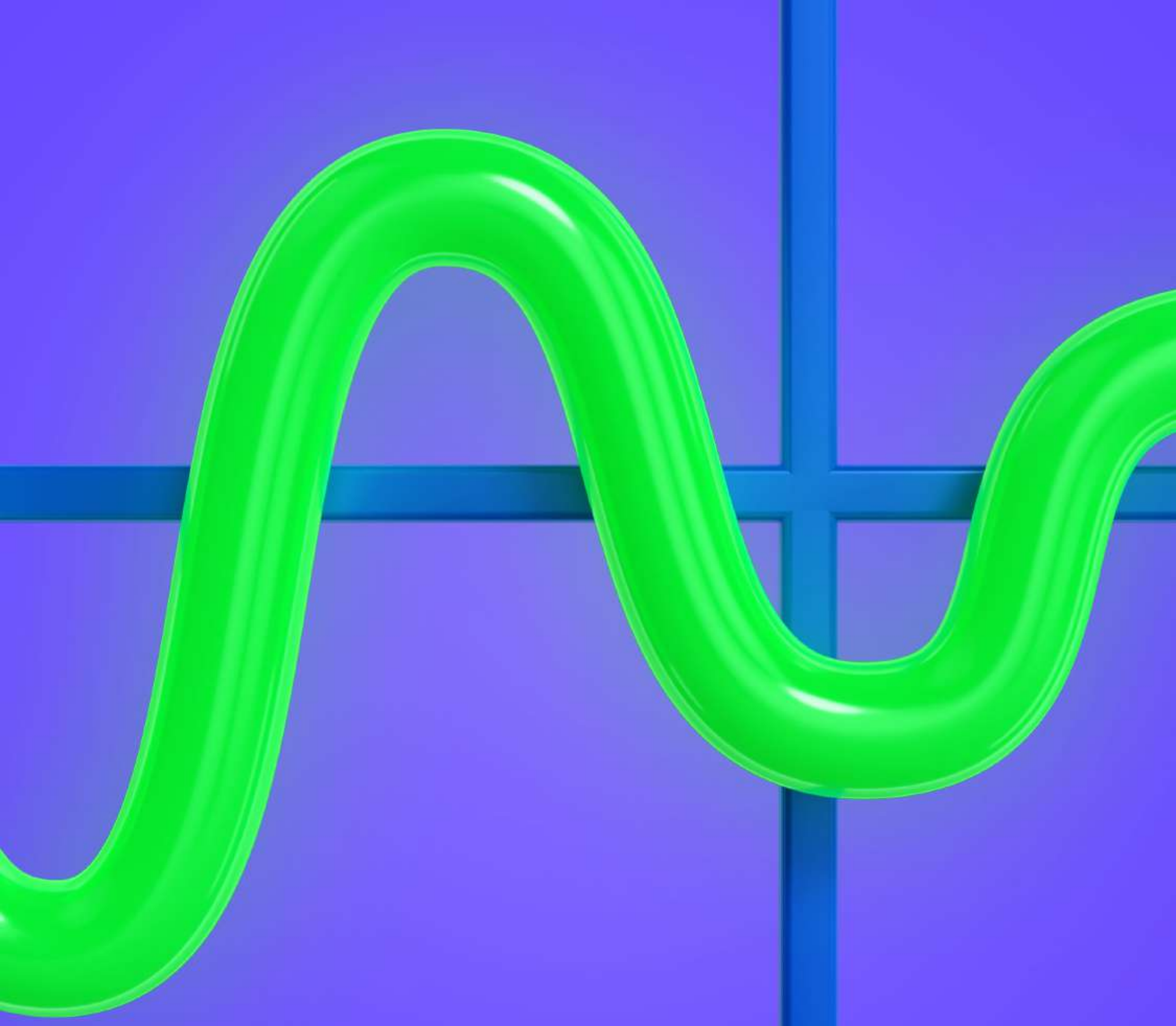


الـريـاضـيـات

الـكـورس الثاني

12

UULA.COM 2021-2022

UULA

الـريـاضـيـات

الـكـورس الثاني

12

شلون تتفوق بدراستك

طريقة علا المتكاملة للدراسة تشمل الاستفادة من المذكرة و الفيديوهات و الاختبارات

علا تخلي المذكرة أقوى

تبي أعلى الدرجات؟ لا تعتمد على المذكرة بروحها – ادرس صح من الفيديوهات و الاختبارات

فيديوهات تشرح لك

تابع الفيديوهات و انت تدرس المذكرة عشان تضبط الدرس

اختبارات ذكية تدربك

حل الاختبارات الالكترونية أول بأول عشان ترفع مستواك

اشترك بالمادة

احرص على تفعيل اشتراكك عشان تستفيد كثر ما تقدر

UULA

اكتشف عالم التفوق مع باقات علا

ادرس جميع مواد مرحلتك باشتراك واحد بسعر خيالي

UULA

المنقذ

أقوى مذكرة صارت الحين أقوى و أقوى مع خاصية **المنقذ** للمساعدة الفورية

شنو المنقذ ؟

امسح الباركود بكاميرا تلفونك
وتعرف على طريقة استخدام المنقذ

شنو فايدة هالخاصية ؟

أول ما تحتاج مساعدة بالمادة , المنقذ بينقذك .

امسح الباركود بكاميرا التلفون أو اضغط عليه إذا كنت فاتح المذكرة من جهازك و يطلع لك فيديو الشرح.

قائمة المحتوى

التكامل غير المحدد

المشتقة العكسية

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

س أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$
ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

$$F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$$
$$F'(x) = 0 - \frac{1}{3}3x^2$$
$$= -x^2 = f(x)$$

$\therefore$ $F(x)$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$
مشتقة عكسية أخرى $F(x) = -\frac{1}{3}x^3$

س أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

$$F(x) = \frac{x^3+1}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x + x^{-2}$$
$$F'(x) = 1 + (-2)x^{-3}$$
$$= 1 - \frac{2}{x^3} = f(x)$$

$\therefore$ $F(x)$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x)$

ملاحظات هامة

التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F , و يكتب على الصورة:

$$\int f(x)\,dx$$

قواعد التكامل غير المحدد

$\int k\,dx = kx + C$ عدد ثابت k

قاعدة القوى

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,,n \in Q - \{-1\}$$

خواص التكامل غير المحدد

خاصية الضرب بعدد ثابت

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx\,,k \neq 0$$

خاصية الجمع و الطرح

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Q $\int 5\,dx$ $= 5x + C$

Q $\int 15\,dx$ $= 15x + C$

Q $\int 5x^4\,dx$ $= 5 \cdot \frac{x^5}{5} + C = x^5 + C$

Q $\int 4x^3\,dx$ $= 4 \cdot \frac{x^4}{4} + C = x^4 + C$

Q $\int (3x^2 - 4x - 1)\,dx$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} - 1x + C$$
$$= x^3 - 2x^2 - x + c$$

Q $\int (x^2 - 2x + 5)\,dx$

$$= \frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 5x + C$$
$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

Q $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

$$= \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C$$
$$= -x^{-1} + C$$
$$= -\frac{1}{x} + C$$

Q $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}\,dx$

$$= \int \frac{(x-1)(x-3)}{x-1}\,dx$$
$$= \int (x-3)\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

Q $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx$

$$= \int \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^4}\,dx$$
$$= \int \left(\frac{x^4}{x^4} - \frac{4x^2}{x^4} + \frac{4}{x^4}\right) dx$$
$$= \int (1 - 4x^{-2} + 4x^{-4})\,dx$$
$$= x - 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + 4\cdot\frac{x^{-3}}{-3} + C$$
$$= x + 4x^{-1} - \frac{4}{3}x^{-3} + C$$
$$= x + \frac{4}{x} - \frac{4}{3x^3} + C$$

Q $\int (2x-3)(x+4)\,dx$

$$= \int (2x^2 + 8x - 3x - 12)dx$$
$$= \int (2x^2 + 5x - 12)dx$$
$$= 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - 12x + C$$
$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 12x + C$$

Q $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}\,dx$

$$= \int \frac{(x+1)(x+4)}{x+1}dx$$
$$= \int (x+4)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

Q $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

$$= \int \frac{9x^4 - 6x^3 + x^2}{x^2}dx$$
$$= \int \left(\frac{9x^4}{x^2} - \frac{6x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right)dx$$
$$= \int (9x^2 - 6x + 1)dx$$
$$= 9 \cdot \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 1x + C$$
$$= 3x^3 - 3x^2 + x + C$$

Q $\int \sqrt{x}\, dx$

$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}\ \sqrt{x^3} + C$$

Q $\int \sqrt[5]{x^2}\, dx$

$$= \int x^{\frac{2}{5}}\, dx$$
$$= \frac{5}{7} x^{\frac{7}{5}} + C$$
$$= \frac{5}{7}\ \sqrt[5]{x^7} + C$$

Q $\int x\sqrt{x}\, dx$

$$= \int x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \int x^{\frac{3}{2}} dx$$
$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{5}\ \sqrt{x^5} + C$$

Q $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$$= \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$
$$= \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$= 2x^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 2\sqrt{x} + C$$

Q $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

$$= \int \frac{x^2 - 3x}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{3x}{x^{\frac{1}{3}}}\right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right) dx$$

$$= \frac{3}{8} \cdot x^{\frac{8}{3}} - 3 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{8}\ \sqrt[3]{x^8} - \frac{9}{5}\ \sqrt[3]{x^5} + C$$

Q $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

$$= \int \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x} + 1}\,dx$$

$$= \int \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1\right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1\right) dx$$

$$= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + x + C$$

$$= \frac{3}{5}\ \sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{4}\ \sqrt[3]{x^4} + x + C$$

س إذا كان: $F(x) = \int (2x + 5)\, dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C$$
$$F(x) = x^2 + 5x + C$$
$$F(-1) = 0 \rightarrow \quad (-1)^2 + 5(-1) + C = 0$$
$$-4 + C = 0$$
$$C = 4$$
$$F(x) = x^2 + 5x + 4$$

س إذا كان: $F(x) = \int (2x - 3)\, dx$ ، $F(3) = 2$ فأوجد $F(x)$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x + C$$
$$F(x) = x^2 - 3x + C$$
$$F(3) = 2 \rightarrow \quad 3^2 - 3(3) + C = 2$$
$$C = 2$$
$$F(x) = x^2 - 3x + 2$$

التكامل بالتعويض

Q $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)\,dx$

$u = x^2+2x+5$
$du = (2x+2)dx$

$$= \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{(x^2+2x+5)^4}{4} + C$$

Q $\int (x^3+4x^2+x)^7(3x^2+8x+1)\,dx$

$u = x^3+4x^2+x$
$du = (3x^2+8x+1)dx$

$$= \int u^7 du = \frac{u^8}{8} + c$$
$$= \frac{(x^3+4x^2+x)^8}{8} + C$$

Q $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$

$u = \frac{1}{x} + 4$
$du = \frac{-1}{x^2}dx$
$-du = \frac{1}{x^2}dx$

$$= -\int u^5 du$$
$$= -\frac{u^6}{6} + c$$
$$= -\frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^6}{6} + C$$

Q $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\,(2x-5)\,dx$

$u = x^2-5x+2$
$du = (2x-5)dx$

$$= \int \sqrt[3]{u}\,du = \int u^{\frac{1}{3}} du$$
$$= \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + c$$
$$= \frac{3}{4}(x^2-5x+2)^{\frac{4}{3}} + C$$
$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-5x+2)^4} + C$$

Q $\int \sqrt{4x-5}\,dx$

$u = 4x - 5$
$du = 4\,dx$
$\frac{du}{4} = dx$

$$= \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}} du$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{1}{6}(4x-5)^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{1}{6}\sqrt{(4x-5)^3} + C$$

Q $\int \sqrt[5]{3x+7}\,dx$

$u = 3x + 7$
$du = 3\,dx$
$\frac{du}{3} = dx$

$$= \int \sqrt[5]{u} \cdot \frac{du}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{5}} du$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} u^{\frac{6}{5}} + c$$
$$= \frac{5}{18}(3x+7)^{\frac{6}{5}} + C$$
$$= \frac{5}{18}\sqrt[5]{(3x+7)^6} + C$$

Q $\int \frac{5}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^3}dx$

$$u = \sqrt{x} + 2$$
$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$
$$2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \int \frac{5}{u^3} \cdot 2du$$
$$= 10 \int u^{-3} du$$
$$= 10 \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C$$
$$= -5(\sqrt{x} + 2)^{-2} + C$$
$$= \frac{-5}{(\sqrt{x} + 2)^2} + C$$

Q $\int \frac{3\left(\sqrt[3]{x}-5\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

$$u = x^{\frac{1}{3}} - 5$$
$$du = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}dx$$
$$3du = x^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$= 3\int \left(x^{\frac{1}{3}} - 5\right)x^{\frac{-2}{3}}dx$$
$$= 3\int u \cdot 3du$$
$$= 9\int u du$$
$$= 9\frac{u^2}{2} + c$$
$$= \frac{9}{2}\left(x^{\frac{1}{3}} - 5\right)^2 + C$$
$$= \frac{9}{2}(\sqrt[3]{x} - 5)^2 + C$$

Q $\int x(x+1)^5 dx$

$$u = x+1$$
$$du = dx$$
$$u - 1 = x$$

$$= \int (u-1)u^5 du$$
$$= \int (u^6 - u^5) du$$
$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6} + c$$
$$= \frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + C$$

Q $\int x(2x\_1)^3\, dx$

$$u = 2x-1$$
$$du = 2dx$$
$$\frac{du}{2} = dx$$
$$u+1 = 2x$$
$$\frac{u+1}{2} = x$$

$$= \int \frac{u+1}{2} u^3 \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{4}\int (u^4 + u^3) du$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4}\right) + c$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(2x-1)^5}{5} + \frac{(2x-1)^4}{4}\right) + c$$
$$= \frac{(2x-1)^5}{20} + \frac{(2x-1)^4}{16} + C$$

Q $\int x^5\sqrt{4-x^2}\,dx$

$u = 4-x^2$

$du = -2x\,dx$

$\frac{du}{-2} = x\,dx$

$x^2 = 4-u$

$x^4 = (4-u)^2$

$= 16-8u+u^2$

$$= \int x^4\sqrt{4-x^2}\,x\,dx$$

$$= \int (16-8u+u^2)\sqrt{u}\cdot\frac{du}{-2}$$

$$= \frac{-1}{2}\int\left(16u^{\frac{1}{2}}-8u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{5}{2}}\right)du$$

$$= \frac{-1}{2}\left(16\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-8\cdot\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\cdot\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}\right)+C$$

$$= \frac{-16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{8}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{7}(4-x^2)^{\frac{7}{2}}+C$$

ملغى

Q $\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx$

$u = 3+x^2$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

$u-3 = x^2$

$x^4 = (u-3)^2$

$= u^2-6u+9$

$$= \int x^4\sqrt{3+x^2}\,x\,dx$$

$$= \int (u^2-6u+9)\sqrt{u}\cdot\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(u^{\frac{5}{2}}-6u^{\frac{3}{2}}+9u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-6\cdot\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+9\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)+C$$

$$\frac{1}{7}(3+x^2)^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}(3+x^2)^{\frac{5}{2}}+3(3+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

تـــدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية

تكامل الدوال المثلثية

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin kx \, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \cos kx \, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int sec\, x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$\int csc\, x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

تذكر : اشتقاق الدوال المثلثية :

$$(sin\, x)' = \cos x$$
$$(cos\, x)' = -\sin x$$

$$(tan\, x)' = \sec^2 x$$
$$(cot\, x)' = -\csc^2 x$$

$$(sec\, x)' = \sec x \tan x$$
$$(csc\, x)' = -\csc x \cot x$$

Q $\int (\sin x + sec^2\, x) \, dx \quad = -cos\, x + tan\, x + C$

Q $\int (\cos x + \csc^2 x) \, dx \quad = sin\, x - cot\, x + C$

Q $\int cscx(cotx + \csc\, x) \, dx \quad = \int (csc\, x\, cot\, x + csc^2\, x)dx$

$= -csc\, x - cot\, x + C$

Q $\int secx(tanx + secx) \, dx \quad = \int (sec\, x\, tan\, x + sec^2\, x)dx$

$= sec\, x + tan\, x + C$

Q $\int \frac{dx}{cos^2\, x} \quad = \int sec^2\, x\, dx = tan\, x + C$

Q $\int \frac{dx}{\sin^2 x} \quad = \int csc^2\, x\, dx = -cot\, x + C$

Q $\int \cos 4x\, dx = \dfrac{\sin 4x}{4} + C$

Q $\int \sin 5x\, dx = \dfrac{-\cos 5x}{5} + C$

Q $\int (2x - \sin 3x)\, dx = \dfrac{2x^2}{2} - \dfrac{-\cos 3x}{3} + C$

$= x^2 + \dfrac{\cos 3x}{3} + C$

Q $\int (x^2 + \cos 2x)\, dx = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{\sin 2x}{2} + C$

Q $\int x\, csc^2(x^2 - 1)\, dx$

$= \int csc^2 u \cdot \dfrac{du}{2}$

$= \dfrac{-1}{2} cot\, u + C$

$= \dfrac{-1}{2} cot(x^2 - 1) + C$

$u = x^2 - 1$

$du = 2x\, dx$

$\dfrac{du}{2} = x\, dx$

ملغى

Q $\int x \sec^2(x^2 + 2)\, dx$

$= \int sec^2 u \dfrac{du}{2}$

$= \dfrac{1}{2} tan\, u + C$

$= \dfrac{1}{2} tan(x^2 + 2) + C$

$u = x^2 + 2$

$du = 2x \quad dx$

$\dfrac{du}{2} = x\, dx$

Q $\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$

$u = \cos t$
$du = -\sin t \, dt$
$-du = \sin t \, dt$

$$= -\int u^4 du$$
$$= -\frac{u^5}{5} + C$$
$$= -\frac{(\cos t)^5}{5} + C$$

Q $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

$u = \sin x$
$du = \cos x \, dx$

$$= \int u^3 du$$
$$= \frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

Q $\int \sin^5(x+1) \cdot \cos(x+1) \, dx$

$u = \sin(x+1)$
$du = \cos(x+1) \, dx$

$$= \int u^5 du$$
$$= \frac{u^6}{6} + C$$
$$= \frac{(\sin(x+1))^6}{6} + C$$

Q $\int \cos^3(2x-3) \cdot \sin(2x-3) \, dx$

ملغى

$u = \cos(2x-3)$
$du = -2\sin(2x-3) \, dx$
$\frac{du}{-2} = \sin(2x-3) \, dx$

$$\therefore \int \cos^3(2x-3) \cdot \sin(2x-3) \, dx$$
$$= \int u^3 \frac{du}{-2} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} + c$$
$$= \frac{-1}{8} (\cos(2x-3))^4 + c$$

Q $\int x^3 \cos(x^4+5)\,dx$

$$= \int \cos u \frac{du}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\sin u + c$$
$$= \frac{1}{4}\sin(x^4+5) + c$$

$u = x^4 + 5$
$du = 4x^3 dx$
$\frac{du}{4} = x^3 dx$

Q $\int x^2 \cdot \sin(x^3-1)\,dx$

$$= \int \sin u \frac{du}{3}$$
$$= \frac{-1}{3}\cos u + c$$
$$= \frac{-1}{3}\cos(x^3-1) + c$$

$u = x^3 - 1$
$du = 3x^2 dx$
$\frac{du}{3} = x^2 dx$

Q $\int (1+\cos x)^6 \sin x\,dx$

ملغى

$$= -\int u^6 du$$
$$= -\frac{u^7}{7} + c$$
$$= -\frac{(1+\cos x)^7}{7} + c$$

$u = 1 + \cos x$
$-du = \sin x\,dx$

Q $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\,dx$

$$= \int u^5 \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{u^6}{6} + c$$
$$= \frac{(3+\sin 2x)^6}{12} + c$$

$u = 3 + \sin 2x$
$du = 2\cos 2x\,dx$
$\frac{du}{2} = \cos 2x\,dx$

Q $\int sec^4 x \tan x\, dx = \int \sec^3 x \sec x \tan x\, dx$

$u = sec\, x$

$du = sec\, x \tan x\, dx$

$= \int u^3 du$

$= \dfrac{u^4}{4} + c$

$= \dfrac{(sec\, x)^4}{4} + c$

Q $\int csc^5 x \cot x\, dx = \int \csc^4 x \csc x \cot x\, dx$

$u = csc\, x$

$-du = csc\, x \cot x\, dx$

$= -\int u^4 du$

$= -\dfrac{u^5}{5} + c$

$= -\dfrac{(csc\, x)^5}{5} + c$

Q $\int sec^2 x \cdot tan\, x\, dx = \int \sec x \sec x \tan x\, dx$

طريقة أولى

$u = sec\, x$

$du = sec\, x\, tan\, x\, dx$

$= \int u du$

$= \frac{u^2}{2} + C$

$= \frac{(sec\, x)^2}{2} + C$

Q $\int sec^2 x \cdot tan\, x\, dx$

طريقة ثانية

$u = tan\, x$

$du = sec^2 x\, dx$

$= \int u du$

$= \frac{u^2}{2} + C$

$= \frac{(tan\, x)^2}{2} + C$

Q $\int csc^2 x \cdot \cot x\, dx = \int \csc\ x \csc x \cot x\, dx$

طريقة أولى

$u = csc\, x$

$-du = csc\, x\, cot\, x\, dx$

$= -\int u du$

$= -\frac{u^2}{2} + C$

$= -\frac{(csc\, x)^2}{2} + C$

Q $\int csc^2 x \cdot \cot x\, dx$

طريقة ثانية

$u = cot\, x$

$-du = csc^2 x\, dx$

$= -\int u du$

$= -\frac{u^2}{2} + C$

$= -\frac{(cot\, x)^2}{2} + C$

الدوال الأسية و اللوغاريتمية

اشتقاق الدوال الأسية

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

Q $f(x) = 3^x$ $\quad f'(x) = 3^x \cdot ln(3)$

Q $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$ $\quad f'(x) = 6^{\sqrt{x}} \cdot ln(6) \cdot (\sqrt{x})' = 6^{\sqrt{x}} \cdot ln(6) \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Q $f(x) = 10^{\sin x}$

$f'(x) = 10^{sin\, x} \cdot ln(10) \cdot (sin\, x)'$

$= 10^{sin\, x} \cdot ln(10) \cdot cos\, x$

Q $f(x) = 10^x$ $\quad f'(x) = 10^x \cdot ln\, 10 \cdot (x)' = 10^x \cdot ln\, 10$

Q $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ $\quad f'(x) = 3^{\frac{1}{x}} \cdot ln\, 3 \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)' = 3^{\frac{1}{x}} \cdot ln\, 3 \cdot \dfrac{-1}{x^2}$

Q $f(x) = 5^{\cos x}$ $\quad f'(x) = 5^{cos\, x} \cdot ln\, 5 \cdot (cos\, x)' = -5^{cos\, x} \cdot ln\, 5 \cdot sin\, x$

Q $h(x) = e^{\frac{2x}{3}}$ $\quad h'(x) = e^{\frac{2x}{3}} \cdot \left(\dfrac{2x}{3}\right)' = \dfrac{2}{3} e^{\frac{2x}{3}}$

Q $h(x) = e^{x^2+3x-1}$ $\quad h'(x) = e^{x^2+3x-1} \cdot (x^2 + 3x - 1)'$

$= (2x + 3)e^{x^2+3x-1}$

Q $h(x) = e^{\sec x}$ $\quad h'(x) = e^{sec\, x} \cdot (sec\, x)' = sec\, x\, tan\, x \cdot e^{sec\, x}$

Q $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ $\quad f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

Q $g(x) = e^{x^2-4}$ $\quad g'(x) = e^{x^2-4}(x^2 - 4)' = 2x \cdot e^{x^2-4}$

Q $h(x) = e^{\tan x}$ $\quad h'(x) = e^{tan\, x}(tan\, x)' = sec^2\, x \cdot e^{tan\, x}$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

Q $f(x) = \ln x^2$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

Q $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$$g'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{x}{1} = \frac{-1}{x}$$

Q $h(x) = \ln\sqrt{x}$

$$h'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{1}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

Q $k(x) = \ln(\cos x)$

$$k'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

Q $f(x) = \ln(2x + x^3)$

$$f'(x) = \frac{2 + 3x^2}{(2x + x^3)}$$

Q $g(x) = \ln\frac{1}{2x+1}$

$$g(x) = \ln 1 - \ln(2x+1) = -\ln(2x+1)$$

$$g'(x) = -\frac{2}{2x+1}$$

Q $h(x) = \ln\left(1 + \sqrt{3}x\right)$

$$h'(x) = \frac{\sqrt{3}}{\left(1 + \sqrt{3}x\right)}$$

Q $h(x) = \ln(\sin x)$

$$h'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

تكامل بعض الدوال الأسية و اللوغاريتمية

التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
$\int \mathbf{e}^x\, \mathbf{d}x = \mathbf{e}^x + C$	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$
$\int u' \boldsymbol{e}^u\, \boldsymbol{d}x = \boldsymbol{e}^u + C$	$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} = u' e^u$
$\int \frac{1}{x} \boldsymbol{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{d}{dx} \ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$
$\int \frac{u'}{u} \mathbf{d}x = \ln\lvert u\rvert + C$	$\frac{d}{dx} \ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$

ملاحظة

$$\int \frac{g'(x)\, \boldsymbol{d}x}{g(x)} = \ln\lvert g(x)\rvert + C$$

Q $\int 2e^x\, dx = 2e^x + C$

Q $\int e^{3x}\, dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$

Q $\int 2x \cdot e^{x^2+3}\, dx$

$u = x^2 + 3$
$du = 2x\, dx$

$= \int e^u du$
$= e^u + C$
$= e^{x^2+3} + C$

Q $\int (2x-1)e^{x^2-x+3}\, dx$

$u = x^2 - x + 3$
$du = (2x-1)dx$

$= \int e^u du$
$= e^u + C$
$= e^{x^2-x+3} + C$

Q $\int \frac{-5}{3x-2}\,dx$

$u = 3x - 2$
$du = 3\,dx$
$\frac{du}{3} = dx$

$= \int \frac{-5}{u}\frac{du}{3}$
$= -\frac{5}{3}\int \frac{du}{u}$
$= -\frac{5}{3} ln|u| + C$
$= -\frac{-5}{3} ln|3x-2| + C$

Q $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}\,dt$

$u = t^3 - 3t^2 + 8$
$du = (3t^2 - 6t)dt$

$= \int \frac{du}{u}$
$= ln|u| + C$
$= ln|t^3 - 3t^2 + 8| + C$

Q $\int \frac{3}{2x+5}\,dx$

$u = 2x + 5$
$du = 2\,dx$
$\frac{du}{2} = dx$

$= \int \frac{3}{u}\frac{du}{2}$
$= \frac{3}{2}\int \frac{du}{u}$
$= \frac{3}{2} ln|u| + C$
$= \frac{3}{2} ln|2x+5| + C$

Q $\int \frac{x^2-5x+6}{x}\,dx$

$= \int \left(\frac{x^2}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{6}{x}\right) dx$
$= \int \left(x - 5 + \frac{6}{x}\right) dx$
$= \frac{x^2}{2} - 5x + 6\,ln|x| + C$

Q $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\,dx$

$u = x^2 + 3x + 7$
$du = (2x+3)dx$

$= \int \frac{du}{u}$
$= ln|u| + C$
$= ln|x^2 + 3x + 7| + C$

Q $\int \frac{x^3+4}{x}\,dx$

$= \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{4}{x}\right) dx$
$= \int \left(x^2 + \frac{4}{x}\right) dx$
$= \frac{x^3}{3} + 4\,ln|x| + C$

س أوجد $\int tan x\, dx$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\, dx$

$-du = \sin x\, dx$

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + C$$

$$= \ln|(\cos x)^{-1}| + c = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$$

$$= \ln|\sec x| + C$$

ملغى

س أوجد $\int cot x\, dx$

$u = \sin x$

$du = \cos x\, dx$

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u| + C$$

$$= \ln|\sin x| + C$$

تـــدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية

التكامل بالتجزيء

تذكّر

$(a)' = 0$ | $\int a\, dx = ax + C$

$(x^n)' = n\, x^{n-1}$ | $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \ : n \neq -1$

$(\sin x)' = \cos x$ | $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$(\sin(ax))' = \text{a} \cos((ax))$ | $\int \sin(ax)\, dx = -\dfrac{\cos(ax)}{a} + C$

$(\cos x)' = -\sin x$ | $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$(\cos(ax))' = -\text{a} \sin((ax))$ | $\int \cos(ax)\, dx = \dfrac{\sin(ax)}{a} + C$

$(\tan x)' = \sec^2 x$ | $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

$(cot\, x)' = -\csc^2 x$ | $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

$\int cot\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$

$$\int tan\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$
$$= \ln|\sec x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad (e^x)' = e^x$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \qquad (e^{ax})' = ae^{ax}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C \qquad (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\int \frac{a}{bx+c} dx = \frac{a}{b}\ln|bx+c| + C$$

التكامل بالتجزيء $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

أوجد:

Q $\int x \sin x \, dx$

$$I = \int x \sin x \, dx$$

$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

Q $\int x \cos x \, dx$

$$I = \int x \cos x \, dx$$

$u = x \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$= x\sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

Q $\int xe^x\,dx$

$u = x \qquad dv = e^x dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$$I = \int x\,e^x\,dx$$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$= x\,e^x - \int e^x dx$$

$$= x\,e^x - e^x + c$$

$$= e^x(x-1) + c$$

Q $\int 3xe^{2x+1}\,dx$

$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}\,dx$

$du = 3dx \qquad v = \dfrac{e^{2x+1}}{2}$

$$I = \int 3x\,e^{2x+1}\,dx$$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$= 3x \cdot \frac{e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2} \cdot 3dx$$

$$= \frac{3x\,e^{2x+1}}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{2x+1}}{2} + C$$

$$= \frac{3x\,e^{2x+1}}{2} - \frac{3e^{2x+1}}{4} + C$$

Q $\int (x-3)e^{x-3}\,dx$

$$I = \int (x-3)e^{x-3}dx$$

$u = x-3 \qquad dv = e^{x-3}dx$

$du = dx \qquad v = e^{x-3}$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$= (x-3)\cdot e^{x-3} - \int e^{x-3}\,dx$$

$$= (x-3)\cdot e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

Q $\int 4xe^{-5x}\,dx$

$$I = \int 4x\,e^{-5x}dx$$

$u = 4x \qquad dv = e^{-5x}dx$

$du = 4dx \qquad v = \dfrac{e^{-5x}}{-5}$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$= 4x\cdot\frac{e^{-5x}}{-5} - \int \frac{e^{-5x}}{-5}4\cdot dx$$

$$= \frac{4x\,e^{-5x}}{-5} + \frac{4}{5}\int e^{-5x}\,dx$$

$$= \frac{4x\,e^{-5x}}{-5} - \frac{4e^{-5x}}{25} + C$$

Q $\int \ln x \, dx$

$$I = \int \ln x \, dx$$

$$\boldsymbol{u} = \ln x \qquad \boldsymbol{dv} = dx$$

$$\boldsymbol{du} = \frac{1}{x} dx \qquad \boldsymbol{v} = x$$

$$I = uv - \int v \, du$$

$$= x \ln x - \int x \, \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Q $\int x \ln x \, dx$

$$I = \int x \ln x \, dx$$

$$\boldsymbol{u} = \ln x \qquad \boldsymbol{dv} = x \, dx$$

$$\boldsymbol{du} = \frac{1}{x} dx \qquad \boldsymbol{v} = \frac{x^2}{2}$$

$$I = uv - \int v \, du$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

تذكّر: $\int \frac{a}{bx+c}\,dx = \frac{a}{b}\ln|bx+c| + C \quad : a, b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}$

Q $\int \ln(x+1)\,dx$

$$I = \int \ln(x+1)dx$$

$u = \ln(x+1) \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1}dx \qquad v = x$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$= x\ln(x+1) - \int x \cdot \frac{1}{x+1}dx$$

$$= x\ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}dx$$

$$= x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= x\ln(x+1) - (x - \ln|x+1|) + C$$

$$= x\ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C$$

ملغى

Q $\int \ln(2x-1)\,dx$

$$I = \int \ln(2x-1)dx$$

$u = \ln(2x-1) \qquad dv = dx$

$du = \frac{2}{2x-1}dx \qquad v = x$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$= x\ln(2x-1) - \int x \cdot \frac{2}{2x-1}dx$$

$$= x\ln(2x-1) - \int \frac{2x-1+1}{2x-1}dx$$

$$= x\ln(2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right)dx$$

$$= x\ln(2x-1) - \left(x + \frac{1}{2}\ln|2x-1|\right) + C$$

$$= x\ln(2x-1) - x - \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$$

Q $\int (x+1)\ln(x+1)\,dx$

$$u = \ln(x+1) \qquad dv = (x+1)dx$$

$$du = \frac{1}{x+1}dx \qquad v = \frac{(x+1)^2}{2}$$

$$I = \int (x+1)\ln(x+1)dx$$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2}\ln(x+1) - \int \frac{(x+1)^2}{2}\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\frac{(x+1)^2}{2} + C$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2}\ln(x+1) - \frac{(x+1)^2}{4} + C$$

Q $\int (2x+1)\ln(x+1)\,dx$

$$I = \int (2x+1)\ln(x+1)dx \qquad u = \ln(x+1) \qquad dv = (2x+1)dx$$

ملغى

$$du = \frac{1}{x+1}dx \qquad v = x^2 + x$$

$$I = uv - \int v\,du$$

$$= x(x+1)\ln(x+1) - \int (x^2+x)\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= x(x+1)\ln(x+1) - \int \frac{x^2+x}{x+1}dx$$

$$= x(x+1)\ln(x+1) - \int \frac{x(x+1)}{x+1}dx$$

$$= x(x+1)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + C$$

Q $\int x^2 \cos x \, dx$

$$I = \int x^2 \cos x \, dx$$

$\boldsymbol{u} =\ x^2 \qquad \boldsymbol{dv} =\ \cos x \ dx$

$\boldsymbol{du} =\ 2x\,dx \qquad \boldsymbol{v} =\ \sin x$

$$I = uv - \int v \, du$$

$$= x^2 \sin x - \boxed{\int 2x \sin x \ dx}$$

$$I_1 = \int 2x \sin x \, dx$$

$\boldsymbol{u} =\ 2x \qquad \boldsymbol{dv} =\ \sin x \ dx$

$\boldsymbol{du} =\ 2\,dx \qquad \boldsymbol{v} =\ -\cos x$

$$I_1 = uv - \int v \, du$$

$$= -2x \cos x - \int -2 \cos x \, dx$$

$$= -2x \cos x + 2 \sin x$$

$$\therefore I = x^2 \sin x - (-2x \cos x + 2 \sin x) + C$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

ملغى

Q $\int x^2 \sin x \, dx$

$$I = \int x^2 \sin x \, dx$$

$u = x^2$ $\quad$ $dv = \sin x \, dx$

$du = 2x \, dx$ $\quad$ $v = -\cos x$

$$I = uv - \int v \, du$$

$$= -x^2 \cos x - \int -2x \cos x \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + \boxed{\int 2x \cos x \, dx}$$

$$I_1 = \int 2x \cos x \, dx$$

$u = 2x$ $\quad$ $dv = \cos x \, dx$

$du = 2 \, dx$ $\quad$ $v = \sin x$

$$I_1 = uv - \int v \, du$$

$$= 2x \sin x - \int 2 \sin x \, dx$$

$$= 2x \sin x + 2 \cos x$$

$$\therefore I = -x^2 \cos x + (2x \sin x + 2 \cos x) + C$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

ملغى

Q $\int x^2 e^x \, dx$

$$I = \int x^2 e^x dx$$

$u = x^2 \qquad dv = e^x dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = e^x$

$$I = uv - \int v\, du$$

$$= x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx$$

$$I_1 = \int 2xe^x \, dx$$

$u = 2x \qquad dv = e^x dx$

$du = 2\, dx \qquad v = e^x$

$$I_1 = uv - \int v\, du$$

$$= 2xe^x - \int 2e^x dx$$

$$= 2xe^x - 2e^x$$

$$\therefore I = x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x) + C$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

ملغى

Q $\int x^2 e^{x+2} \, dx$

$$I = \int x^2 e^{x+2} dx$$

$u = x^2 \qquad dv = e^{x+2} dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = e^{x+2}$

$$I = uv - \int v\, du$$

$$= x^2 e^{x+2} - \int 2xe^{x+2} \, dx$$

$$I_1 = \int 2xe^{x+2} \, dx$$

$u = 2x \qquad dv = e^{x+2} dx$

$du = 2\, dx \qquad v = e^{x+2}$

$$I_1 = uv - \int v\, du$$

$$= 2xe^{x+2} - \int 2e^{x+2} dx$$

$$= 2xe^{x+2} - 2e^{x+2}$$

$$\therefore I = x^2 e^{x+2} - (2xe^{x+2} - 2e^{x+2}) + C$$

$$= x^2 e^{x+2} - 2xe^{x+2} + 2e^{x+2} + C$$

Q $\int e^x \sin x \, dx$

$$I = \int e^x \sin x \; dx$$

$u = e^x$ $\quad$ $dv = \sin x \, dx$

$du = e^x \, dx$ $\quad$ $v = -\cos x$

$$I = uv - \int v \, du$$

$$= -e^x \cos x - \int -e^x \cos x \; dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \; dx$$

$$I_1 = \int e^x \cos x \; dx$$

$u = e^x$ $\quad$ $dv = \cos x \, dx$

$du = e^x \, dx$ $\quad$ $v = \sin x$

$$I_1 = uv - \int v \, du$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$= e^x \sin x - I$$

ملغى

$$\therefore I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$I = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$$

Q $\int e^x \cos x \, dx$

$$I = \int e^x \cos x \ dx$$

$u = e^x$ $\qquad dv = \cos x \, dx$

$du = e^x \, dx$ $\qquad v = \sin x$

$$I = uv - \int v \, du$$

$$= e^x \sin x - \boxed{\int e^x \sin x \ dx}$$

$$I_1 = \int e^x \sin x \ dx$$

$u = e^x$ $\qquad dv = \sin x \, dx$

$du = e^x \, dx$ $\qquad v = -\cos x$

ملغى

$$I_1 = uv - \int v \, du$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

$$= -e^x \cos x + I$$

$$\therefore I = e^x \sin x - (-e^x \cos x + I)$$

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I$$

$$I = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Q **لتكن الدالة f :** $f(x)=\frac{5x-1}{x^2-2x-15}$ **فأوجد :** الكسور الجزئية , $\int f(x)\,dx$

$$x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$$
$$\therefore f(x)=\frac{5x-1}{(x-5)(x+3)}=\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x+3)}$$

$$5x-1=A(x+3)+B(x-5)$$
$$x=5\to 5(5)-1=A(5+3)\to A=3$$
$$x=-3\to 5(-3)-1=B(-3-5)\to B=2$$
$$f(x)=\frac{3}{(x-5)}+\frac{2}{(x+3)}$$
$$\therefore \int f(x)dx=\int\left(\frac{3}{(x-5)}+\frac{2}{(x+3)}\right)dx=3\ln|x-5|+2\ln|x+3|+c$$

Q **لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4x+3}$ فأوجد :** الكسور الجزئية , $\int f(x)\,dx$

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

$$f(x)=\frac{2x-1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$$

$$2x-1=A(x-3)+B(x-1)$$

$$x=1\rightarrow 2(1)-1=A(1-3)\rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

$$x=3\rightarrow 2(3)-1=B(3-1)\rightarrow B=\frac{5}{2}$$

$$f(x)=\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{5}{2}}{x-3}$$

$$\therefore \int f(x)\,dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{5}{2}}{x-3}\right)dx=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+c$$

Q $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2) = x(2x-1)(x+2)$$

$$x=0 \qquad x=\frac{1}{2} \qquad x=-2$$

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)$$

$$x=0 \to 0^2+2(0)-1 = A(0-1)(0+2) \to A = \frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{2} \to \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = B\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+2\right) \to B = \frac{1}{5}$$

$$x=-2 \to (-2)^2+2(-2)-1 = C(-2)(2(-2)-1) \to C = -\frac{1}{10}$$

$$\therefore \int f(x)\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{10}}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{\frac{1}{5}}{2}\ln|2x-1| + \frac{-1}{10}\ln|x+2| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + c$$

Q $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

$$2x^3-5x^2-3x = x(2x^2-5x-3) = x(2x+1)(x-3)$$

$$x=0, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=3$$

$$f(x)=\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{x-3}$$

$$x^2-2 = A(2x+1)(x-3)+B\,x(x-3)+C\,x(2x+1)$$

$$x=0 \;\rightarrow\; -2=A(0+1)(0-3) \;\rightarrow\; A=\frac{2}{3}$$

$$x=-\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \left(-\frac{1}{2}\right)^2-2=B\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right) \;\rightarrow\; B=-1$$

$$x=3 \;\rightarrow\; 3^2-2=C(3)(6+1) \;\rightarrow\; C=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \int f(x)\,dx=\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x}+\frac{-1}{2x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{-1}{2}\ln|2x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-3|+C$$

Q $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x} dx$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$$

$$x = 0, \qquad x = 2$$

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{c}{(x-2)}$$

$$-x^2 + 2x + 4 = A(x-2)^2 + Bx + Cx(x-2)$$

$$x = 0 \;\rightarrow\; 4 = A(0-2)^2 \;\rightarrow\; A = 1$$

$$x = 2 \;\rightarrow\; -(2)^2 + 4 + 4 = B(2) \;\rightarrow\; B = 2$$

$$x = 1 \;\rightarrow\; -1 + 2 + 4 = 1(1-2)^2 + 2(1) + C(1)(1-2) \;\rightarrow\; C = -2$$

$$\therefore \int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{-2}{(x-2)}\right) dx$$

$$= \ln|x| + \frac{-2}{x-2} - 2\ln|x-2| + C$$

Q $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$$

$$f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1)$$

$$x = 0 \Rightarrow \quad 1 = A(0-1)^2 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow \quad 4(1)^2 - 4(1) + 1 = B(1) \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow \quad 4(2)^2 - 4(2) + 1 = 1(2-1)^2 + 1(2) + C(2)(2-1)$$

$$\Rightarrow C = 3$$

$$I = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)}\right) dx$$

$$= \ln|x| + \frac{-1}{(x-1)} + 3\ln|x-1| + c$$

Q $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}dx$

$$x^3+2x^2=x^2(x+2)$$

$$f(x)=\frac{3+x+x^2}{x^2(x+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{c}{(x+2)}$$

$$3+x+x^2=A(x+2)+Bx(x+2)+Cx^2$$

$$x=0\Rightarrow\ 3=A(0+2)\quad\Rightarrow\quad A=\frac{3}{2}$$

$$x=-2\Rightarrow 3+(-2)+(-2)^4=C(-2)^2\quad\Rightarrow\quad C=\frac{5}{4}$$

$$x=1\Rightarrow 3+1+1^2=\frac{3}{2}(1+2)+B(1)(1+2)+\frac{5}{4}(1)^2\quad\Rightarrow B=-\frac{1}{4}$$

$$I=\int\left(\frac{\frac{3}{2}}{x^2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x}+\frac{\frac{5}{4}}{(x+2)}\right)dx$$

$$=\frac{-\frac{3}{2}}{x}+\frac{-1}{4}\ln|x|+\frac{5}{4}\ln|x+2|+c$$

Q $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}dx$

$$x^3+4x^2=x^2(x+4)$$

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2(x+4)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{(x+4)}$$

$$x^2+1=A(x+4)+Bx(x+4)+Cx^2$$

$$x=0 \Rightarrow\ 1=A(0+4)\quad \Rightarrow\quad A=\frac{1}{4}$$

$$x=-4\ \Rightarrow (-4)^2+1=C(-4)^2\quad \Rightarrow\quad C=\frac{17}{16}$$

$$x=1 \Rightarrow 1^2+1=\frac{1}{4}(1+4)+B(1)(1+4)+\frac{17}{16}(1)^2\quad \Rightarrow\quad B=\frac{-1}{16}$$

$$I=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x^2}+\frac{-\frac{1}{16}}{x}+\frac{\frac{17}{16}}{(x+4)}\right)dx$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}}{x}+\frac{-1}{16}\ln|x|+\frac{17}{16}\ln|x+4|+C$$

Q $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2-4x+4 & x^2-3x+7 \\ & -x^2 \pm 4x \mp 4 \\ \hline & (x+3) \end{array}$$

$$f(x)=1+\frac{x+3}{x^2-4x+4}$$

$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$

$$\frac{x+3}{x^2-4x+4}=\frac{x+3}{(x-2)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}$$

ملغى

$$x+3=A(x-2)+B$$

$$x=2 \quad \rightarrow \quad 2+3=B \quad \rightarrow \quad B=5$$

$$x=0 \quad \rightarrow \quad 3=A(0-2)+5 \quad \rightarrow \quad A=1$$

$$f(x)=1+\frac{1}{(x-2)}+\frac{5}{(x-2)^2}$$

$$\int f(x)dx=\int\left(1+\frac{1}{(x-2)}+\frac{5}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$=x+\ln|x-2|+\frac{-5}{x-2}+C$$

Q $\int \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}dx$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^3-2x^2 & x^3-2x^2-4 \\ & -x^3 \pm 2x^2 \\ \hline & -4 \end{array}$$

$$f(x) = 1 + \frac{-4}{x^3-2x^2}$$

$$\frac{-4}{x^3-2x^2} = \frac{-4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2}$$

$$-4 = A(x-2) + Bx(x-2) + Cx^2$$

ملغى

$$x = 0 \rightarrow -4 = A(-2) \rightarrow A = 2$$

$$x = 2 \rightarrow -4 = C(2)^2 \rightarrow C = -1$$

$$x = 1 \rightarrow -4 = 2(1-2) + B(1)(1-2) + (-1)(1)^2 \rightarrow B = 1$$

$$\therefore f(x) = 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-2}$$

$$\int f(x)dx = \int \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-2}\right)dx$$

$$= x + \frac{-2}{x} + \ln|x| - \ln|x-2| + C$$

Q $\int \frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & 2x+3 \\ \hline x^2-6x+8 & 2x^3-9x^2 \qquad +25 \\ & -2x^3 \pm 12x^2 \mp 16x \\ \hline & 3x^2-16x+25 \\ & -3x^2 \pm 18x \mp 24 \\ \hline & 2x+1 \end{array}$$

$$f(x) = 2x+3+\frac{2x+1}{x^2-6x+8}$$

$$x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$$

$$\frac{2x+1}{x^2-6x+8}=\frac{2x+1}{(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}$$

$$2x+1=A(x-4)+B(x-2)$$

ملغى

$$x=2 \;\rightarrow\; 5=A(2-4) \;\rightarrow\; A=\frac{-5}{2}$$

$$x=4 \;\rightarrow\; 9=B(4-2) \;\rightarrow\; B=\frac{9}{2}$$

$$f(x)=2x+3+\frac{-\frac{5}{2}}{x-2}+\frac{\frac{9}{2}}{x-4}$$

$$\int f(x)dx=\int\left(2x+3+\frac{-\frac{5}{2}}{x-2}+\frac{\frac{9}{2}}{x-4}\right)dx$$

$$=\frac{2x^2}{2}+3x-\frac{5}{2}\ln|x-2|+\frac{9}{2}\ln|x-4|+C$$

$$=x^2+3x-\frac{5}{2}\ln|x-2|+\frac{9}{2}\ln|x-4|+C$$

Q $\int \frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x^2-3x+2 & x^3 \quad -7x+9 \\ & -x^3 \pm 3x^2 \mp 2x \\ \hline & 3x^2-9x+9 \\ & -3x^2 \pm 9x \mp 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$f(x) = x+3+\frac{3}{x^2-3x+2}$$

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

$$\frac{3}{x^2-3x+2} = \frac{3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

ملغى

$$3 = A(x-2)+B(x-1)$$

$$x=1 \quad \rightarrow \quad 3 = A(1-2) \quad \rightarrow \quad A=-3$$

$$x=2 \quad \rightarrow \quad 3 = B(2-1) \quad \rightarrow \quad B=3$$

$$f(x) = x+3+\frac{-3}{(x-1)}+\frac{3}{(x-2)}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \left(x+3+\frac{-3}{(x-1)}+\frac{3}{(x-2)}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}+3x+(-3)\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$$

$$= \frac{x^2}{2}+3x-3\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$$

التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Q $\int_{-2}^{3}(3x^2 - x + 4)\,dx$

$$\int_{-2}^{3}(3x^2 - x + 4)dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{3}$$

$$= \left((3)^3 - \frac{(3)^2}{2} + 4(3)\right) - \left((-2)^3 - \frac{(-2)^2}{2} + 4(-2)\right)$$

$$= 52.5$$

Q $\int_{2}^{7}(x^3 - 2x^2 + 2)\,dx$

$$\int_{2}^{7}(x^3 - 2x^2 + 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x\right]_{2}^{7}$$

$$= \left(\frac{(7)^4}{4} - \frac{2(7)^3}{3} + 2(7)\right) - \left(\frac{(2)^4}{4} - \frac{2(2)^3}{3} + 2(2)\right)$$

$$= \frac{4595}{12}$$

خواص التكامل المحدد

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I , $k \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in I$ فإن :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ملاحظة :

لاحظ في خاصية $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$ **أنه : إذا كان** $k=1$ **فإن :** $\int_a^b dx = b-a$

Q $\int_{-8}^{-4} dx$

$$= \int_{-8}^{-4} dx = [x]_{-8}^{-4} = (-4)-(-8) = 4$$

Q $\int_2^{-1} \left(\sqrt{x+1} - 3\right) dx$

$$-\int_{-1}^{2}\left((x+1)^{\frac{1}{2}} - 3\right) dx = -\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 3x\right]_{-1}^{2}$$

$$= -\left(\left(\frac{2}{3}(2+1)^{\frac{3}{2}} - 3(2)\right) - \left(\frac{2}{3}(-1+1)^{\frac{3}{2}} - 3(-1)\right)\right) = 5.536$$

Q $\int_{1}^{2}\left(3e^{x}+\frac{e}{x}\right)dx$

$$\int_{1}^{2}\left(3e^{x}+\frac{e}{x}\right)dx=\left[3e^{x}+e\ln|x|\right]_{1}^{2}$$
$$=\left(3e^{2}+e\ln|2|\right)-\left(3e^{1}+e\ln|1|\right)$$
$$=3e^{2}+e\ln 2-3e$$
$$=15.9$$

Q $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\csc^{2}x\right)dx$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\csc^{2}x\right)dx=\left[\frac{1}{2}\frac{(-\cos 2x)}{2}--\cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

ملغى

$$=\left[\frac{-\cos 2x}{4}+\cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{-\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4}+\cot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\left(\frac{-\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4}+\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{-3}{4}$$

Q $\int_{2}^{-3}5\,dx$

$$\int_{2}^{-3}5dx=-5\int_{-3}^{2}dx=-5\big(2-(-3)\big)=-25$$

Q $\int_2^4 \frac{dx}{x-1}$

$$\int_2^4 \frac{dx}{x-1} = [\ln|x-1|]_2^4$$
$$= (\ln|4-1|) - (\ln|2-1|)$$
$$= \ln 3 - \ln 1$$
$$= \ln 3$$

Q $\int_{-2}^{3} |x|dx$

$$= \int_{-2}^{0} (-x)dx + \int_0^3 x\,dx = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$
$$= \left(\left(\frac{-0^2}{2}\right) - \left(\frac{-(-2)^2}{2}\right)\right) + \left(\left(\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right)\right)$$
$$= 6.5$$

$-\infty$ $\quad -x \quad$ x $\quad \infty$

$-2 \qquad 0 \qquad 3$

Q $\int_0^5 |x-3|dx$

$$= \int_0^3 (-x+3)dx + \int_3^5 (x-3)dx = \left[\frac{-x^2}{2} + 3x\right]_0^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^5$$
$$= \left(\left(\frac{-3^2}{2} + 3(3)\right) - (0)\right) + \left(\left(\frac{5^2}{2} - 3(5)\right) - \left(\frac{3^2}{2} - 3(3)\right)\right)$$
$$= 6.5$$

$-\infty$ $\quad -x+3 \quad$ $x-3$ $\quad \infty$

$0 \qquad 3 \qquad 5$

Q $\int_{-3}^{4} |2x-4|\, dx$

$$= \int_{-2}^{2} (-2x+4)dx + \int_{2}^{4} (2x-4)dx$$

$$= \left[\frac{-2x^2}{2} + 4x\right]_{-3}^{2} + \left[\frac{2x^2}{2} - 4x\right]_{2}^{4}$$

$$= \left(\left(-2^2 + 4(2)\right) - \left(-(-3)^2 + 4(-3)\right)\right.$$

$$\left. - \left(\left(4^2 - 4(4)\right) - \left(2^2 - 4(2)\right)\right)\right)$$

$$= 29$$

$-\infty$	$-2x+4$		$2x-4$	∞
	-3	2	4	

Q $\int_{1}^{3} |x+2|\, dx$

$$= \int_{1}^{3} (x+2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{1}^{3} = \left(\frac{3^2}{2} + 2(3)\right) - \left(\frac{1^2}{2} + 2(1)\right)$$

$$= 8$$

	$-x-2$		$x+2$	∞
	-2	1	3	

لتكن f دالة متصلة على $[a\,,b]$

إذا كانت : $f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in [a\,,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

إذا كانت : $f(x) \leq 0 \ \forall\ x \in [a\,,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

س دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (x^2 + x)\,dx \geq 0$

$f(x) = x^2 + x$ متصلة على $[3,5]$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = -1 \end{cases}$$

$-\infty$ $+$ -1 $-$ 0 $[\ 3$ $+$ $5\ ]$ ∞

$$f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$$

$$\because [3,5] \subseteq [0, \infty)$$

$$\therefore f(x) = x^2 + x \geq 0 \ \forall\ x \in [3,5]$$

ملغى

$$\therefore \int_3^5 (x^2 + x) \geq 0$$

س دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^0 (x^2 + x)\,dx \leq 0$

$f(x) = x^2 + x$ متصلة على $[-1,0]$

$$x^2 + x = x(x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = -1 \end{cases}$$

$-\infty$ $+$ -1 $-$ 0 $+$ ∞

$$f(x) \leq 0, \quad \forall\ x \in [-1,0]$$

$$\therefore \int_{-1}^0 (x^2 + x)\,dx \leq 0$$

لتكن الدالتين f,g متصلتين على $[a,b]$

و كانت : $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$:

س دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_1^3 (2x-3)\,dx \leq \int_1^3 (x^2+2)\,dx$

f, g متصلتان على $[1,3]$

$$f(x) - g(x) = (2x-3) - (x^2+2)$$

$$= 2x - 3 - x^2 - 2 = -x^2 + 2x - 5$$

$$-x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 2^2 - 4(-1)\cdot(-5) = -16$$

لا يوجد جذور حقيقية $-16 < 0$

إذاً $f(x) - g(x)$ وحيد الإشارة

بالتعويض في قيمة اختيارية نجد :

$$f(x) - g(x) \leq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) - g(x) \leq 0 \qquad \forall x \in [1,3]$$

ملغى

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [1,3]$$

$$\therefore \int_1^3 (2x-3)dx \leq \int_1^3 (x^2+2)dx$$

س دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx \ge \int_{-1}^{2}(x-1)\,dx$

f,g متصلتان على $[-1,2]$

$$f(x)-g(x)=(x^2+1)-(x-1)$$

$$=x^2+1-x+1=x^2-x+2$$

$$x^2-x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$=(-1)^2-4(1)\cdot(2)=-7$$

لا يوجد جذور حقيقية $\Delta<0$

إذاً $f(x)-g(x)$ وحيد الإشارة

بالتعويض في قيمة اختيارية نجد :

$$f(x)-g(x)\ge 0 \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

$$f(x)-g(x)\ge 0 \qquad \forall\, x\in[-1,2]$$

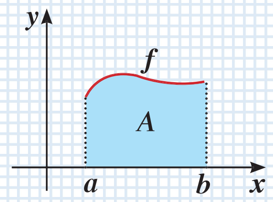
$$f(x)\ge g(x) \qquad \forall\, x\in[-1,2]$$

$$\therefore \int_{-1}^{2}(x^2+1)dx \ge \int_{-1}^{2}(x-1)dx$$

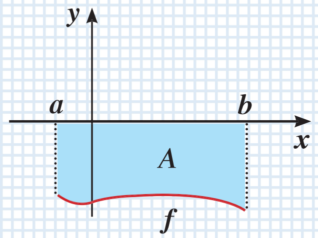
ملغى

التفسير البياني للتكامل المحدد

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ ،
A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات و المستقيمين $x = a , x = b$

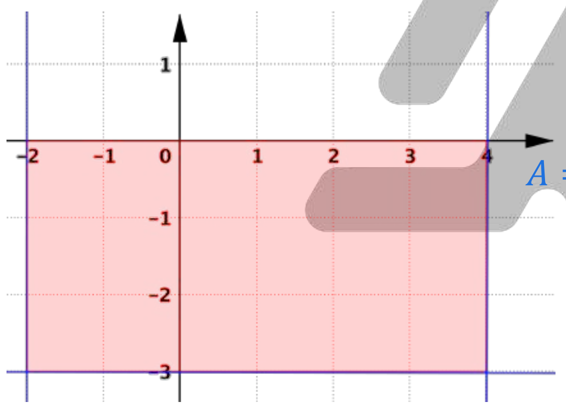


إذا كانت: $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$
فإن: $\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x = A$



إذا كانت: $f(x) \leq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$
فإن: $\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x = -A$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = -3$ ومحور السينات والمستقيمين $x = -2$, $x = 4$.

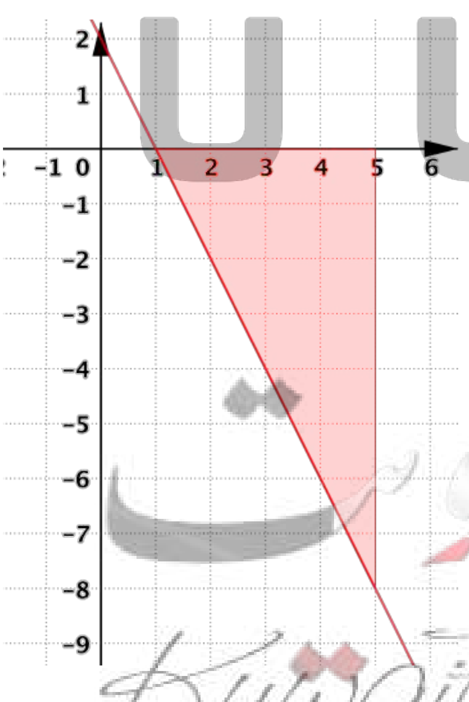


$\because f(x) \leq 0 \ \ \forall \ x \ \in [-2,4]$

$$A = -\int_{-2}^{4} f(x)dx = -\int_{-2}^{4} -3\,dx = [3x]_{-2}^{4}$$

$= 12 - (-6) = 18$ وحدة مربعة

س أوجد بيانياً قيمة التكامل: $\int_1^5 (2-2x)dx$



$f(x) = 2 - 2x$

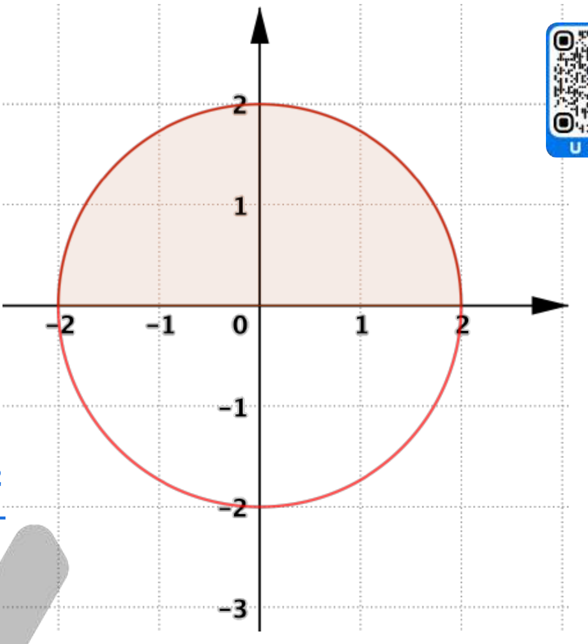
x	0	1
y	2	0

$A = \frac{1}{2} \times (4) \times (8) = 16$ وحدة مربعة

$\because f(x) \leq 0 \quad \forall \ x \ \in \ [1,5]$

$$\therefore \int_1^5 (2-2x)dx = -A = -16$$

Q $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$



$y = \sqrt{4-x^2}$

معادلة النصف العلوي للدائرة

$x^2 + y^2 = 4$

مركزها $(0,0)$

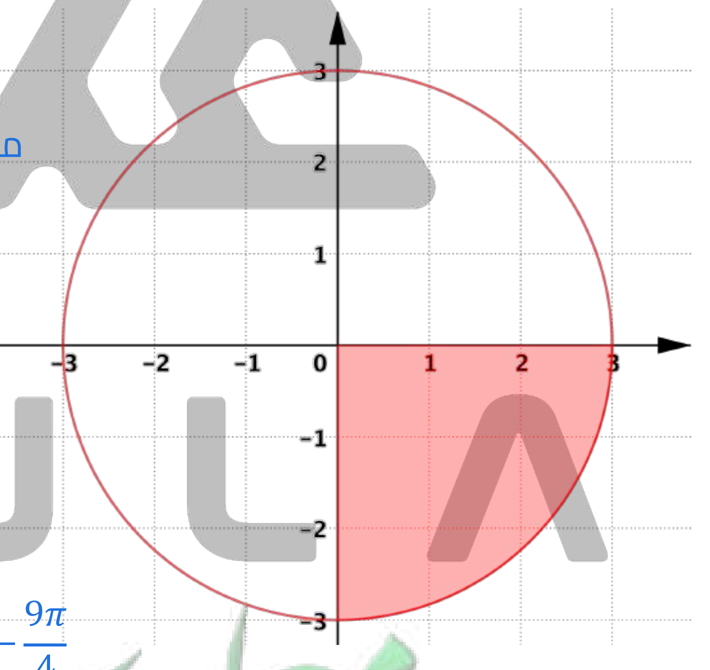
$r = \sqrt{4} = 2$

$A = \frac{\text{مساحة الدائرة}}{2} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 2^2}{2}$

$= 2\pi$ وحدة مربعة

$\therefore \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} dx = A = 2\pi$

Q $\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\, dx$



$y = -\sqrt{9-x^2}$

معادلة النصف السفلي للدائرة

$x^2 + y^2 = 9$

مركزها $(0,0)$

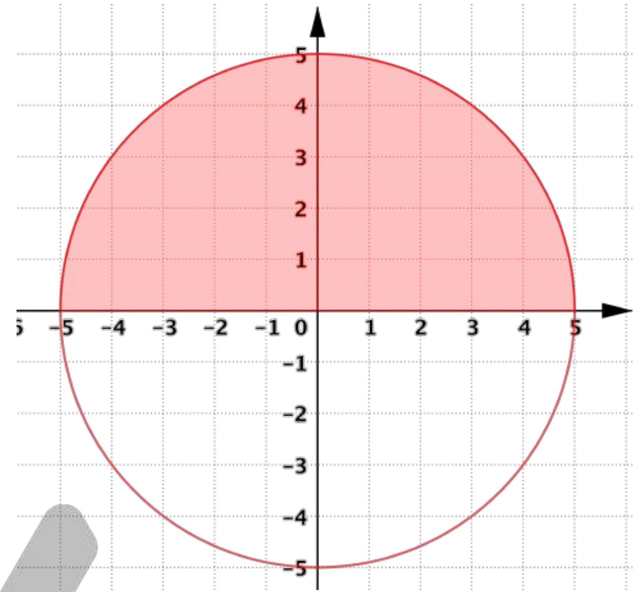
$r = \sqrt{9} = 3$

$A = \frac{\text{مساحة الدائرة}}{4} = \frac{\pi r^2}{4}$

$= \frac{\pi \times 3^2}{4} = \frac{9\pi}{4}$ وحدة مربعة

$\therefore \int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2} dx = -A = -\frac{9\pi}{4}$

Q $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$



$y = \sqrt{25 - x^2}$

معادلة النصف العلوي للدائرة

$x^2 + y^2 = 25$

مركزها $(0,0)$

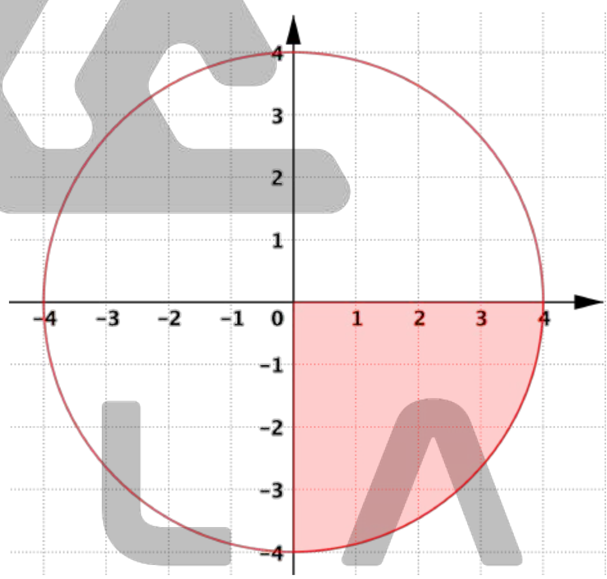
$r = \sqrt{25} = 5$

$A = \frac{\text{مساحة الدائرة}}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$

$= \frac{\pi \times 5^2}{2} = \frac{25\pi}{2}$ وحدة مربعة

$\therefore \int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2} dx = A = \frac{25\pi}{2}$

Q $\int_{0}^{4} -\sqrt{16 - x^2}\, dx$



$y = -\sqrt{16 - x^2}$

معادلة النصف السفلي للدائرة

$x^2 + y^2 = 16$

مركزها $(0,0)$

$r = \sqrt{16} = 4$

$A = \frac{\text{مساحة الدائرة}}{4} = \frac{\pi r^2}{4}$

$= \frac{\pi \times 4^2}{4} = 4\pi$ وحدة مربعة

$\therefore \int_{0}^{4} -\sqrt{16 - x^2}\, dx = -A = -4\pi$

Q $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x \, dx$

x	$u = \tan x$
$\frac{\pi}{4}$	$\tan\frac{\pi}{4} = 1$
0	$\tan 0 = 0$

$$= \int_0^1 u \, du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Q $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x \, dx$

$u = \sin 2x$

$du = 2\cos 2x \, dx$

$\frac{du}{2} = \cos 2x \, dx$

x	$u = \sin 2x$
$\frac{\pi}{3}$	$\sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u \, du =$ صفر

ملغى

Q $\int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)^2(x+1)dx$

$$u = x^2+2x-3$$
$$du = (2x+2)dx$$
$$du = 2(x+1)dx$$
$$\frac{du}{2} = (x+1)dx$$

x	$u = x^2+2x-3$
1	$u = 1^2+2(1)-3 = 0$
-1	$u = (-1)^2+2(-1)-3 = -4$

$$= \int_{-4}^{0} u^2 \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-4}^{0}$$
$$= \frac{1}{2}\left((0)-\left(\frac{(-4)^3}{3}\right)\right)$$
$$= \frac{32}{3}$$

Q $\int_{0}^{3} x\sqrt{x+1}dx$

$$u = x+1 \rightarrow u-1 = x$$
$$du = dx$$

x	$u = x+1$
3	4
0	1

$$= \int_{1}^{4}(u-1)\sqrt{u}\,du = \int_{1}^{4}\left(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)du$$
$$= \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{4}$$
$$= \left(\frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= \frac{116}{15}$$

ملغى

Q $\int_{-1}^{1}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right)dx$

$u = x^2 + 2x + 5$

$du = (2x+2)dx$

$= 2(x+1)dx$

$\frac{du}{2} = (x+1)dx$

$= \int_4^8 \sqrt{u}\cdot\frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int_4^8 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$

$= \frac{1}{3}\left(8^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right)$

$= 4.8758$

x	$u = x^2 + 2x + 5$
1	$u = 1^2 + 2(1) + 5 = 8$
-1	$u = (-1)^2 + (-2) + 5 = 4$

Q $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

$u = x - 1,$

$u + 1 = x$

$du = dx$

$\int_1^4 (u+1)\sqrt{u}\,du = \int_1^4 \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du$

$= \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$= \left(\frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right)$

$= \frac{256}{15} = 17.07$

x	$u = x - 1$
5	4
2	1

ملغى

Q $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\, dx$

$$I = \int x\, e^{-x}\, dx$$

$$\boldsymbol{u} = x \qquad \boldsymbol{dv} = e^{-x}\, dx$$

$$\boldsymbol{du} = dx \qquad \boldsymbol{v} = -e^{-x}$$

$$I = uv - \int v\, du$$

$$= -x\, e^{-x} - \int -e^{-x}\, dx$$

$$= -x\, e^{-x} + (-e^{-x}) + C = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$$\therefore \int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\, dx = [-x\, e^{-x} - e^{-x}]_{-2}^{0}$$

$$= \left(-(0)e^{-(0)} - e^{-(0)}\right)$$
$$- \left(-(-2)e^{-(-2)} - e^{-(-2)}\right) \approx -8.389$$

Q $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x\, dx$

$$I = \int x \sec^2 x\, dx$$

$$\boldsymbol{u} = x \qquad \boldsymbol{dv} = \sec^2 x\, dx$$

$$\boldsymbol{du} = dx \qquad \boldsymbol{v} = \tan x$$

$$= uv - \int v\, du$$

$$= x \tan x - \int \tan x\, dx$$

$$= x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= x \tan x + \ln|\cos x| + c$$

ملغى

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x\, dx = [x \tan x + \ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} \tan\frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|\right)$$
$$- (0 \tan(0) + \ln|\cos(0)|) \approx 0.44$$

Q $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

$$f(x)=\frac{2x+8}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$$

$$2x+8=A(x+3)+B(x+1)$$

$$x=-1 \ \rightarrow \ 2(-1)+8=A(-1+3) \ \rightarrow \ A=3$$

$$x=-3 \ \rightarrow \ 2(-3)+8=B(-3+1) \ \rightarrow \ B=-1$$

$$\therefore \int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx=\int_1^5\left(\frac{3}{(x+1)}+\frac{-1}{(x+3)}\right)dx$$

$$=\left[3\ln|x+1|-\ln|x+3|\right]_1^5$$

$$=(3\ln|6|-\ln|8|)-(3\ln|2|-\ln|4|)\approx 2.603$$

Q $\int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline x^2-x-6 & 3x^2 \qquad -17 \\ & -3x^2 \pm 3x \pm 18 \\ \hline & 3x+1 \end{array}$$

$$f(x)=3+\frac{3x+1}{x^2-x-6}$$

$$\frac{3x+1}{x^2-x-6}=\frac{3x+1}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$$

x^2-x-6
$=(x+2)(x-3)$
$x=-2$
$x=3$

ملغى

$$3x+1=A(x-3)+B(x+2)$$

$$x=-2 \rightarrow 3(-2)+1=A(-2-3) \rightarrow A=1$$

$$x=3 \rightarrow 3(3)+1=A(-3+2) \rightarrow B=2$$

$$\therefore \int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx=\int_4^7\left(3+\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-3}\right)dx$$

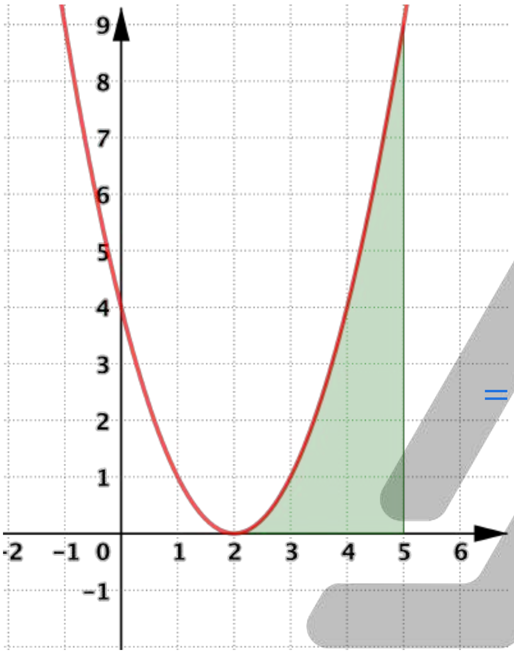
$$=\left[3x+\ln|x+2|+2\ln|x-3|\right]_4^7$$

$$=(21+\ln|9|+2\ln|4|)-(12+\ln|6|+2\ln|1|)\approx 12.178$$

المساحات في المستوى

أولاً: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة $[a ,b]$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 4 - 4x$
و محور السينات و المستقيمين $x = 2 ,x = 5$



$\because f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [2,5]$

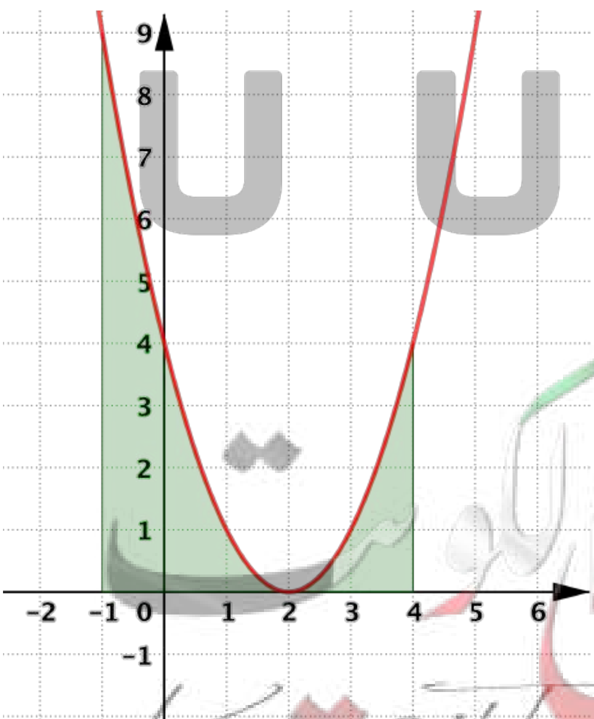
$$A = \int_2^5 f(x)\, dx = \int_2^5 (x^2 + 4 - 4x)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{4x^2}{2}\right]_2^5$$

$$= \left(\frac{5^3}{3} + 4(5) - 2(5)^2\right) - \left(\frac{2^3}{3} + 4(2) - 2(2)^2\right)$$

$= 9$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 4 - 4x$
و محور السينات و المستقيمين $x = -1 ,x = 4$



$\because f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [-1,4]$

$$A = \int_{-1}^4 (x^2 + 4 - 4x)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{4x^2}{2}\right]_{-1}^4$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} + 4(4) - 2(4)^2\right)$$

$$- \left(\frac{(-1)^3}{3} + 4(-1) - 2(-1)^2\right)$$

$= \frac{35}{3}$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ و محور السينات

نقط التقاطع مع محور السينات

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x = 0$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow \quad x = 3$$

دراسة الإشارة

$-\infty$ $+$ 0 $-$ 3 $+$ ∞

$$\because f(x) \le 0 \quad \forall\, x \in [0,3]$$

$$\therefore A = -\int_0^3 f(x)dx$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 3x)dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= -\left(\left(\frac{3^3}{3} - \frac{3(3)^2}{2}\right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{3(0)^2}{2}\right)\right)$$

$= \frac{9}{2}$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ و محور السينات.

نقط التقاطع مع محور السينات

$$f(x) = x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$(x+1)(x+4) = 0$$

$$x = -1, \qquad x = -4$$

دراسة الإشارة

$-\infty$ $+$ -4 $-$ -1 $+$ ∞

$$\because f(x) \le 0 \quad \forall\, x \in [-4,-1]$$

$$\therefore A = -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{-1}$$

$$= -\left(\left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{5(-1)^2}{2} + 4(-1)\right) - \left(\frac{(-4)^3}{3} + \frac{5(-4)^2}{2} + 4(-4)\right)\right)$$

$= \frac{9}{2}$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة المبينة. $f(x) = x^3 - 4x\ ,\left[-\mathbf{1}\ ,\frac{\mathbf{3}}{2}\right]$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$$

$$= x(x-2)(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \in \left(-1, \frac{3}{2}\right) \\ x = 2 \notin \left(-1, \frac{3}{2}\right) \\ x = -2 \notin \left(-1, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

$$\therefore A = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 4x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} (x^3 - 4x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$= \left|(0) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - 2(-1)^2\right)\right| + \left|\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{4} - 2\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - (0)\right|$$

$$= \left|\frac{7}{4}\right| + \left|-\frac{207}{64}\right| = \frac{319}{64}$$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة المبينة. $[-2\,,1]$ ، $f(x) = x^3 - 9x$

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^3 - 9x = x(x^2 - 9)$$

$$= x(x-3)(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\in\; (-2,1) \\ x = 3 \;\notin\; (-2,1) \\ x = -3 \;\notin\; (-2,1) \end{cases}$$

$$\therefore A = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 9x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - 9x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|(0) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{9(-2)^2}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{9}{2}\right) - (0)\right|$$

$$= |14| + \left|-\frac{17}{4}\right| = \frac{73}{4}$$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة المبينة. $f(x) = \sin x\,,\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin x = 0, \qquad x = 0 \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A = \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \sin x\, dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right|$$

$$= \left|[-\cos x]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\right| + \left|[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|(-\cos 0) - \left(-\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)\right| - \left|\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0)\right|$$

$= |-1| + |1| = 2$ وحدة مربعة

س $f(x) = \cos x\,,[0\,,\pi]$

$$f(x) = 0, \qquad \cos x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{2} \in (0,\pi)$$

$$A = \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\ dx\right|$$

ملغى

$$= \left|[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$$

$$= \left|\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - (\sin 0)\right| + \left|(\sin \pi) - \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$= |1| + |-1| = 2$ وحدة مربعة

ثانياً: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a,b]$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2}$
و منحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ و المستقيمين $x = 0, x = 1$
علماً بأن: $\forall x \in [0,1], \quad f(x) > g(x)$

$$\because f(x) > g(x), \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$\therefore A = \int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_0^1 (x^2+2) - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + 2 - x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} + 2 - \frac{3}{4}\right) - (0) = \frac{19}{12}$$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 3}$
و منحنى الدالة g : $g(x) = x^2 + 1$ و المستقيمين $x = -1, x = 1$
علماً بأن: $\forall x \in [-1,1], \quad f(x) > g(x)$

$$\because f(x) > g(x), \qquad \forall x \in [-1,1]$$

$$\therefore A = \int_{-1}^1 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-1}^1 (x^2+3) - (x^2+1)dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^2 + 3 - x^2 - 1)dx = \int_{-1}^1 2\,dx$$

$$= [2x]_{-1}^1 = (2) - (-2) = 4$$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ و
منحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$ و المستقيمين $x = 3$,$x = 0$
علماً بأن المنحنيين للدالتين g, f غير متقاطعين.

$$A = \left|\int_0^3 (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_0^3 (e^x - (-1 - x^2))dx\right|$$

$$= \left|\int_0^3 (e^x + 1 + x^2)dx\right| = \left|\left[e^x + x + \frac{x^3}{3}\right]_0^3\right|$$

$$= \left|\left(e^3 + 3 + \frac{3^3}{3}\right) - \left(e^0 + 0 + \frac{0^3}{3}\right)\right| = 31.09 \text{ وحدة مربعة}$$

$$e^3 + 11$$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $\boldsymbol{f(x)} = x^2 + \boldsymbol{1}$
و منحنى الدالة g : $g(x) = -x^2 - 3$ و المستقيمين $x = 1$,$x = -1$
علماً بأن المنحنيين للدالتين g, f غير متقاطعين.

$$A = \left|\int_{-1}^1 (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_{-1}^1 ((x^2 + 1) - (-x^2 - 3))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^1 (x^2 + 1 + x^2 + 3)dx\right| = \left|\int_{-1}^1 (2x^2 + 4)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^1\right|$$

$$= \left|\left(\frac{2(1)^3}{3} + 4(1)\right) - \left(\frac{2(-1)^3}{3} + 4(-1)\right)\right| = \frac{28}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين :

$$y_1 = 2 - x^2 \quad , y_2 = -x$$

التقاطع

$$y_1 = y_2$$
$$2 - x^2 = -x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = -1$$
$$x = 2$$

$$A = \left|\int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{2} (2 - x^2) - (-x)dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)dx\right|$$
$$= \left|\left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}\right|$$
$$= \left|\left(2(2) - \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2}\right) - \left(2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}\right)\right|$$
$$= \frac{9}{2} \text{ وحدة مربعة}$$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين :

$$y_1 = x^2 + 2 \quad , y_2 = -2x + 5$$

التقاطع

$$y_1 = y_2$$
$$x^2 + 2 = -2x + 5$$
$$x^2 + 2 + 2x - 5 = 0$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x = 1$$
$$x = -3$$

$$A = \left|\int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx\right|$$
$$= \left|\int_{-3}^{1} (x^2 + 2) - (-2 + 5)dx\right|$$
$$= \left|\int_{-3}^{1} (x^2 + 2 + 2x - 5)dx\right|$$
$$= \left|\int_{-3}^{1} (x^2 + 2x - 3)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3x\right]_{-3}^{1}\right|$$
$$= \left|\left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} + (-3)^2 + 3(-3)\right)\right|$$
$$= \frac{32}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين :

$f(x) = x^2 + 1 \qquad , g(x) = -x^2 + 9$

التقاطع

$f(x) = g(x)$

$x^2 + 1 = -x^2 + 9$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$$A = \left|\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{2} (x^2 + 1 + x^2 - 9)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2x^3}{3} - 8x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$= \left|\frac{2(2)^3}{3} - 8(2)\right| - \left|\frac{2(-2)^3}{3} - 8(-2)\right|$$

$= \frac{64}{3}$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين :

$f(x) = -2x^2 + 2 \qquad , g(x) = x^2 - 1$

التقاطع

$f(x) = g(x)$

$-2x^2 + 2 = x^2 - 1$

$-2x^2 + 2 - x^2 + 1 = 0$

$-3x^2 + 3 = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \mp\sqrt{1} = \pm 1$

$$A = \left|\int_{-1}^{1} (g - f)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{1} (x^2 - 1) - (-2x^2 + 2)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{1} (x^2 - 1 + 2x^2 - 2)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{1} (3x^2 - 3)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{3x^3}{3} - 3x\right]_{-1}^{1}\right|$$

$$= \left|(1^3 - 3(1)) - ((-1)^3 - 3(-1))\right|$$

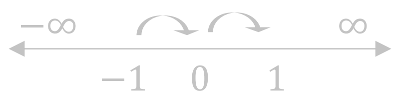
$= 4$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

حيث : $f(x) = x^3 - 1 \;,\; g(x) = x - 1$

التقاطع

$$f = g$$
$$x^3 - 1 = x - 1$$
$$x^3 - 1 - x + 1 = 0$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x(x-1)(x+1) = 0$$
$$x = 0, x = 1, x = -1$$
$$f - g = x^3 - x$$



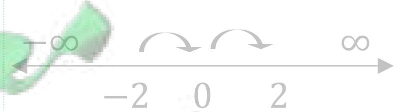
$$A = \left|\int_{-1}^{0} (f-g)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (f-g)dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$
$$= \left|(0) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right)\right|$$
$$+ \left|\left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{(1)^2}{2}\right) - (0)\right|$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g في كل مما يلي: $f(x) = 1 - x^3 \;,\; g(x) = -4x + 1$

ملغى

التقاطع

$$f = g$$
$$1 - x^3 = -4x + 1$$
$$1 - x^3 + 4x - 1 = 0$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x^2 - 4) = 0$$
$$x(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 0, x = 2, x = -2$$



$$A = \left|\int_{-2}^{0} (f-g)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (f-g)dx\right|$$
$$= \left|\int_{-2}^{0} (-x^3 + 4x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (-x^3 + 4x)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{-x^4}{4} + 2x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{-x^4}{4} + 2x^2\right]_{0}^{2}\right|$$
$$= \left|(0) - \left(\frac{-(-2)^4}{4} + 2(-2)^2\right)\right|$$
$$+ \left|\left(\frac{-(2)^4}{4} + 2(2)^2\right) - (0)\right|$$
$$= 4 + 4 = 8$$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين :

$$f(x) = x^3 - x \quad , \quad g(x) = 3 - 3x^2$$

$$f = g$$

$$x^3 - x = 3 - 3x^2$$

$$x^3 - x - 3 + 3x^2 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

$$A = \left|\int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)dx)\right| + \left|\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)dx)\right|$$

$$= \left|\int_{-3}^{-1} (x^3 - x - 3 + 3x^2)dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} (x^3 - x - 3 + 3x^2)dx\right|$$

ملغى

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3\right]_{-3}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3\right]_{-1}^{1}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} - 3(-1) + (-1)^3\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{(-3)^4}{4} - \frac{(-3)^2}{2} - 3(-3) + (-3)^3\right)\right|$$

$$+ \left|\left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{(1)^2}{2} - 3(1) + (1)^3\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} - 3(-1) + (-1)^3\right)\right|$$

$= 4 + 4 = 8$ وحدة مربعة

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين : $f(x)=\sqrt{x}\quad , \ g(x)=\frac{x}{2}$
و المستقيمين $x=9$, $x=0$

التقاطع

$$f=g$$

$$\sqrt{x}=\frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{1}=\frac{x^2}{4}$$

$$x^2=4x$$

$$x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0$$

ملغى

$$x=0\notin(0,9) \qquad x=4\in(0,9)$$

$$A=\left|\int_0^4(f-g)dx\right|+\left|\int_4^9(f-g)dx\right|$$

$$=\left|\int_0^4\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}\right)dx\right|+\left|\int_4^9\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}\right)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{4}\right]_0^4\right|+\left|\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{4}\right]_4^9\right|$$

$$=\left|\left(\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{4^2}{4}\right)-(0)\right|+\left|\left(\frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}}-\frac{9^2}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{4^2}{4}\right)\right|$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{43}{12}=\frac{59}{12}$$ وحدة مربعة

تـــدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية

حجوم الأجسام الدورانية

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2\, dx$$

س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ و محور السينات في الفترة $[-1,1]$.

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^2+2)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 4x^2 + 4)\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left(\left(\frac{(1)^5}{5} + \frac{4(1)^3}{3} + 4(1)\right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} + \frac{4(-1)^3}{3} + 4(-1)\right) \right)$$

$$= \pi \frac{166}{155} = \frac{166}{155}\pi$$ وحدة مكعبة

س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x-1}$ و محور السينات في الفترة $[1,5]$.

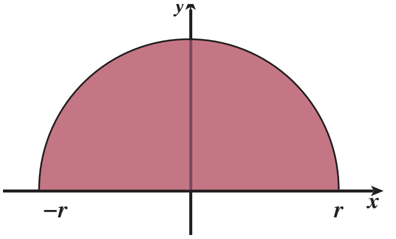
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx = \pi \int_1^5 \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (x-1)dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5$$

$$= \pi \left(\left(\frac{5^2}{2} - 5\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) \right)$$

$$= 8\,\pi$$ وحدة مكعبة

س باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بنصف الدائرة $y=\sqrt{r^2-x^2}$



$y=\sqrt{r^2-x^2}$ معادلة نصف دائرة مركزها $(0,0)$ نصف قطرها r

$$\boldsymbol{v=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx}$$

$$=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$

$$=\pi\left(\left(r^2(r)-\frac{(r)^3}{3}\right)-\left(r^2(-r)-\frac{(-r)^3}{3}\right)\right)$$

$$=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right)$$

$$=\pi r^3\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)$$

$=\pi r^3\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\cdot\pi r^3$ وحدة مربعة

س باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f :

$f(x)=r \quad , \quad r\neq 0$ في الفترة $[0\ ,h]$

$$\boldsymbol{V=\pi\int_{a}^{b}(f(x))^2dx=\pi\int_{0}^{h}(r)^2dx}$$

$$=\pi\int_{0}^{h}r^2dx=\pi[r^2x]_0^h$$

$$=\pi\left((r^2(h))-(r^2(0))\right)$$

$=\pi r^2h$ وحدة مربعة

س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين:

$$f(x) = x^2 \quad , \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

التقاطع:

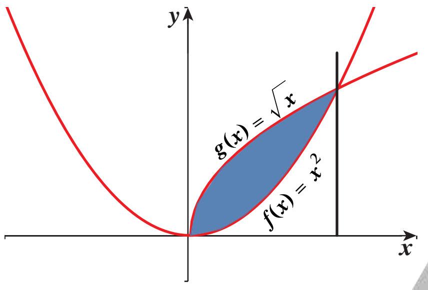
$$f(x) = g(x)$$

$$(x^2)^2 = (\sqrt{x})^2 \quad \Rightarrow \qquad x^4 = x, \qquad x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1^3) = 0$$

$$x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$x = 0, \qquad x = 1$$



$$x^2 + x + 1 = 0$$

لا يوجد حلول حقيقية $\Delta < 0$

حدود التكامل $[0,1]$

قيمة اختيارية

$$\frac{1}{2} \in (0,1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.70$$

$$\therefore\ g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in [0,1]$$

$$V = \pi \int_a^b \left(g(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \pi\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0)\right) = \frac{3}{10}\pi$$ وحدة مكعبة

س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بين منحنيي الدالتين:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1, \qquad g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

التقاطع: $f(x) = g(x)$

$$\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2$$

$$x^2 + 2 = x + 4$$

$$x^2 + 2 - x - 4 = 0 \qquad x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x = -1, \qquad x = 2 \qquad [-1,2]$$

قيمة اختيارية $0 \in (-1,2)$

$$f(0) = 1 \qquad g(0) = 2$$

$$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in [-1,2]$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} (g(x))^2 - (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} \left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4\right) - \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + 1\right) dx$$

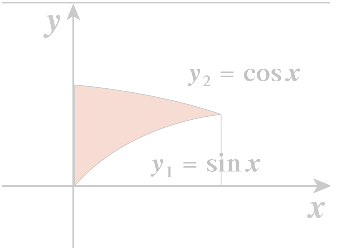
$$= \pi \int_{-1}^{2} \left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4 - \frac{x^4}{4} - x^2 - 1\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{12} + \frac{2x^2}{2} + 4x - \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left(\left(\frac{2^3}{12} + 2^2 + 4(2) - \frac{2^5}{20} - \frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4(-1) - \frac{(-1)^5}{20} - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)\right)\right)$$

$$= \frac{81}{10}\pi = 8.1\pi$$ وحدة مكعبة

س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين:
$y_1 = sinx \ , \ y_2 = \cos x$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$



$$y_2 \geq y_1 \geq 0 \quad \forall \ x \ \in \ \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y_2)^2 - (y_1)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$$

ملغى

$$= \pi \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}\left(\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) - \sin(2\times 0)\right)$$

$= \frac{\pi}{2}(1-0) = \frac{\pi}{2}$ وحدة مكعبة

س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x+3, y_2 = x^2+1$

التقاطع: $y_1 = y_2$

$$x+3 = x^2+1$$

$$x^2+1-x-3=0$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$x=-1, \qquad x=2 \qquad [-1,2]$$

قيمة اختيارية $0 \in (-1,2)$

$$y_{1(0)} = 3 \qquad y_{2(0)} = 1$$

$$\therefore y_1 \ge y_2 \ge 0 \quad \forall\ x \in [-1,2]$$

$$V = \pi\int_{-1}^{2} (y_1)^2-(y_2)^2dx = \pi\int_{-1}^{2}(x+3)^2-(x^2+1)^2\,dx$$

ملغى

$$= \pi\int_{-1}^{2}(x^2+6x+9)-(x^4+2x^2+1)dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{2}(x^2+6x+9-x^4-2x^2-1)dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{2}(-x^4-x^2+6x+8)dx$$

$$= \pi\left[-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+8x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi\left(\left(-\frac{2^5}{5}-\frac{2^3}{3}+3(2)^2+8(2)\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{-(-1)^5}{5}+\frac{(-1)^3}{3}+3(-1)^2+8(-1)\right)\right)$$

$$= \frac{117}{5}\pi = 23.4\,\pi$$ وحدة مكعبة

تـــدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية

معادلة منحنى دالة

ثانياً: إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

س أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $3x^2-4x+1$ و يمر بالنقطة $A(1\,,2)$

$$\because f'(x)=3x^2-4x+1$$

$$\therefore f(x)=\int(3x^2-4x+1)dx=\frac{3x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+x+C$$

$$f(x)=x^3-2x^2+x+c$$

بالتعويض في إحداثيات النقطة $A(1,2)$ نجد:

$$2=(1)^3-2(1)^2+1+C\Rightarrow C=2$$

المعادلة المطلوبة

$$f(x)=x^3-2x^2+x+2$$

س أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $3x^2+x$ و يمر بالنقطة $(2\,,2)$

$$\because f'(x)=3x^2+x$$

$$\therefore f(x)=\int(3x^2+x)dx=\frac{3x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$$

$$f(x)=x^3+\frac{x^2}{2}+C$$

بالتعويض في إحداثيات النقطة $(2,2)$

$$2=2^3+\frac{2^2}{2}+C\Rightarrow C=-8$$

المعادلة المطلوبة

$$f(x)=x^3+\frac{x^2}{2}-8$$

س أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $4x^3+6x^2-2x+1$ و يمر بالنقطة $(1\ ,0)$

$$\because f'(x)=4x^3+6x^2-2x+1$$

$$\therefore f(x)=\int(4x^3+6x^2-2x+1)dx$$

$$f(x)=\frac{4x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+x+C$$

$$f(x)=x^4+2x^3-x^2+x+C$$

بالتعويض في إحداثيات النقطة $(1,0)$

$$0=1^4+2(1)^3-(1)^2+1+c\Rightarrow C=-3$$

المعادلة المطلوبة

$$f(x)=x^4+2x^3-x^2+x-3$$

س أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $-8x^3+3x^2-2x+4$ و يمر بالنقطة $(-1\ ,-5)$

$$\because f'(x)=-8x^3+3x^2-2x+4$$

$$\therefore f(x)=\int(-8x^3+3x^2-2x+4)dx$$

$$f(x)=-\frac{8x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+4x+C$$

$$f(x)=-2x^4+x^3-x^2+4x+C$$

بالتعويض في إحداثيات النقطة $(-1,-5)$

$$-5=-2(-1)^4+(-1)^3-(-1)^2+4(-1)+C\Rightarrow C=3$$

المعادلة المطلوبة

$$f(x)=-2x^4+x^3-x^2+4x+3$$

س إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x,y) يساوي $\sqrt{5-4x}$ فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5,3)$

ميل العمودي $\frac{-1}{f'(x)}$ $\quad f'(x) \neq 0$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5-4x}} = -1(5-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \int -1(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -1\frac{\frac{2}{1}(5-4x)^{\frac{1}{2}}}{-4} + C$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + C$$

بالتعويض $(-5,3)$

$$3 = \frac{1}{2}\sqrt{5-4(-5)} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

المعادلة المطلوبة

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{2}$$

س إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x,y) هو $2x-1$ فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1,0)$

ميل العمودي $= \frac{-1}{f'(x)}$ $\quad f'(x) \neq 0$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x-1}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x-1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$$

بالتعويض $(1,0)$

$$0 = -\frac{1}{2}\ln|2\times1-1| + C$$

$$0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

المعادلة المطلوبة

$$f(x) = \frac{-1}{2}\ln|2x-1|$$

س لتكن: $f''(x) = 6x - 6$
فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(-1\,,15)$ نقطة حرجة للدالة.

$$f'(x) = \int (6x-6)dx = \frac{6x^2}{2} - 6x + C$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + C$$

$\because$ $(-1,15)$ نقطة حرجة $f'(-1) = 0$

$$0 = 3(-1)^2 - 6(-1) + C$$

$$0 = 9 + C \Rightarrow \quad C = -9$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f(x) = \int (3x^2 - 6x - 9)dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} - 9x + C$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + C$$

بالتعويض في إحداثيات النقطة $(-1,15)$

$$15 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + C$$

$$15 = 5 + C \Rightarrow \quad C = 10$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$$

ملغى

س لتكن: $f''(x) = 5x - 2$
فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(2, -2)$ نقطة حرجة للدالة.

$$f'(x) = \int (5x-2)dx = \frac{5x^2}{2} - 2x + C$$

$\because$ $P(2,-2)$ نقطة حرجة $f'(-2) = 0$

$$0 = \frac{5(2)^2}{2} - 2(2) + C$$

$$0 = 6 + C \Rightarrow \quad C = -6$$

$$f'(x) = \frac{5x^2}{2} - 2x - 6$$

$$f(x) = \int \left(\frac{5x^2}{2} - 2x - 6\right) dx$$

ملغى

$$= \frac{5x^3}{2\times 3} - \frac{2x^2}{2} - 6x + C$$

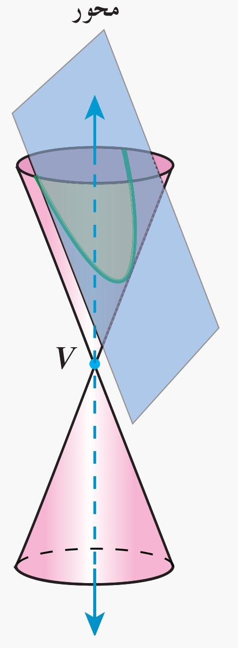
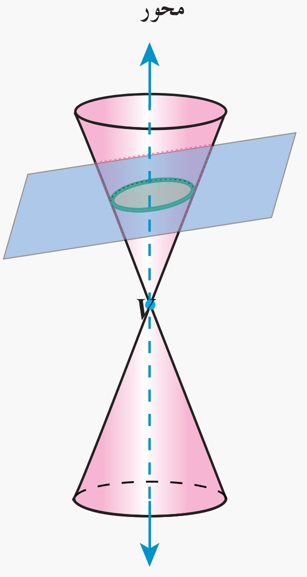
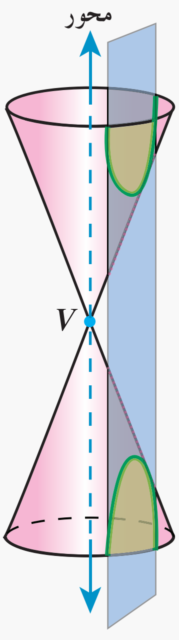
$$f(x) = \frac{5x^3}{6} - x^2 - 6x + C$$

بالتعويض في إحداثيات النقطة $P(2,-2)$

$$-2 = \frac{5(2)^3}{6} - (2)^2 - 6(2) + C \Rightarrow C = \frac{22}{3}$$

$$f(x) = \frac{5x^3}{6} - x^2 - 6x + \frac{22}{3}$$

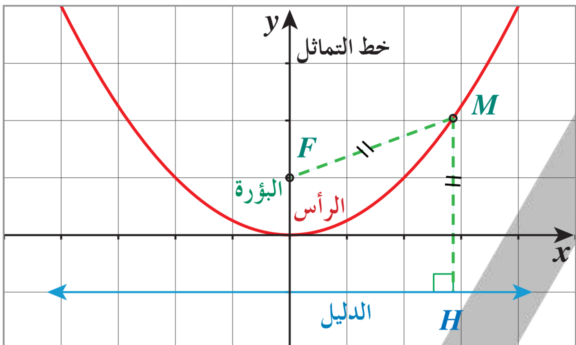
القطوع المخروطية

الشكل			
وضع المستوى	المستوى مواز لراسم و لا يحويه	المستوى ليس عموديًا على المحور و ليس موازيًا لأي راسم	المستوى مواز للمحور و لا يحويه
القطع الناتج	قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد

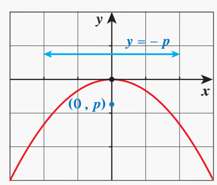
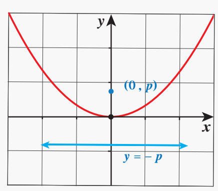
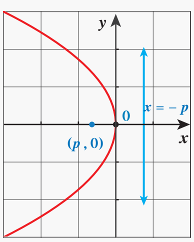
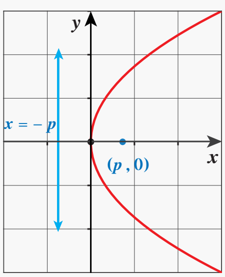
القطع المكافئ

القطع المكافئ

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) و عن مستقيم ثابت معطى (الدليل).



القطع مكافئ رأسه نقطة الأصل (0 ,0)

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y - axis)$		محور السينات $(x - axis)$	
المسافة من الراس إلى البؤرة	$\|p\|$			
المسافة من الرأس إلى الدليل	$\|p\|$			
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي:

س رأسه نقطة الأصل و بؤرته $F(4\ ,0)$

$\because$ البؤرة $\ni$ محور السينات الموجب

$\therefore$ معادلة القطع $y^2 = 4px$

$$p = 4$$
$$y^2 = 4(4)x$$
$$y^2 = 16x$$

الدليل $x = -4$ $\quad$ $x = -P$

س بؤرته $F(0,-3)$ و دليله المستقيم : $y = 3$

الرأس $(0,0)$ منتصف المسافة بين البؤرة و الدليل

$\because$ البؤرة $\ni$ محور ال y

$\therefore$ معادلة القطع

$p = -3$ $\quad$ $x^2 = 4py$

$$x^2 = -12\ y$$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و بؤرته $F(-4\ ,0)$

$\because$ البؤرة $\ni$ محور x

$\therefore$ معادلة القطع

$$y^2 = 4px$$
$$p = -4$$
$$y^2 = -16x$$

الدليل $x = 4$ $\quad$ $x = -P$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0\ ,2)$ و دليله المستقيم $y = -2$

الرأس $(0,0)$ منتصف المسافة بين البؤرة و الدليل

$\because$ البؤرة $\ni$ محور ال y

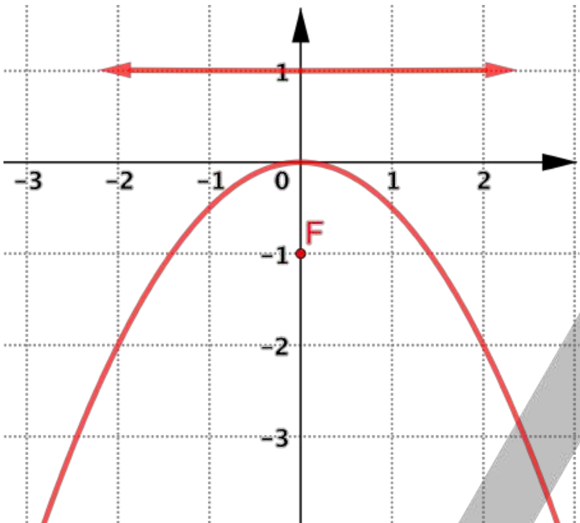
$\therefore$ معادلة القطع

$p = 2$ $\quad$ $x^2 = 4py$

$$x^2 = 8y$$

أوجد البؤرة و معادلة الدليل لقطع مكافئ, ثم ارسم شكلاً تقريبيًا لهذا القطع في كل مما يلي

س المعادلة: $x^2 = -2y$



$$x^2 = 4py$$

$$4p = -2 \;\Rightarrow\; p = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} < 0$$

محور التماثل y الفتحة للأسفل

البؤرة

$$F(0, p)$$

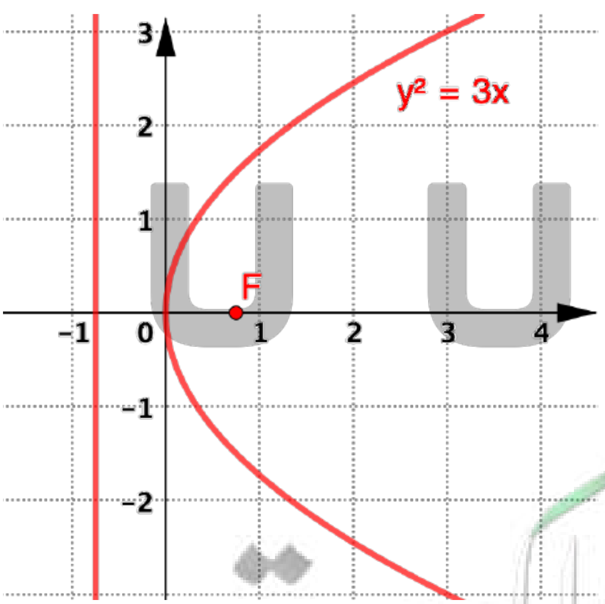
$$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

الدليل

$$y = -p$$

$$y = \frac{1}{2}$$

س المعادلة: $\frac{1}{3}y^2 = x$



$$y^2 = 3x$$

$$y^2 = 4px$$

$$4p = 3 \;\Rightarrow\; p = \frac{3}{4} > 0$$

محور التماثل x الفتحة يمين

البؤرة

$$F(p, 0)$$

$$\left(\frac{3}{4}, 0\right)$$

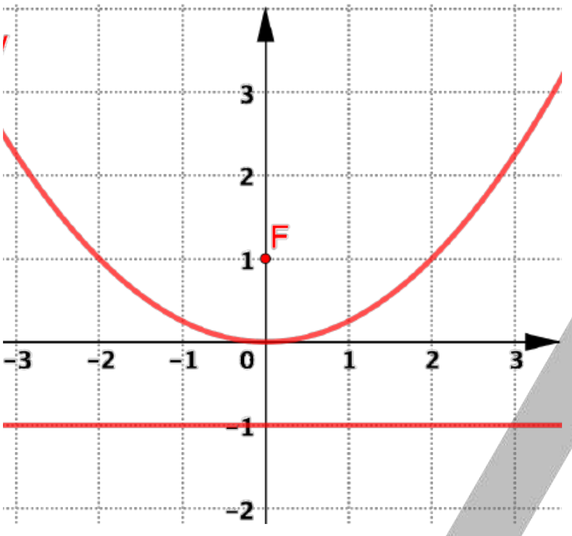
الدليل

$$x = -p$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

أوجد البؤرة و الدليل لقطع مكافئ, ثم ارسم شكلاً تقريبيًا لهذا القطع في كل مما يلي :

س المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$



$4y = x^2$

$x^2 = 4y$

$x^2 = 4py$

$4p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 1 > 0$

قطع مكافئ محوره y الفتحة إلى الأعلى

البؤرة

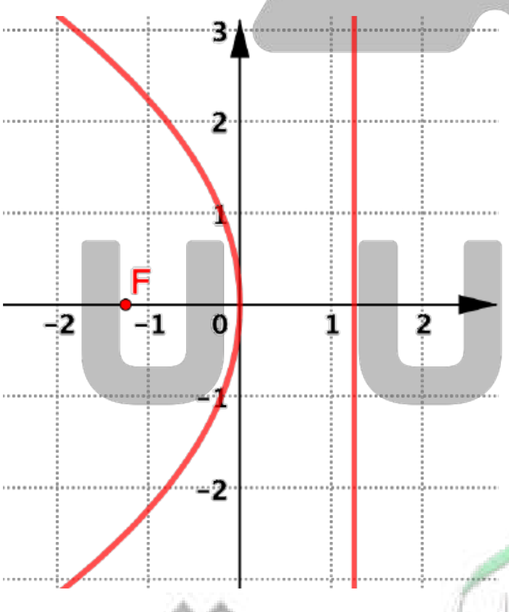
$F(0, p) \qquad (0{,}1)$

الدليل

$y = -p$

$y = -1$

س المعادلة: $x = -\frac{1}{5}y^2$



$-5x = y^2$

$y^2 = -5x$

$y^2 = 4px$

$4p = -5, \qquad p = -\frac{5}{4} < 0$

محوره x , الفتحة يسار

البؤرة

$F(p, 0) \qquad F\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$

الدليل

$x = -p \qquad x = \frac{5}{4}$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطة $A(1\ ,2)$ و خط تماثله $x-axis$.

$\because$ رأسه نقطة الأصل و خط تماثله $x-axis$

$\therefore$ المعادلة

$$\boldsymbol{y^2=4px}$$

$$2^2=4p(1)$$

$\because$ يمر بالنقطة $A(1,2)$

$$4=4p \Rightarrow p=1$$

$\therefore$ معادلة القطع

$$y^2=4(1)x$$

$$y^2=4x$$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطة $A(1\ ,1)$ و خط تماثله $y-axis$.

$\because$ رأسه نقطة الأصل و خط تماثله $y-axis$

$\therefore$ المعادلة

$$\boldsymbol{x^2=4py}$$

$$1^2=4p(1)$$

$\because$ يمر بالنقطة $A(1,1)$

$$1=4p \Rightarrow p=\frac{1}{4}$$

$\therefore$ معادلة القطع

$$x^2=4\left(\frac{1}{4}\right)y$$

$$x^2=y$$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$
و يمر بالنقطتين $B(1,4)$ $A(-1,4)$,

قطع مكافئ محوره y

$$x^2 = 4py$$

بالتعويض

$$(1)^2 = 4p(4) \qquad B(1,4)$$

$$1 = 16p \Rightarrow p = \frac{1}{16}$$

$$\therefore x^2 = 4\left(\frac{1}{16}\right)y$$

$$x^2 = \frac{1}{4}y$$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$
و يمر بالنقطتين $B(2,3)$ $A(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$,

قطع مكافئ محوره x

ملغى

$$y^2 = 4px$$

بالتعويض

$$3^2 = 4p(2) \qquad B(2,3)$$

$$9 = 8p \Rightarrow p = \frac{9}{8}$$

$$\therefore y^2 = 4\left(\frac{9}{8}\right)x$$

معادلة القطع المكافئ

$$y^2 = \frac{9}{2}x$$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $x = -3$

∵ الدليل $x = -3$, "رأسي"

$x = -p \qquad p = 3$

∴ محور القطع "أفقي" , على محور السينات.

إذاً معادلة القطع $\boldsymbol{y^2 = 4px}$

$y^2 = 4(3)x$

$y^2 = 12x$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $y = 1$

∵ الدليل $y = 1$ " أفقي "

$y = -p$

$-p = 1 \qquad p = -1$

∴ محور القطع "رأسي" على محور y

إذاً معادلة القطع $\boldsymbol{x^2 = 4py}$

$x^2 = 4(-1)y$

$x^2 = -4y$

س تُستخدم ميكروفونات مكافئة على جانبي ملعب لالتقاط الأصوات من داخل الملعب. إذا كان قد تولد ميكروفون مكافئ من تدوير قطع مكافئ معادلته: $y^2 = 15x$ فحدّد موضع البؤرة (جهاز الاستقبال الإلكتروني) لهذا القطع المكافئ.

قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ محوره x

$$y^2 = 4px$$

$$4p = 15 \qquad p = \frac{15}{4}$$

البؤرة $F(p,0)$ $\left(\frac{15}{4},0\right)$

س تصنع إحدى الشركات الكشافات المكافئة لنوعيات عديدة من السيارات.
إذا كان لأحد هذه الكشافات سطح مكافئ متولد من تدوير القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = 12y$, فأين سيكون موضع المصباح الكهربائي ؟

قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ محوره y

$$x^2 = 4py$$

$$4p = 12 \qquad p = \frac{12}{4} = 3$$

البؤرة $F(0,p)$ ملغى $(0,3)$

س تصنع إحدى الشركات مصابيح أمامية للسيارات. إذا كان أحد المصابيح على شكل سطح مكافئ متولد من تدوير قطع مكافئ معادلته $y^2 = 12x$, فأين يجب وضع لمبة المصباح؟

قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ محوره x

$$y^2 = 4px$$

$$4p = 12 \qquad p = \frac{12}{4} = 3$$

البؤرة $F(p,0)$ $(3,0)$

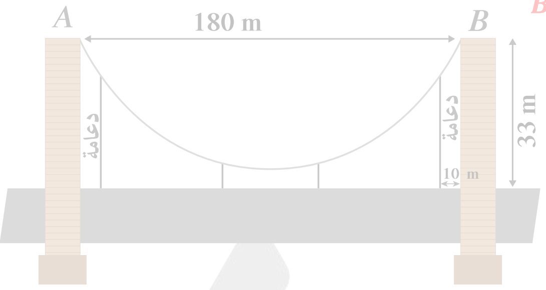
س في السؤال السابق: ما معادلة القطع المكافئ إذا كانت اللمبة تبعد 4 (وحدات قياس) عن رأس القطع المكافئ؟

معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4px$; $p = 4$

$$y^2 = 16x$$

س يصل سلك معدني متدل بين رأسي عمودي جسر. السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ. يبعد العمودان عن بعضهما مسافة $180\ m$ ويبلغ ارتفاع كل منهما $33\ m$, يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام $3\ m$, وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي. أوجد طول الدعامة التي تبعد $10\ m$ عن أي من العمودين.

$B(90,30)$



معادلة القطع

$$x^2 = 4py$$

$$x_B = \frac{180}{2} = 90$$

$$y_B = 33 - 3 = 30$$

$$90^2 = 4p(30)$$

ملغى

$$8100 = 120p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{8100}{120} = 67.5$$

$$\therefore x^2 = 4(67.5)y$$

$$x^2 = 270y$$

$$x_{\text{الدعامة}} = 90 - 10 = 80$$

$$80^2 = 270y$$

$$\therefore y_{\text{الدعامة}} = \frac{80^2}{270} \approx 23.7$$

$\therefore$ طول الدعامة

$$23.7 + 3 \approx 26.7\ m$$

س يصل سلك معدني متدلٍ بين رأسي عمودي جسر. السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ. يبعد العمودان عن بعضهما مسافة $220\ m$ و يبلغ ارتفاع كل منهما $36\ m$, يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام $3\ m$, وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي. أوجد طول الدعامة التي تبعد $10\ m$ عن أي من العمودين.

معادلة القطع

$$x^2 = 4py$$

$$x_B = \frac{220}{2} = 110$$

ملغى

$$y_B = 36 - 3 = 33$$

$$110^2 = 4p(33)$$

$$12100 = 132\,p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{12100}{132} = \frac{275}{3}$$

$$\therefore x^2 = 4\left(\frac{275}{3}\right)y$$

$$x^2 = \frac{1100}{3}y$$

$$x_{\text{الدعامة}} = 110 - 10 = 100$$

$$100^2 = \frac{1100}{3}y$$

$$\therefore y_{\text{الدعامة}} = 100^2 \times \frac{3}{1100} \approx 27.27$$

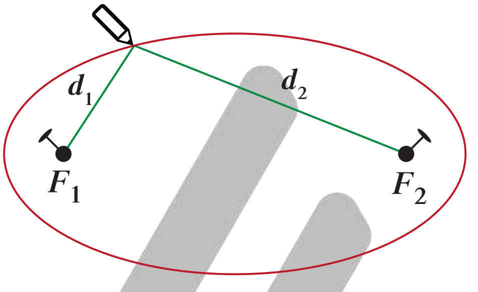
طول الدعامة :

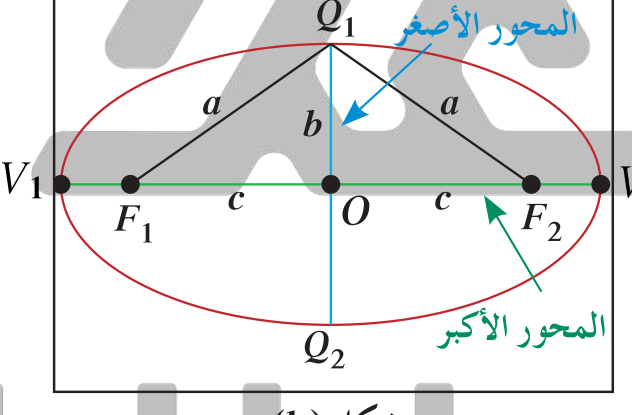
$$27.27 + 3 \approx 30.27\ m$$

القطع الناقص

القطع الناقص

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.





شكل (b)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

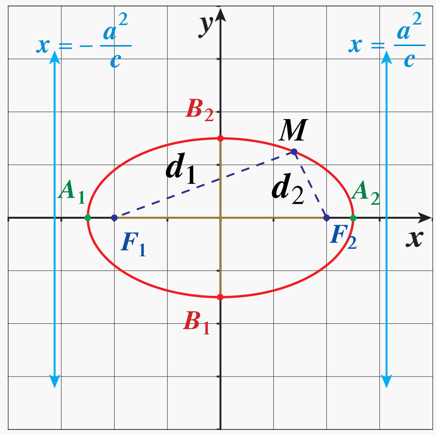
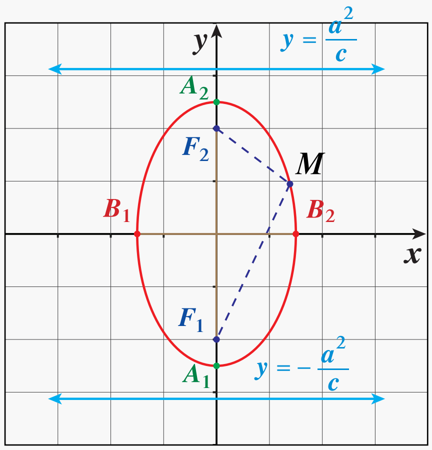
طول المحور الأكبر: $2a$

طول المحور الأصغر: $2b$

البعد بين البؤرتين: $2c$

العلاقة الأساسية: $c^2 = a^2 - b^2$

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل (0 , 0) كالتالي:

المعادلة	$a > b > 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a > b > 0$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0, -b), B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتنا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}, x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}, y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه و مركزه	

س إذا كانت: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{10} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

- رأس القطع وطرفي المحور الأصغر
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين ثم ارسم شكلاً تقريبياً للقطع

معادلة القطع

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

المحور الأكبر ينطبق على محور السينات

$$a^2 = 16 \qquad b^2 = 10$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$= 16 - 10 = 6$$

$$a = \sqrt{16} = 4$$

$$b = \sqrt{10}$$

$$c = \sqrt{6}$$

رأسي القطع

$$A_1(-a, 0) \qquad (-4,0)$$

$$A_2(a, 0) \qquad (4,0)$$

طرفي المحور الأصغر

$$B_1(0, -b) \qquad (0, -\sqrt{10})$$

$$B_2(0, b) \qquad (0, \sqrt{10})$$

البؤرتين

$$F_1(-c, 0) \qquad (-\sqrt{6}, 0)$$

$$F_2(c, 0) \qquad (\sqrt{6}, 0)$$

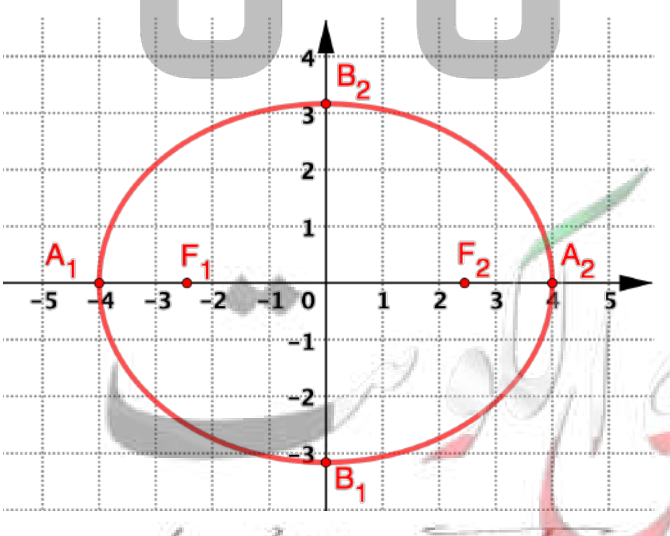
معادلة دليلي القطع

$$x = \mp\frac{a^2}{c} = \mp\frac{16}{\sqrt{6}}$$

طول كل من المحورين

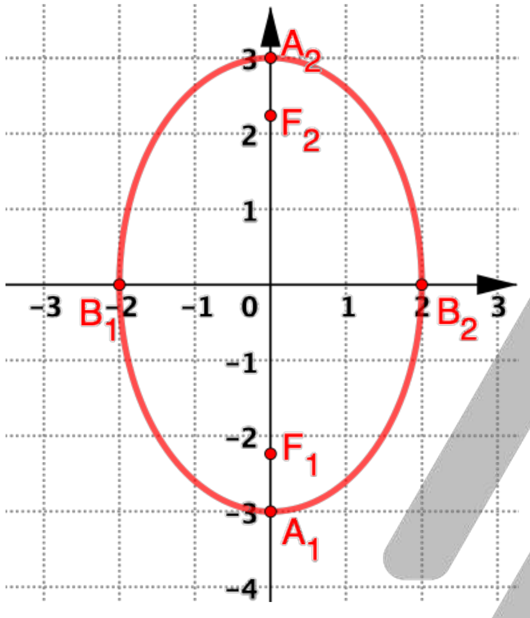
الأكبر $= 2a = 8$

الأصغر $= 2b = 2\sqrt{10}$



س إذا كانت: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

- رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين ثم ارسم شكلاً تقريبياً للقطع



محوره الأكبر رأسي

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$a^2=9 \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{9}=3$$

$$b^2=4 \quad \Rightarrow \quad b=\sqrt{4}=2$$

$$c^2=a^2-b^2=5$$

$$c=\sqrt{5}$$

رأسي القطع

$A_1(0,-a)$ $\quad (0,-3)$

$A_2(0,a)$ $\quad (0,3)$

طرفي المحور الأصغر

$B_1(-b,0)$ $\quad (-2,0)$

$B_2(b,0)$ $\quad (2,0)$

البؤرتين

$F_1(0,-c)$ $\quad (0,-\sqrt{5})$

$F_1(0,c)$ $\quad (0,\sqrt{5})$

معادلة دليلي القطع

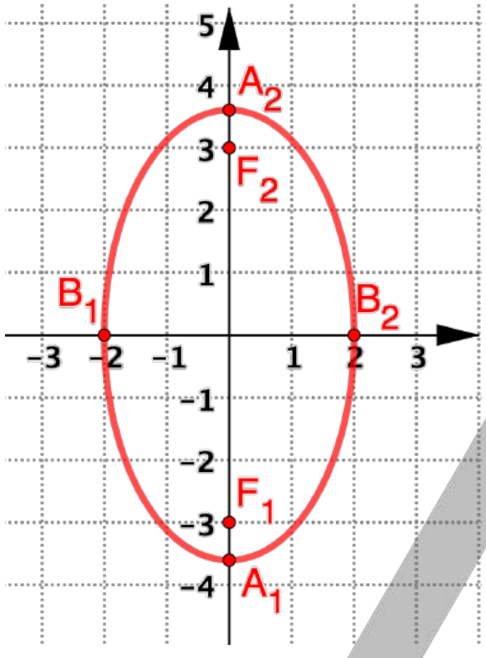
$$y=\mp\frac{a^2}{c}=\mp\frac{9}{\sqrt{5}}$$

طول كل من المحورين

الأكبر $= 2a = 6$

الأصغر $= 2b = 4$

س أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$ و طول محوره الأصغر 4 , ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع.



$\because F_1, F_2 \in y-axis$

$\therefore \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$

$c=3$

$2b=4 \quad \Rightarrow \quad b=2$

$c^2=a^2-b^2$

$3^2=a^2-2^2$

$9=a^2-4$

$9+4=a^2$

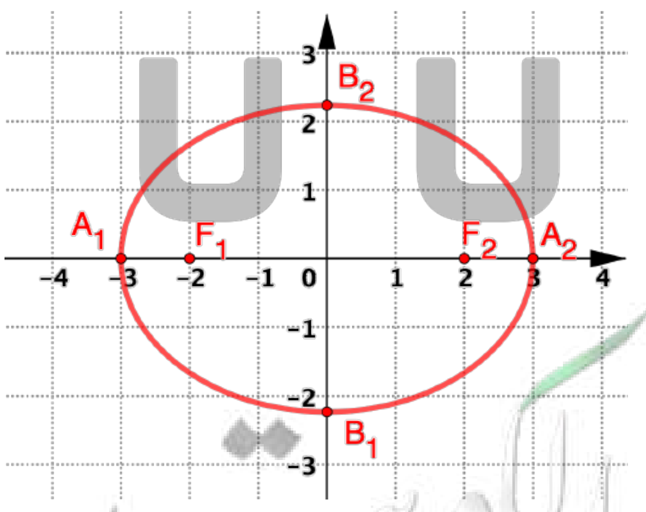
$a^2=13$

$a=\sqrt{13}$

معادلة القطع

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13}=1$$

س أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ و طول محوره الأكبر 6 , ثم ارسم شكلًا تقريبيًا



$\because F_1, F_2 \in x-axis$

$\therefore \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$c=2$

$2a=6 \quad \Rightarrow \quad a=3$

$c^2=a^2-b^2$

$4=a^2-b^2$

$4=9-b^2$

$b^2=9-4=5$

$b=\sqrt{5}$

$\therefore$ معادلة القطع

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

س أوجد البؤرتين و الرأسين و طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $25x^2+16y^2-400=0$

$$25x^2+16y^2-400=0$$
$$\frac{25x^2}{400}+\frac{16y^2}{400}=\frac{400}{400}$$
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

المحور الأكبر على $y-axis$

$$a^2=25, b^2=16$$
$$c^2=a^2-b^2=9$$
$$a=5,\quad b=4,\quad c=3$$

البؤرتين

$F_1(0,-c)$ $(0,-3)$

$F_2(0,c)$ $(0,3)$

الرأسين

$A_1(0,-a)$ $(0,-5)$

$A_2(0,a)$ $(0,5)$

طول المحور الأكبر $=2a=10$

س أوجد البؤرتين و الرأسين و طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $x^2+4y^2=16$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{4y^2}{16}=\frac{16}{16}$$
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

المحور الأكبر على $x-axis$

$$a^2=16,\quad b^2=4$$
$$c^2=a^2-b^2=12$$
$$a=4,\quad b=2,\quad c=2\sqrt{3}$$

البؤرتين

$F_1(-c,0)$ $(-2\sqrt{3},0)$

$F_2(c,0)$ $(2\sqrt{3},0)$

الرأسين

$A_1(-a,0)$ $(-4,0)$

$A_2(a,0)$ $(4,0)$

طول المحور الأكبر $=2a=8$

س أوجد معادلة قطع ناقص مركزه (0,0) إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور الصادي وطوله 16 cm و المسافة بين البؤرتين 10 cm .

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$2a = 16, \qquad a = 8$$

$$2c = 10, \qquad c = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$25 = 64 - b^2$$

$$b^2 = 64 - 25 = 39 \qquad \rightarrow \qquad \frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$$

س أوجد معادلة قطع ناقص مركزه (0,0) إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور السيني وطوله 12 cm و المسافة بين البؤرتين 8 cm.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$2a = 12, \qquad a = 6$$

$$2c = 8, \qquad c = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$16 = 36 - b^2$$

$$b^2 = 36 - 16 = 20 \qquad \rightarrow \qquad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

س أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(2,0)$ و يمر بالنقطة $A(2,1)$.

البؤرة $F(2,0)$

$$c = 2$$
$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4$$
$$(a^2 = b^2 + 4) \to (1)$$

البؤرة $\in$ محور x

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$A(2,1)$$
$$\left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1\right) \times a^2 b^2$$
$$4b^2 + a^2 = a^2\, b^2$$
$$4b^2 + b^2 + 4 = (b^2 + 4)b^2$$
$$5b^2 + 4 = b^4 + 4b^2$$
$$b^4 + 4b^2 - 5b^2 - 4 = 0$$

ملغى

$$b^4 - b^2 - 4 = 0$$
$$b^2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$
$$a^2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} + 4 = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$
$$\frac{x^2}{\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{9 + \sqrt{17}}{2}\right)} = 1$$

س أوجد معادلة قطع ناقص الذي الذي مركزة $(0,0)$ و محوره الأصغر أفقي طوله $10\ m$ و يمر بالنقطة $A(2,2\sqrt{6})$

∵ محوره الأصغر أفقي

∴ محوره الأكبر رأسي

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$2b=10 \qquad b=5$$

$$A(2,2\sqrt{6})$$

$$\frac{4}{25}+\frac{(2\sqrt{6})^2}{a^2}=1$$

$$\frac{24}{a^2}=1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$$

$$21a^2=24\times25=600$$

$$\left[a^2=\frac{600}{21}=\frac{200}{7}\right]$$

∴ المعادلة المطلوبة

ملغى

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\left(\frac{200}{7}\right)}=1$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{7y^2}{200}=1$$

س للقطع الناقص الذي يولد السطح الناقص لجهاز تفتيت الحصوات, محور أكبر نقطتاه الطرفيتان $A_1(-6,0)$, $A_2(6,0)$, و محور الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0,-2.5)$, أوجد إحداثيات البؤرتين.

$$a = 6, \qquad b = 2.5 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2$$

$$= 6^2 - (2.5)^2$$
$$= 29.75$$

$$c = \sqrt{29.75} \approx 5.45$$

البؤرتان :

$F_1(-c,0)$ $\quad(-5.45,0)$

$F_2(c,0)$ $\quad(5.45,0)$

ملغى

س يتولد المجسم الناقص لأحد أجهزة تفتيت الحصوات, من دوران قطع ناقص نقطتا طرفي محوره الأكبر $A_1(-8,0)$, $A_2(8,0)$. إذا كانت إحدى نقطتي طرفي محوره الأصغر $B_1(0,3.5)$, فأوجد إحداثيات البؤرتين.

$$a = 8, \qquad b = 3.5 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2$$

$$= 8^2 - (3.5)^2$$
$$= 51.75$$

$$c = \sqrt{51.75} \approx 7.19$$

البؤرتان :

$F_1(-c,0)$ $\quad(-7.19,0)$

$F_2(c,0)$ $\quad(7.19,0)$

س لمتابعة الهمس في الصالات البيضاوية الشكل فإن الصوت الذي ينطلق من بؤرة يمكن الاستماع إليه بشكل تام في البؤرة الثانية. على افتراض أن إحدى الصالات الكبرى مبنية على شكل بيضاوي طولي محوريها 98 m و 46 m . على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماعه بشكل واضح؟

$$2a = 98\,, \qquad a = 49$$
$$2b = 46\,, \qquad b = 23$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$= 49^2 - 23^2$$
$$= 1872$$
$$c = \sqrt{1872} \approx 43.26$$

المسافة المطلوبة :

$$2c = 2(43.26) \approx 86.52\ m$$

ملغى

س على افتراض أن الصالة بيضاوية الشكل طولي محوريها 78 m , 36 m . على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماع الصوت المنطلق بشكل واضح ؟

$$2a = 78\,, \qquad a = 39$$
$$2b = 36\,, \qquad b = 18$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$= 39^2 - 18^2$$
$$= 1197$$
$$c = \sqrt{1197} \approx 34.59$$

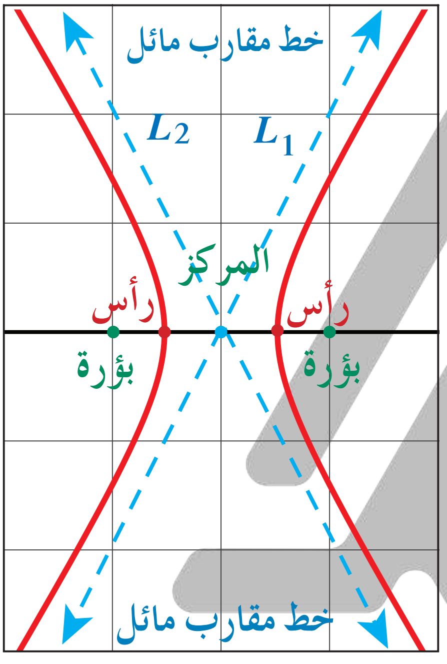
المسافة المطلوبة :

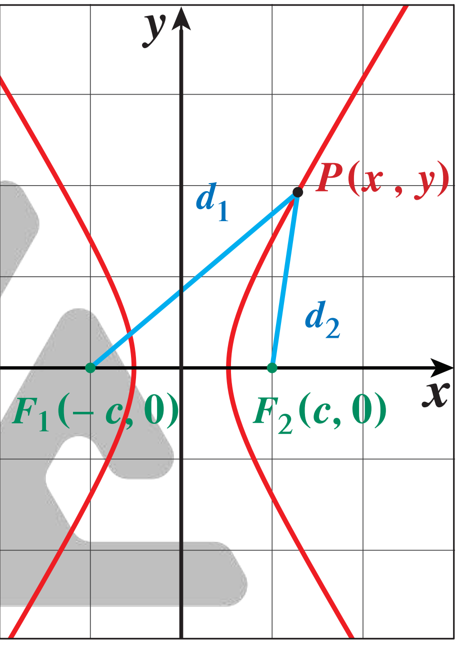
$$2c = 2(34.59) \approx 69.18\ m$$

القطع الزائد

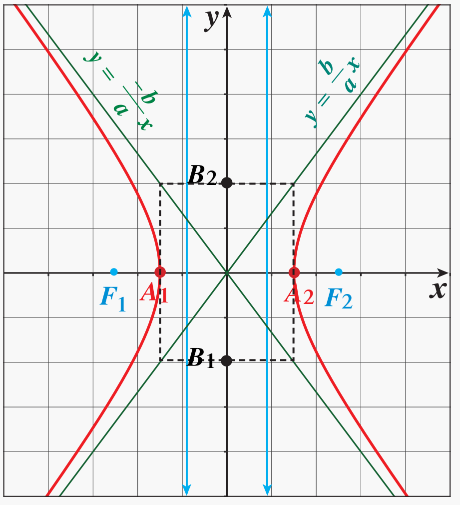
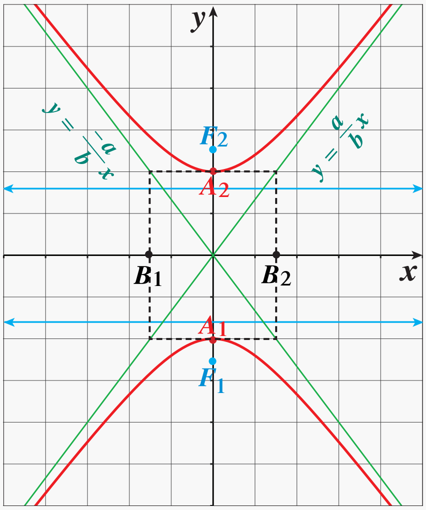
القطع الزائد

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.





معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0, -b), B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$c^2 = a^2 + b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y = \pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x = \pm\frac{a^2}{c}$	$y = \pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه و مركزه	

س لتكن: $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد فأوجد:

- رأسي القطع
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين
- معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلاً تخطيطياً للقطع

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

قطع زائد محوره القاطع

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{16} = 4$$

$$b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{9} = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \qquad c = \sqrt{25} = 5$$

رأسي القطع الزائد

$$A_1(-a,0) \quad (-4,0)$$

$$A_2(a,0) \quad (4,0)$$

البؤرتين

$$F_1(-c,0) \quad (-5,0)$$

$$F_2(c,0) \quad (5,0)$$

معادلتي دليلي القطع

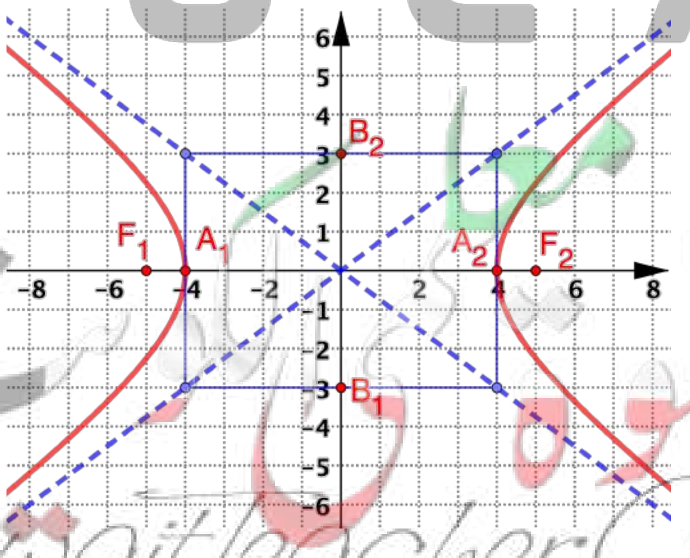
$$x = \mp\frac{a^2}{c} = \mp\frac{16}{5}$$

طول كل من المحورين

طول المحور القاطع $= 2a = 2(4) = 8$

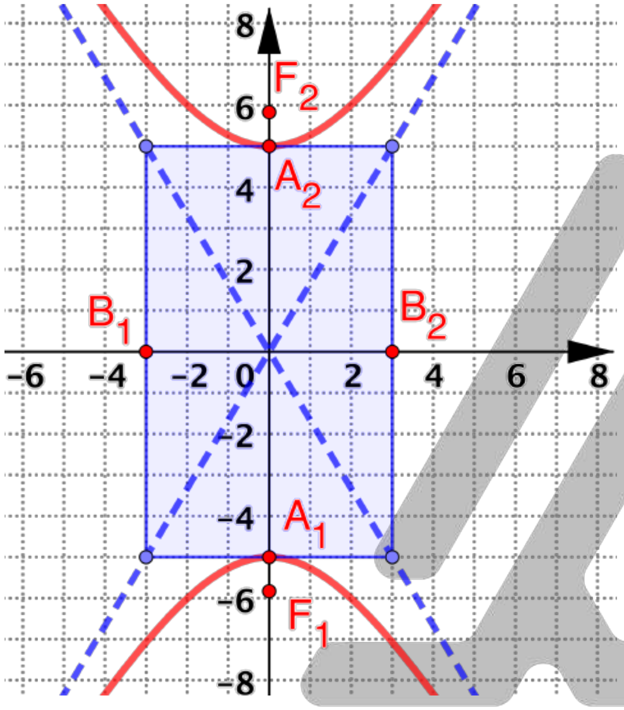
طول المحور المرافق $= 2b = 2(3) = 6$

معادلة كل من الخطين المقاربين $y = \mp\frac{b}{a}x \rightarrow y = \mp\frac{3}{4}x$



س لتكن: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد فأوجد:

- رأسي القطع
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين
- معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلاً تخطيطياً للقطع



$$\frac{9y^2}{225} - \frac{25x^2}{225} = \frac{225}{225}$$

قطع زائد محوره القاطع على محور y

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{25} = 5$$

$$b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{9} = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 34 \qquad c = \sqrt{34}$$

رأسي القطع الزائد

$$A_1(0, -a) \quad (0, -5)$$

$$A_2(0, a) \quad (0,5)$$

البؤرتين

$$F_1(0, -c) \quad \left(0, -\sqrt{34}\right)$$

$$F_2(0, c) \quad \left(0, \sqrt{34}\right)$$

معادلتي دليلي القطع

$$y = \mp\frac{a^2}{c} = \mp\frac{25}{\sqrt{34}}$$

طول كل من المحورين

طول المحور القاطع $= 2a = 2(5) = 10$

طول المحور المرافق $= 2b = 2(3) = 6$

معادلة كل من الخطين المقاربين

$$y = \mp\frac{a}{b}x \quad \rightarrow \quad y = \mp\frac{5}{3}x$$

س أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$ و رأساه $A_1(0,-2)$, $A_2(0,2)$
ثم أوجد معادلة كلٍّ من خطيه المقاربين و ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

$\because F_1, F_2 \in$ محور y

معادلة القطع

$$\therefore \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$a = 2, c = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$9 = 4 + b^2$$

$$b^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{5} \approx 2.2$$

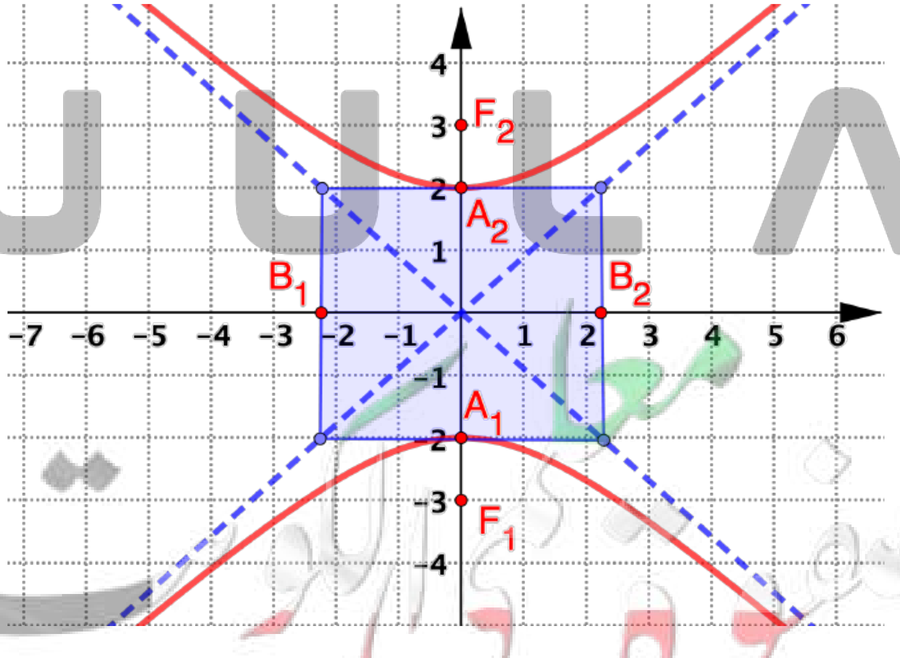
$\therefore$ معادلة القطع

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

المقاربين

$$y = \mp \frac{a}{b} x$$

$$y = \mp \frac{2}{\sqrt{5}} x$$



س أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$ و رأساه $A_1(-2,0)$, $A_2(2,0)$ ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين و ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

$\because F_1, F_2 \in$ محور x

معادلة القطع

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a = 2, c = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$16 = 4 + b^2$$

$$b^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.5$$

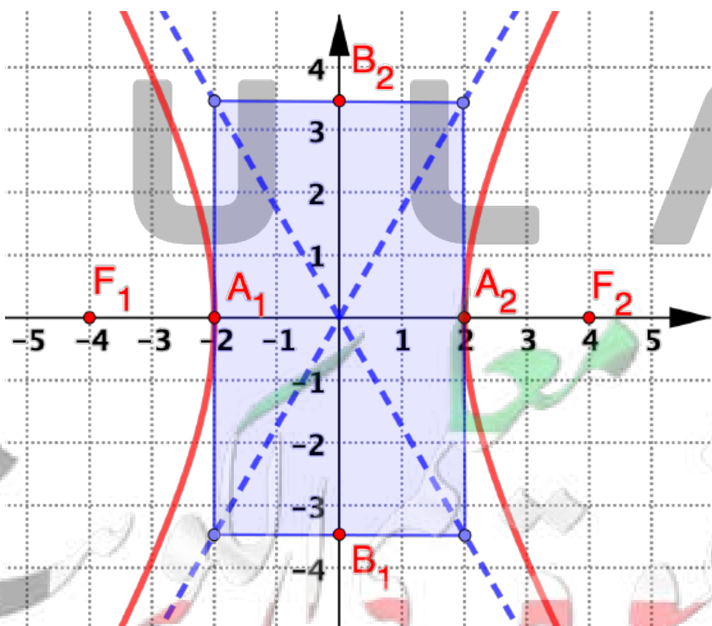
$\therefore$ معادلة القطع

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

المقاربين

$$y = \mp \frac{b}{a} x$$

$$y = \mp \frac{2\sqrt{3}}{2} x = \mp \sqrt{3}\, x$$



س أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ و إحدى بؤرتيه $F(0,\sqrt{34})$
و معادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y=\frac{3}{5}x$

$\because F \in$ محور y

$$\therefore \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$c=\sqrt{34}$$

معادلة المقارب:

$$y=\mp\frac{a}{b}x$$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{3}{5}$$

$$5a=3b$$

$$a=\frac{3b}{5}$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$a^2+b^2=34$$

ملغى

$$\left(\frac{3b}{5}\right)^2+b^2=34$$

$$\frac{9b^2}{25}+b^2=34$$

$$b^2\left(\frac{9}{25}+1\right)=34$$

$$\frac{25}{34}\times\frac{34}{25}b^2=34\times\frac{25}{34}\Rightarrow b^2=25$$

$$b=5$$

$$\therefore a=\frac{3b}{5}=\frac{3(5)}{5}$$

$$a=3$$

معادلة القطع الزائد

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$$

س أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F(\sqrt{41},0)$ و معادلة أحد خطية المقاربين $y=\frac{4}{5}x$

$\because F \in x$ محور

معادلة القطع الزائد

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

المقاربين

$$y=\mp\frac{b}{a}x$$

$$\frac{b}{a}=\frac{4}{5} \qquad 4a=5b$$

$$a=\frac{5b}{4}$$

$$c=\sqrt{41}$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$a^2+b^2=41$$

ملغى

$$\left(\frac{5b}{4}\right)^2+b^2=41$$

$$\frac{25b^2}{16}+b^2=41$$

$$b^2\left(\frac{25}{16}+1\right)=41$$

$$\frac{16}{41}\times\frac{41}{16}b^2=41\times\frac{16}{14}$$

$$b^2=16 \quad \Rightarrow \quad b=4$$

$$\therefore a=\frac{5b}{4}=\frac{5(4)}{4} \qquad a=5$$

معادلة القطع الزائد

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$$

س أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ و أحد رأسيه $(-4,0)$ و يمر بالنقطة $(5,-2)$

$\because$ أحد رأسيه $(-4,0)$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور x

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a=4$$

يمر بالنقطة $(5,-2)$

$$\frac{5^2}{4^2}-\frac{(-2)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{25}{16}-\frac{4}{b^2}=1$$

$$\frac{25}{16}-1=\frac{4}{b^2}=\frac{9}{16}$$

$$9b^2=64 \Rightarrow b^2=\frac{64}{9} \Rightarrow b=\frac{8}{3}$$

معادلة القطع الزائد

ملغى

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{\frac{64}{9}}=1$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{9y^2}{64}=1$$

س أوجد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ و يمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$

$\because$ أحد رأسيه $\left(0, \frac{5}{4}\right) \in$ محور y

$\therefore$ معادلة القطع

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$a = \frac{5}{4}$$

يمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$

$$\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} - \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$4 - \frac{3}{b^2} = 1$$

$$4 - 1 = \frac{3}{b^2} = \frac{3}{1}$$

$$3b^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

ملغى

معادلة القطع الزائد

$$\frac{y^2}{\left(\frac{25}{16}\right)} - \frac{x^2}{1} = 1$$

$$\frac{16y^2}{25} - x^2 = 1$$

س أوجد معادلة قطع زائد لمسار مركبة فضائية حول كوكب المشتري
علمًا أن: $a = 332965$ km ,$c = 492778.2$ km

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 - a^2 = b^2$$
$$(492778.2)^2 - (332965)^2 = 1.32 \times 10^{11}$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{(332965)^2} - \frac{y^2}{1.32 \times 10^{11}} = 1$$
$$\frac{x^2}{1.109 \times 10^{11}} - \frac{y^2}{1.32 \times 10^{11}} = 1$$

س أوجد معادلة قطع زائد لمسار مركبة فضائية حول كوكب المشتري
علمًا أن: c = 4498542800 km ,a = 35988342 km

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 - a^2 = b^2$$
$$(4498542800)^2 - (35988342)^2 = 2.02 \times 10^{19}$$

ملغى

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{(35988342)^2} - \frac{y^2}{2.02 \times 10^{19}} = 1$$
$$\frac{x^2}{1.295 \times 10^{15}} - \frac{y^2}{2.02 \times 10^{19}} = 1$$

س عندما تنطلق مركبة فضائية و تقترب من أحد الكواكب, فإن جاذبية هذا الكوكب تغير مسار المركبة من خط مستقيم إلى منحنى يشبه أحد فرعي القطع الزائد. أوجد معادلة قطع زائد تمثل مسار مركبة فضائية حول كوكب الزهرة إذا افترضنا أن نقطة الأصل هي مركز القطع الزائد و المحور القاطع في وضع أفقي علمًا أن طول نصف المحور القاطع $1\ 882\ 820\ Km$ و المسافي بين البؤرتين هي $108\ 208\ 000\ Km$

$$a = 1\ 882\ 820$$

$$2c = 108\ 208\ 00 \quad \Rightarrow \quad c = 54\ 104\ 000$$

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad c^2 - a^2 = b^2$$

ملغى

$$(54\ 104\ 000)^2 - (1\ 882\ 820)^2 = b^2$$

$$= 2.9\times10^{15}$$

∵ المحور القاطع أفقي

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{(1\ 882\ 820)^2} - \frac{y^2}{2.9\times10^{15}} = 1$$

$$\frac{x^2}{3.55\times10^{12}} - \frac{y^2}{2.9\times10^{15}} = 1$$

تـــدرب و تـفـوق
اختبارات الكترونية