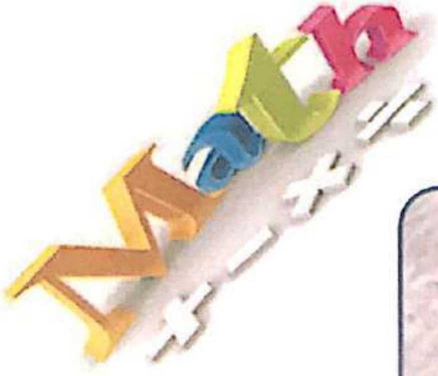
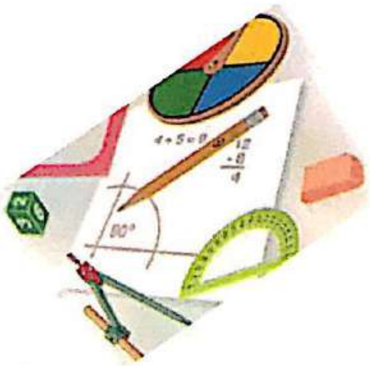
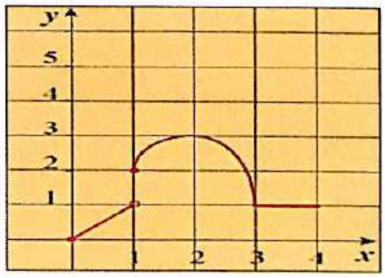


ثانوية سلمان الفارسي
قسم الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي
الفصل الدراسي الأول
الوحدة الأولى
النهايات





M . ATA

Senior
2020
المستقبل
لك
ان شاء
الله

(1 – 1) النهايات

1 الفترة (2 , 12) تمثل جوارا للعدد ......7...... وفق للمعيار ......5......

الفترة (1 , 5-) تمثل جوارا للعدد ......-2...... وفق للمعيار ......3......

الفترة (2- , 9-) تمثل جوارا للعدد ......$-5\frac{1}{2}$...... وفق للمعيار ......$3\frac{1}{2}$......

الفترة التي تمثل جوارا للعدد 5 وفقاً للمعيار 3 هي ......(2 , 8)......

الفترة التي تمثل جوارا للعدد 7- وفقاً للمعيار 5 هي ......(-12 , -2)......

نظرية (1)

يفرض أن c , L عددين حقيقيين

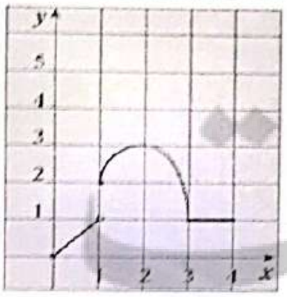
يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

ويعبر عن ذلك: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$

تدريب (1)

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة: $f:[0,4]\to\mathbb{R}$

أكمل ما يلي:

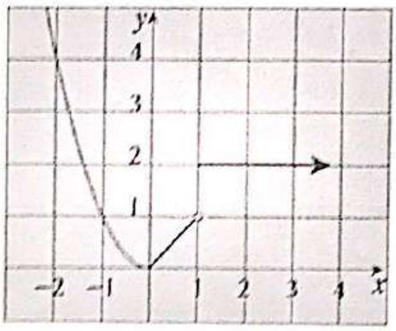


1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ..2
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ..1
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ... غيرموجودة
4. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ..3
5. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ ..3
6. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ..3
7. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ ..1
8. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ ..1
9. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ..1
10. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ..0
11. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ ..1

مثال (1)

الشكل المقابل، يمثل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:

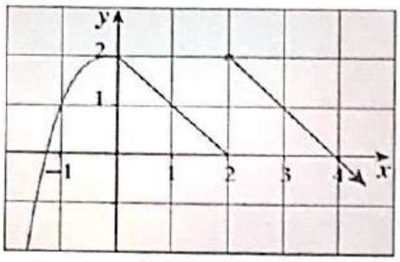


1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غيرموجودة
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$
4. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 4$

حاول أن تحل

1 يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:



a $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$

b $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

c $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

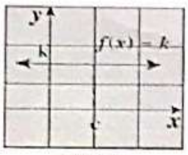
d $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$

****

نظرية (2)

إذا كانت f دالة: $f(x) = k$ وكانا k , c عددان حقيقيان فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$$

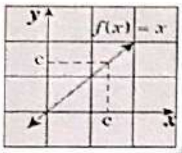


شكل (2)

نظرية (3)

إذا كانت f دالة: $f(x) = x$ وكان c عددًا حقيقيًا فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$$



شكل (3)

نظرية (4)

إذا كانت k, c, M, L أعدادًا حقيقية، $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$ ، $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ فإن:

a قاعدة الجمع: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L + M$

b قاعدة الطرح: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x) = L - M$

c قاعدة الضرب: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \cdot M$

d قاعدة الضرب في ثابت: $\lim\limits_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x\to c} f(x) = k \cdot L$

e قاعدة القسمة: $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ ، $M \neq 0$

كن طموحا لكي تصل الى اهدافك

مثال (2)

بفرض أنّ: $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$

أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to 1}(f(x)-g(x))$ ⓑ $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)}$ ⓒ $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)}$

كن ايجابيا ولا تنظر خلفك

حاول أن تحل (2)

2 بفرض أنّ: $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$ ، $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$

أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$ ⓑ $\lim_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$ ⓒ $\lim_{x\to 2}\left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

الحل

ⓐ $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x) = 7 + -3 = 4$

ⓑ $\lim_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x) = 7 \cdot -3 = -21$

ⓒ $\lim_{x\to 2}\left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to 2}(8f(x)\cdot g(x))}{\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))}$

$= \frac{8\lim_{x\to 2} f(x)\cdot \lim_{x\to 2} g(x)}{\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))} = \frac{(8)(7)(-3)}{4} = -42$

نهاية المقام:

$\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$

$= \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)$

$= 7 + -3 = 4 \neq 0$

نظرية (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوديات النسبية

Polynomial and Rational Functions

(a) إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عددًا حقيقيًا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0$$

(b) إذا كانت $g(x)$ ، $f(x)$ كثيرتي حدود، c عددًا حقيقيًا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad , \quad g(c) \neq 0$$

مثال (3) | اوجد ان امكن:

$$\lim_{x \to -1}(x^4 - 2x^3 + 5)$$

الحل

$= (-1)^4 - 2(-1)^3 + 5 = 8$

$$\lim_{x \to 1}(x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$$

الحل

$= (1)^3 + 3(1)^2 - 2(1) - 17 = -15$

$$\lim_{x \to 3}(x^2(2 - x))$$

الحل

$\lim_{x \to 3}(2x^2 - x^3) = 2(3)^2 - (3)^3 = -9$

هل تريد النجاح والتفوق ؟؟

حاول أن تحل (3)

اوجد ان امكن:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+3}$$

الحل

نهاية المقام:

$\lim_{x\to2}(x+3)=2+3=5\neq0$

$$=\frac{\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)}{\lim_{x\to2}(x+3)}$$

$$=\frac{(2)^2+2(2)+4}{5}=\frac{12}{5}$$

ملحوظة
في حالة الحدودية النسبية يمكن استخدام التعويض المباشر لايجاد النهاية بعد التأكد أن مقام الدالة $\neq$ صفر

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$$

الحل

نهاية المقام:

$\lim_{x\to2}(x+2)=2+2=4\neq0$

$$=\frac{\lim_{x\to2}(x^2+5x+6)}{\lim_{x\to2}(x+2)}$$

$$=\frac{(2)^2+5(2)+6}{4}=5$$

احد اسرار النجاح في الصبر والمثابره

فكرة الحل: حساب نهاية دالة معرفة بقاعدتين عند النقطة المفصلية

حاول أن تحل (4)

4 إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : x<2 \quad \text{يسار} \\ x-1 & : x>2 \quad \text{يمين}\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 2} f(x)$

الحل

$$x^2-3 \longleftarrow 2 \longrightarrow x-1$$

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-3)=(2)^2-3=1$$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x-1)=2-1=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=1$$

مثال (5)

إذا كانت الدالة g:

$$g(x)=\begin{cases}x^2-2 & x\leqslant 0 \quad \text{يسار} \\ 1-2x & x>0 \quad \text{يمين}\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 0} g(x)$

الحل

اليسار:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-2)=(0)^2-2=-2$$

اليمين:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-2x)=1-2(0)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^-} g(x)\neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة

هل اديت فروضك ؟؟

مثال (4)

إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & x<1 \quad \text{يسار}\\ 5 & x=1\\ \dfrac{5}{x} & x>1 \quad \text{يمين}\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحل

اليمين:

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{5}{x}\right)$

$= \dfrac{\lim_{x\to 1^+} 5}{\lim_{x\to 1^+} x} = \frac{5}{1} = 5$

نهاية المقام

$\lim_{x\to 1^+}(x) = 1 \neq 0$

اليسار:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(3x+2)$

$= 3(1)+2 = 5$

$\therefore \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 5$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 5$

حاول أن تحل (5)

إذا كانت الدالة g:

$$g(x)=\begin{cases}x^3+x & x>1 \quad \text{يمين}\\ \dfrac{x}{x^2+1} & x\leqslant 1 \quad \text{يسار}\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 1} g(x)$

الحل

اليمين:

$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^3+x)$

$= (1)^3+1 = 2$

اليسار:

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x^2+1}$

$= \dfrac{\lim_{x\to 1^-} x}{\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)} = \frac{1}{2}$

نهاية المقام

$\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)$

$= (1)^2+1 = 2 \neq 0$

$\therefore \lim_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim_{x\to 1^+} g(x)$

$\therefore \lim_{x\to 1} g(x)$ غير موجودة

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

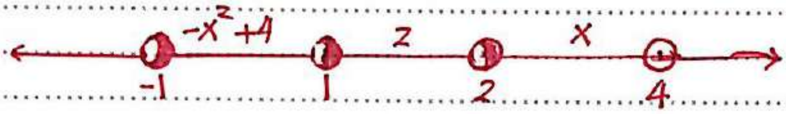
لتكن الدالّة f:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4\ , & -1\le x<1\\ 2\ , & 1\le x<2\\ x\ , & 2\le x<4\end{cases}$$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

الحل



(a)

يمين:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2)=2$

يسار:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x^2+4)=-(-1)^2+4=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

(b)

يمين:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x)=2$

يسار:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$

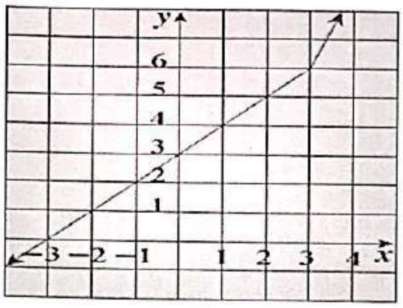
$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$

(c)

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x)=3$

بالسؤال يتعلم الانسان

فكرة الحل : ايجاد نهاية دالة تحتوي مطلق عند صفر المطلق



مثال (6)

لتكن: $f(x) = |x-3| + 2x$ الممثلة بالشكل.

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ ؟

الحل

اعادة تعريف المطلق

$f(x) = |x-3| + 2x$

$(-x+3)+2x \quad \xleftarrow{\quad 3 \quad} \quad (x-3)+2x$

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)+2x = \boxed{3x-3} & : x \geq 3 \text{ (يمين)} \\ (-x+3)+2x = \boxed{x+3} & : x < 3 \text{ (يسار)} \end{cases}$$

اليمين :

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (3x-3) = 3(3) - 3 = 6$$

اليسار :

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x+3) = 3+3 = 6$$

$$\therefore \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$$

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = 6$$

لايوجد مستحيل

حاول أن تحل (6)

تستطيع ان تفعلها مهما كانت

لتكن f : $f(x) = x^2 - |x+2|$

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد: $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ ، $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

الحل

اعادة تعريف المطلق

$f(x) = x^2 - |x+2|$

$x^2 + (x+2)$ ، $x^2 - (x+2)$ ، -2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - (x+2) & : x \geq -2 \quad \text{يمين} \\ x^2 + (x+2) & : x < -2 \quad \text{يسار} \end{cases}$$

اليمين:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x^2 - (x+2))$$

$$= (-2)^2 - (-2+2) = 4$$

اليسار:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x^2 + (x+2))$$

$$= (-2)^2 + (-2+2) = 4$$

$$\therefore \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 4$$

$$\therefore \lim_{x \to -2} f(x) = 4$$

فكرة الحل : حساب نهاية ← حدودية / جذر تكعيبي

نظرية (6)

بفرض أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

ⓐ $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)^n$

ⓑ $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن يكون $c > 0$)

ⓒ $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$)

مثال / حاول أن تحل (7)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)^5$$

الحل

$$= \left[\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)\right]^5 = \left[(-1)^2-3(-1)-1\right]^5 = 243$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3)^7$$

الحل

$$= \left[\lim_{x\to 2}(x^2-3)\right]^7 = \left[(2)^2-3\right]^7 = 1$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3}$$

الحل

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(x-3)} = \sqrt[3]{2-3} = -1$$

جذر تكعيبي

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5}$$

الحل

$$\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^3-4x+5)} = \sqrt[3]{(-1)^3-4(-1)+5} = 2$$

الفرق بين الاغبياء والاذكياء،الاغبياء يملكون حلما ، الاذكياء يملكون هدفا

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to5}\sqrt{x^2-9}=$$

الحل

نهاية ما تحت الجذر:

$$\lim_{x\to5}(x^2-9)=(5)^2-9=16>0$$

نهاية الجذر:

$$\lim_{x\to5}\sqrt{3x^2-9}=\sqrt{\lim_{x\to5}(x^2-9)}=\sqrt{16}=4$$

لا تفكر بالاهداف التي تناسب قدراتك

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to3}\sqrt{3x^2-2}=$$

الحل

نهاية ما تحت الجذر:

$$\lim_{x\to3}(3x^2-2)=3(3)^2-2=25>0$$

نهاية الجذر:

$$\lim_{x\to3}\sqrt{3x^2-2}=\sqrt{\lim_{x\to3}(3x^2-2)}=\sqrt{25}=5$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to2}\sqrt{x^2-7}=$$

الحل

نهاية ما تحت الجذر:

$$\lim_{x\to2}(x^2-7)=(2)^2-7=-3<0$$

$$\therefore \lim_{x\to2}\sqrt{x^2-7}$$ غير موجودة.

فكر بالقدرات التي تناسب اهدافك مثل التركيز في الدراسة

فكرة الحل : حساب نهاية دالة نسبية (بسط ومقام) أحدهما يحوي جذر

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 4}(x+\sqrt{x})^4$$

الحل

نهاية ما تحت الجذر:

$\lim_{x\to 4} x = 4 > 0$

نهاية الجذر:

$\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x\to 4} x} = \sqrt{4} = 2$

$= \left[\lim_{x\to 4}(x+\sqrt{x})\right]^4$

$= \left[\lim_{x\to 4} x + \lim_{x\to 4}\sqrt{x}\right]^4$

$= [4+2]^4 = 1296$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$$

الحل

نهاية المقام:

$\lim_{x\to -1}(x-2) = -1-2 = -3 \neq 0$

نهاية الجذر التكعيبي:

$\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^3-4x+5)}$

$= \sqrt[3]{(-1)^3-4(-1)+5} = 2$

$= \dfrac{\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{\lim_{x\to -1}(x-2)}$

$= \dfrac{2}{-3} = \dfrac{-2}{3}$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$$

الحل

نهاية ما تحت الجذر:

$\lim_{x\to 3}(3x^2-2) = 3(3)^2-2 = 25 > 0$

نهاية الجذر:

$\lim_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2} = \sqrt{\lim_{x\to 3}(3x^2-2)} = \sqrt{25} = 5$

نهاية المقام:

$\lim_{x\to 3}(x-2) = 3-2 = 1 \neq 0$

$= \dfrac{\lim_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2}}{\lim_{x\to 3}(x-2)} = \dfrac{5}{1}$

$= 5$

حلل ما يلي :

$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

$x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$

$x^2+7x = x(x+7)$

$x^2+x = x(x+1)$

$x^2-1 = (x-1)(x+1)$

$x^2-4 = (x-2)(x+2)$

$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

$x^3+27 =$

كل اغنياء العالم كانوا فقراء ولكن لديهم طموح

$(\cdots\cdots)^2-9=[(\cdots\cdots)-3][(\cdots\cdots)+3]$

$(x+4)^2-9=[(x+4)-3][(x+4)+3]=(x+1)(x+7)$

$(\cdots\cdots)^3 \oplus 8=[(\cdots\cdots)\oplus 2][(\cdots\cdots)^2\ominus 2(\cdots\cdots)+4]$

$(\cdots\cdots)^3 \ominus 27=[(\cdots\cdots)\ominus 3][(\cdots\cdots)^2\oplus 3(\cdots\cdots)+9]$

$(2+x)^3+8=[(2+x)+2][(2+x)^2-2(2+x)+4]$

$x-1=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$

$x-1=[\sqrt[3]{x}-1][(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]$

كن طموح وحقق اهدافك

فكرة الحل: تحليل + اختصار العامل الصفري

إلغاء العامل الصفري $\left(\frac{0}{0}\right)$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

مثال (8) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}$$

$$= \frac{x+2}{x} \quad : x \neq 1$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 1} x = 1 \neq 0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1} x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

انار الله دربك ووفقك لما يحب ويرضاه

حاول أن تحل (8) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن x بـ -2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}$$

$$= \frac{x+1}{x-2} \quad : x \neq -2$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to -2}(x-2) = -2-2 = -4 \neq 0$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\frac{x+1}{x-2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x+1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-2)} = \frac{-2+1}{-4} = \frac{1}{4}$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4+x)^2-16}{x} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=0$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{(4+x)^2-16}{x} = \frac{((4+x)-4)((4+x)+4)}{x}$$

$$= \frac{\cancel{x}(x+8)}{\cancel{x}} = x+8 \quad : x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+8) = 0+8 = 8$$

يمكن استخدام طريقة أخرى في الحل كما في الدرس التالي (فك القوس)

النجاح ملك من يدفع ثمنه

حاول أن تحل (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -7}\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=-7$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x^2+8x+16-9}{x^2+7x} = \frac{x^2+8x+7}{x^2+7x} = \frac{\cancel{(x+7)}(x+1)}{x\cancel{(x+7)}}$$

$$= \frac{x+1}{x} \quad : x \neq -7$$

$$\lim_{x\to -7} f(x) = \lim_{x\to -7}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \frac{\lim_{x\to -7}(x+1)}{\lim_{x\to -7} x} = \frac{-7+1}{-7} = \frac{6}{7}$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to -7} x = -7 \neq 0$$

فكرة الحل : تحليل + اختصار العامل الصفري

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^3-27}{x} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=0$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{(3+x)^3-27}{x} = \frac{\big((3+x)-3\big)\big((3+x)^2+3(3+x)+9\big)}{x}$$

$$= \frac{\cancel{x}\big((3+x)^2+3(3+x)+9\big)}{\cancel{x}} \quad : x \neq 0$$

$$= (3+x)^2+3(3+x)+9$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[(3+x)^2+3(3+x)+9\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}(3+x)^2 + \lim_{x\to 0}3(3+x) + \lim_{x\to 0} 9$$

$$= (3+0)^2+3(3+0)+9 = 27$$

حاول حل التمرين بطريقة أخرى

مثال (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=0$ لحصلنا على صيغة غير معينة

فك التربيع:

$$(2+x)^3 = (2)^3+3(2)^2(x)+3(2)(x)^2+(x)^3$$

$$= 8+12x+6x^2+x^3$$

$$f(x) = \frac{(2+x)^3-8}{x} = \frac{8+12x+6x^2+x^3-8}{x}$$

$$= \frac{12x+6x^2+x^3}{x} = \frac{x(12+6x+x^2)}{x} \quad : x \neq 0$$

$$= 12+6x+x^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(12+6x+x^2) = 12+6(0)+(0)^2 = 12$$

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

مثال (10) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=-1$ لحصلنا على صيغة غير معينة

قسمة تركيبية:

-1	1	6	2	-3
	↓	-1	-5	3
	1	5	-3	0

ناتج القسمة: x^2+5x-3

$$f(x)=\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}=x^2+5x-3$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(x^2+5x-3)=(-1)^2+5(-1)-3=-7$$

مثال (10) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=-2$ لحصلنا على صيغة غير معينة

قسمة تركيبية:

-2	1	0	0	0	0	32
		-2	4	-8	16	-32
	1	-2	4	-8	16	0

ناتج القسمة: $x^4-2x^3+4x^2-8x+16$

$$f(x)=\frac{x^5+32}{x+2}=x^4-2x^3+4x^2-8x+16$$

$$\therefore \lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

$$=(-2)^4-2(-2)^3+4(-2)^2-8(-2)+16$$

$$=80$$

قد تتعثر احيانا
وتسقط احيانا اخري
انهض وواصل الطريق

فكرة الحل: قسمة تركيبية

حاول أن تحل (10)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to +3}\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3} = \frac{0}{0}$$

حاول أن تحل (10)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2} = \frac{0}{0}$$

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

فكرة الحل : اعادة تعريف المطلق + اختصار العامل الصفري

حاول أن تحل (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 5}\frac{|x+2|-7}{x^2-25} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن x بـ 5 لحصلنا على صيغة غير معينة

اعادة تعريف المطلق

$|x+2|$

$-(x+2)$ ، $(x+2)$ ، -2

$\because x \to 5$

$\therefore |x+2| = x+2$

$$f(x) = \frac{|x+2|-7}{x^2-25} = \frac{x+2-7}{x^2-25}$$

$$= \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{x+5} \quad : x \neq 5$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to 5}(x+5) = 5+5 = 10 \neq 0$$

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5}$$

$$= \frac{1}{10}$$

ملحوظة :

إذا كانت x تؤول إلى عدد غير صفر المطلق يعاد تعريف المطلق بقاعدة واحدة

يمكن التعويض بالعدد داخل المطلق إذا كان الناتج

صفر	عدد موجب	عدد سالب
قاعدتين	قاعدة واحدة (مابداخل المطلق)	قاعدة واحدة - (مابداخل المطلق)
إذا كان $x \to 2$ فإن :	إذا كان $x \to 5$ فإن :	اذا كان $x \to 2$ فإن :
$\|x-2\| = \begin{cases} x-2 & : x \geq 2 \\ -(x-2) & : x < 2 \end{cases}$	$\|x-2\| = (x-2)$	$\|x-3\| = -(x-3)$

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

فكرة الحل
اعادة تعريف المطلق + اختصار العامل الصفري

مثال (8) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to1}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن x ب 1 حصلنا على صيغة غير معينة

$|x-1|$

$-(x-1)$ ← 1 → $(x-1)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1} & : x>1\\[2mm] \dfrac{-(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-1}{x+1} & : x<1\end{cases}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & : x>1\\[2mm] \dfrac{-1}{x+1} & : x<1\end{cases}$$

اليمين:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to1^+}(x+1)=1+1=2\neq0$$

اليسار:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{-1}{2}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to1^-}(x+1)=1+1=2\neq0$$

$$\therefore \lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$$ غير موجودة

ملحوظة
إذا كانت x تؤول إلى صفر المطلق نعيد تعريف المطلق بقاعدتين.

قيل لنابليون بونابرت يوما ان جبال الاب شاهقة تمنع تقدمك ، فقال يجب ان تزول من الارض

فكرة الحل : ضرب في المرافق + اختصار العامل الصفري

مثال (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=2$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}=\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$=\frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}=\frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}}\quad : x\neq 2$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}2}{\lim\limits_{x\to 2}\left[\sqrt{2x-3}+1\right]}=\frac{2}{2}=1$$

نهاية ماتحت الجذر :

$$\lim_{x\to 2}(2x-3)=2(2)-3=1>0$$

نهاية الجذر :

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(2x-3)}$$

$$=\sqrt{1}=1$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to 2}\left[\sqrt{2x-3}+1\right]=\left[\lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3}+\lim_{x\to 2}1\right]$$

$$=\left[1+1\right]=2\neq 0$$

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة علي الانتصار

فكرة الحل: ضرب في المرافق + اختصار العامل الصفري

حاول أن تحل (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=2$ لحصلنا على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}\times\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{x^2+5-9}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\frac{x^2-4}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}\quad : x\neq 2$$

$$=\frac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

نهاية ما تحت الجذر:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+5)=(2)^2+5=9>0$$

نهاية الجذر:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+5)}$$

$$=\sqrt{9}=3$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 2}\left[x(\sqrt{x^2+5}+3)\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}x\left(\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}+\lim_{x\to 2}3\right)$$

$$=2(3+3)=12\neq 0$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 2}(x+2)}{\lim_{x\to 2}x(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\frac{2+2}{12}=\frac{1}{3}$$

Senior
2020
المستقبل
لك
ان شاء
الله

فكرة الحل : ضرب في مرافق + اختصار العامل الصفري

حاول أن تحل (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{3-\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=9$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{x-9}{3-\sqrt{x}}\times\frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}=\frac{(x-9)(3+\sqrt{x})}{9-x}=\frac{-(9-x)(3+\sqrt{x})}{(9-x)}$$

$$=-(3+\sqrt{x})=-3-\sqrt{x} \qquad : x\neq 9$$

$$\lim_{x\to 9} f(x)=\lim_{x\to 9}(-3-\sqrt{x})$$

$$=\lim_{x\to 9}(-3)-\lim_{x\to 9}\sqrt{x}=-3-\sqrt{9}=-6$$

ملحوظة :

في حالة إيجاد $\lim_{x\to c}\sqrt{x}$ يمكن استخدام التعويض المباشر دون خطوات الجذر التربيعي

كراسة التمارين

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0}$$

من لا يشكر الناس لا يشكر الله

الحل

عند التعويض عن $x=1$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\sqrt{x}+1 \qquad : x\neq 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+\lim_{x\to 1}1=\sqrt{1}+1=2$$

ملحوظة :

يمكن استخدام التحليل لحل التمرين السابق.

اشكر ثلاث اشخاص غدا

فكرة الحل : تحليل + اختصار العامل الصفري $x-a=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})$

مثال (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x=1$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)}$$

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1 \quad : x\neq1$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{x^2}+\lim_{x\to1}\sqrt[3]{x}+\lim_{x\to1}1$$

ملحوظة: العدد المضاف خارج الجذر التكعيبي

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to1}x^2}+\sqrt[3]{\lim_{x\to1}x}+\lim_{x\to1}1$$

$$\sqrt[3]{(1)^2}+\sqrt[3]{1}+1=3$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt[3]{9x}-3}=\frac{0}{0}$$

فكرة الحل : ضرب × المرافق

الحل

عند التعويض عن $x=3$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x)=\frac{x-3}{\sqrt[3]{9x}-3}\times\frac{\sqrt[3]{(9x)^2}+3\sqrt[3]{9x}+9}{(\sqrt[3]{(9x)^2}+3\sqrt[3]{9x}+9)}=\frac{(x-3)(\sqrt[3]{(9x)^2}+3\sqrt[3]{9x}+9)}{9x-27}$$

$$: x\neq3$$

$$=\frac{\cancel{(x-3)}(\sqrt[3]{(9x)^2}+3\sqrt[3]{9x}+9)}{9\cancel{(x-3)}}=\frac{1}{9}\left(\sqrt[3]{(9x)^2}+3\sqrt[3]{9x}+9\right)$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{1}{9}\left(\sqrt[3]{(9x)^2}+3\sqrt[3]{9x}+9\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left[\sqrt[3]{\lim_{x\to3}(9x)^2}+3\sqrt[3]{\lim_{x\to3}9x}+\lim_{x\to3}9\right]$$

$$=\frac{1}{9}\left[\sqrt[3]{(9(3))^2}+3\sqrt[3]{9(3)}+9\right]=3$$

قد تكون افضل الطرق اصعبها لكن عليك دائما اتباعها

فكرة الحل :
ضرب في المرافق + اختصار

$\sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2} = x+2$

$\sqrt[3]{(x-5)^2} \cdot \sqrt[3]{(x-5)} = x-5$

مثال (9) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x = -2$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt[3]{(x+2)^2})}{(x+2)} \quad : x \neq -2$$

$$= (x-2)(\sqrt[3]{(x+2)^2})$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\left[(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\right]$$

ملحوظة :
العدد المضاف داخل الجذر التكعيبي

$$= \lim_{x\to -2}(x-2) \cdot \lim_{x\to -2}\sqrt{(x+2)^2}$$

$$= \lim_{x\to -2}(x-2) \cdot \sqrt{\lim_{x\to -2}(x+2)^2}$$

$$= (-2-2) \cdot \sqrt{(-2+2)^2} = 0$$

كراسة التمارين

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} =$$

الحكمة هي ان تعرف ما الذي يجب ان تفعله

فكرة الحل : توحيد الجذر + تحليل + اختصار

حاول أن تحل (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{0}{0}$$

الحل

عند التعويض عن $x = 0$ لحصلنا على صيغة غير معينة

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}} = \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)}}$$

$$= \sqrt[3]{x^2-x+1} \quad ; \quad x \neq -1$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \sqrt[3]{x^2-x+1}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to -1} (x^2-x+1)}$$

$$= \sqrt[3]{(-1)^2-(-1)+1} = \sqrt[3]{3}$$

ملحوظة :
يوجد جذر في كل من البسط والمقام (توحيد الجذر)

المهارة ان تعرف كيف تفعله

فكرة الحل: توحيد مقامات + اختصار

كراسة التمارين — أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=$$

الحل

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{1_{(x+1)}}{x-1_{(x+1)}}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}\quad : x\neq 1 :$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1}(x+1)}=\frac{1}{2}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2\neq 0$$

كراسة التمارين

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{4x}{x^2-4}\right)=$$

الحل

$$f(x)=\frac{x_{(x+2)}}{x-2_{(x+2)}}-\frac{4x}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x+2)-4x}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2+2x-4x}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2-2x}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x}{x+2}$$

$$: x\neq 2$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+2}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 2} x}{\lim_{x\to 2}(x+2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4\neq 0$$

النجاح ان تفعله

فكرة الحل : توحيد مقامات + اختصار

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=$$

الحل

$$f(x)=\frac{1\,(x^2+x+1)}{x-1\,(x^2+x+1)}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x^2+x+1)-3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$: x\neq 1$

$$=\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}(x+2)}{\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{1+2}{3}=1$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=(1)^2+1+1$$

$$=3\neq 0$$

ملحوظة:
في حالة جمع أو طرح كسرين نستخدم توحيد المقامات

في لفظ القمة شيء يقول لك قم

يمكن تمييز هذا النوع بالتعويض المباشر ويكون الناتج $\frac{\text{عدد موجب}}{|0|}$ الحل ∞ ، $\frac{\text{عدد سالب}}{|0|}$ الحل $-\infty$ وباستخدام نظرية 10

(2 – 1) نهايات تشتمل على $-\infty$ ، ∞

نظرية (9)

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \iff \left(\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty\right)$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \iff \left(\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty\right)$$

نظرية (10)

إذا كان n عدد صحيح زوجي موجب فإن:

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$$

إذا كان n عدد صحيح فردي موجب فإن:

① $\lim_{x\to c^+} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$ ② $\lim_{x\to c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = -\infty$

حيث $c \in \mathbb{R}$

مثال (2) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|} = \frac{1}{|0|}$$ يمين ∞ ، ∞ ، يسار ∞

الحل

$|x-2|$

اعادة تعريف المطلق:

$-(x-2)$ ، $(x-2)$ ، 2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & : x > 2 \\ \frac{-1}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$$

اليمين:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2}\right) = \infty \to ①$$

اليسار:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{-1}{x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \left(-1 \cdot \frac{1}{x-2}\right) = \infty \to ②$$

نظرية: $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)} = -\infty$ و $-1 < 0$

من 1 ، 2 ينتج أن

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$$

حاول أن تحل (2) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}\frac{3}{|x+1|} = \frac{3}{|0|}$$

الحل

$$f(x)=\frac{3}{|x+1|}=\begin{cases}\frac{3}{(x+1)} & : x>-1\\ \frac{-3}{(x+1)} & : x<-1\end{cases}$$

اليمين:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{3}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\left(3\cdot\frac{1}{x+1}\right)=\infty \to (2)$$

نظرية: $\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}=\infty$ ، $3>0$

اليسار:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{-3}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\left(-3\cdot\frac{1}{x+1}\right)=\infty \to (1)$$

نظرية: $\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}=-\infty$ ، $-1<0$

من 1 ، 2 ينتج أن

$$\lim_{x\to -1}\frac{3}{|x+1|}=\infty$$

كراسة التمارين أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -2}\frac{-7}{|x+2|} = \frac{-7}{|0|}$$

يمين $-\infty$ ، $-\infty$ ، يسار $-\infty$

الحل

$$f(x)=\frac{-7}{|x+2|}=\begin{cases}\frac{-7}{(x+2)} & : x>-2\\ \frac{7}{(x+2)} & : x<-2\end{cases}$$

اليمين:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\left(\frac{-7}{x+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to -2^+}\left(-7\cdot\frac{1}{x+2}\right)=-\infty \to (2)$$

نظرية: $\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x+2}=\infty$ ، $-7<0$

اليسار:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\left(\frac{7}{(x+2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to -2^-}\left(7\cdot\frac{1}{x+2}\right)=-\infty \to (1)$$

$\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x+2}=-\infty$ ، $7>0$

من 1 ، 2 ينتج أن

$$\lim_{x\to -2}\frac{-7}{|x+2|}=-\infty$$

تعود على العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{(x-3)^2}}=$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

الحل

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{|x-3|}$$

ملحوظة

$\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$

ويتم حل المتراجحين كما في الأمثلة السابقة

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+}\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}}=$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

الحل

$$f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}}=\frac{2x-1}{|(2x-1)^4|}=\frac{2x-1}{(2x-1)^4}$$

$$=\frac{1}{(2x-1)^3} \quad : x\neq\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{1}{(2x-1)^3}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{1}{8(x-\frac{1}{2})^3}$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}\right)=\infty$$

نظرية: $\frac{1}{8}>0$ ، $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}=\infty$

الفاشلون ينحنون للعقبات ، الابطال يجعلون العقبات تنحني لهم

(2 – 1) نهايات تشتمل على $-\infty$ ، ∞

نظرية (7)

لتكن f: $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

نظرية (8)

لتكن f : $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $f(x) = \frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

فمثلاً: $\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{x^3} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^4} = 0 \quad , \quad ...$

تبقى النظريات (c) ، (a) 6) ،(4) ،(2) صحيحة عند إيجاد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ وكذلك عند إيجاد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

مثال (1)

أوجد إن أمكن

$$a) \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+4} =$$

الحل

بالقسمة بسطاً ومقاماً على x

$x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 1+0 = 1 \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}}\right) = \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

مثال (1)

$$b) \lim_{x\to-\infty} \frac{x+5}{x^2+25} =$$

الحل

بالقسمة بسطاً ومقاماً على x^2

$x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{25}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{25}{x^2}}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{25}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{25}{x^2} = 1+0 = 1 \neq 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{25}{x^2}}\right) = \frac{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2}}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

نتعلم من الفشل اكثر من النجاح

مثال (1) أوجد إن أمكن

$$c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^3}{5-7x^3}=$$

الحل بالقسمة بسطا ومقاما على x^3
$: x \neq 0$

$$f(x)=\frac{\frac{6x^3}{x^3}}{\frac{5}{x^3}-\frac{7x^3}{x^3}}=\frac{6}{\frac{5}{x^3}-7}$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}-7\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}-\lim_{x\to\infty}7$$

$$=0-7=-7\neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{\frac{5}{x^3}-7}\right)$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}6}{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}-7\right)}=\frac{6}{-7}=\frac{-6}{7}$$

حاول أن تحل (1) أوجد إن أمكن

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+4}=$$

ملحوظة
يمكن حل هذا النوع من التمارين باستخدام
نظرية 11 (بمجرد النظر)

الحل $=0$

ثق بنفسك ، فانت تعرف اكثر مما تعتقد

$$b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x^2+9}=$$

درجة البسط < درجة المقام

الحل $=0$

$$c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+1}{x^3+5}=$$

درجة البسط = درجة المقام الحل $=1$

(1 – 3) صيغ غير معينة

ملاحظة: إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \quad , \quad a_n \in \mathbb{R}^*$

فإن: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

أحيانًا نحتاج لحساب نهاية دالة على الصورة، $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

حيث، $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$

في هذه الحالة نحصل على إحدى الصور التالية، $\frac{-\infty}{-\infty}$ أو $\frac{\infty}{-\infty}$ أو $\frac{-\infty}{\infty}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

ونسميها صيغ غير معينة.

كذلك إذا حسبنا $\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$ وحصلنا على الصورة $(\infty - \infty)$

فهي تسمى أيضًا صيغة غير معينة.

مثال (1) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 3x + 1) =$$

الحل

$$= \lim_{x \to \infty} (2x^2) = \infty$$

حاول أن تحل (1) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to \infty} (-3x^2 + 2x - 4) =$$

الحل

$$= \lim_{x \to \infty} (-3x^2) = -\infty$$

الفوز هو ان تتقدم لا ان يتراجع منافسوك

نظرية (11)

إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$$ فإن:

a $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} : n = m$

b $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 : n < m$

ملاحظة: تبقى النظرية صحيحة عندما $x \to -\infty$

مثال (2) أوجد إن أمكن

$(a) \lim_{x\to\infty} \frac{4-3x^3}{2x^3+5} =$

الحل

درجة البسط = درجة المقام $= \frac{-3}{2}$

$(b) \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+x-1}{3x^4-x} =$

الحل

درجة البسط < درجة المقام $= 0$

$(c) \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-1}{7-2x^4} =$

الحل

$= \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$

حاول أن تحل (1) أوجد إن أمكن

$(a) \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1} =$

الحل

$= \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$

$(b) \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{4x^3-2x+3} =$

الحل

$= 0$

مثال (3)

اذا كان

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+3}{2x+5}=3$$

فاوجد قيمة كل من الثابتين b ، a

الحل

$\because 3 \neq 0$

$\therefore$ درجة البسط = درجة المقام

$ax^2 = 0 \longrightarrow a = 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{bx+3}{2x+5}=3$$

$\frac{b}{2} = 3 \longrightarrow b = 6$

حاول أن تحل (3)

اذا كان

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{ax^2+bx-3}=-1$$

فاوجد قيمة كل من الثابتين b ، a

الحل

$\because -1 \neq 0$

$\therefore$ درجة البسط = درجة المقام

$ax^2 = 0 \longrightarrow a = 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{bx-3}=-1$$

$\frac{1}{b} = -1 \longrightarrow b = -1$

ساصير يوما ما ما اريد

مسألة شهيرة بمعظم الاختبارات

مثال (4)

أوجد إن أمكن

$$a) \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}} =$$

الحل

بقسمة كل من البسط والمقام على x

$$f(x) = \frac{x\left(\frac{x}{x} - \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)}} = \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$\because x \to \infty$

$\therefore |x| = x$

$$= \frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}} = \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\because x \neq 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1-0}{1} = 1$$

نهاية ما تحت الجذر :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$$

$$= 1+0-0 = 1 > 0$$

نهاية الجذر :

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} = 1 \neq 0$$

ملحوظة :

يمكن الحل بمجرد النظر في المثال السابق

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\text{معامل } x}{\sqrt{\text{معامل } x^2}}$$

الجميع يفكر في تغيير العالم ،لكن لا احد يفكر في تغيير نفسه

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - x}}{x+1} =$

أوجد إن أمكن

حاول أن تحل (4)

الحل

بقسمة كل من البسط والمقام على x

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2\left(\frac{2x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{|x|\sqrt{2 - \frac{1}{x}}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

$\because x \to \infty$

$\therefore |x| = x$

$= \dfrac{\cancel{x}\sqrt{2 - \frac{1}{x}}}{\cancel{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{\sqrt{2 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$

$\because x \neq 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2 - \frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

نهاية ماتحت الجذر:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 2 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

$= 2 - 0 = 2 > 0$

نهاية الجذر:

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right)}$

$= \sqrt{2}$

نهاية المقام:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

$= 1 + 0 = 1 \neq 0$

$$c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}=$$

حاول أن تحل (4)

الحل

بقسمة كلا من البسط والمقام على x

$$f(x)=\frac{x\left(\frac{3x}{x}-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$\because x\to-\infty$

$\therefore |x|=-x$

$$=\frac{\cancel{x}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\frac{-\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\qquad :x\neq 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$=-\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$=\frac{-\left(\lim\limits_{x\to-\infty}3-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$=\frac{-(3-0)}{1}=-3$$

نهاية ما تحت الجذر:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}$$

$$=1-0=1>0$$

نهاية الجذر:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}$$

$$=\sqrt{1}=1$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=1\neq 0$$

ملحوظة:

يمكن الحل بمجرد النظر في المثال السابق

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{\text{معامل } x\ \ominus}{\sqrt{\text{معامل } x^2}}$$

ابدا بنفسك

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$d)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}} =$$

تستطيع ان تفعلها

Scanned with CamScanner

(4 – 1) نهايات بعض الدوال المثلثية

نظرية (12)

حيث x بالراديان ، $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

نتيجة (1)

إذا كان b ، a عددين حقيقيين، $b \neq 0$ ، $a \neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$

يمكننا تطبيق نظريات النهايات من البنود السابقة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية.

نتيجة (2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3)

إذا كان $a , b \in \mathbb{R}^*$ فإن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

أمثلة مباشرة لتطبيق النظرية ونتائجها:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin 4x} = \frac{1}{4}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \frac{3}{2}$	
$\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \tan x = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ $\lim\limits_{x\to 0} \cos 4x = 1$

قوانين مستخدمة:

$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

Senior 2020
ان شاء الله

فكرة الحل: تعويض مباشر بسيط ومقامات مع مراعاة (نهاية المقام - التوزيع)

مثال (1) أوجد:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x}= \frac{-3}{1}$$

الحل

$$=\frac{\lim_{x\to 0}(x-3)}{\lim_{x\to 0}\cos x}$$

$$=\frac{0-3}{1}=-3$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1\neq 0$$

كراسة التمارين

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+\cos x}= \frac{0}{2}$$

الحل

$$=\frac{\lim_{x\to 0}x^2}{\lim_{x\to 0}(1+\cos x)}$$

$$=\frac{(0)^2}{2}=0$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$

$$=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x=1+1=2\neq 0$$

كراسة التمارين

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}= \frac{1}{-1}$$

الحل

$$\frac{\lim_{x\to 0}(1-\tan x)}{\lim_{x\to 0}(\sin x-\cos x)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}1-\lim_{x\to 0}\tan x}{\lim_{x\to 0}(\sin x-\cos x)}=\frac{1-0}{-1}$$

$$=-1$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 0}(\sin x-\cos x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\sin x-\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$=0-1=-1\neq 0$$

رايك في نفسك اهم من راي الاخريين فيك

فكرة الحل : الوصول لصورة النظرية مع استخدام توزيع lim

مثال (1) أوجد:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}=\frac{0}{0}$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2x}\cdot\sin x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

حاول أن تحل (1) أوجد:

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}=\frac{0}{0}$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x(2x-1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x-1}$$

$$=1\cdot\frac{1}{-1}=-1$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 0}(2x-1)=2(0)-1=-1\neq 0$$

حاول أن تحل (1) أوجد:

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x\cos x}=\frac{0}{0}$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}\cdot\frac{\lim 1}{\lim_{x\to 0}\cos x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$$

نهاية المقام:

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1\neq 0$$

نحن من نصنع مصائرنا

فكرة الحل : الوصول لصورة النظرية ← في حالة الأسئلة الموضوعية تحل بمجرد النظر

كراسة التمارين أوجد:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 7x}=\frac{0}{0}$$

الحل بقسمة كل من البسط والمقام على x

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{x}}{\frac{\sin 7x}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}}$$

$$=\frac{4}{7}$$

نهاية المقام: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=7\neq 0$

كراسة التمارين أوجد:

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan 2x}=$$

الحل

$$=\frac{3}{2}$$

حاول أن تحل (2) أوجد:

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\tan x}=$$

الحل

$$=\frac{1}{2}$$

مختلفة

كراسة التمارين أوجد:

$$d)\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}=\frac{1}{1}$$

الحل

$$=\frac{\lim_{x\to 0}\cos 5x}{\lim_{x\to 0}\cos 3x}=\frac{1}{1}=1$$

نهاية المقام: $\lim_{x\to 0}\cos 3x=1\neq 0$

قمة النجاح ليست في عدم الفشل، بل في القيام بعد كل عثرة

فكرة الحل : توزيع البسط على المقام $\left(\frac{\text{مقدار جبري}}{\text{حد جبري}}\right)$

مثال (2)

أوجد :-

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{5\tan x-3\sin x}{4x}=\frac{0}{0}$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5\tan x}{4x}-\frac{3\sin x}{4x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(5\cdot\frac{\tan x}{4x}-3\cdot\frac{\sin x}{4x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{4x}-\lim_{x\to 0}3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x}$$

$$=5\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

حاول أن تحل (2)

أوجد :-

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{3\tan x+x^2\cos x}{5x}=\frac{0}{0}$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\tan x}{5x}+\frac{x^2\cos x}{5x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\tan x}{5x}+\frac{x}{5}\cdot\cos x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{5x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$=3\cdot\frac{1}{5}+0\cdot 1=\frac{3}{5}$$

مثال (3)

أوجد :-

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{5x+\sin x}{x}=\frac{0}{0}$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(5+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}5+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=5+1=6$$

ابتسم للحياة

فكرة الحل : توزيع البسط على المقام ($\frac{\text{مقدار جبري}}{\text{حد جبري}}$)

حاول أن تحل (3)

أوجد :-

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-x^2}{3x^2}=\frac{0}{0}$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{3x^2}-\frac{x^2}{3x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{3x}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

مثال (3)

أوجد :-

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x-2x\cos x}{3x}=\frac{0}{0}$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x\tan x}{3x}-\frac{2x\cos x}{3x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\tan x}{3x}-\frac{2}{3}\cdot\cos x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x}-\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$=1\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot 1=-\frac{1}{3}$$

حاول أن تحل (3)

أوجد :-

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x+3x\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x}+\frac{3x\cos 4x}{5x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x}+\frac{3}{5}\cdot\cos 4x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{5x}+\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot 1=1$$

لا ياس مع الحياة ولا حياة مع الياس

فكرة الحل: الضرب في المرافق $\left(\frac{\text{حد جبري}}{1-\cos ax}\right)$ أو $\left(\frac{\text{حد جبري}}{\cos ax - 1}\right)$

مثال (1) أوجد :-

$$a)\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x} = \frac{0}{0}$$

الحل

$$= \lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot(1+\cos x)\right] = \lim_{x\to0}\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right]$$

$$= \left(\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to0}1+\lim_{x\to0}\cos x\right)$$

$$= (1)^2(1+1) = 2$$

حاول أن تحل (1) أوجد :-

$$b)\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\cos x-1} = \frac{0}{0}$$

الحل

$$= \lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}\times\frac{\cos x+1}{\cos x+1}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1} = \lim_{x\to0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{-x}{\sin x}\cdot(\cos x+1)\right] = \lim_{x\to0}\frac{-x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}(\cos x+1)$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-x}{\sin x}\cdot\left(\lim_{x\to0}\cos x+\lim_{x\to0}1\right)$$

$$= \frac{-1}{1}\cdot(1+1) = -2$$

هل اديت فروضك ؟؟

فكرة الحل : الضرب في المرافق $\left(\frac{1-\cos ax}{\text{حدجبرى}}\right)$

كراسة التمارين

أوجد : -

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}=\frac{0}{0}$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos 2x)}{1-\cos^2 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos 2x)}{\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{x}{\sin 2x}\right)^2(1+\cos 2x)\right]$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\right)^2\left(\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos 2x\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2(1+1)=\frac{1}{2}$$

كراسة التمارين

أوجد : -

$$d)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{0}{0}$$

الحل

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{\sin 2x(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x(1+\cos 2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}\sin 2x}{\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}(2\sin x\cos x)}{\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x)}$$

$$=\frac{2\cdot 0\cdot 1}{2}=0$$

نهاية المقام :

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x)$$

$$=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos 2x$$

$$=1+1=2\neq$$

الامال العظيمة تصنع الاشخاص العظماء