UULA.COM

الزبدة



11 الإحصاء

الكورس الثاني

UULA

صفوة الكويت

2025 - 2024

الوسيط والربيعات من جدول تكراري

Q يمثّل الجدول التكراري التالي معدل أجر الموظفين بالدينار الكويتي مقابل كل ساعة عمل في بعض الشركات.

معدل الأجر	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
التكرار	٢	٢	٢	٣	٢	٢	١٣

- رتّب هذه البيانات بحسب القيم تصاعديًا.

٥، ٥، ٦، ٦، ٧، ٧، ٨، ٨، ٨، ٩، ٩، ١٠، ١٠

- أوجد الوسيط $(\text{ر}_٢)$

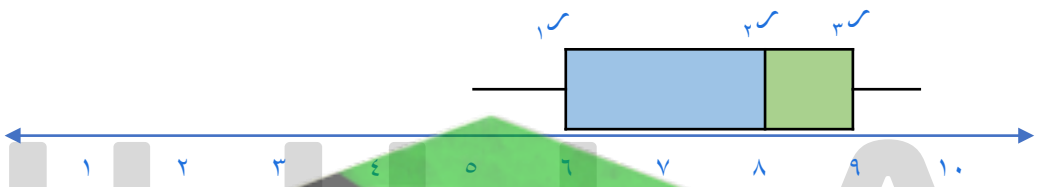
عدد المفردات ١٣ فرديا بالتالي الترتيب هو: $\frac{\text{ن}+١}{٢} = ٧ \Leftarrow \text{ر}_٢ = ٨$

- أوجد الربيع الأدنى $(\text{ر}_١)$ ، والربيع الأعلى $(\text{ر}_٣)$

عدد المفردات ٦ زوجية بالتالي الترتيب هو: $\frac{\text{ن}}{٢}$ ، $\frac{\text{ن}}{٢}+١$ $\Leftarrow$ (٣) و(٤) $\Leftarrow \text{ر}_١ = \frac{٦+٦}{٢} = ٦$

$\Leftarrow \text{ر}_٣ = \frac{٩+٩}{٢} = ٩$

- مثل هذه القيم بمخطط الصندوق ذي العارضتين.



صفوة معلمي الكويت

الوسيط والربيعات من جدول فئات

Q يمثّل الجدول التالي أعمار سكان أحد الأبنية بالسنوات

الفئة	٠-	١٥-	٣٠-	٤٥-	المجموع
التكرار	٤	٧	٦	٣	٢٠

- كوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد.

الفئة	التكرار	أقل من الحد الأعلى	ت.م. الصاعد
٠-	٤	أقل من ١٥	٤
١٥-	٧	أقل من ٣٠	١١
٣٠-	٦	أقل من ٤٥	١٧
٤٥-	٣	أقل من ٦٠	٢٠
المجموع	٢٠		

فئة الوسيط [١٥ ، ٣٠)

- أوجد الوسيط حسابيًّا. $\frac{ن}{٢} = ١٠ \Leftarrow$ $ق_{٣} = (١٥) + \frac{١٠ - ٤}{٧} \times (١٥) = \frac{١٩٥}{٧} \approx ٢٧,٨٦$

Q

الفئة	٠-	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	المجموع
التكرار	٩	٦	٨	٥	٤		٣٢

المطلوب إيجاد كل من:

- جدول التكرار المتجمع الصاعد.

الفئة	التكرار	أقل من الحد الأعلى	ت.م. الصاعد
٠-	٩	أقل من ١٠	٩
٥-	٦	أقل من ١٥	١٥
١٠-	٨	أقل من ٢٠	٢٣
١٥-	٥	أقل من ٢٥	٢٨
٢٠-	٤	أقل من ٣٠	٣٢
المجموع	٣٢		

$ق_{١} \leftarrow [٠، ٥)$

$ق_{٣} \leftarrow [٢٠، ٢٥)$

- الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

الربيع الأدنى

$\frac{ن}{٤} = \frac{٣٢}{٤} = ٨$

$ق_{١} = (٥) + \frac{٠ - ٨}{٩} \times (٥) = \frac{٨٥}{٩} \approx ٩,٤٤$

الربيع الأعلى

$\frac{٣ن}{٤} = \frac{٣ \times ٣٢}{٤} = ٢٤$

$ق_{٣} = (٢٠) + \frac{٢٤ - ٢٣}{٥} \times (٥) = ٢١$

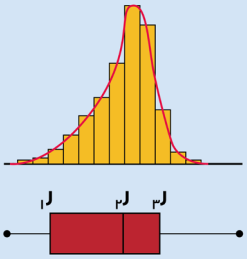
صفوة معلمي الكويت

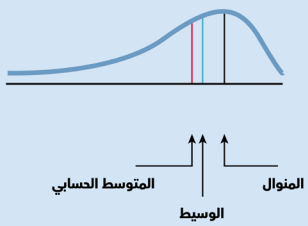
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

الالتواء

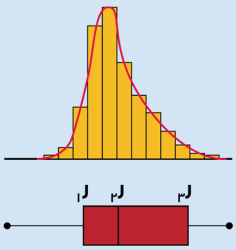
الربط بين مقاييس النزعة المركزية والالتواء:

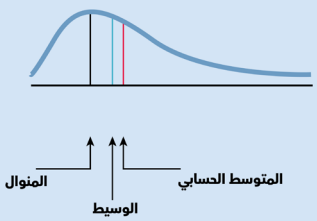
الالتواء إلى اليسار (السالب):
يكون فيه المنوال > الوسيط > المتوسط الحسابي



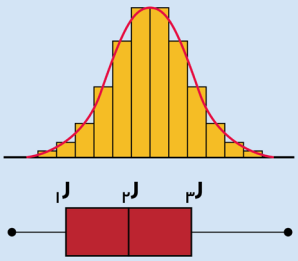


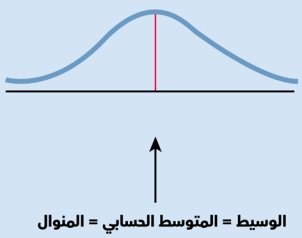
الالتواء إلى اليمين (الموجب):
يكون فيه المنوال < الوسيط < المتوسط الحسابي





متماثل (لا يوجد التواء)
يكون المنوال = الوسيط = المتوسط الحسابي





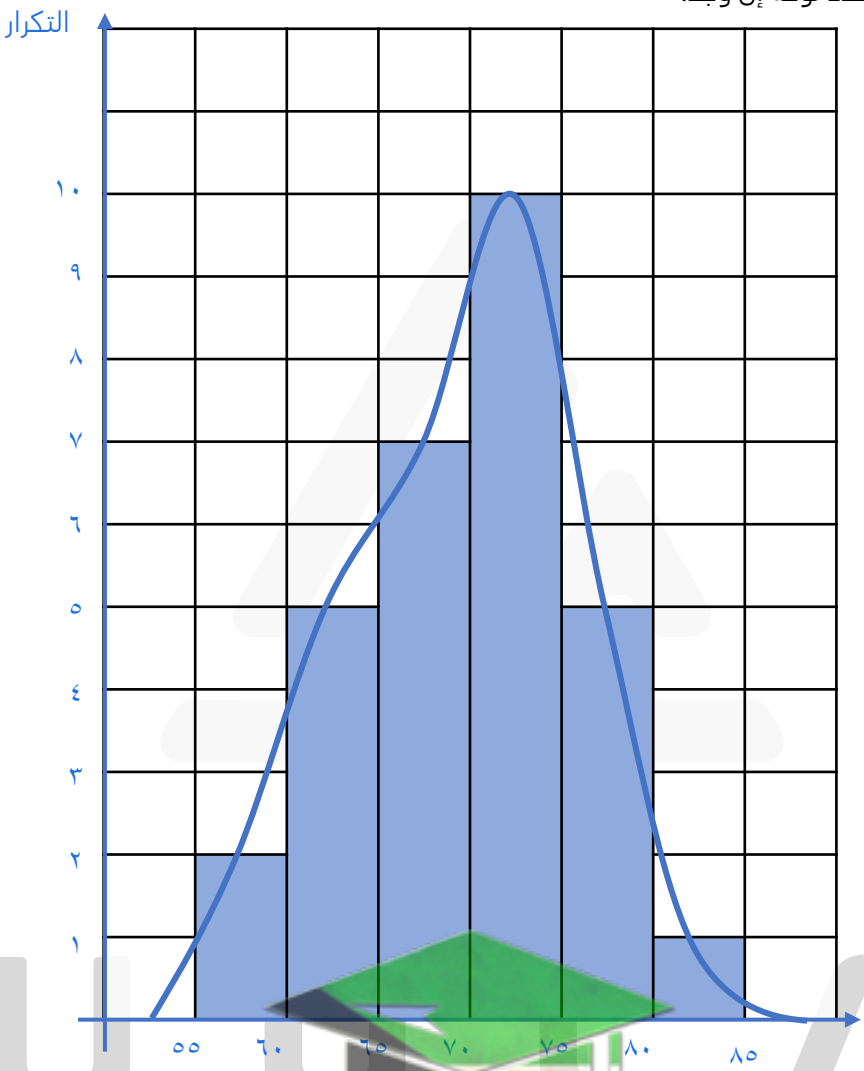
صفوة معلمي الكويت

Q يبيّن الجدول أدناه أوزان ٣٠ طالبًا بالكيلوجرام.

الفئة	-٥٥	-٦٠	-٦٥	-٧٠	-٧٥	-٨٠	المجموع
التكرار	٢	٥	٧	١٠	٥	١	٣٠

- مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

- هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.



يوجد التواء إلى اليسار (سالب)

صفوة معلمي الكويت

Q تمثّل البيانات التالية درجات الحرارة في بعض مدن العالم:
٢٤°، ٢٠°، ٢٢°، ٣٥°، ٣٧°، ٣٤°، ٤٠°، ٣٧°، ٣٠°

- احسب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لهذه البيانات.

٢٠ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ٣٠ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٧ ، ٣٧ ، ٤٠

المتوسط الحسابي = مجموع القيم / عددها = ٢٧٩ / ٩ = ٣١

عدد القيم ٩ (فردي) بالتالي ترتيب الوسيط = (ن+١)/٢ = ٥ ⇐ ق٢ = ٣٤

المنوال = ٣٧

- هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

∵ المنوال < الوسيط < المتوسط الحسابي
∴ يوجد التواء سالب (جهة اليسار)

Q ٢٥ شخص يتابعون حدثًا معينًا ، أعمارهم موزعة كالتالي:
٣ ، ٣ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٨ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٢ ، ٢٢ ، ٢٥

- أوجد كلا من المنوال، المتوسط الحسابي والوسيط؟

المتوسط الحسابي = مجموع القيم / عددها = ٢٤٠ / ٢٥ = ٩,٦

عدد القيم ٢٥ (فردي) بالتالي ترتيب الوسيط = (ن+١)/٢ = ١٣ ⇐ ق٢ = ٧

المنوال = ٦

- هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه.

∵ المتوسط الحسابي > الوسيط > المنوال
∴ يوجد التواء موجب (يمين)

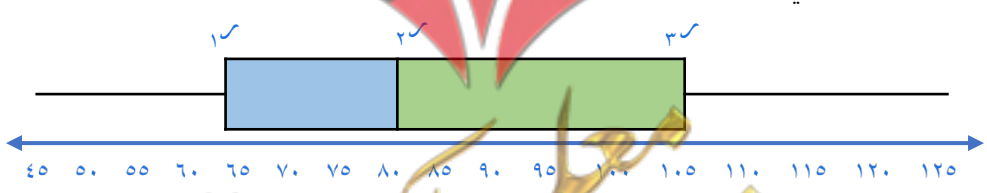
Q في البيانات التالية:
٤٥ ، ٤٨ ، ٥٢ ، ٥٩ ، ٦٤ ، ٦٦ ، ٧٢ ، ٧٦ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨٦ ، ٩٠ ، ٩٦ ، ٩٨ ، ١٠٥ ، ١٠٩ ، ١١٣ ، ١١٧ ، ١٢٢

- احسب الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى.

الوسيط: عدد المفردات ١٩ فرديا بالتالي الترتيب هو: (١٠) ⇐ ق٢ = ٨٠

الربيع الأدنى والربيع الأعلى: عدد المفردات ٩ فردية بالتالي الترتيب هو: (ن+١)/٢ = (٥)
ق١ = ٦٤ ⇐
ق٣ = ١٠٥

- ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.



- هل البيانات تبيّن تماثلًا أم التواء إلى اليمين أم التواء إلى اليسار؟

يوجد التواء موجب (جهة اليمين)

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

مقاييس التشتت وتطبيقاتها

مقاييس التشتت:

- المدى = القيمة العظمى - القيمة الصغرى

- نصف المدى الربيعي = $\frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{٢}$

- التباين: $ع^{٢} = \frac{\sum (س - \overline{س})^{٢}}{ن}$

- الانحراف المعياري: $ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$

حيث: $س$ = المتغير، $\overline{س}$ = المتوسط الحسابي، ن عدد القيم

في حالة تكرار القيم في البيانات يكون لدينا:

- التباين: $ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{م} (س_ر - \overline{س})^{٢} ت_ر}{\sum_{ر=١}^{م} ت_ر}$

- الانحراف المعياري: $ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{م} (س_ر - \overline{س})^{٢} ت_ر}{\sum_{ر=١}^{م} ت_ر}}$

صفوة معلمي الكويت

© جميع الحقوق محفوظة

Q لنأخذ البيانات: ٢، ٤، ٥، ٦، ٦، ٧، ٧، ٧، ٨، ٨

- أوجد المدى، الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى

المدى = ٨-٢=٦

الوسيط $= م_{٢} = \frac{٦+٧}{٢} = ٦,٥$

الربيع الأدنى $= م_{١} = ٥$

الربيع الأعلى $= م_{٣} = ٧$

- أوجد نصف المدى الربيعي.

نصف المدى الربيعي $= \frac{م_{٣} - م_{١}}{٢} = \frac{٧-٥}{٢} = ١$

- أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

المتوسط الحسابي

$\overline{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{٦٠}{١٠} = ٦$

س	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^{٢}$
٢	٤-	$(-٤)^{٢} = ١٦$
٤	٢-	٤
٥	١-	١
٦	٠	٠
٦	٠	٠
٧	١	١
٧	١	١
٧	١	١
٨	٢	٤
٨	٢	٤
٦٠		٣٢

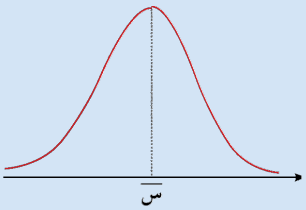
التباين $= ع^{٢} = \frac{٣٢}{١٠} = ٣,٢$

الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{٣,٢} = ١,٧٩$

صفوة معلمي الكويت

التوزيع الطبيعي

التوزيع الطبيعي هو توزيع البيانات بشكل مماثل حول المتوسط الحسابي والمنحنى التكراري الذي يمثل هذه البيانات يأخذ شكل الجرس كما هو في الشكل التالي:



من خواص منحنى التوزيع الطبيعي:

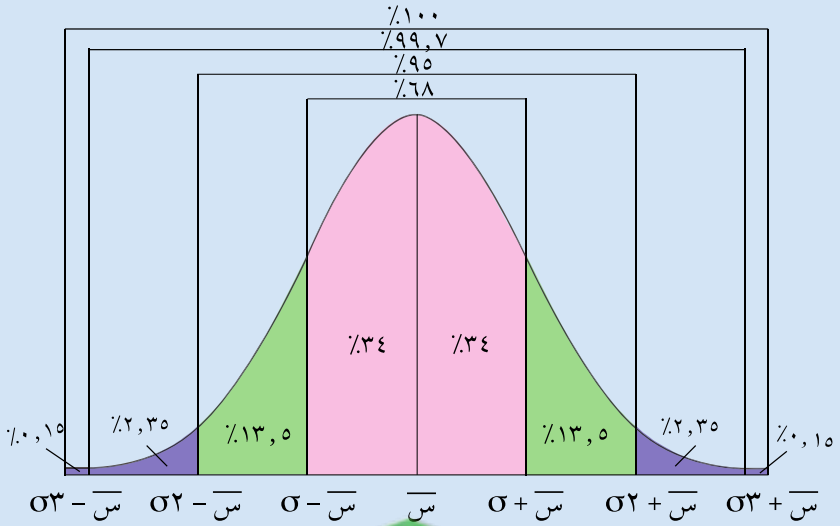
أن يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي.

أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

أن ينحدر طرفاه تدريجياً ويمتدان إلى ما لا نهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبداً.

القاعدة التجريبية

تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة عددها ن $(ن > ٣٠)$



حوالي ٦٨٪ من قيم هذه البيانات تقع على الفترة $[\bar{س} - \sigma، \bar{س} + \sigma]$

حوالي ٩٥٪من قيم هذه البيانات تقع على الفترة $[\bar{س} - ٢\sigma، \bar{س} + ٢\sigma]$

حوالي ٩٩,٧٪ من قيم هذه البيانات تقع على الفترة $[\bar{س} - ٣\sigma، \bar{س} + ٣\sigma]$

صفوة معلمي الكويت

Q لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها ٤٧٥ دينارًا بانحراف معياري ١١٥ دينارًا

- طبّق القاعدة التجريبية.

حوالي ٦٨٪ من الأرباح تقع على الفترة $[\overline{س}-\sigma، \overline{س}+\sigma]$

$[٤٧٥-١١٥، ٤٧٥+١١٥] = [٣٦٠، ٥٩٠]$

حوالي ٩٥ ٪ من الأرباح تقع على الفترة $[\overline{س}-٢\sigma، \overline{س}+٢\sigma]$

$[٤٧٥-٢\times١١٥، ٤٧٥+٢\times١١٥] = [٢٤٥، ٧٠٥]$

حوالي ٩٩,٧% من الأرباح تقع على الفترة $[\overline{س}-٣\sigma، \overline{س}+٣\sigma]$

$[٤٧٥-٣\times١١٥، ٤٧٥+٣\times١١٥] = [١٣٠، ٨٢٠]$

- هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى ٧٥٠ دينارًا ؟ فسّر ذلك.

نعم من المتوقع لأن $٧٥٠ \in [١٣٠، ٨٢٠]$

Q لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها ٣٥٠ دينارًا بانحراف معياري ١١٠ دينارًا

- طبّق القاعدة التجريبية.

حوالي ٦٨ ٪ من الأرباح تقع على الفترة $[\overline{س}-\sigma، \overline{س}+\sigma]$

$[٣٥٠-١١٠، ٣٥٠+١١٠] = [٢٤٠، ٤٦٠]$

حوالي ٩٥% من الأرباح تقع على الفترة $[\overline{س}-٢\sigma، \overline{س}+٢\sigma]$

$[٣٥٠-٢\times١١٠، ٣٥٠+٢\times١١٠] = [١٣٠، ٥٧٠]$

حوالي ٩٩,٧% من الأرباح تقع على الفترة $[\overline{س}-٣\sigma، \overline{س}+٣\sigma]$

$[٣٥٠-٣\times١١٠، ٣٥٠+٣\times١١٠] = [٢٠، ٦٨٠]$

- هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى ٦٩٠ دينارًا ؟ فسّر ذلك.

من غير المتوقع ذلك لأن: $٦٩٠ \notin [٢٠، ٦٨٠]$

صفوة معلمي الكويت

القيمة المعيارية

هو مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي وذلك باستخدام الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات. إذا كان المطلوب مقارنة قيمتين لمفردتين مختلفتين تنتمي كل منهما إلى مجموعة محددة فإنه لا يكفي إحصائيًّا.

$$\text{القيمة المعيارية (ق)} = \frac{\text{المتوسط الحسابي – قيمة المفردة}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{س - \bar{س}}{\sigma}$$

Q جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء ١٥ حيث المتوسط الحسابي ١٤ والانحراف المعياري ٣,٨ وفي مادة الكيمياء ١٥ حيث المتوسط الحسابي ١٣ والانحراف المعياري ٧,٨
ما القيمة المعيارية للدرجة ١٥ مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

الفيزياء	الكيمياء
$س = ١٥$	$س = ١٥$
$\bar{س} = ١٤$	$\bar{س} = ١٣$
$\sigma = ٣,٨$	$\sigma = ٧,٨$
$ق_١ = \frac{س - \bar{س}}{\sigma} = \frac{١٥ - ١٤}{٣,٨} \approx ٠,٢٦٣$	$ق_٢ = \frac{س - \bar{س}}{\sigma} = \frac{١٥ - ١٣}{٧,٨} \approx ٠,٢٥٣$

$\because ق_١ > ق_٢$ ∴ درجة الفيزياء هي الأفضل

Q يسكن خالد في المدينة (أ) حيث إن طول قامته ١٨٠ سم والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة ١٧٤ سم مع انحراف معياري ١٢ سم. أما صالح فيسكن في المدينة (ب) حيث إن طول قامته ١٧٢ سم والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة ١٦٥ سم مع انحراف معياري ١٥.
أي منهما طول قامته أفضل من الآخر مقارنة مع أطوال الرجال في كل مدينة؟

خالد	صالح
$س = ١٨٠$	$س = ١٧٢$
$\bar{س} = ١٧٤$	$\bar{س} = ١٦٥$
$\sigma = ١٢$	$\sigma = ١٥$
$ق_١ = \frac{س - \bar{س}}{\sigma} = \frac{١٨٠ - ١٧٤}{١٢} = ٠,٥$	$ق_٢ = \frac{س - \bar{س}}{\sigma} = \frac{١٧٢ - ١٦٥}{١٥} \approx ٠,٤٧$

$\because ق_١ > ق_٢$ ∴ طول خالد هو الأفضل

صفوة معلمي الكويت

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

مضروب العدد

$$ن! = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times (ن-٣) \times \ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$$

$$ن! = ن \times (ن-١)!$$

$$٠! = ١$$

احسب (موضحًا خطوات الحل):

Q $٥! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠$

Q $\frac{١٢!}{٩!} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times \cancel{٩!}}{\cancel{٩!}} = ١٣٢٠$

Q $\frac{١٦!}{١٢!٤!} = \frac{١٦ \times ١٥ \times ١٤ \times ١٣ \times \cancel{١٢!}}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \quad \cancel{١٢!}} = ١٨٢٠$

التبادل $ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$ $\quad ن \geq ر$ $\quad ن، ر \in صـ$

أوجد قيمة كل مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

Q $ل^{٨}_{٣} = \frac{٨!}{(٨-٣)!} = ٨ \times ٧ \times ٦ = ٣٣٦$

Q $ل^{٧}_{٣} + ل^{٧}_{٥} = \frac{٧!}{(٧-٣)!} + \frac{٧!}{(٧-٥)!}$

$= ٧ \times ٦ \times ٥ + ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٤ \times ٣$

$= ٢١٠ + ٢٥٢٠$

$= ٢٧٣٠$

Q $\frac{ل^{٩}_{٥}}{ل^{٨}_{٤}} = \frac{\frac{٩!}{(٩-٥)!}}{\frac{٨!}{(٨-٤)!}}$

$= \frac{٩ \times \cancel{٨} \times \cancel{٧} \times \cancel{٦} \times \cancel{٥!}}{\cancel{٥!} \times \cancel{٦} \times \cancel{٧} \times \cancel{٨}}$

$= ٩$

صفوة معلمي الكويت

التوافيق

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!} \quad , \quad ن^{ر} = \frac{ل^{ن}_{ر}}{ر!}$$

$$ن^{ر} = ن^{ن-ر} \qquad ن^{١} = ن \qquad ن^{ن} = ١ \qquad ن^{٠} = ١$$

حلّ كل معادلة مما يلي حيث ن عدد صحيح موجب أكبر من ٢.

Q $ن^{٢} = ١٠$

$$\frac{ن(ن-١)}{٢!} = ١٠$$

$$\frac{ن(ن-١)}{٢} = \frac{١٠}{١}$$

$$ن(ن-١) = ٢٠$$

$$ن(ن-١) = ٥ \times ٤$$

$$\therefore ن = ٥$$

Q $ل^{ن}_{٢} = ١٢ن$

$$\frac{ك(ن-١)}{ك} = \frac{ك١٢}{ك} \quad : ن \neq ٠$$

$$ن - ١ = ١٢$$

$$ن = ١٢ + ١ = ١٣$$

Q $ن = ن^{٢}$

$$ن = \frac{ن(ن-١)}{٢!}$$

$$\frac{ك(ن-١)}{٢} = ك \quad (\div ن \ : \ ن \neq ٠)$$

$$\frac{ن-١}{١} = \frac{١}{١}$$

$$ن - ١ = ٢ \quad \Leftarrow \quad ن = ٢ + ١ = ٣$$

Q $ن^{١+ن} = ٢ن$

$$ن^{٢} = \frac{ن(١+ن)}{٢!}$$

$$ن^{٢} = \frac{ن(١+ن)}{٢} \quad (\div ن : ن \neq ٠)$$

$$\frac{١+ن}{٢} = \frac{٢}{١}$$

$$ن + ١ = ٤ \quad \Leftarrow \quad ن = ٤ - ١ = ٣$$

Q $ل^{ن}_{٣} = ٢٤$

$$ن(ن-١)(ن-٢) = ٢٤$$

$$ن(ن-١)(ن-٢) = ٤ \times ٣ \times ٢$$

$$\therefore ن = ٤$$

Q $ن^{٣} = ٢ل^{ن}_{٢}$

$$ن^{٣} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣!} = (ن-١)ن$$

$$٣! = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$$

$$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٦} = (ن-١)ن \quad : ن(ن-١) \neq ٠$$

$$\frac{ن-٢}{١} = \frac{١}{١}$$

$$ن - ٢ = ٦ \quad \Leftarrow \quad ن = ٦ + ٢ = ٨$$

Q $\frac{(ن+٣)!}{(ن+١)!} = ٤٢$

$$\frac{(ن+٣)(ن+٢)(ن+١)!}{(ن+١)!} = ٤٢$$

$$(ن + ٣)(ن + ٢) = ٧ \times ٦$$

$$ن + ٣ = ٧ \Leftarrow ن = ٧ - ٣ = ٤$$

Q $\frac{ن!}{(ن-٢)!} = ١٢$

$$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)!}{(ن-٢)!} = ١٢$$

$$ن(ن - ١) = ٤ \times ٣ \Leftarrow ن = ٣$$

صفوة معلمي الكويت

نظرية ذات الحدين

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب ن فإن:

$$(أ+ب)^{ن} = {}^{ن}ق_{ن} أ^{ن} + {}^{ن}ق_{ن-١} أ^{ن-١} ب + {}^{ن}ق_{ن-٢} أ^{ن-٢} ب^{٢} + \ldots + {}^{ن}ق_{١} أ ب^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٠} ب^{ن}$$

Q استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(س+٣)^{٥}$

$$(س+٣)^{٥} = {}^{٥}ق_{٠} \times س^{٥} + {}^{٥}ق_{١} \times س^{٤} \times ٣ + {}^{٥}ق_{٢} \times س^{٣} \times ٣^{٢} + {}^{٥}ق_{٣} \times س^{٢} \times ٣^{٣} + {}^{٥}ق_{٤} \times س \times ٣^{٤} + {}^{٥}ق_{٥} \times ٣^{٥}$$

$$= ١ \times س^{٥} + ٥ \times س^{٤} \times ٣ + ١٠ \times س^{٣} \times ٩ + ١٠ \times س^{٢} \times ٢٧ + ٥ \times س \times ٨١ + ١ \times ٢٤٣$$

$$= س^{٥} + ١٥ س^{٤} + ٩٠ س^{٣} + ٢٧٠ س^{٢} + ٤٠٥ س + ٢٤٣$$

Q أوجد مفكوك $(٣س - ٤ص)^{٣}$

$$(٣س-٤ص)^{٣} = {}^{٣}ق_{٠} \times (٣س)^{٣} + {}^{٣}ق_{١} \times (٣س)^{٢} \times (-٤ص)^{١} + {}^{٣}ق_{٢} \times (٣س)^{١} \times (-٤ص)^{٢} + {}^{٣}ق_{٣} \times (-٤ص)^{٣}$$

$$= ١ \times ٣^{٣} س^{٣} + ٣ \times ٣^{٢} س^{٢} \times (-٤)ص + ٣ \times ٣س \times (-٤)^{٢} ص^{٢} + (-٤)^{٣} ص^{٣}$$

$$= ٢٧ س^{٣} - ١٠٨ س^{٢} ص + ١٤٤ س ص^{٢} - ٦٤ ص^{٣}$$

Q أوجد مفكوك $(٢س - ٣ص)^{٤}$

$$(٢س-٣ص)^{٤} = {}^{٤}ق_{٠} \times (٢س)^{٤} + {}^{٤}ق_{١} \times (٢س)^{٣} \times (-٣ص)^{١} + {}^{٤}ق_{٢} \times (٢س)^{٢} \times (-٣ص)^{٢} + {}^{٤}ق_{٣} \times (٢س)^{١} \times (-٣ص)^{٣} + {}^{٤}ق_{٤} \times (-٣ص)^{٤}$$

$$= ٢^{٤} س^{٤} + ٤ \times ٢^{٣} س^{٣} \times (-٣)ص + ٦ \times ٢^{٢} س^{٢} \times (-٣)^{٢} ص^{٢} + ٤ \times ٢س \times (-٣)^{٣} ص^{٣} + (-٣)^{٤} ص^{٤}$$

$$= ١٦ س^{٤} - ٩٦ س^{٣} ص + ٢١٦ س^{٢} ص^{٢} - ٢١٦ س ص^{٣} + ٨١ ص^{٤}$$

صفوة معلمي الكويت

Q أوجد الحد الثالث في مفكوك $(٢س + ص)^{٥}$

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ر\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$

$ن = ٥$

$أ = ٢س$

$ب = ص$

$ر = ٢$

$\therefore ح_{٣} = {}^{٥}ر_{٢}\ (٢س)^{٥-٢}\ (ص)^{٢}$

$= \frac{!٥}{!(٥-٢) \times !٢} \times ٢^{٣} \times س^{٣} \times ص^{٢}$

$= ١٠ \times ٨\ س^{٣}\ ص^{٢}$

$= ٨٠\ س^{٣}\ ص^{٢}$

Q في مفكوك $(٣س - ٢)^{٨}$ أوجد معامل $س^{٥}$

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ر\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$

$ن = ٨$

$أ = ٣س$

$ب = -٢$

$ر = ؟$

$ح_{ر+١} = {}^{٨}ر\ (٣س)^{٨-ر}\ (-٢)^{ر}$

$٨ - ر = ٥ \Leftarrow ر = ٣$

$ح_{٤} = {}^{٨}ر_{٣}\ (٣س)^{٥}\ (-٢)^{٣}$

$= \frac{!٨}{!٣ \times !(٨-٣)} \times ٣^{٥} \times س^{٥} \times (-٢)^{٣}$

$= ٥٦ \times ٣^{٥} \times س^{٥} \times (-٢)^{٣}$

$= -١٠٨٨٦٤\ س^{٥}$

$\therefore$ معامل $س^{٥} = -١٠٨٨٦٤$

صفوة معلمي الكويت

تعيين احتمالات الأحداث

احتمال وقوع الحدث

إذا كان حدث في فضاء عيّنة ف (منته وغير خال) لتجربة عشوائية نتائجها لها فرص الظهور نفسها، فإن احتمال وقوع الحدث هو:

$$\text{ل}(أ) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } (أ)}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } (ف)} = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(ف)}$$

ن(أ) عدد عناصر الحدث ن(ف) عدد عناصر فضاء العينة

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن أ حدثا في فضاء العينة فضاء عينة ف (منتهيا وغير خال) فإن:

- $٠ \leq \text{ل}(أ) \leq ١$
- إذا كان $أ = \{\}$ فإن $\text{ل}(أ) = ٠$ ويسمى (أ) بالحدث المستحيل
- إذا كان $أ = ف$ فإن $\text{ل}(أ) = ١$ ويسمى ف بالحدث المؤكد

Q ما احتمال اختيار رقم هاتف عشوائيًا مكّون من ٥ أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١ ، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

بفرض الحدث هو (أ)

$$\text{ل}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(ف)} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}{٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧} = \frac{٣٦٠}{٢٤٠١}$$

Q ما احتمال اختيار رقم هاتف عشوائيًا مكّون من ٧ أرقام مختلفة؟

بفرض الحدث هو (ب)

$$\text{ل}(ب) = \frac{\text{ن}(ب)}{\text{ن}(ف)} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧} = \frac{٧٢٠}{١١٧٦٤٩}$$

صفوة معلمي الكويت

من خواص الاحتمالات:

بفرض أ، ب حدثين من فضاء عينة فإن: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

الحدثان المتنافيان

بفرض أ، ب حدثين متنافيان فإن: أ ∩ ب = ∅ ، ل(أ ∩ ب) = ٠

⇐ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ل(أ) + ل(ب) − ٠

= ل(أ) + ل(ب)

Q إذا كان الحدثان م ، ن متنافيين. أوجد ل (م ∪ ن):

- ل(م) = ٠,٣ ، ل(ن) = ٠,١٤

م ∩ ن = ϕ متنافيان

ل(م ∪ ن) = ل(م) + ل(ن) − ل(م ∩ ن)

= ٠,٣ + ٠,١٤ − ٠

= ٠,٤٤

Q في تجربة إلقاء حجر نرد. ما احتمال الحدث "الحصول على عدد أصغر من ٢ أو من مضاعفات العدد ٣ ؟

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

أ = {١} ب = {٣، ٦}

أ ∩ ب = ϕ متنافيان

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

$= \frac{١}{٦} + \frac{٢}{٦} - ٠$

$= \frac{١}{٢}$

صفوة معلمي الكويت

متمم حدث

متمم الحدث أ ويرمز له بالرمز $\overline{أ}$

إذا كانت أ حدثًا , فإن احتمال عدم حدوث أ هو $ل(\overline{أ}) = ١ - ل(أ)$

في تجربة رمي حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث أ"ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥"
أوجد ما يلي: $ل(أ)$ $ل(\overline{أ})$

$ف = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$

$أ = \{٥، ٦\}$

$ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

$ل(\overline{أ}) = ١ - ل(أ) = ١ - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$

الحدثان المستقلان

إذا كان أ،ب حدثين مستقلين، فإن احتمال وقوعهما معاً هو: $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \cdot ل(ب)$
بالتالي: $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$
$= ل(أ) + ل(ب) - ل(أ) \cdot ل(ب)$

إذا كان الحدثان أ،ب مستقلين. أوجد $ل(أ \cap ب)$

- $ل(أ) = ٠,٤$ ، $ل(ب) = ٠,٣$

$ل(أ \cap ب) = ل(أ) \cdot ل(ب)$

$= ٠,٤ \times ٠,٣$

$= ٠,١٢$

إذا كان الحدثان م ، ن مستقلين في فضاء العينة ف حيث $ل(ن) = \frac{١}{٢}$, $ل(\overline{م}) = \frac{٣}{٥}$ فأوجد كلاً مما يلي:

$ل(م)$ $ل(م) = ١ - ل(\overline{م}) = ١ - \frac{٣}{٥} = \frac{٢}{٥}$

$ل(م \cap ن)$ $ل(م \cap ن) = ل(م) \times ل(ن) = \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٥}$

$ل(م \cup ن)$ $ل(م \cup ن) = ل(م) + ل(ن) - ل(م \cap ن) = \frac{٢}{٥} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٥} = \frac{٧}{١٠}$

صفوة معلمي الكويت

يلعب إبراهيم ويوسف لعبة رمي السهم. احتمال أن يصيب إبراهيم الهدف يساوي $\frac{2}{5}$ واحتمال أن يصيب يوسف الهدف يساوي $\frac{1}{3}$ رمى كل منهما سهمًا على الهدف، ما احتمال:

- أن يصيب كل من إبراهيم ويوسف الهدف؟

$$ل(م) = \frac{2}{5} \qquad ل(ف) = \frac{1}{3}$$

$$ل(م \cap ف) = ل(م) \times ل(ف) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

- إصابة الهدف؟

$$ل(م \cup ف) = ل(م) + ل(ف) - ل(م \cap ف) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{3}{5}$$

- عدم إصابة الهدف؟

$$ل(\overline{م \cup ف}) = 1 - ل(م \cup ف) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

من كراسة التمارين:

إذا كان الحدثان أ، ب متنافيين في فضاء العينة ف حيث ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٣٥ فأوجد ما يلي:

ل($\overline{أ}$) ، ل($\overline{ب}$) ، ل(أ ∩ ب) ، ل(أ ∪ ب) ، ل($\overline{أ \cup ب}$)

$$ل(\overline{أ}) = 1 - ل(أ) = 1 - ٠,٤ = ٠,٦$$

$$ل(\overline{ب}) = 1 - ل(ب) = 1 - ٠,٣٥ = ٠,٦٥$$

$$ل(أ \cap ب) = ٠$$

$$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب) = ٠,٤ + ٠,٣٥ - ٠ = ٠,٧٥$$

$$ل(\overline{أ \cup ب}) = 1 - ل(أ \cup ب) = 1 - ٠,٧٥ = ٠,٢٥$$

صفوة معلمي الكويت

Q إذا كان الحدثان ا، ب من فضاء العينة ف حيث: ل(ا) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٣ ، ل(ا ∩ ب) = ٠,٢٥
أوجد مايلي: ل(ا ∩ ب)، ل(ا ∪ ب)، ل(ا ∪ ب)

ل(ا ∩ ب) = ١ − ل(ا ∪ ب) = ١ − ٠,٢٥ = ٠,٧٥

ل(ا ∪ ب) = ل(ا) + ل(ب) − ل(ا ∩ ب) = ٠,٤ + ٠,٣ − ٠,٢٥ = ٠,٤٥

ل(ا ∪ ب) = ١ − ل(ا ∪ ب) = ١ − ٠,٤٥ = ٠,٥٥

Q إذا كان الحدثان م ، ن في فضاءالعينة ف حيث: ل(م) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ن) = $\frac{١}{٤}$ ، ل(م ∪ ن) = $\frac{١}{٥}$
فأوجد: ل(م ∩ ن)

ل(م ∩ ن) = ل(م) + ل(ن) − ل(م ∪ ن) ← ل(م) = ١ − ل(م) = ١ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

ل(ن) = ١ − ل(ن) = ١ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

ل(م ∪ ن) = ١ − ل(م ∪ ن) = ١ − $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

∴ ل(م ∩ ن) = $\frac{٢}{٣}$ + $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٣٧}{٦٠}$

Q إذا كان ا، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف حيث: ل(ا) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٢٥ أوجد:

- ل(ا) = ١ − ل(ا) = ١ − ٠,٣ = ٠,٧
- ل(ب) = ١ − ل(ب) = ١ − ٠,٢٥ = ٠,٧٥
- ل(ا ∩ ب) = ٠
- ل(ا ∪ ب) = ل(ا) + ل(ب) = ٠,٧ + ٠,٢٥ = ٠,٩٥
- ل(ا ∩ ب) = ١ − ل(ا ∩ ب) = ١ − ٠ = ١

Q إذا كان الحدثان ا، ب من فضاء العينة ف حيث: ل(ا) = ٠,٤٥ ، ل(ب) = ٠,٣٢ ، ل(ا ∩ ب) = ٠,١٨ أوجد مايلي:

- ل(ب) = ١ − ل(ب) = ١ − ٠,٣٢ = ٠,٦٨ ل(ا) = ١ − ل(ا) = ١ − ٠,٤٥ = ٠,٥٥
- ل(ا ∪ ب) = ل(ا) + ل(ب) − ل(ا ∩ ب) = ٠,٥٥ + ٠,٣٢ − ٠,١٨ = ٠,٦٩
- ل(ا ∪ ب) = ١ − ل(ا ∪ ب) = ١ − ٠,٦٩ = ٠,٣١

صفوة معلمي الكويت