)$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل

س ABC مثلث , أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان : $\overleftrightarrow{DA}$ عموديا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$,$\overleftrightarrow{AC}$ فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$, N منتصف $\overline{DB}$
أثبت أن : $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

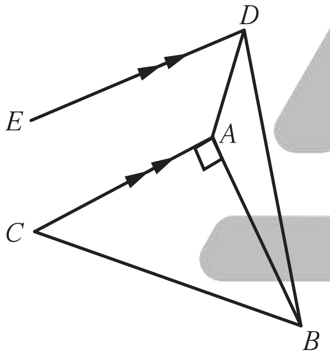


$\overline{DA} \perp \overline{AB}, \overline{DA} \perp \overline{AC} \Rightarrow \overline{DA} \perp (ABC)$ ① (نظرية 5)

$\overline{MN} \,//\, \overline{AD} \Leftarrow$ ② $\begin{cases} M & \text{منتصف} & \overline{AB} \\ N & \text{منتصف} & \overline{DB} \end{cases}$

①, ② $\Rightarrow \overline{MN} \perp (ABC)$ (نظرية 9)

س في الشكل المقابل , ABC مثلث قائم الزاوية في A رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي علي مستوى المثلث ABC , و رسم $\overleftrightarrow{CA} \,//\, \overleftrightarrow{ED}$
أثبت أن : $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$



$\overline{AD} \perp (ABC)\,, \overline{CA} \subseteq (ABC) \Rightarrow \overline{CA} \perp \overline{AD} \longrightarrow$ ①

ABC مثلث قائم الزاوية في A $\Rightarrow \overline{CA} \perp \overline{AB} \longrightarrow$ ②

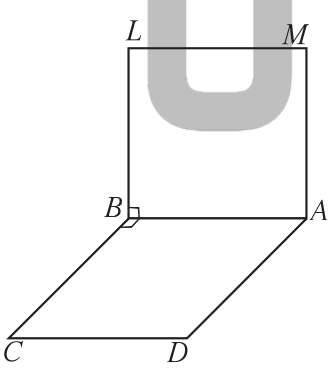
$\overline{AB}\,, \overline{AD}$ متقاطعان يعينان مستوي (ABC) $\longrightarrow$ ③

①, ②, ③ $\Rightarrow \overline{CA} \perp (ABD)$ (نظرية 5)

$\because \overline{ED} \,//\, \overline{CA} \Rightarrow \overline{ED} \perp (ABD)$ (نظرية 9)

$\because \overline{AB} \subseteq (ABD) \Rightarrow \overline{ED} \perp \overline{AB}$

س $ABCD$, $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد , لهما ضلع مشترك $\bar{A}$
أثبت أن : $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$



$\overline{AB} \perp \overline{BC}\,, \overline{AB} \perp \overline{BL}$ (خواص المربع)

$\overline{BC}\,, \overline{BL}$ متقاطعان يمينان مستوي (LBC)

$\Rightarrow \overline{AB} \perp (LBD)$ (نظرية 5)

$\because \overline{LM} \,//\, \overline{AB}, \overline{AB} \perp (LBC) \Rightarrow \overline{LM} \perp (LBC)$ (نظرية 9)