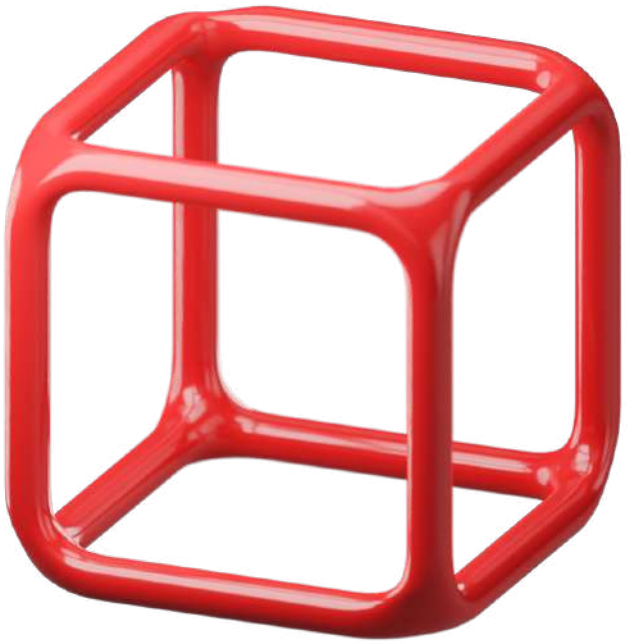


قوانين الرياضيات

الكورس الثاني

صفوة معلمي الكويت

11

2025-2024

UULA.COM

UULA

الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

الوحدة التخيلية

هي العدد الذى مربعه (-1) ويرمز له بالرمز i , $i^2 = -1$,$i = \sqrt{-1}$

الأعداد التخيلية

- لأي عدد حقيقي موجب m , $\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$
- تسمى الأعداد الحقيقية التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ أعدادا تخيلية

تعريف: العدد المركب

العدد المركب هو عدد على الصورة $z = a + bi$ حيث a , b عددان حقيقيان ، i الوحدة التخيلية.
وتسمى هذه الصورة بـ (الصورة الجبرية للعدد المركب)

$z = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$

الجزء الحقيقي — الجزء التخيلي

تساوي عددين مركبين

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.
ليكن:

$$z_1 = a_1 + b_1 i \ , z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , b_1 = b_2$$

التمثيل البياني لعدد مركب

الصورة الجبرية $z = a + bi$ ⟷ الإحداثيات الديكارتية $\boldsymbol{M}(a\,,b)$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

العمليات على الأعداد المركبة:

الجمع والطرح: إذا كان $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ حيث $z_1 = a_1 + b_1 i \, , z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \quad , \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

الضرب: إذا كان $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i \, , z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن:

- $cz_1 = ca_1 + cb_1 i$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

قوى العدد المركب: إذا كان P عددا كليا

$$i^2 = -1 \, , i^3 = -i \, , i^4 = 1$$

$$i^{4p} = 1 \, , \quad i^{4p+1} = i \, , \quad i^{4p+2} = -1 \, , \quad i^{4p+3} = -i$$

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

خواص مرافق العدد المركب $z = a + bi \quad , \quad \bar{z} = a - bi$

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \, . \, z_2} = \bar{z}_1 \, . \, \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $z + \bar{z} = 2a$
- $z - \bar{z} = 2bi$
- $z . \bar{z} = a^2 + b^2$
- $\bar{\bar{z}} = z$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z=a+bi$

ويرمز له بالرمز z^{-1}

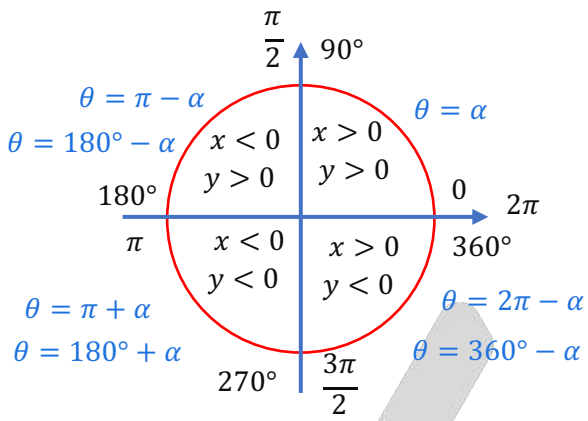
ويكون: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi}$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} \qquad z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

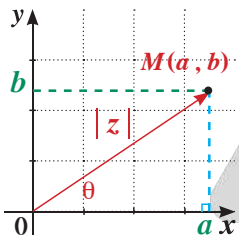
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

تذكر: دائرة الوحدة و زاوية الإسناد α

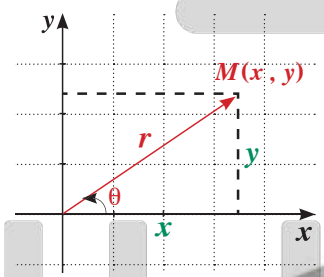


القيمة المطلقة لعدد مركب



$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

الإحداثيات القطبية للعدد المركب:

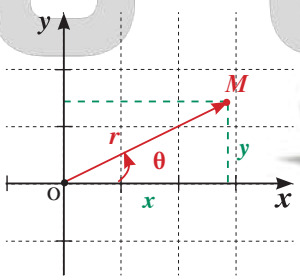


$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

الصورة المثلثية لعدد مركب:



يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z.

صفوة معلمي الكويت

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

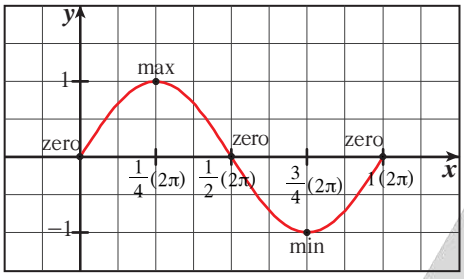
الدوال الجيبية

$y = a\cos bx$ $\quad y = a\sin bx$ $\quad a \neq 0\ ,b \neq 0$

تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية ، $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0\ ,2\pi]$، $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

التمثيل البياني للدوال المثلثية:

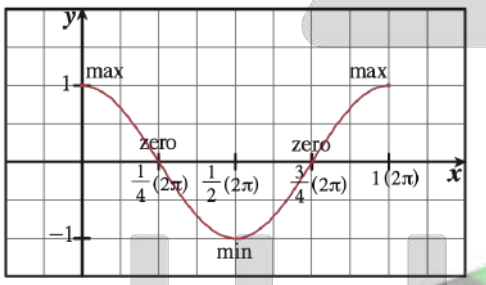
أولا: دالة الجيب $y = \sin x$



$y = \sin x$

- دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها [1 ، -1]
- دالة دورية دورتها 2π وسعتها =1
- لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi) = 0$
- دالة فردية لأن $\sin(-x) = -\sin x$: $\forall x \in \mathbb{R}$
- منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل
- سعة الدالة $= \frac{\max f - \min f}{2}$

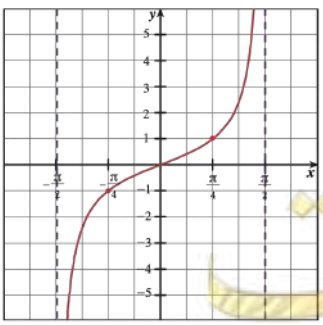
ثانياً: دالة جيب التمام $y = cos\, x$



$y = \cos x$

- دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها [1 ، -1]
- دالة دورية دورتها 2π وسعتها =1
- لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$
- دالة زوجية لأن $\cos(-x) = \cos x$:$\forall x \in \mathbb{R}$
- محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة
- سعة الدالة $= \frac{\max f - \min f}{2}$

ثالثاً:دالة الظل $y = tan\, x$



$y = \tan x$

- دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n\pi\ ,c\ \in \mathbb{Z}\}$ ومداها $\mathbb{R}$
- دالة دورية دورتها π وليس لها سعة
- لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
- دالة فردية لأن $\tan(-x) = -\tan x$
- منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل

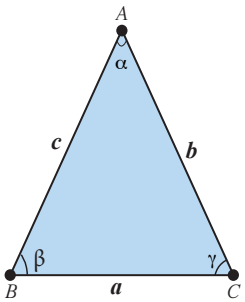
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}-\{x, x = \frac{\pi}{2} + n\pi\}$
المدى	$[-1\ ,1]$	$[-1\ ,1]$	$(-\infty, \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

قانون الجيب: في أي مثلث ABC فإن:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



قانون جيب التمام

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$

مساحة المثلث: (قاعدة هيرون)

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}bc\ \sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2}ac\ \sin\beta$$
$$= \frac{1}{2}ab\ \sin\gamma$$

أولا نوجد نصف محيط المثلث

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

ثانيا نوجد المساحة وفق هذه القاعدة

$$Area(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

صفوة معلمي الكويت

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

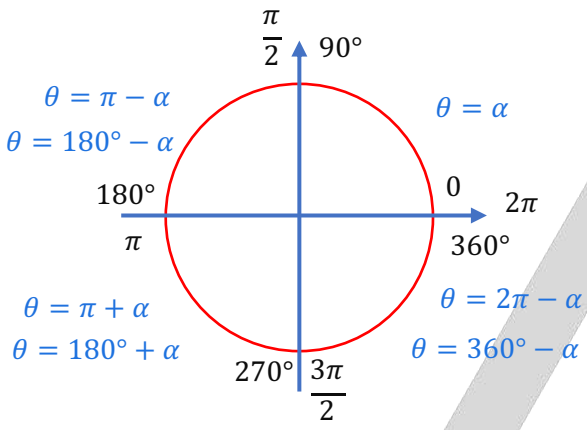
المتطابقات المثلثية الأساسية

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

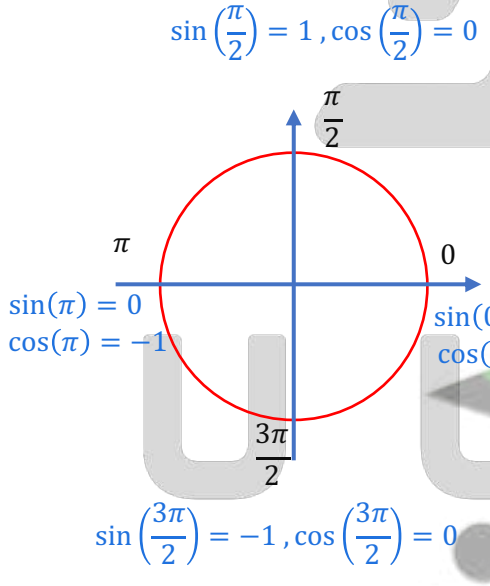
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

دائرة الوحدة



- إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن:
$\sin\theta > 0 \, , \cos\theta > 0 \, , \tan\theta > 0$
- إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الثاني فإن:
$\sin\theta > 0 \, , \cos\theta < 0 \, , \tan\theta < 0$
- إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الثالث فإن:
$\sin\theta < 0 \, , \cos\theta < 0 \, , \tan\theta > 0$
- إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الرابع فإن:
$\sin\theta < 0 \, , \cos\theta > 0 \, , \tan\theta < 0$

تذكر: الزوايا الربعية



$\sin x = 0 \Rightarrow$ زاوية ربعية $x \Rightarrow x = 0 + 2k\pi$

$x = \pi + 2k\pi$

$\cos x = 0 \Rightarrow$ زاوية ربعية $x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$

$\sin x = 1 \Rightarrow$ زاوية ربعية $x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\cos x = 1 \Rightarrow$ زاوية ربعية $x \Rightarrow x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$

$\sin x = -1 \Rightarrow$ زاوية ربعية $x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\cos x = -1 \Rightarrow$ زاوية ربعية $x \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

متطابقات الدوال المتكافئة:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

متطابقات المجموع والفرق:

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$
$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

متطابقات ضعف الزاوية:

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$

$$sin(2x)=2\sin x\cos x$$

$$tan\,(2x)=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

متطابقات نصف الزاوية:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

صفوة معلمي الكويت

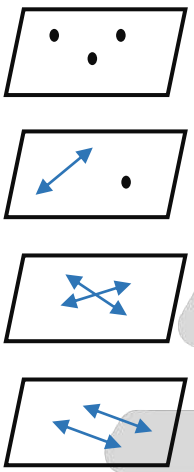
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

المستقيمات والمستويات في الفضاء

مسلمات (موضوعات) الفضاء

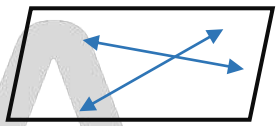
- من نقطة واحدة يمر عدد لا نهائي من المستقيمات.
- أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد.
- كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.
- من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازى المستقيم المعلوم.
- في كل مستو يوجد على الأقل ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة.
- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين مستويا وحيدا

حالات تعيين المستوي في الفضاء

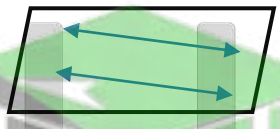


- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعين مستويا واحدا فقط
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعينان مستويا واحدا فقط
- أي مستقيمين متقاطعين يعينان مستويا واحدا فقط
- أي مستقيمين متوازيين مختلفين يعينان مستويا واحدا فقط

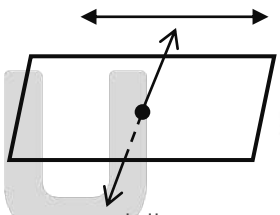
أوضاع المستقيمات في الفضاء



- متقاطعان



- متوازيان

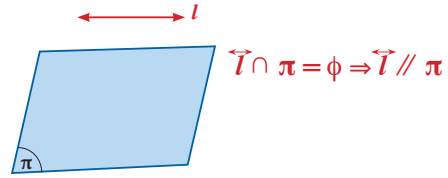


- متخالفان

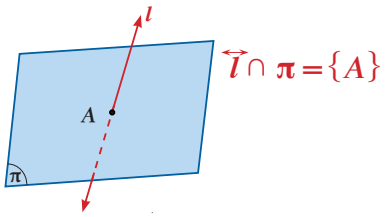
صفوة معلمي الكويت

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

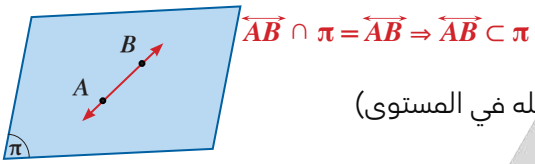
أوضاع مستقيم ومستو في الفضاء



- صفر نقطة مشتركة (المستقيم مواز المستوى)

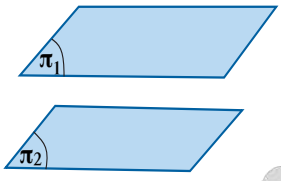


- نقطة مشتركة واحدة (المستقيم يقطع المستوى)



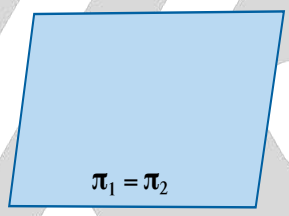
- نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل (المستقيم يقع بكامله في المستوى)

أوضاع مستويين في الفضاء



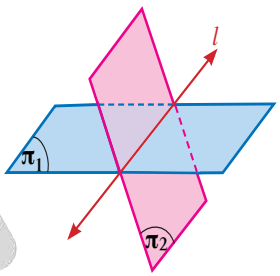
- المستويان متوازيان: لا يشتركان في أي نقطة

$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$



- المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط)

$\pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$



- المستويان متقاطعان في مستقيم

$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$

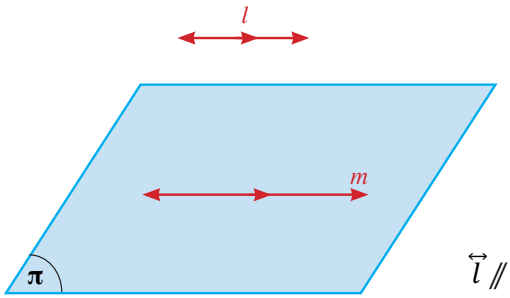
صفوة معلمي الكويت

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

نظرية 1:

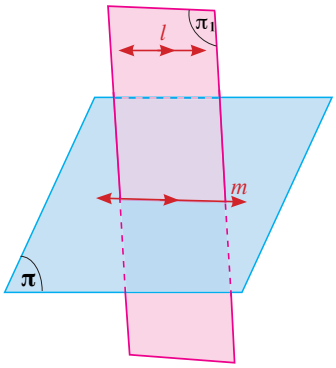
إذا وازى مستقيم خارج مستو مستقيما في المستوى فإنه يوازي المستوى.



$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \quad , \quad \overleftrightarrow{m} \subset \pi \quad \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$

نظرية 2:

إذا وازى مستقيم مستويا ، فكل مستو مار بالمستقيم ويقطع المستوى ، يقطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم.

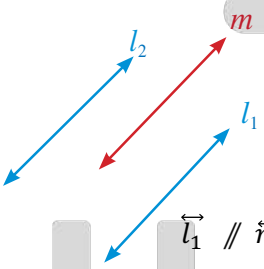


$\overleftrightarrow{l} \parallel \pi \quad , \quad \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$

$\pi_1 \cap \pi = \{\overleftrightarrow{m}\} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

نظرية 3:

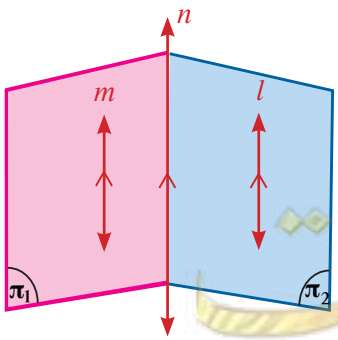
المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.



$\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m} \Rightarrow \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

نتيجة 1:

إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويين متقاطعين, فإن خط تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين.



$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 \quad \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2$

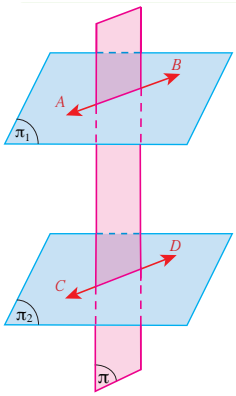
$\pi_1 \cap \pi_2 = \{\overleftrightarrow{n}\}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

نظرية 4:

إذا قطع مستو مستويان متوازيان فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.

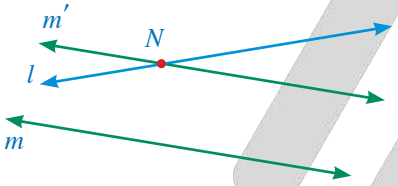


$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \parallel \pi_2 \\ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \\ \pi_2 \cap \pi = \overleftrightarrow{CD}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

تعامد مستقيم مع مستوٍ

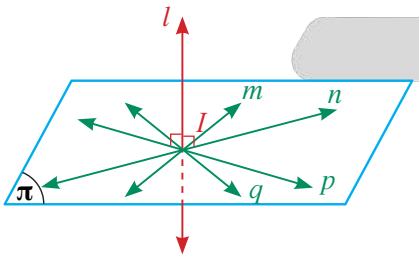
الزاوية بين مستقيمين متخالفين

هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم قاطع له و مواز للآخر.



تعامد مستقيم مع مستوٍ

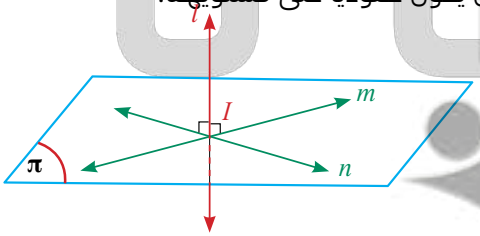
يكون المستقيم عموديا على المستوى ، إذا كان عموديا على كل المستقيمات الواقعة في هذا المستوي.



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi$$

نظرية 5:

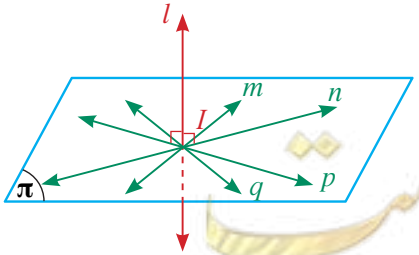
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديا على مستويهما.



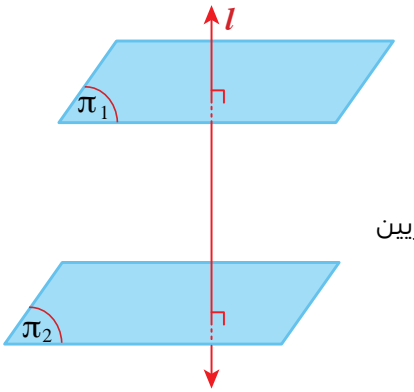
$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m} \\ \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{l} \perp \pi$$

نتيجة 2:

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواه في مستو واحد عموديا على المستقيم المعلوم.



UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

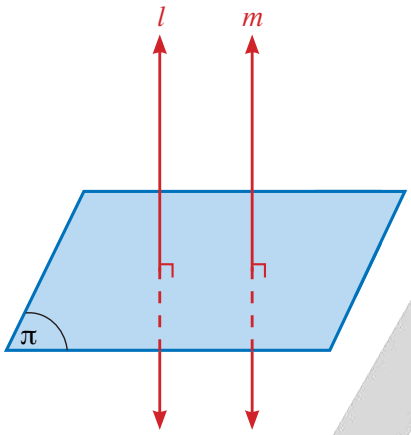


نظرية 6: إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 , \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$$

نظرية 7: إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على المستوى الأخر

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 , \pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$



نظرية 8: المستقيمان العموديان على مستو متوازيان

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi , \overleftrightarrow{m} \perp \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية 9: إذا توازى مستقيمان أحدهما عمودي على مستو كان المستقيم الآخر عموديا على المستوى أيضا

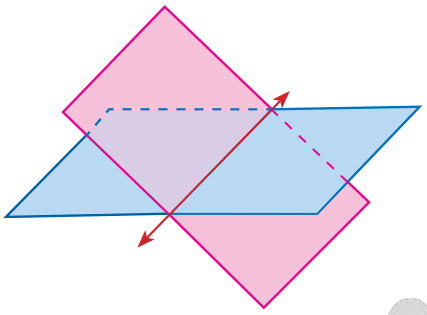
$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi , \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \Rightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

صفوة معلمي الكويت

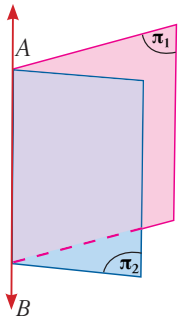
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

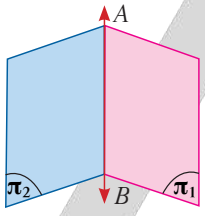
الزاوية الزوجيّة

إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم وينتج من هذا التقاطع أربع زوايا زوجية



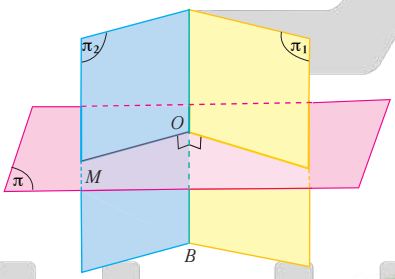
يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين ويسمى المستقيم المشترك حافه الزاوية الزوجية أو الفاصل المشترك ,و يسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية



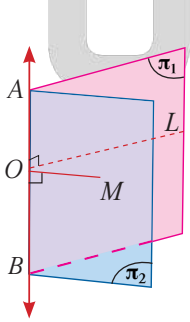


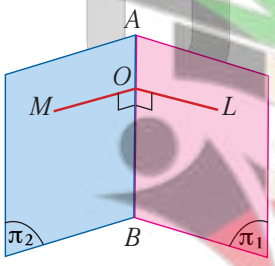
$(\pi_1, \overleftrightarrow{AB}, \pi_2)$

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية :
هى الزاوية التى تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستو عمودي على حافتها



قياس الزاوية الزوجية :
هو قياس إحدى زواياها المستوية ودائما نأخذ قياس الزاوية الحادة





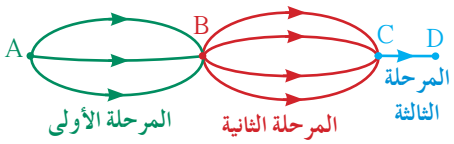
صفوة معلمي الكويت

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة

مبدأ العد و التباديل و التوافيق

مبدأ العد:

لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة كما يلى:
المرحلة الأولي بـ r_1 طريقة مختلفة،
المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة،
المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة،
..... وهكذا حتى المرحلة n بـ r_n طريقةمختلفة
فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times \cdots rn$



مضروب n

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\times 2\times 1 , \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

التباديل

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad n \geq r , \qquad n, r \in \mathbb{Z}^+$$

$${}_nP_0 = 1 \ , \ {}_nP_n = n! \ , \ {}_nP_1 = n$$

التوافيق

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \qquad {}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad n \geq r , \quad n, r \in \mathbb{Z}^+$$

- ${}_nC_0 = 1 \qquad {}_nC_1 = n \qquad {}_nC_n = 1$

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n

$$(x+y)^n = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} y + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots + {}_nC_r x^{n-r} y^r + \ldots\ldots + {}_nC_{n-1} x y^{n-1} + {}_nC_n y^n$$

الحد العام الذي رتبته $r+1$ يرمز له بالرمز: T_{r+1}

$$T_{r+1} = {}_n C_r \, . x^{n-r} , y^r$$

UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة
صفوة معلمي الكويت

الاحتمال

التجربة العشوائية:

هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقا من أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة العشوائية لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو:

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

خواص الاحتمال لحدث ما
E حدث في فضاء عينة S حيث S منته و غير خالٍ

- $0 \le P(E) \le 1$
- إذا كان E حدثا مستحيلا, فإن $P(E) = 0$
- إذا كان E حدثا مؤكدا, فإن $P(E) = 1$
- مجموع احتمالات كل الأحداث البسيطة في فضاء العينة =1

A, B حدثان فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A, B حدثان متنافيان $\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$

A, B حدثان مستقلان $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A $\Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

احتمال ذات الحدين:

$$P(E) = {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k} = {}_nC_k \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$

صفوة معلمي الكويت
UULA.COM
© جميع الحقوق محفوظة