UULA.COM

المذكرة



11 الرياضيات

الكورس الأول

UULA

2026 - 2025

الجذور والتعبيرات الجذرية

مقدمة:

1. تحليل الأعداد إلى عواملها الأولية:

- $8 = 2^3$
- $125 = 5^3$
- $98 = 2 \times 7^2$
- $72 = 2^3 \times 3^2$
- $27 = 3^3$
- $64 = 2^6$
- $147 = 3 \times 7^2$
- $250 = 2 \times 5^3$

مقدمة:

بسط التعبيرات الجذرية التالية حيث x عدد حقيقي

- $\sqrt[3]{x^3} = x$
- $\sqrt[3]{x^6} = x^2$
- $\sqrt[3]{x^9} = x^3$
- $\sqrt[3]{x^{12}} = x^4$
- $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$
- $\sqrt{x^4} = |x^2| = x^2$ ← لاحظ الأس في الناتج عدد زوجي
- $\sqrt{x^6} = |x^3| = \begin{cases} x^3 & : x \geq 0 \\ -x^3 & : x < 0 \end{cases}$
- $\sqrt{x^8} = |x^4| = x^4$ ← لاحظ الأس في الناتج عدد زوجي

صفوة معلمي الكويت

جمع و طرح التعبيرات الجذرية

التعبيرات الجذرية المتشابهة:

يكون التعبيران الجذريان متشابهين إذا كان لهما نفس الدليل والمجذور

مثال:

$2\sqrt{3}\ ,5\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}\ ,5\sqrt[3]{3}$	$\sqrt{3}\ ,\sqrt[3]{5}$
متشابهان	غير متشابهين	غير متشابهين

أوجد الناتج في أبسط صورة:

Q $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$

$=\sqrt{3^2\times 2}+\sqrt{5^2\times 2}-\sqrt{3^2\times 2^3}$

$=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-3\times 2\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

Q $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}$

$=\sqrt[3]{2^7}+\sqrt[3]{3^3\times 2}-2\sqrt[3]{5^3\times 2}$

$=2^2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-2\times 5\sqrt[3]{2}$

$=-3\sqrt[3]{2}$

Q $\sqrt{12}+\sqrt{147}-\sqrt{27}$

$=\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{7^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}$

$=2\sqrt{3}+7\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}$

Q $\sqrt[3]{320}+\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{135}$

$=\sqrt[3]{2^6\times 5}+\sqrt[3]{2^3\cdot 5}-\sqrt[3]{3^3\cdot 5}$

$=2^2\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}$

$=3\sqrt[3]{5}$

صفوة معلمي الكويت

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية

Q $3\sqrt{7x^3} \times 2\sqrt{x^3y^2}$, $x \geq 0$ $= 6\sqrt{7x^3 \times x^3y^2} = 6\sqrt{7x^6y^2}$

$$= 6|x^3y|\sqrt{7} = 6x^3|y|\sqrt{7} = \begin{cases} 6x^3y\sqrt{7} & y \geq 0 \\ -6x^3y\sqrt{7} & y < 0 \end{cases}$$

Q $4\sqrt[3]{x^4y} \times 3\sqrt[3]{x^2y} = 12\sqrt[3]{x^4y \times x^2y} = 12\sqrt[3]{x^6y^2} = 12\,x^2\sqrt[3]{y^2}$

Q $\frac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}}$, $x \neq 0$ $= \sqrt[3]{\frac{162x^5}{3x^2}} = \sqrt[3]{54x^3} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2x^3} = 3\,x\sqrt[3]{2}$

Q $\frac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ $= \sqrt[3]{\frac{250x^7y^3}{2x^2y}} = \sqrt[3]{125x^5y^2} = 5x\sqrt[3]{x^2y^2}$

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذراً

يكون التعبيران الجذريان مترافقين إذا كان ناتج ضربهما عدداً نسبياً، مثال:

- $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ مترافقان لأن ناتج ضربهما عدد نسبي $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$
- $\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5^2}$ مترافقان لأن ناتج ضربهما عدد نسبي $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2} = 5$
- $(2+\sqrt{2})$ ، $(2-\sqrt{2})$ مترافقان لأن ناتج ضربهما عدد نسبي:

$$(2-\sqrt{2}) \times (2+\sqrt{2}) = (2)^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2$$

اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عدداً نسبياً:

Q $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $= \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$

Q $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ $= \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$

Q $\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}} \times \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{7}$

صفوة معلمي الكويت

$\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$ $= \frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}+2-3-\sqrt{2}}{(3)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}$

$\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ $= \frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{6+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2}{(2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$

3. بسّط كلاًّ من التعبيرات الجذرية التالية مستخدماً قوانين الجذور:

f. $5\sqrt{216x^2+23\sqrt{64x^4}}$, $x>0$ $\left(\sqrt{64x^4}=\sqrt{2^6x^4}=2^3|x^2|=8x^2\right)\Rightarrow$

$$5\sqrt{216x^2+23\sqrt{64x^4}} = 5\sqrt{216x^2+23\,(8x^2)} = 5\sqrt{400x^2} = 5\sqrt{2^4\cdot 5^2\cdot x^2}$$
$$= 5\times 2^2\times 5\ |x| = 100x \quad : x>0$$

k. $\sqrt[3]{256u^5v} \div \sqrt[3]{4u^2v^{10}}$, $u\neq 0, v\neq 0$ $= \sqrt[3]{\frac{256\,u^5\vartheta}{4\,u^2\,v^{10}}} = \sqrt[3]{\frac{64\,u^3}{v^9}} = \sqrt[3]{\frac{2^6\cdot u^3}{v^9}} = \frac{4u}{v^3}$

7. أوجد قيمة التعبير: x^2-6 ، إذا كان $x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

$$x = \frac{4}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{4\sqrt{5}+4}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2} = \frac{4\sqrt{5}+4}{4} = \sqrt{5}+1$$
$$\Rightarrow x^2-6 = \left(\sqrt{5}+1\right)^2-6 = \left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}+1^2-6 = 2\sqrt{5}$$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

الأسس النسبية

قوانين الأسس النسبية

$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ ، $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$ ، $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ ، $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ، $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} \quad : b \neq 0$

بسط كل عدد من الأعداد التالية مستخدماً قوانين الأسس:

Q $\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}\right) \div x^{\frac{2}{3}}, \; x > 0$

$= \left(x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}\right) \div x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}} \div x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

Q $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}, \; x \geq 0, \; y > 0$

$= \left(\frac{2^4 \; x^{14}}{3^4 \; y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2^{4\times\frac{1}{2}} \; x^{14\times\frac{1}{2}}}{3^{4\times\frac{1}{2}} \; y^{18\times\frac{1}{2}}} = \frac{2^2 \; x^7}{3^2 \; y^9} = \frac{4 \, x^7}{9 \, y^9}$

قوانين الجذور النونية

$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$ ، $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}, y \neq 0$ ، $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$

بسط كلاً من التعبيرات الجذرية التالية:

Q $\left(\left(\sqrt{x^3 y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$

$= \left(\sqrt{x^3 y^3}\right)^{\frac{1}{3}\times -1} = \left(\sqrt{x^3 y^3}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$= x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{3}} \cdot y^{\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{3}} = x^{\frac{-1}{2}} \; y^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{xy}$

Q $\left(\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{y^3}\right)^{-12}, \; x, y \in \mathbb{Q}^+$

$= \left(x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}\right)^{-12} = x^{\frac{1}{4}\times -12} \cdot y^{\frac{3}{4}\times -12}$

$= x^{-3} \cdot y^{-9} = \frac{1}{x^3 \, y^9}$

صفوة معلمي الكويت

g. $\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}$: $x > 0, y > 0$

$= x^{\frac{1}{2}-\left(\frac{-3}{4}\right)} \cdot y^{\left(\frac{-1}{3}\right)-\left(\frac{-1}{2}\right)}$

$= x^{\frac{5}{4}} \cdot y^{\frac{1}{6}}$

h. $\left(\left(3^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}$: $x > 0$

$= 3^{\frac{3}{2}\times 2\times \frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}\times 2\times \frac{1}{3}}$

$= 3 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}$

$= \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}$

f. $\frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}$: $x > 0, y > 0$

$= x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} \cdot y^{\left(\frac{-1}{4}\right)-\left(\frac{-1}{2}\right)}$

$= x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{1}{4}}$

i. $\left(\frac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^2}}\right)^{-12}$: $t > 0$

$\left(\frac{\sqrt{3^2 t}}{\sqrt[3]{3^3 t^2}}\right)^{-12} = \left(\frac{3 \cdot t^{\frac{1}{2}}}{3t^{2/3}}\right)^{-12}$

$= \left(t^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\right)^{-12} = \left(t^{-\frac{1}{6}}\right)^{-12}$

$= t^{\left(-\frac{1}{6}\right)\times(-12)} = t^2$

صفوة معلمي الكويت

حل المعادلات

أولاً: المعادلات الجذرية

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

Q $2+\sqrt{3x-2}=6$

شرط الحل

$3x-2\geq 0$

$3x\geq 2$

$x\geq \frac{2}{3}$

$x\in\left[\frac{2}{3},\infty\right)$

$\sqrt{3x-2}=4$

$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2=4^2$

$3x-2=16$

$3x=16+2$

$3x=18$

$x=\frac{18}{3}=6\in\left[\frac{2}{3},\infty\right)$

$\therefore$ م.ج $=\{6\}$

Q $2(2x+4)^{\frac{3}{4}}=16$

شرط الحل

$2x+4\geq 0$

$2x\geq -4$

$x\geq -2$

$x\in[-2,\infty)$

$(2x+4)^{\frac{3}{4}}=8$

$\left[(2x+4)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}}=[8]^{\frac{4}{3}}$

$2x+4=16\Rightarrow 2x=12$

$x=6\quad ,6\in[-2,\infty)$

$\therefore$ م.ج $=\{6\}$

Q $6+\sqrt{x-1}=3$ $\quad\sqrt{x-1}=-3$

$\therefore$ م.ج $=\emptyset$ لأن -3 سالب

Q $2(x-2)^{\frac{2}{3}}=50$ $\quad\Rightarrow (x-2)^{\frac{2}{3}}=25$

$\Rightarrow\left[(x-2)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}=(25)^{\frac{3}{2}}$ $\quad\Rightarrow |x-2|=125$

$x-2=125$ $\quad$ $x-2=-125$

$x=127$ $\quad$ $x=-123$

$\therefore$ م.ج $=\{127,-123\}$

صفوة معلمي الكويت

أوجد مجموعة الحل:

Q $2(2x+4)^{\frac{3}{4}}=16$

شرط الحل

$2x+4\geq 0$

$2x\geq -4$

$x\geq -2$

$x\in[-2,\infty)$

$(2x+4)^{\frac{3}{4}}=8$

$\left[(2x+4)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}}=[8]^{\frac{4}{3}}$

$2x+4=16\Rightarrow 2x=12$

$x=6\quad ,6\in[-2,\infty)\Rightarrow$ ∴ م.ج $=\{6\}$

Q $2(x-2)^{\frac{2}{3}}=50$

$\Rightarrow (x-2)^{\frac{2}{3}}=25$

$\Rightarrow\left[(x-2)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}=(25)^{\frac{3}{2}}\quad\Rightarrow |x-2|=125$

$x-2=125$	$x-2=-125$
$x=127$	$x=-123$

∴ م.ج $=\{127,-123\}$

صفوة معلمي الكويت

Q $5+\sqrt{x-3}=x$

شرط الحل

$x-3\geq 0$ | $x-5\geq 0$

$x\geq 3$ | $x\geq 5$



$x\in[5,\infty)$

$\sqrt{x-3}=x-5$

$(\sqrt{x-3})^2=(x-5)^2$

$x-3=x^2-10x+25$

$x^2-10x+25-x+3=0$

$x^2-11x+28=0$

$(x-4)(x-7)=0$

$x=4\notin[5,\infty), x=7\in[5,\infty)$

$\therefore$ م.ح $=\{7\}$

أوجد مجموعة الحل:

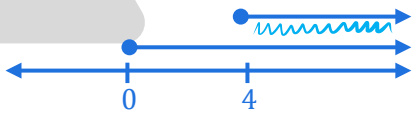
Q $\sqrt{8x}-2\sqrt{4x-16}=0$

شرط الحل

$8x\geq 0$ | $4x-16\geq 0$

$x\geq 0$ | $4x\geq 16$

$x\geq 4$



$x\in[4,\infty)$

$\sqrt{8x}=2\sqrt{4x-16}$

$(\sqrt{8x})^2=(2\sqrt{4x-16})^2$

$8x=4(4x-16)$

$8x=16x-64$

$8x-16x=-64$

$-8x=-64$

$\frac{-8x}{-8}=\frac{-64}{-8}\Rightarrow x=8\in[4,\infty)$

$\therefore$ م.ح $=\{8\}$

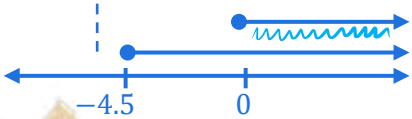
Q $\sqrt{5x}-\sqrt{2x+9}=0$

شرط الحل

$5x\geq 0$ | $2x+9\geq 0$

$2x\geq -9$

$x\geq 0$ | $x\geq -4.5$



$x\in[0,\infty)$

$\sqrt{5x}=\sqrt{2x+9}$

$(\sqrt{5x})^2=(\sqrt{2x+9})^2$

$5x=2x+9$

$5x-2x=9$

$3x=9$

$x=3\in[0,\infty)$

$\therefore$ م.ح $=\{3\}$

صفوة معلمي الكويت

ثانياً: المعادلات الأسية

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

Q $2^x = 64$

$2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \quad \{6\} = $ م.ح

Q $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{64}{27}\right)$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4^3}{3^3}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \Rightarrow x = -3 \Rightarrow \{-3\} = $ م.ح

Q $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$

$\left(\frac{1^2}{2^2}\right)^x = \frac{1^7}{2^7}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow$

$2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} = 3.5$

$\therefore \left\{\frac{7}{2}\right\} = $ م.ح

Q $3^{x^2-1} = 27 \quad = 3^3$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 3$

$x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x = 2\ ,\ x = -2 \Rightarrow \quad \{-2,2\} = $ م.ح

Q $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49} \quad = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$

$\Rightarrow x^2 - 3x = -2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

$x = 1\ ,\ x = 2 \Rightarrow \quad \{1,2\} = $ م.ح

Q $6^{2x-8} = 1 \quad = 6^0$

$\Rightarrow 2x - 8 = 0$

$2x = 8$

$x = 4 \Rightarrow \{4\} = $ م.ح

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

مجال الدالة:

1. مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

دالة كثيرة حدود $g(x) = x^2 + 3x + 1$

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$

دالة كثيرة حدود $f(x) = 2x + 1$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2. مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ما عدا مجموعة أصفار المقام.

دالة حدودية نسبية $h(x) = \frac{3x-1}{5-2x}$

أصفار المقام

$5 - 2x = 0$

$-2x = -5$

$x = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

$\therefore \mathcal{D}_h = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

دالة حدودية نسبية $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$

أصفار المقام

$x - 4 = 0$

$x = 4$

$\therefore \mathcal{D}_h = \mathbb{R} - \{4\}$

3. مجال الدالة $f(x) = |x|$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

4. مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x) \geq 0$

دالة جذر تربيعي $g(x) = \sqrt{3x - 7}$

$3x - 7 \geq 0$

$3x \geq 7$

$x \geq \frac{7}{3}$

$\therefore \mathcal{D}_g = \left[\frac{7}{3}, \infty\right)$

دالة جذر تربيعي $t(x) = \sqrt{3x - 4}$

$3x - 4 \geq 0$

$3x \geq 4$

$x \geq \frac{4}{3}$

$\therefore \mathcal{D}_t = \left[\frac{4}{3}, \infty\right)$

5. مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي هو مجال الدالة g

دالة جذر تكعيبي لكثيرة حدود $w(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2}$

$\mathcal{D}_w = \mathbb{R}$

دالة جذر تكعيبي لكثيرة حدود $u(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$

$\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$

صفوة علمي الكويت

6. مجال الدالة $f(x) = g(x) \pm h(x)$
مجال f = مجال g ∩ مجال h

$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h$

7. مجال الدالة $f(x) = g(x) \cdot h(x)$
مجال f = مجال g ∩ مجال h

$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h$

أوجد مجال كل دالة مما يلي :

Q $g(x) = (2x^2 + x)\sqrt{8 - 2x}$

$a(x) = 2x^2 + x$ دالة كثيرة حدود

$\mathcal{D}_a = \mathbb{R}$

$b(x) = \sqrt{8 - 2x}$ دالة جذر تربيعي

$8 - 2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -8 \Rightarrow x \leq 4$

$\mathcal{D}_b = (-\infty, 4]$

$\therefore \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \cap (-\infty, 4] = (-\infty, 4]$

Q $f(x) = 2x^3 - 4x - \sqrt{2x - 6}$

$h(x) = 2x^3 - 4x$ دالة كثيرة حدود

$\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{2x - 6}$ دالة جذر تربيعي

$2x - 6 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow$

$\mathcal{D}g = [3, \infty)$

$\therefore \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \cap [3, \infty) = [3, \infty)$

8. مجال الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
مجال f = (مجال g ∩ مجال h عدا مجموعة أصفار المقام)

$\mathcal{D}_f = (\mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h)$ - { أصفار المقام }

Q $h(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-1}$

البسط $a(x) = \sqrt[3]{1 + x}$
دالة جذر تكعيبي لكثيرة حدود
$\mathcal{D}_a = \mathbb{R}$

المقام $b(x) = x^2 - 1$
دالة كثيرة حدود
$\mathcal{D}_b = \mathbb{R}$

أصفار المقام $x^2 - 1 = 0$
$(x - 1)(x + 1) = 0$
$x = 1, x = -1$

$\therefore \mathcal{D}_h = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{-1,1\} = \mathbb{R} - \{-1,1\}$

صفوة معلمي الكويت

الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

معادلة الدالة التي تمثل قطعاً مكافئاً رأسه $(0,0)$ هي: $y = ax^2$
معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه (h,k).
$y = a(x-h)^2+k, a \neq 0, h, k \in \mathbb{R}$

- رأسه (h,k) ومحور تماثله هو الخط $x = h$
- تكون فتحة القطع لأعلى إذا كانت a موجبة ولأسفل إذا كانت a سالبة

Q في الشكل المقابل اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $V(3,4)$ ويمر بالنقطة $P(5,-4)$

∵الرأس $V(h,k) = V(3,4)$

المعادلة من الصورة $y = a(x-h)^2+k$

بالتعويض: $h = 3,\ k = 4,\ x = 5,\ y = -4$

$-4 = a(5-3)^2 + 4$

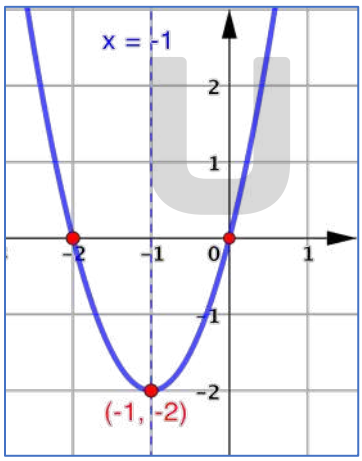
$-4 = 4a + 4$

$-8 = 4a \Rightarrow a = -2$

معادلة القطع : $\therefore y = -2(x-3)^2 + 4$

Q ارسم منحنى الدالة $y = 2(x+1)^2-2$ مستخدماً خواص القطوع المكافئة.

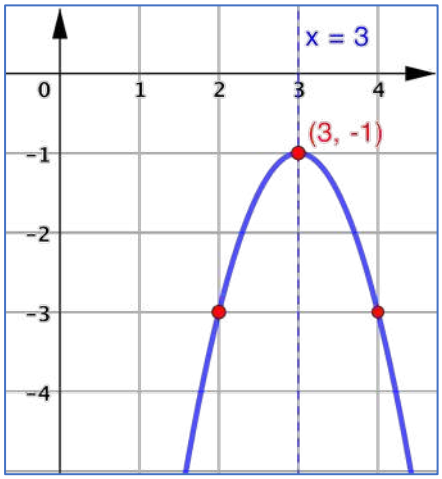
- شكل المعادلة: $y = a(x-h)^2 + k$ تمثل قطع مكافئ: $h = -1\ , k = -2$
  رأسه: $V(h,k) = V(-1,-2)$
- الفتحة للأعلى $2 > 0 \Rightarrow$ $a = 2,$
  الرأس عنده قيمة صغرى
- محور التماثل: $x = -1$ $x = h\ ,$
- نقطة أخرى: $x = 0 \Longrightarrow$
  $y = 2((0)+1)^2 - 2 = 0 \Rightarrow (0,0)$
- انعكاس النقطة $(0,0)$ في محور التماثل هي النقطة: $(-2,0)$



صفوة معلمي الكويت

ارسم منحنى الدالة $y = -2(x-3)^2 - 1$.

- شكل المعادلة: $y = a(x-h)^2 + k$ تمثل قطع مكافئ: $h = 3\,,\, k = -1$



رأسه: $V(h,k) = V(3,-1)$

- الفتحة للأسفل $a = -2\,,\quad -2 < 0 \Rightarrow$

الرأس عنده قيمة عظمى

- محور التماثل: $x = h\,,\quad x = 3$
- نقطة أخرى: $x = 2 \Longrightarrow$

$y = -2\big((2)-3\big)^2 - 1 = -3 \Longrightarrow (2\,,-3)$

- انعكاس النقطة $(3\,,-2)$ في محور التماثل هي النقطة: $(4\,,-3)$

ارسم منحنى كل من الدوال التالية:

11) $y = (x+3)^2$

∵شكل المعادلة: $y = a(x-h)^2 + k$

∴هي تمثل قطع مكافئاً: $h = -3\,,\, k = 0$

رأسه: $V(h,k) = V(-3,0)$

الفتحة للأعلى $a = 1,\quad 1 > 0 \Rightarrow$

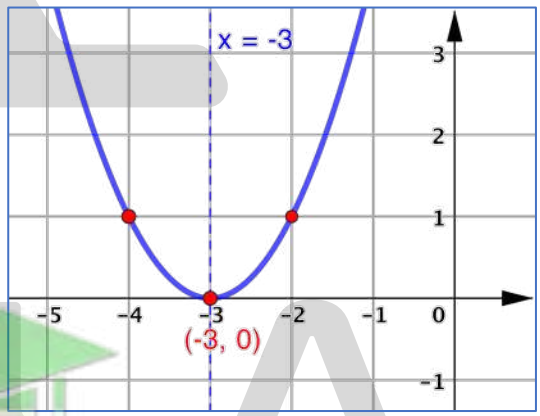
الرأس عنده قيمة صغرى

محور التماثل: $x = h\,,\quad x = -3$

نقطة أخرى: $x = -2 \Longrightarrow$

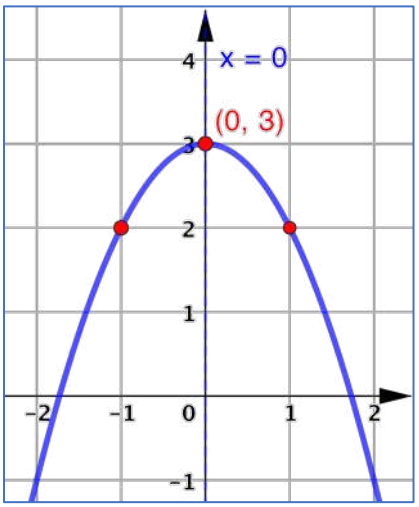
$y = \big((-2)+3\big)^2 = 1 \Longrightarrow (-2,1)$

انعكاس النقطة $(-2,1)$ في محور التماثل هو النقطة: $(-4,1)$



صفوة معلمي الكويت

14) $y = -x^2 + 3$



∵شكل المعادلة: $y = a(x-h)^2 + k$

∴هي تمثل قطع مكافئاً:

رأسه: $h = 0\ , k = 3$

$V(h,k) = V(0,3)$

الفتحة للأسفل $a = -1, -1 < 0 \Rightarrow$

الرأس عنده قيمة عظمى

محور التماثل: $x = h, \quad x = 0$

نقطة أخرى:

$x = 1 \Rightarrow$

$y = -(1)^2 + 3 = 2 \Rightarrow (1,2)$

انعكاس النقطة $(1,2)$ في محور التماثل هو النقطة: $(-1,2)$

صفوة معلمي الكويت

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

- إذا كان (a,b) زوجاً مرتباً من علاقة r فإن (b,a) هو زوجاً مرتباً من معكوس هذه العلاقة r^{-1}
- إذا كانت النقطة (a,b) تنتمي لبيان دالة $f(x)$ فإن النقطة (b,a) تنتمي لبيان معكوس هذه الدالة $f^{-1}(x)$
- معكوس الدالة الخطية هو دالة خطية أيضاً

يمكن إيجاد معكوس دالة جبرياً من خلال التبديل بين المتغيرين x,y ثم الحل بالنسبة لـ y

أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

Q $y = 2(x+1) - 3$

$x = 2(y+1) - 3$

$x + 3 = 2(y+1)$

$y + 1 = \frac{x+3}{2}$

$y = \frac{x+3}{2} - 1$

Q $f(x) = x^2 + 3$

$y = x^2 + 3$

$x = y^2 + 3$ بدل x بـ y :

$y^2 = x - 3$ حل بالنسبة لـ y :

$y = \mp\sqrt{x-3}$

دوال الجذر التربيعي

المعادلة $y = \sqrt{x}$ دالة جذر تربيعي

مجالها $[0,\infty)$ والمدى هو $[0,\infty)$

$y = \sqrt{x-h} + k$ ينتج من إزاحة لبيان دالة المرجع $y = \sqrt{x}$

Q ارسم الدالة $y = \sqrt{x-4} - 2$,وعين المجال والمدى للدالة.

دالة المرجع $y = \sqrt{x}$

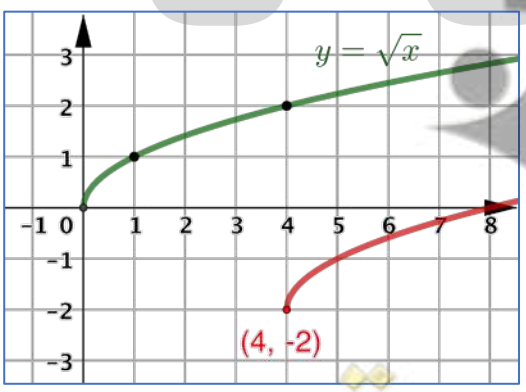
x	0	1	4
y	0	1	2

$h = 4$ انسحاب دالة المرجع 4 وحدات لليمين

$k = -2$ انسحاب دالة المرجع وحدتين للأسفل

يبدأ بيان الدالة عند النقطة $(4, -2)$

المجال $= [4,\infty)$ المدى $= [-2, \infty)$



11) $y = -\sqrt{x-1}$

دالة المرجع $y = -\sqrt{x}$

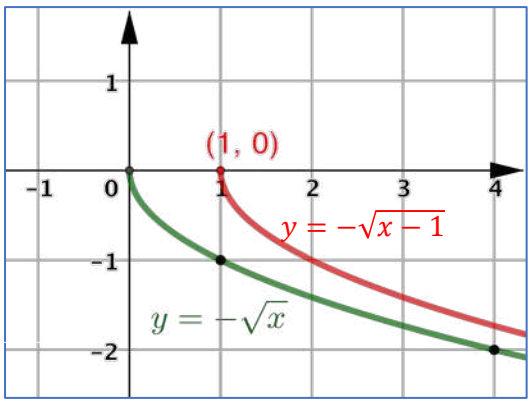
x	0	1	4
y	0	-1	-2

$h = 1$ انسحاب دالة المرجع وحدة لليمين

$k = 0$ لا يوجد انسحاب رأسي

يبدأ بيان الدالة عند النقطة $(1,0)$

المجال= $[1,\infty)$ المدى= $(-\infty,0]$



12) $y = -\sqrt{x} + 2$

دالة المرجع $y = -\sqrt{x}$

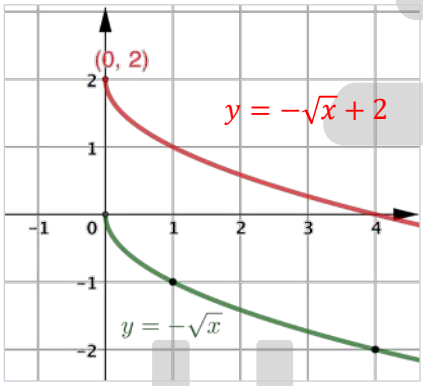
x	0	1	4
y	0	-1	-2

$h = 0$ لا يوجد انسحاب أفقي

$k = 2$ انسحاب دالة المرجع وحدتين للأعلى

يبدأ بيان الدالة عند النقطة $(0,2)$

المجال= $[0,\infty)$ المدى= $(-\infty,2]$



صفوة معلمي الكويت

حل المتباينات

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

Q $-x^2 + 7x - 10 \leq 0$

$x^2 - 7x + 10 \geq 0$

المعادلة المناظرة: $x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-2)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 2\,,\ x = 5$

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$
$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$

$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$
$x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5$

x	$-\infty$		2		5	∞
$(x-2)$	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-5)$	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

م.ح $= (-\infty, 2] \cup [5, \infty) = \mathbb{R} - (2,5)$

Q $x^2 - x - 6 < 0$

المعادلة المناظرة: $x^2 - x - 6 = 0$

$(x+2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -2\,,\ x = 3$

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$
$x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$

$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$
$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$

x	$-\infty$		-2		3	∞
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

∴ م.ح $= (-2,3)$

صفوة معلمي الكويت

أوجد مجال الدالة التالية:

Q $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

$x^2-4\geq 0 \Longrightarrow$

$x^2-4=0$ المعادلة المناظرة:

$(x-2)(x+2)=0 \Longrightarrow x=-2\,,x=2$

$x-2>0 \Longrightarrow x>2$

$x-2<0 \Longrightarrow x<2$

$x+2>0 \Longrightarrow x>-2$

$x+2<0 \Longrightarrow x<-2$

x	$-\infty$		-2		2		∞
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)=\mathbb{R}-(-2,2)$

Q أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x-5}{-2x+3}\geq 0$

أصفار البسط $3x-5=0 \rightarrow x=\frac{5}{3}$

أصفار المقام $-2x+3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

$3x-5>0 \Longrightarrow x>\frac{5}{3}$

$3x-5<0 \Longrightarrow x<\frac{5}{3}$

$-2x+3>0 \Longrightarrow x<\frac{3}{2}$

$-2x+3<0 \Longrightarrow x>\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		∞
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+3$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{3x-5}{-2x+3}$		$-$	غ.معرف	$+$	0	$-$	

مـ.ح $=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$

صفوة معلمي الكويت

Q أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$

$$\frac{(3x+7)}{(x+2)} - \frac{2}{1} \geq 0 \Rightarrow \frac{(3x+7)-(2x+4)}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{3x+7-2x-4}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x+2} \geq 0$$

x	$-\infty$	-3	-2	∞
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+3}{x+2}$	$+$	0	غير معرف	$+$

ح.م $= (-\infty, -3] \cup (-2, \infty)$
$= \mathbb{R} - (-3, -2]$

أصفار البسط $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

أصفار المقام $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$x+3>0 \Rightarrow x>-3$

$x+3<0 \Rightarrow x<-3$

$x+2>0 \Rightarrow x>-2$

$x+2<0 \Rightarrow x<-2$

صفوة معلمي الكويت

دوال القوى ومعكوساتها

الدوال الزوجية والدوال الفردية

تعريف

1. تكون الدالة $y = f(x)$ التى مجالها D دالة زوجية إذا وفقط إذا كان:
   - $\forall x \in D , -x \in D$
   - $f(-x) = f(x)$

   المحور الصادى هو محور تماثل (تناظر) لبيان كل دالة زوجية.

2. تكون الدالة $y = f(x)$ التى مجالها D دالة فرديةإذا وفقط إذا كان:
   - $\forall x \in D , -x \in D$
   - $f(-x) = -f(x)$

   نقطة الأصل هى نقطة تماثل (تناظر) لبيان كل دالة فردية.

بين ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

Q $f(x) = 2x^7$

$f(-x) = 2(-x)^7 = -2x^7 = -f(x) \Rightarrow$

$\because f(-x) = -f(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f فردية $\therefore$

Q $y = -x^8$

بفرض: $y = g(x) = -x^8$

$g(-x) = -(-x)^8 = -x^8 = g(x) \Rightarrow$

$\because g(-x) = g(x) \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ زوجية g $\therefore$

Q $y = (x+2)^2$

بفرض: $y = v(x) = (x+2)^2$

$v(-x) = (-x+2)^2$

$\because v(-x) \neq v(x). \quad \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ v ليست زوجية

$\because v(-x) \neq -v(x). \forall -x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ v ليست فردية

UULA.COM © جميع الحقوق محفوظة

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

نظرية العامل

المقدار $(x-a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Leftrightarrow$ a صفراً من أصفار كثيرة الحدود.

اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: $1, -2, -4$

$$f(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$$
$$= (x+4)(x^2 - x + 2x - 2)$$
$$= (x+4)(x^2 + x - 2)$$
$$= x^3 + x^2 - 2x + 4x^2 + 4x - 8$$
$$= x^3 + 5x^2 + 2x - 8$$

قسمة كثيرات الحدود

القسمة المطولة:

أوجد ناتج كل مما يلي.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 5x + 6 & x + 2 \\ \hline -x^2 - 2x & x + 3 \\ \hline 3x + 6 & \\ -3x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

∴ الناتج $= x + 3$

الباقي $= 0$

صفوة معلمي الكويت

استخدم القسمة التركيبية

Q استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 2x^2 + x - 5$ على $(x + 3)$

-3	1	2	1	-5
	$\downarrow$	-3	3	-12
	1	-1	4	-17
	x^2	x		

الباقي: -17

الناتج: $x^2 - x + 4$ الباقي : -17

Q استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ على $(x + 2)$ أوجد باقي العوامل.

-2	1	-3	-6	8
	$\downarrow$	-2	10	-8
	1	-5	4	0
	x^2	x		

الباقي: 0

الناتج $= x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$

∴ باقي العوامل هي: $(x - 1)\ ,\ (x - 4)$

نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x - a)$ حيث a ثابت ,فإن باقي القسمة هو $f(a)$

Q استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $\mathbf{f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12}$ على $(x + 4)$ ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

نظرية الباقي

$f(-4)$
$= (-4)^4 - 5(-4)^2 + 4(-4) + 12$
$= 172 \Rightarrow$

∴ الباقي $= 172$

القسمة التركيبية.

-4	1	0	-5	4	12
	$\downarrow$	-4	16	-44	160
	1	-4	11	-40	172

الباقي: 172

صفوة معلمي الكويت

حل المعادلات باستخدام الأصفار النسبية الممكنة

أوجد مجموعة حل المعادلة:

Q $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

① عوامل الحد الثابت (-8) $\mp1, \mp2, \mp4, \mp8$

عوامل المعامل الرئيسي (1) ∓1

الأصفار النسبية الممكنة $\mp1, \mp2, \mp4, \mp8$

② لتكن: $p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

بالتعويض نجد:

$p(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 4(2) - 8 = 0$

$\therefore$ 2 صفراً من أصفار $p(x)$

بالتالي $(x-2)$ عامل من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x-2)$

2	1	2	−4	−8
	↓	2	8	8
	1	4	4	0
		x^2	x	

الباقي:

الناتج $= x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

$(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$\therefore x = -2$ هو حل مكرر للمعادلة

$\therefore$ م.ح $= \{-2, 2\}$

أوجد مجموعة حل المعادلة:

Q $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

① عوامل الحد الثابت: (3)

$\mp1, \mp3$

عوامل المعامل الرئيسي: (1)

∓1

الأصفار النسبية الممكنة

$\mp1, \mp3$

② لتكن:

$p(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

بالتعويض نجد:

$p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 3 = 0$

$\therefore$ 1 صفراً من أصفار $p(x)$

بالتالي $(x-1)$ عامل من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x-1)$

1	1	−4	0	3
	↓	1	−3	−3
	1	−3	−3	0
		x^2	x	

الباقي:

الناتج $= x^2 - 3x - 3$

$x^2 - 3x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-3)^2 - 4(1)(-3) = 21$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$

$\therefore$ م.ح $= \left\{1, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right\}$

صفوة معلمي الكويت

أوجد مجموعة حل المعادلة:

Q $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$$

① عوامل الحد الثابت (-2) $\quad \mp 1 , \mp 2$

عوامل المعامل الرئيسي (1) $\quad \mp 1$

الأصفار النسبية الممكنة $\quad \mp 1 , \mp 2$

② لتكن: $p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

بالتعويض نجد:

$$p(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1) - 2 = 0$$
$$p(1) = (1)^4 - 3(1)^3 + (1)^2 + 3(1) - 2 = 0$$

$\therefore 1, -1$ من أصفار $p(x)$

بالتالي $(x+1) , (x-1)$ من عوامل $p(x)$

③ نقسم $p(x)$ على $(x+1)$

-1	1	-3	1	3	-2
	$\downarrow$	-1	4	-5	2
الباقي:	1	-4	5	-2	0
	x^3	x^2	x		

الناتج: $q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

④ نقسم $q(x)$ على $(x-1)$

1	1	-4	5	-2
	$\downarrow$	1	-3	2
الباقي:	1	-3	2	0
	x^2	x		

الناتج: $x^2 - 3x + 2$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$$

$\therefore$ م.ح$=\{-1,1,2\}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

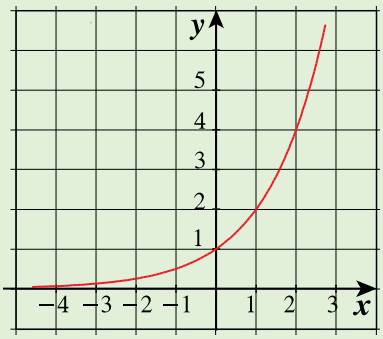
استكشاف النماذج الأسية

الدالةالأسية تكون من الشكل:

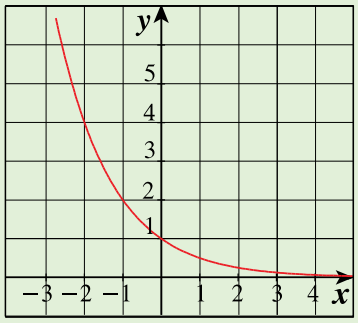
$y = a(b)^x : \forall x \in \mathbb{R}$, عدد ثابت $a \in \mathbb{R}^*$, الأساس $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

الدالة الأسية التي فيها $a > 0$:

- عندما تكون $b > 1$
- فإن الدالة تمثل نمواً أسياً
- ويكون b هو عامل النمو



- عندما تكون $0 < b < 1$
- فإن الدالة تمثل تضاؤلاً أسياً
- ويكون b هو عامل التضاؤل



مثل بيانيا كلا من الدوال التالية, ثم بين ما إذا كانت تمثل نموا أسيا أو تضاؤلا أسيا وحدد العامل.

Q $y = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	0.25	0.5	1	2	4

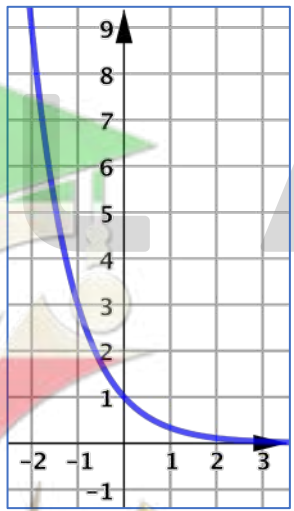
$\because b = 2 \quad , 2 > 1$

$\therefore$ دالة نمو أسي

عامل النمو : $b = 2$

Q $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



$\because b = \frac{1}{3} \quad 0 < \frac{1}{3} < 1$

$\therefore$ دالة تضاؤل أسي

عامل التضاؤل : $b = \frac{1}{3}$

Q اكتب دالة أسية بالصورة $y = ab^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $H(2,4)\ ,\ S(3,16)$

$$y = ab^x$$

$H(2,4)$	$S(3,16)$
① $4 = a \cdot b^2$	② $16 = a \cdot b^3$

نقسم المعادلتين طرفاً إلى طرف: $\frac{16}{4} = \frac{a.b^3}{a.b^2} \Rightarrow b = 4$

نعوض في المعادلة ① $4 = a \cdot b^2 \Rightarrow 4 = a\,.\,(4)^2 \Rightarrow a = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

∴المعادلة المطلوبة $y = ab^x \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}(4)^x$

Q مثل بيانيا كلا من: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = 3^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

x	3^x	3^{-x}
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$

نتيجة: بيان الدالة $y = b^{-x}$
ينتج من انعكاس بيان الدالة $y = b^x$ في المحور الصادي $\quad b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Q مثل بيانيا كلا من: $y = -\frac{1}{2}(2)^x$, $y = \frac{1}{2}(2)^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

x	$\frac{1}{2}(2)^x$	$-\frac{1}{2}(2)^x$
-2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	1	-1
2	2	-2
3	4	-4

نتيجة: بيان الدالة $y = -b^x$
ينتج من انعكاس بيان الدالة $y = b^x$ في المحور االسيني $\quad b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

UULA.COM © جميع الحقوق محفوظة

الدوال اللوغاريتمية و تمثيلها بيانيا

$$y = b^x \Leftrightarrow log_b\, y = x \qquad \forall y \in R^+ \ , \ b \in R^+ - \{1\}$$

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$x^3 = 8$	$3 = \log_x 8$
$7^2 = 49$	$2 = \log_7 49$
$x = 3^5$	$\log_3 x = 5$
$8 = 2^3$	$\log_2 8 = 3$

التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية

أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

$f(x) = \log(3 - x)$

$3 - x > 0$

$-x > -3 \quad \Rightarrow x < 3$

المجال : $D_f = (-\infty, 3)$ ∴

$y = \log_5(6x)$

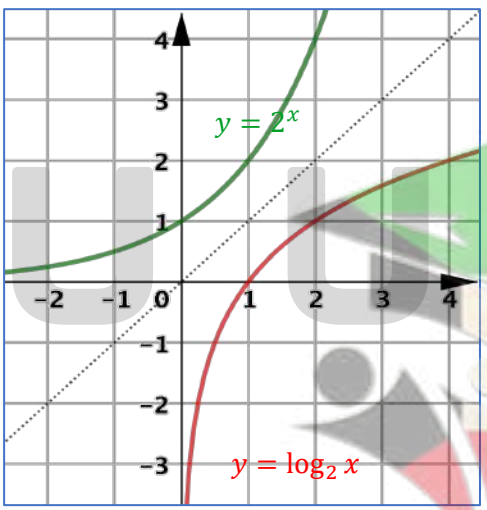
$6x > 0$

$x > 0$

المجال : $D = (0, \infty)$ ∴

استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_2 x$ ومعكوسها.

$y = \log_2 x$ هي معكوس لـ $y = 2^x$



x	$y = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2

صفوة معلمي الكويت

انسحاب الدوال اللوغاريتمية:

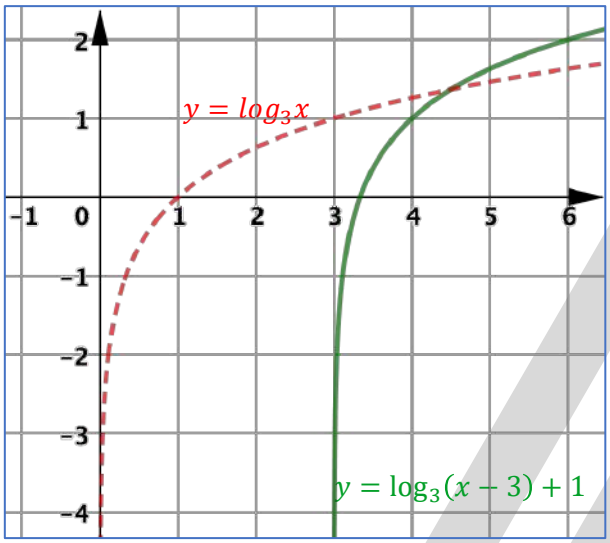
التمثيل البياني للدالة: $y = \log_b(x - h) + k$ هو انسحاب لبيان دالة المرجع $y = \log_b x$ بمقدار h وحدة أفقياً k وحدة رأسياً.

ارسم بيان الدالة: $y = \log_3(x - 3) + 1$ مستخدماً دالة المرجع.

دالة المرجع $y = \log_3 x$

$h = 3 , k = 1$

انسحاب بيان دالة المرجع:
- 3 وحدات يميناً
- وحدة للأعلى



x	y
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1

خواص اللوغاريتمات

$\forall m,n,b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$

خاصية الضرب $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى $\log_b m^k = k \log_b m , k \in \mathbb{R}$

تنبيه مهم

$\forall m,b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$

$\log_b 1 = 0$, $\log_b b = 1$, $\log_b(b^m) = m$

حل كل معادلة مما يلي مقرباً إجابتك إلى أقرب جزء من ألف.

$6^x = 21$

$\log 6^x = \log 21$

$x \log 6 = \log 21$

$x = \frac{\log 21}{\log 6} \approx 1.699$

$7^{3x} = 20$

$\log 7^{3x} = \log 20$

$3x \log 7 = \log 20$

$x = \frac{\log 20}{3\log 7} \approx 0.5132$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

حل كل معادلة مما يلي:

Q $t^{\frac{7}{2}} = 128 \quad , \quad t > 0$

$\log t^{\frac{7}{2}} = \log 2^7$

$\frac{7}{2}\log t = 7\log 2$

$\log t = \frac{2}{7} \times 7\log 2$

$\log t = 2\log 2$

$\log t = \log 2^2$

$t = 2^2$

$t = 4 \in (0, \infty)$

Q $x^{\frac{2}{3}} = 25 \, , x > 0$

$\log x^{\frac{2}{3}} = \log 5^2$

$\frac{2}{3}\log x = 2\log 5$

$\log x = \frac{3}{2} \times 2 \log\ 5$

$\log x = 3\log(5)$

$\log x = \log(5^3)$

$\therefore x = 5^3$

$x = 125 \in (0, \infty)$

Q حل المعادلة: $\log 6 - \log 3x = -2$

المجال

$3x > 0$

$x > 0$

$(0, \infty)$

$\log \frac{6}{3x} = -2$

$\frac{6}{3x} = 10^{-2}$

$\frac{2}{x} = \frac{1}{100}$

$x = 200 \quad \in (0,\infty)$

$\therefore$ حل المعادلة $x = 200$

Q حل المعادلة: $\log(7 - 2x) = -1$

المجال

$7 - 2x > 0$

$-2x > -7$

$x < \frac{-7}{-2}$

$x > 3.5$

$(-\infty, 3.5)$

$7 - 2x = 10^{-1}$

$-2x = 10^{-1} - 7$

$x = \frac{10^{-1} - 7}{-2} = 3.45$

$x = 3.45 \in (-\infty \, , 3.5)$

$\therefore$ حل المعادلة $x = 3.45$

صفوة معلمي الكويت

$\log x^2 - \log(x^2 - x) = 1$: $x \in (1, \infty)$

$\log \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 - x} = \frac{10}{1}$

$10x^2 - 10x = x^2$

$9x^2 - 10x = 0$

$x(9x - 10) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \notin (1, \infty)$

$9x - 10 = 0 \Longrightarrow x = \frac{10}{9} \in (1, \infty)$

$\therefore$ م.ح $= \left\{\frac{10}{9}\right\}$

$\log(2x) + \log(x - 3) = \log 8$

$\log 2x(x - 3) = \log 8$

$2x(x - 3) = 8$

$2x^2 - 6x - 8 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$

$x = 4 \in (3, \infty)$

$x = -1 \notin (3, \infty)$

المجال

$x - 3 > 0$ $\quad x > 3$

$2x > 0$ $\quad x > 0$

$(3, \infty)$

$\log_{x+1} 32 = 5$, $x \in (0, \infty)$

$32 = (x + 1)^5$

$2^5 = (x + 1)^5$ لاحظ الأس عدد فردي

$x + 1 = 2$

$x = 2 - 1 = 1$, $1 \in (0, \infty)$

$\therefore$ م.ح $= \{1\}$

صفوة معلمي الكويت

اللوغاريتم الطبيعي

هو اللوغاريتم الذي أساسه e ويرمز له بـ $\ln$ له نفس خواص اللوغاريتم:

$y = \log_e x = \ln x \ , k, m, n \in \mathbb{R}^+$

- $\ln(mn) = \ln m + \ln n$
- $\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$
- $\ln e = 1$
- $\ln e^k = k$
- $e^{\ln k} = k$

حل كلاً من المعادلات التالية:

Q $\ln(3x+5) = 4$

$\ln(3x+5) = 4$

$3x + 5 = e^4$

$3x = e^4 - 5$

$x = \frac{e^4-5}{3}$

$\approx 16.533 \in \left(\frac{-5}{3}, \infty\right)$

المجال $3x + 5 > 0$

$3x > -5$

$x > \frac{-5}{3}$

$\left(\frac{-5}{3}, \infty\right)$

Q $e^{x+1} = 30$

$\ln e^{x+1} = \ln 30$

$x + 1 = \ln 30$

$x = \ln(30) - 1$

$x \approx 2.401$

Q $5 + \ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 7$

$\ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 7 - 5$

$\ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 2$

$\frac{x+2}{3} = e^2$

$x + 2 = 3e^2$

$x = 3e^2 - 2$

$\approx 20.167 \ \in (-2, \infty)$

المجال $\frac{x+2}{3} > 0$

$x + 2 > 0$

$x > -2$

$(-2, \infty)$

Q $2^{2x-3} + 4 = 7$

$2^{2x-3} = 3$

$\ln 2^{2x-3} = \ln 3$

$(2x-3)\ln 2 = \ln 3$

$2x - 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$

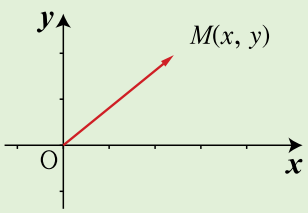
$2x = \frac{\ln 3}{\ln 2} + 3$

$x = \frac{\left(\frac{\ln 3}{\ln 2} + 3\right)}{2} \approx 2.292$

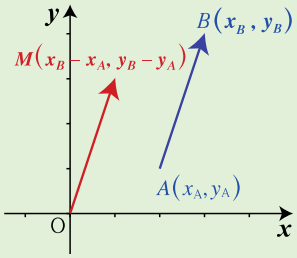
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

المتجه في المستوي

- القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها $M(x,y)$ تسمى (متجه الموضع) ويمثلها الزوج المرتب(x,y)



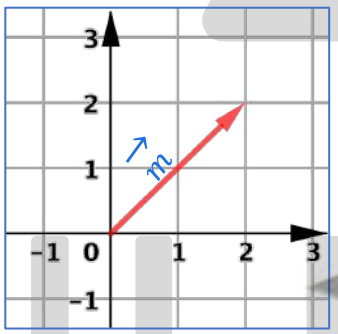
- $\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة في المستوى الإحداثي، متجه الموضع لهذه القطعة هو $\overrightarrow{OM}$ حيث
- $M(x_B - x_A \quad , \quad y_B - y_A)$



لكل من المتجهات التالية ارسم متجه الموضع ثم أوجد معيار المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

Q $\vec{m} =< 2,2 >$

$$\|\vec{m}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \quad \text{units}$$



زاوية الاسناد α

$$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| \Rightarrow$$

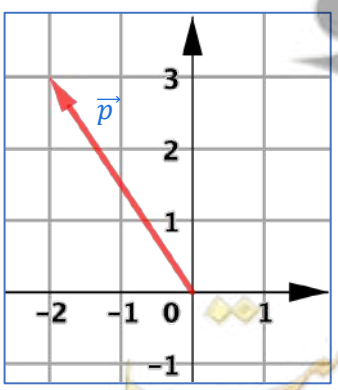
$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{2}{2}\right| = \tan^{-1}(1) = 45°$$

$\because x > 0 , y > 0 \Rightarrow$ θ في الربع 1

$$\theta = \alpha = 45°$$

Q $\vec{p} =< -2,3 >$

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad \text{units}$$



زاوية الاسناد α

$$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| \Rightarrow$$

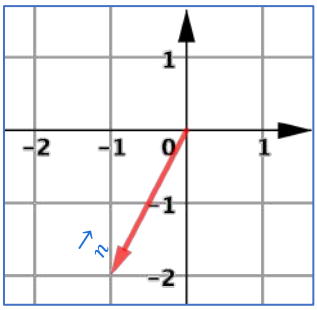
$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{3}{-2}\right| = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56.31°$$

$\because x < 0 , y > 0 \Rightarrow$ θ في الربع 2

$$\theta = 180° - \propto = 180° - 56.31° \approx 123.69°$$

صفوة معلمي الكويت

$\vec{n} =< -1, -2 >$



$\|\vec{n}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}\ units$

زاوية الاسناد α

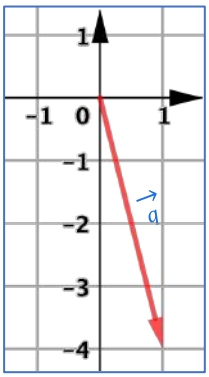
$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| \Rightarrow$

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-2}{-1}\right| = \tan^{-1}(2) \approx 63.43°$

$x < 0,\ y < 0 \Rightarrow$ θ في الربع 3

$\theta = 180° + \propto \approx 180° + 63.43° \approx 243.43°$

$\vec{q} =< 1, -4 >$



$\|\vec{q}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}\ units$

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| \Rightarrow$

زاوية الاسناد α

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-4}{1}\right| = \tan^{-1}(4) \approx 75.96°$

$x > 0,\ y < 0 \Rightarrow$ θ في الربع 4

$\theta = 360° - \propto \approx 360° - 75.96° \approx 284.04°$

متجه الوحدة

- المتجه $\vec{U} =< x,y >$ هو متجه وحدة إذا كان معياره يساوي الواحد أي:
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

إذا كان $\vec{v} =< x, \frac{12}{13} >$ فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\vec{v}$ متجه وحدة.

$\because \vec{v}$ متجه وحدة $\therefore \|\vec{v}\| = 1$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$\sqrt{x^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = 1$

$x^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$

$x^2 + \frac{144}{169} = 1$

$x^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

$\therefore x = \mp\sqrt{\frac{25}{169}} = \mp\frac{5}{13}$

صفوة معلمي الكويت

ليكن : $\vec{A} =< x_A, y_A >, \vec{B} =< x_B, y_B >$

$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow x_A = x_B , y_A = y_B$

إذا كانت $A(0,1), B(1,3), C(3,6), D(4,8)$ في المستوي الإحداثي فأثبت أن: $< \overrightarrow{AB} >=< \overrightarrow{CD} >$

$$\left.\begin{array}{l} \left\langle \overrightarrow{AB} \right\rangle = \langle x_B - x_A, y_B - y_A \rangle = \langle 1-0\,,3-1 \rangle = \langle 1\,,2 \rangle \\ \left\langle \overrightarrow{CD} \right\rangle = \langle x_D - x_C, y_D - y_C \rangle = \langle 4-3\,,8-6 \rangle = \langle 1\,,2 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{CD} \right\rangle$$

ليكن المتجهان $\vec{A} =< -2x+3, 4y-1 >, \vec{B} =< -1,3 >$ حيث x,y عددان حقيقيان . أوجد قيمتي x,y اللتين تحققان $\vec{A} = \vec{B}$

$$\vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} -2x+3 = -1 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2 \\ 4y-1 = 3 \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore x = 2\,, y = 1$$

باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $K(0,-1), L(2,3), M(-2,-5)$ على استقامة واحدة.

$$\left.\begin{array}{l} \left\langle \overrightarrow{KL} \right\rangle = \langle x_L - x_K\,,\ y_L - y_K \rangle = \langle 2\,,4 \rangle \\ \left\langle \overrightarrow{LM} \right\rangle = \langle x_M - x_L,\ y_M - y_L \rangle = \langle -4,-8 \rangle \end{array}\right\} \left\langle \overrightarrow{LM} \right\rangle = -2\left\langle \overrightarrow{KL} \right\rangle$$

بالتالي: K,L,M على استقامة واحدة

صفوة معلمي الكويت

جمع المتجهات وطرحها

جمع المتجهات هندسياً:

علاقة شال **إكمال متوازي الأضلاع**

$$< \overrightarrow{LN} > = < \overrightarrow{LM} > + < \overrightarrow{MN} >$$

$ABCD$ مضلع. أوجد:

Q $< \overrightarrow{AD} > + < \overrightarrow{CA} > + < \overrightarrow{BC} > + < \overrightarrow{DB} >$

$= \langle \overrightarrow{AD} \rangle + \left(\langle \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{CA} \rangle \right) + \langle \overrightarrow{DB} \rangle$ خاصية الإبدال

$= \langle \overrightarrow{AD} \rangle + \langle \overrightarrow{BA} \rangle + \langle \overrightarrow{DB} \rangle$ علاقة شال

$= \langle \overrightarrow{AD} \rangle + \langle \overrightarrow{DB} \rangle + \langle \overrightarrow{BA} \rangle$ خاصية الإبدال

$= \langle \overrightarrow{AA} \rangle = \vec{0}$ علاقة شال

Q $< \overrightarrow{AB} > - < \overrightarrow{AC} > + < \overrightarrow{BC} > + < \overrightarrow{AD} >$

$= \langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{AD} \rangle$ خاصية الإبدال

$= \langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{AD} \rangle = \langle \overrightarrow{AD} \rangle$ علاقة شال

إذا كان $\vec{A} = < 4, -2 >, \vec{B} = < -7,5 >$ فأوجد.

Q $\vec{A} + \vec{B} = \langle 4, -2 \rangle + \langle -7, 5 \rangle = \langle -3, 3 \rangle$

Q $\overrightarrow{3A} + \overrightarrow{5B} = 3\langle 4, -2 \rangle + 5\langle -7,5 \rangle = \langle 12, -6 \rangle + \langle -35, 25 \rangle = \langle -23, 19 \rangle$

إذا كان $\vec{A} = < -3,0 >, \vec{B} = < 5, -9 >$ فأوجد:

Q $\vec{A} - \vec{B} = \langle -3,0 \rangle - \langle 5, -9 \rangle = \langle -8,9 \rangle$

Q $-3\vec{A} + 4\vec{B} = -3\langle -3,0 \rangle + 4\langle 5, -9 \rangle = \langle 9,0 \rangle + \langle 20, -36 \rangle = \langle 29, -36 \rangle$

الضرب الداخلي

- $\vec{A}\cdot\vec{B}=\left\|\vec{A}\right\|\times\left\|\vec{B}\right\|\times\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)\ ,\ 0°\le m(\vec{A},\vec{B})\le 180°$

إذا كان $\vec{A}=<x_1,y_1>\ ,\vec{B}=<x_2,y_2>$

بالتالي: $\vec{A}.\vec{B}=x_1x_2+y_1y_2$

إذا كان $\vec{u}=<0,2>\ ,\vec{v}=<2,2>$ فأوجد $\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2=0\times2+2\times2=4$

التعامد:

- $\vec{A}\perp\vec{B}\Leftrightarrow\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ حيث $\vec{A}\neq\vec{0}\ ,\ \vec{B}\neq\vec{0}$

إذا كان $\vec{A}=<1,3>\ ,\vec{B}=<-6,2>$ أثبت أن: $\vec{A}\perp\vec{B}$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=x_1x_2+y_1y_2=(1)(-6)+(3)(2)=0\Rightarrow\vec{A}\perp\vec{B}$

إذا كان $\vec{A}=<3,-1>\ ,\vec{B}=<x,-2>$ وكان $\vec{A}\perp\vec{B}$ فأوجد قيمة x

$\because\vec{A}\perp\vec{B}\quad\therefore\vec{A}\cdot\vec{B}=0\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

$3x+(-1)\cdot(-2)=0$

$3x+2=0\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

التوازي:

- $\vec{A}\parallel\vec{B}\Leftrightarrow\vec{A}=k\vec{B}$ حيث $\vec{A}\neq\vec{0},\vec{B}\neq\vec{0}$

ملاحظة: $\vec{A}\parallel\vec{B}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$

حيث: $\vec{A}=<x_1,y_1>\ ,\vec{B}=<x_2,y_2>$

أثبت أن : $\vec{A}\parallel\vec{B}$ حيث $\vec{A}=<3,-2>,\vec{B}=<6,-4>$

طريقة 1

$\frac{y_B}{y_A}=\frac{-4}{-2}=2$

$\frac{x_B}{x_A}=\frac{6}{3}=2$

$\because\vec{B}=2\vec{A}\quad\therefore\vec{A}\parallel\vec{B}$

طريقة 2

$x_1y_2-x_2y_1=3(-4)-6(-2)=0$

$\therefore\vec{A}\parallel\vec{B}$

إذا كان $\vec{A}\parallel\vec{B}$ حيث $\vec{A}=<\frac{7}{3},\frac{2}{3}>,\vec{B}=<x,\frac{4}{5}>$ فأوجد x

$\because\vec{A}\parallel\vec{B}\quad\therefore x_1y_2-x_2y_1=0\Rightarrow\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{5}-x\cdot\frac{2}{3}=0$

$\Rightarrow\frac{28}{15}=\frac{2}{3}x\Rightarrow x=\frac{28}{15}\times\frac{3}{2}=\frac{14}{5}$

إذا كانت النقاط $A(-2,-3), B(1,1), C(-3,-1)$

a) اكتب كلاً من المتجهين $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{i}, \vec{j}$

$$\left\langle \overrightarrow{CA} \right\rangle = \langle x_A - x_C, y_A - y_C \rangle = \langle -2-(-3), -3-(-1) \rangle =< 1, -2 > = \vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\left\langle \overrightarrow{CB} \right\rangle = \langle x_B - x_C, y_B - y_C \rangle = \langle 1-(-3), 1-(-1) \rangle =< 4,2 >= 4\vec{i} + 2\vec{j}$$

b) أوجد قيمة $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CA} \,.\, \overrightarrow{CB} = x_1x_2 + y_1y_2 = 1 \times 4 + (-2) \times 2 = 0$$

c) أثبت أن المثلث ABC *قائم في* $\hat{B}$

$\because \overrightarrow{CA} \,.\, \overrightarrow{CB} = 0 \qquad \therefore \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ المثلث قائم في $\hat{C}$

Q $\vec{A}, \vec{B}$ متجهان في المستوى , حيث $\| \vec{A} \| = 3 \,, \| \vec{B} \| = 4 \,, \vec{A} \cdot \vec{B} = 5$

أوجد قيمة $\left(3\vec{A} - 2\vec{B}\right) \cdot \left(-\vec{A} + 3\vec{B}\right)$

$$\left(3\vec{A} - 2\vec{B}\right) \cdot \left(-\vec{A} + 3\vec{B}\right) = -3\vec{A} \cdot \vec{A} + 9\vec{A} \cdot \vec{B} + 2\vec{B} \cdot \vec{A} - 6\vec{B} \cdot \vec{B}$$

$$= -3\left\|\vec{A}\right\|^2 + 11\vec{A} \cdot \vec{B} - 6\left\|\vec{B}\right\|^2 = -3(3)^2 + 11(5) - 6(4)^2 = -68$$

صفوة معلمي الكويت

قياس الزاوية بين متجهين

قانون إذا كان $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ متجهين وكان $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$ فإن:

$$\cos\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\right) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\left\|\overrightarrow{A}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{B}\right\|} , 0° \leq m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \leq 180°$$

Q إذا كان $\left\|\overrightarrow{A}\right\| = 3, \left\|\overrightarrow{B}\right\| = 2, \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = -3\sqrt{3}$ فأوجد قياس الزاوية $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$

$$\cos\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\right) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\left\|\overrightarrow{A}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{B}\right\|} , 0° \leq m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \leq 180°$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{3 \times 2} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 150°$$

Q أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\overrightarrow{A} =< 6,3 >, \overrightarrow{B} =< 3, -1 >$

$$\cos\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\right) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\left\|\overrightarrow{A}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{B}\right\|} , 0° \leq m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \leq 180°$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$= 6 \times 3 + 3 \times (-1) = 15$$

$$\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\left\|\vec{B}\right\| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \cos\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\right) = \frac{15}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

العينات

العينة العشوائية البسيطة:

- إذا تضمن المجتمع الإحصائي عدد nمن المفردات المتجانسة وأردنا أخذ عينة عشوائية بسيطة
- الشيء الأساس في العينة العشوائية البسيطة هو أن يكون لكل مفردة من مفردات المجتمع الإحصائي الفرصة نفسها لتكون ضمن العينة

عدد العاملين في مؤسسة هو 90 موظفاً مرقمين من 1 إلى90 يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود الرابع.

من جدول الأعداد العشوائية نجد أن العينة هي:

59 , 61 , 3 , 24 , 77 , 70 , 10

العينة العشوائية الطبقية:

عندما يكون المجتمع مكوناً من مجموعات لا تتقاطع مع بعضها، نأخذ عينة عشوائية بسيطة من كل مجموعة، فنحصل على عينة عشوائية طبقية

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع}}$$

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد من 35 موظفاً موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	مستخدمون	محاسبون و مدققون	مدراء أقسام
35	5	20	10

- ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة

كسر المعاينة $= \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع}} = \frac{7}{35} = 0.2$

حجم عينة المدراء $= 10 \times 0.2 = 2$

حجم عينة المحاسبين والمدققين $= 20 \times 0.2 = 4$

حجم عينة المستخدمين $= 5 \times 0.2 = 1$

صفوة معلمي الكويت

Q في إحدى المؤسسات يوجد 100 إدارياً مرقمين من 100 إلى199، 200 مهندس مرقمين من 200 إلى 399 ، 600 عامل مرقمين من 400 إلى 999. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 18 فرداً من جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الرابع والعمود الرابع

كسر المعاينة = $\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع}} = \frac{18}{900} = 0.02$

- **الإداريّون: (100) من 100 إلى 1999**

حجم عينة الإداريين=$100 \times 0.02 = 2$

من الجدول: 159 , 103

- **المهندسون: (200) من 200 إلى 399**

حجم عينة المهندسين=$200 \times 0.02 = 4$

من الجدول: 246 , 383 , 349 , 341

- **العمّال: (600) من 400 إلى 999**

حجم عينة العمال=$600 \times 0.02 = 12$

من الجدول: 780 , 595 , 617 , 770 , 926 , 709 , 447 , 690 , 652 , 803 , 456 , 531

العينة العشوائية المنتظمة:

يتم سحب مفرداتها وفق نظام ثابت ومنتظم

طول الفترة = $\frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}}$

Q في أحد المصانع حيث عدد العمال 900 مرقمين من 1 إلى900، أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج.
المطلوب ما العينة العشوائية المنتظمة إذا أراد صاحب المصنع تشكيلها على أن يكون حجمها 10، مستخدماً جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن عشر والعمود السابع؟

طول الفترة = $\frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{900}{10} = 90$

من جدول الأعداد العشوائية الصف 18 العمود 7
نختار أول عدد مؤلف من منزلتين بحيث لا يزيد عن طول الفترة 90 وهو 75

+90

75 , 165 , 255 , 345 , 435 , 525 , 615 , 705 , 795 , 885

Q يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالباً مرقمين من 1 إلى140. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم الهدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود التاسع.

طول الفترة = $\frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{140}{7} = 20$

من جدول الأعداد العشوائية الصف 6 العمود 9
نختار أول عدد مؤلف من منزلتين بحيث لا يزيد عن طول الفترة 20 وهو 15

+20

15 , 35 , 55 , 75 , 95 , 115 , 135

القاعدة التجريبية

خواص التوزيع الطبيعي:

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال
- المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى ∞, $-\infty$

القاعدة التجريبية : نستخدمها لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة محددة

Q لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها 475 ديناراً بانحراف معياري 115 ديناراً.
طبق القاعدة التجريبية.
هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 750 ديناراً؟ فسّر ذلك

القاعدة التجريبية.

- حوالى 68% من الأرباح تقع على الفتره. $[\bar{x}-\sigma\ ,\bar{x}+\sigma]$

$$[475-115\ ,475+115]=[360\ ,590]$$

- حوالى 95% من الأرباح تقع على الفتره. $[\bar{x}-2\sigma\ ,\bar{x}+2\sigma]$

$$[475-2\times115\ ,475+2\times115]=[245\ ,705]$$

- حوالى 99.7% من الأرباح تقع على الفتره $[\bar{x}-3\sigma\ ,\bar{x}+3\sigma]$

$$[475-3\times115\ ,475+3\times115]=[130\ ,820]$$

من المتوقع وصول الارباح إلى 750 لأنه $750\in[130\ ,820]$

القيمة المعيارية هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي

$$z=\frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$

Q جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء **15** حيث المتوسط الحسابي **14** والانحراف المعياري **3.8** وفي مادة الكيمياء **15** حيث المتوسط الحسابي **13** والانحراف المعياري **7.8**.
ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل

مادة الفيزياء

$$x=15\ ,\bar{x}=14\ ,\sigma=3.8$$

$$z=\frac{x-\bar{x}}{\sigma}=\frac{15-14}{3.8}$$

$$z_1=0.263$$

مادة الكمياء

$$x=15\ ,\bar{x}=13\ ,\sigma=7.8$$

$$z=\frac{x-\bar{x}}{\sigma}=\frac{15-13}{7.8}$$

$$z_2=0.256$$

$\because z_1>z_2 \Rightarrow$ درجة الطالب في الفيزياء أفضل

صفوة معلمي الكويت