

رياضيات

الفصل الثاني

11

الحادي عشر

صفوة معلمي الكويت

النجاح

2025-2024



مذكرات النجاح

طريقك للنجاح

66279318

لماذا ؟

مذكرات النجاح

النجاح
2025-2024

اختبارات الكترونية
لـــــكـــــل درس

1. شاملة ومختصرة
2. ملونة ومرتبة
3. اختبارات قصيرة
4. اختبارات نهائية
5. مرتبة حسب الدروس
6. محلولة

معلمي صفوة في الكويت

فهرس المذكرة

(الاعداد المركبة)	
الاعداد المركبة	٥
الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب	١٣
حل المعادلات	١٩
تنظيم المصفوفات	
التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب ، جيب التمام ، الظل)	٢٣
قانون الجيب	٣١
قانون جيب التمام	٣٤
مساحة المثلث	٣٦
تطبيقات على حساب المثلثات	
المتطابقات المثلثية	٣٨
اثبات صحة متطابقات مثلثية	٣٩
حل معادلات مثلثية	٤١
متطابقات مجموع وفرق زاويتين	٤٣
متطابقات ضعف الزاوية ونصفها	٤٩
الهندسة الفراغية	
المستقيمات والمستويات في الفضاء	٥٥
المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء	٥٧
تعامد مستقيم مع مستو	٥٩
الزاوية الزوجية	٦١
الجبر المتقطع	
مبدأ العد والتباديل والتوافيق	٦٥
نظرية ذات الحدين	٦٧
الاحتمال	٧٠
نماذج امتحانات	٧٥

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

الأعداد المركبة

اختبار الكتروني تدرب و تعلم

تعريف

الوحدة التخيلية: هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز له بالرمز i $i=\sqrt{-1}\ ,\ i^2=-1$

تعريف

الأعداد التخيلية: لأي عدد حقيقي موجب m $\sqrt{-m}=\sqrt{m}\,i \Leftarrow$

تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b\in R^*$ أعداد تخيلية

ملاحظة مجموعة الجذور التربيعية الموجبة والسالبة للأعداد الحقيقية السالبة تكون مجموعة الاعدادالتخيلية

١ بسط كل مما يلي مستخدما الوحدة التخيلية i

$\sqrt{-4}=2\,i$ $\sqrt{-8}=2\sqrt{2}\,i$

$\sqrt{-2}=\sqrt{2}\,i$ $-\sqrt{-12}=-2\sqrt{3}\,i$ $\sqrt{-36}=6\,i$

تعريف

العدد المركب: هو عدد على الصورة $a+bi$ حيث a,b عددان حقيقيان ، i الوحدة التخيلية

$z=a+bi$

الجزء الحقيقي — الجزء التخيلي

ملاحظة اذا كان b=0 فإن $z=a$ يسمى عدداً حقيقياً واذا كان $z=bi$. عدداً تخيلياً فإن a=0

٢ أكتب كلا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

➤ $\dfrac{\sqrt{-9}+5}{7}$
$=\dfrac{3i+5}{7}$
$=\dfrac{5}{7}+\dfrac{3}{7}i$

➤ $\dfrac{10-\sqrt{-100}}{5}$
$=\dfrac{10-10i}{5}$
$=2-2i$

➤ $\sqrt{-18}+7$
$=3\sqrt{2}i+7$
$=7+3\sqrt{2}i$

ملاحظة يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزئهما الحقيقيان وتساوى جزئهما التخيليان ليكن:

$z_1=a_1+b_1i\ ,\ z_2=a_2+b_2i$

$z_1=z_2\Leftrightarrow a_1=a_2\ ,\ b_1=b_2$

صفوة مي الكويت

النجاح 2025-2024

٣ أوجد قيم كل من $x,y \in R$ في كل مما يلي:

- $x + 5i = 7 - 3yi$

  $x = 7$ $\quad \frac{5}{-3} = -\frac{3y}{-3}$ $\quad y = -\frac{5}{3}$

- $(x + 3) + y^2 i = 5 - yi$

  $x + 3 = 5$ $\quad y^2 + y = 0$

  $= 5 - 3$ $\quad y(y + 1) = 0$

  $x = 2$ $\quad y = 0 \quad , y = -1$

- $3i = 2x - 5yi$

  $0 + 3i = 2x - 5yi$

  $2x = 0$ $\quad -5y = 3$

  $\frac{2x}{2} = \frac{0}{2}$ $\quad -\frac{5y}{-5} = \frac{3}{-5}$ $\quad y = -\frac{3}{5}$

  $x = 0$

ملاحظة

إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزأه الحقيقي يساوي الصفر وجزأه التخيلي يساوي الصفر

$$x + yi = 0 \Longrightarrow x = 0 , y = 0$$

التمثيل البياني لعدد مركب:

يمكن وضع العدد المركب z=a+bi على صورة الزوج المرتب (a,b)

حيث: الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي والإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي

$$z = a + bi \longleftrightarrow (a,b)$$

الصورة الجبرية الديكارتية $\quad$ الصورة

كل نقطة في المستوى الإحداثي تمثل عدد مركبا ، و كل عدد مركب يناظر (تمثله) نقطة في المستوى الإحداثي

في هذه الحالة يسمى المستوى الإحداثي المستوى المركب (مستوى أرجاند)

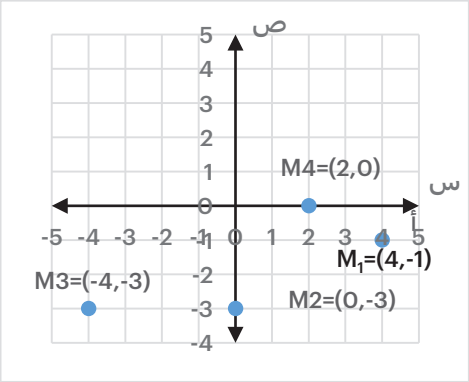
ويسمى محور السينات بالمحور الحقيقي ، و يسمى محور الصادات بالمحور التخيلي .

صفوة معلمي الكويت

١ مثل كلا مما يلي في المستوى المركب

$z_1 = 4 - i \quad M_1 = (4,-1)$ $\qquad$ $z_2 = -3i \quad M2 = (0,-3)$

$z3 = -4 - 3\,i \quad M3=(-4,-3)$ $\qquad$ $z_4 = 2 \quad M4 = (2,0)$



٢ أكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية: N(-4,1), H(1,-2) , k(7,0)

N(-4,1 , H(1,-2) , (k(7,0)

Z_3=-4+i) Z_2=1-2i Z_1=7

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

جمع وطرح الأعداد المركبة

في الجمع نجمع جزأيهما الحقيقين معا ونجمع جزأيهما التخيلين معا كذلك في الطرح نطرح جزأيهما الحقيقين معا و نطرح جزأيهما التخيلين معا

اذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \, , z2 = a2 + b2i$ عددين مركبين فإن

$$z1 + z2 = (a1 + a2) + (b1 + b2)i$$
$$Z1 - Z2 = (a1 - a2) + (b1 - b2)i$$

خواص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة كما يلي :

الخاصية	$\forall z_1, z_2, z_3 \in C$
الابدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجميعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

صفوة الكويت

2025-2024

١ إذا كان z_3=-0.3i ,z_2=3.4-1.2 i ,z_1=-2+5i فأوجد

- $z_1 + z_2 = (-2 + 5i) + (3.4 - 1.2i)$
  $= -2 + 5i + 3.4 - 1.2i = 1.4 + 3.8i$
- $z_2 - z_1 = (3.4 - 1.2\,i) - (-2 + 5i)$
  $= 3.4 - 1.2i + 2 - 5i = 5.4 - 6.2i$
- $z_3 - z_2 - z_1 = (-0.3i) - (3.4 - 1.2\,i) - (-2 + 5i)$
  $= -0.3i - 3.4 + 1.2i + 2 - 5i = -1.4 - 4.1i$

٢ ظلل أ اذا كانت العبارة صحيحة وظلل ب اذا كانت العبارة خاطئة:

العبارة	أ	ب
الصورة المبسطة للتعبير(12+5i)-(2-i) هي (10-6i)		

٣ اختر الإجابة الصحيحة:

١ ابسط صورة للتعبير : $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{9})$ هي:

أ) 18+17i ب) $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$ ج) 6+17i د) -18

ملاحظة الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $0 = 0 + 0i$

ملاحظة المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$

إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرا فإن كلا منهما معكوس جمعي للأخر والعكس صحيح

$$z_1 + z_2 = 0 \iff z_1 = -z_2$$

لإيجاد ناتج طرح $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي ل z_2 إلى z_1 أي أن

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

صفوة علمي الكويت

النجاح 2025-2024

ضرب الاعداد المركبة

قاعدة الضرب : $\forall z_1 . z_2 \in c \quad . c \in R$

حيث $z_1 = a_1 + b_{1_i} \quad . z_2 = a_2 + b_2 i$

$$(1) cz_1 = ca_1 + cb_1 i$$

$$(2) z_1 \times z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

خواص عملية ضرب الأعداد المركبة:

الخاصية	$\forall z_1, z_2, z_3 \in C$
الابدالية	$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
التجميعية	$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
التوزيعية	$z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ $z_1 \times (z_2 - z_3) = z_1 \times z_2 - z_1 \times z_3$

تنبيه

العدد ا هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة (1=1-0i)

لضرب عددين يمكن استخدام $i^2 = -1$

١ أوجد ناتج :

- $(6 - 5i)(4 - 3i) = 24 - 18i - 20i + 15i^2$
  $= 24 - 18i - 20i - 15 = 9 - 38i$
- $(9 + 4i)(4 - 9i) = 36 - 81i + 16i - 36i^2$
  $= 36 - 81i + 16i + 36 = 72 - 56i$
- $(12i)(7i)(i + 1) = 84i^2(i + 1)$
  $= -84(i + 1) = -84i - 84 = -84 - 84i$

٢ اذا كان $z1 = 2 - 3i, z2 = 1 + 4i$ فأوجد

- $\frac{1}{2} z_1 = \frac{1}{2}(2 - 3i) = 1 - \frac{3}{2} i$
- $z_1 . z_2 = (2 - 3i)(1 + 4i) = 2 + 8i - 3i - 12i^2 = 14 + 5i$

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

قوى العدد المركب:

إذا كان P عدد كلي فإن $i^{4p+3}=-i$. $i^{4p+2}=-1$. i^{4p+1} . $i^{4p}=1$

مثال:

$i^{15}=i^{4\times3+3}=-i$ $\quad i^{2013}=i^{4\times503+1}=i$ $\quad i^{29}=i^{4\times7+1}=i$

$i^{82}=i^{4\times20+2}=-1$, $i^{101}=i^{4\times\times25+1}=i$, $i^{59}=i^{4\times14+3}=-i$, $i^{444}=i^{4\times111}=1$,

١ أوجد $5i^{73}$:

$$5i^{73}=5(i)^{18\times4+1}=5(i)^1=5i$$

٢ اختر الإجابة الصحيحة:

ا قيمة i^{40} تساوي:

أ) i $\quad$ ب) 1 $\quad$ ج) -1 $\quad$ د) -i

قسمة الاعداد المركبة

مرافق العدد المركب $z=a+bi$ هو العدد المركب $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$

ملاحظة لإيجاد مرافق العدد المركب يجب أن يكون العدد المركب على الصورة الجبرية $z=a+bi$ حيث $\forall ab\in R$

خواص مرافق العدد المركب :

اذا كان $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ فإن:

$z_1+\overline{z_1}=2a_1$

$z_1-\overline{z_1}=2b_1$ $\quad \overline{(\overline{z_1})}=z_1$

$z_1\overline{z_1}=a_1^2+b_1^2$ $\quad \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

١ اذا كان $z1=2-7i, z2=3+5i$ فأوجد:

$$\overline{(z_1-z_2)}=\overline{z_1}-\overline{z_2}=(2+7i)-(3-5i)$$
$$=2+7i-3+5i=-1+12i$$
$$\overline{(z_1.z_2)}=\overline{z_1}.\overline{z_2}=(2+7i).(3-5i)=6-10i+21i-35i^2$$
$$=6-10i+21i+35=41+11i$$
$$\overline{z_1}+\overline{z_2}=(2+7i)+(3-5i)=2+7i+3-5i=5+2i$$

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

٢ اذا كان $z1 = 3+4i\,,\, z2 = 5-2i$ فأوجد كلاً مما يلي في الصورة الجبرية::

- $\overline{3z_1 - 2z_2} = \overline{3(3+4i) - 2(5-2i)}$
  $= \overline{9+12i-10+4i} = \overline{-1+16i}$
  $= \overline{-1-16i}$

- $\frac{z_2}{z_1} = \frac{5-2i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$
  $= \frac{15-20i-6i-8}{3^2+4^2} = \frac{7-26i}{25}$
  $= \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$

٣ ظلل أ اذا كانت العبارة صحيحة وظلل ب اذا كانت العبارة خاطئة:

العبارة	أ	ب
مرافق العدد المركب: $z=3-4i$ هو $\bar{z}=3+4i$		
صورة الجبرية للعدد $\sqrt{-4}+3$ هي $3+2i$		

تعريف

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري : $z = a+bi$ هو z^{-1}

أي أن: $z^{-1} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi} \implies z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

٤ أوجد المعكوس الضربي لكل من :

- $z_1 = -3i-7 = -7-3i$
  $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{-7-3i} \times \frac{-7-3i}{-7-3i}$ $\quad z.\bar{z} = a^2+b^2$
  $= \frac{3i-7}{(-7)^2+(-3)^2} = \frac{-7+3i}{58} = \frac{-7}{58} + \frac{3}{58}i$

- $z_2 = 5+11i$
  $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{5+11i} \cdot \frac{5-11i}{5-11i} = \frac{5-11i}{146} = \frac{5}{146} - \frac{11}{146}i$

- $z_3 = 6i$
  $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{6i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{6i^2} = \frac{i}{-6} = -\frac{1}{6}i$

صفوة معلمي الكويت

2025-2024

٥ أكتب كلا من مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب

- $\frac{3+i}{2+5i}=\frac{3+i}{2+5i}\times\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{6-15i+2i-5i^2}{2^2-(5i)^2}=\frac{6-13i+5}{4+25}=\frac{11}{29}-\frac{13}{29}i$
- $\frac{2-i}{2+i}=\frac{2-i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}=\frac{4-2i-2i+i^2}{2^2-i^2}=\frac{4-4i-1}{4+1}=\frac{3-4i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$
- $\frac{\overline{5+i}}{2-3i}=\frac{5-i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{10-15i-2i+3i^2}{(2)^2+(3)^2}=\frac{10-17i-3}{4+9}=\frac{7-17i}{13}=\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i$

٦ بسط ما يلي : $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25})$

$$(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25})=\left(-2+\sqrt{9i^2}\right)\left(6+\sqrt{25i^2}\right)=(-2+3i)(6+5i)$$
$$=-12-10i+18i+15i^2=-12+8i-15$$
$$=-27+8i$$

٧ إذا كان $z=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد $\bar{z}$

$$z=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}\times\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{4i+4\sqrt{3}i^2}{1^2-3i^2}=\frac{4i-4\sqrt{3}}{1+3}$$
$$=\frac{4i-4\sqrt{3}}{4}=i-\sqrt{3}=-\sqrt{3}+i$$
$$\bar{z}=-\sqrt{3}-i$$

صفوة معلمي الكويت

الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب

اختبار الكتروني تدرب و تعلم

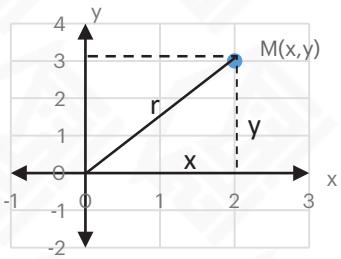
تعريف

القيمة المطلقة لعدد مركب: هي المسافة بين بين النقطة التي تمثل هذا العدد المركب و نقطة الأصل في المستوى الإحداثي المركب

١ أوجد ما يلي:

- $|6-4i| = \sqrt{(6)^2+(-4)^2} = 2\sqrt{13}$
- $|-2+5i| = \sqrt{(-2)^2+(5)^2} = \sqrt{29}$

الإحداثيات القطبية:



يمثل الزوج المرتب (r, θ) الإحداثيات القطبية للنقطة M على المستوى الإحداثي المركب

و يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية و الإحداثيات الديكارتية باستخدام

$$r = \sqrt{(x^2+y^2)}$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M

٢ أوجد الزوج المرتب (x,y) الذي يمثل الاحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين :

- $A(5,300)$ $\quad r = 5\,,\theta = 300$

$$x = r\cos\theta = 5\cos(300) = \frac{5}{2}$$

$$y = r\sin\theta = 5\sin(300) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$(x,y) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$

- $B\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad r = 2\,, \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$

$$x = r\cos\theta = 2\cos(\frac{2\pi}{3}) = -1$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin(\frac{2\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

$$(x,y) = (-1, \sqrt{3})$$

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

٢ أوجد الزوج المرتب (r, θ) للنقطة $(3\sqrt{3}, 3)$ D حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

$$r = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

نفرض أن زاوية الاسناد

$$\tan a = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبالتالي: $a = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

D تنتمي الى الربع الأول $\rightarrow$ $x > 0\ ,\ y > 0$ ∵

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

وبالتالي: الاحداثيات القطبية هي $D\ (6\ , \frac{\pi}{6})$

٣ حول من الإحداثيات الديكارتية إلى الأحداث القطبية (r, θ): $L(1-\sqrt{3}),\ 0 \le \theta < 2\pi$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

نفرض أن α زاوية الاسناد

$$\therefore \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\sqrt{3}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\because x > 0\ , y > 0$$

∵ L تنتمي إلى الربع الرابع

$$\therefore \theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{-3} = \frac{5\pi}{3}$$

∴ الاحداثيات القطبية هي $L\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$

٤ ظلل أ اذا كانت العبارة صحيحة وظلل ب اذا كانت العبارة خاطئة:

العبارة	أ	ب
الاحداثيات الديكارتية للنقطة $B(\sqrt{2}, 135)$ هي B(-1, 1)		
الاحداثيات القطبية للنقطة $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي $M\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$		

٥ اختر الإجابة الصحيحة:

ا $\forall n \in z^+$ **فإن قيمة** $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ **تساوي:**

أ) 1 ب) 0 ج) -1 د) i^{-2n}

و يمكن التحويل من الإحداثيات الديكارتية (x,y) إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) باستخدام $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

ثم نوجد قياس زاوية الاسناد α باستخدام $\tan \alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$ ثم نحدد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية، θ من إشارة كل من x,y نوجدها

٥ أوجد الزوج المرتب (r, θ) لكل من نقطة مما يلي حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

$(b)\ C(4, -2\sqrt{5})$

$x > 0\ , y > 0$

$\theta = a = \frac{\pi}{6}$

$(r, \theta) = (6\ , \frac{\pi}{6})$

$(a)\ D(3\sqrt{3}, 3)$

$(a) D(3\sqrt{3}, 3)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$

$a = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right| = \frac{\pi}{6}$

يمكن كتابة العدد المركب $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ على الصورة :

$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب Z

ويسمى r مقياس العدد أو القيمة المطلقة ويرمز له ويتعين بالعلاقة $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

θ سعة العدد المركب و تتعين من $\cos\theta = \frac{x}{y}\ , \sin\theta = \frac{y}{r}$

أو $x \neq 0\ , \tan\theta = \frac{y}{x}$ من وتحديد الربع

ملاحظة

الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة ، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x + yi$

فإن كلا مما يلي سعة للعدد نفسه : $k \in Z$: $\theta + 2\pi, \theta + 4\pi \ldots\ldots \theta + 2\pi k$

و إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ أو $0 \le \theta < 360$ فتسمى السعة في هذه الحالة بالسعة الأساسية

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

٦ ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية:

- $(a) z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} i$

$x = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{-5}{\sqrt{2}}$

$r = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5$

$\mathrm{a} = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-\frac{5}{\sqrt{2}}}{\frac{5}{\sqrt{2}}}\right| = 45$

$x > 0 , y < 0$

θ في الربع الرابع

$\theta = 360 - a = 360 - 45 = 315$

الصورة المثلثية

$z = 5(\cos 315 + i \sin 315)$

- $(b) z_2 = -1 - i$

$x = -1 , y = -1 \quad r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$= \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right| = 45$

$x < 0 , y < 0$

θ في الربع الثالث

$\theta = 180 + a = 180 + 45 = 225$

الصورة المثلثية :

$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = \sqrt{2}(\cos 225 + i \sin 225)$

- $(c) z_3 = -2 + 2\sqrt{3}\, i$

$x = -2 , y = 2\sqrt{3}$

$r = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$

$\mathrm{a} = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-2\sqrt{3}}{-2}\right| = 60$

$x < 0 , \quad y > 0$ θ في الربع 2

$\theta = 180 - a = 180 - 60 = 120$

الصورة المثلثية:

$z = r(cos\,\theta + i\, sin\,\theta) = 4(\cos 120 + i \sin 120)$

معلمي الكويت

٦ ضع كلا مما يلي في الصورة الجبرية:

$(a) z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

$(b) z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

الصورة المثلثية في حلات خاصة:

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على خط الأعداد على المحور الأفقي (محور السينات)

وكل عدد تخيلي يمثل بنقطة على المحور التخيلي (محور الصادات)

العدد	المقياس	سعة (الراديان)
α	α	0
$-\alpha$	$\lvert -a \rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b \rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$

ملاحظة إذا كان z=٠ فإن θ غير معينة $x = 0, y = 0, r = 0$

٧ اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في الصورة الجبرية ثم حوله للصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \times \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{2-2\sqrt{3}i}{3+1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x = \frac{1}{2} \qquad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$\tan a = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right| = \sqrt{3}$ نفرض أن a زاوية الاسناد

$a = \frac{\pi}{3}$ $x > 0,\ y < 0$ θ تقع في الربع الرابع

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

الصورة المثلثية هي: $z = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

٨ اكتب العدد $\frac{2}{3-i}$ في الصورة الجبرية

$$\frac{2}{3-i} = \frac{2}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i}$$
$$= \frac{6+2i}{9+1} = \frac{6}{10} + \frac{2}{10}i$$
$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

٩ اختر الإجابة الصحيحة:

١ الصورة المثلثية للعدد المركب : $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \le \theta \le \pi$ هي Z تساوي:

أ) $2\sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

ب) $4(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

ج) $2\sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

د) $2\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

٢ الصورة المثلثية للعدد المركب $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

أ) $z = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

ب) $z = 4(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

ج) $z = 4(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$

د) $z = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

١٠ ظلل أ اذا كانت العبارة صحيحة وظلل ب اذا كانت العبارة خاطئة:

العبارة	أ	ب
الصورة الجبرية للعدد $3 + \sqrt{-4}$ هي $3 + 2i$		

١١ ضع في الصورة المثلثية كلا من الأعداد التالية :

➤ $(a)\ z_1 = 2i \quad x = 0, y = 2$
$r = 2, \theta = \frac{\pi}{2}$
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

➤ $(b)\ z_2 = 5 \quad x = 5, y = 0$
$r = 5, \theta = 0$
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= 5(\cos 0 + i\sin\theta)$

➤ $(c) z_3 = -\frac{3}{4} \quad x = -\frac{3}{4}, y = 0$
$r = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} \quad \theta = \pi$
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{3}{4}(\cos\pi + i\sin\pi)$

➤ $(d)\ z_4 = -\frac{5}{2}i \quad x = 0, y = -\frac{5}{2}$
$r = \frac{5}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}$
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= \frac{5}{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

حل المعادلات

اختبار الكتروني تدرب و تعلم

ملاحظة نحل معادلات الدرجة الأولى في الأعداد المركبة بنفس الطريقة التي نحل بها في الأعداد الحقيقية

١ أوجد مجموعة حل المعادلة : $2z+i=3+2i$ في مجموعة الأعداد المركبة C

$2z=3+2i-i$

$z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

$\frac{2z}{2}=\frac{3}{2}+\frac{i}{2}$

م.ح $=\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$

٢ أوجد مجموعة حل المعادلة : $2z+i\bar{z}=5-2i$ في مجموعة الأعداد المركبة C

$z=x+yi\ ,\ \bar{z}=x-yi$

$2z+i\ \bar{z}=5-2i$

$2(x+yi)+i(x-yi)=5-2i$

$2x+2yi+xi+y=5-2i$

$(2x+y)+(x+2y)i=5-2i$

$\begin{cases}2x+y=5\\x+2y=-2\end{cases}$

$x=4 \quad y=-3$

$z=x+yi=4-3i$

م.ح $=\{4\ ,-3i\}$

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة : $z+i=2\bar{z}+1$ في مجموعة الأعداد المركبة C

$x,y\in R$

$z=x+yi\ ,\quad \bar{z}=x-yi$

$z+i=2\bar{z}+1$

$x+i(y+1)=2x-2yi+1$

$x+i(y+1)=2x-2yi+1$

$x+(y+1)i=(2x+1)-2yi$

$\therefore z=x+yi=-1-\frac{1}{3}i$

$x=2x+1$

$x-2x=1$

$-x=1$

$x=-1$

$y+1=-2y$

$y+2y=-1$

$3y=-1$

$y=-\frac{1}{3}$

م.ح $=\left\{-1\ ,-\frac{1}{3}i\right\}$

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

٤ أوجد مجموعة حل المعادلة : $z^2-2z+2=0$ في مجموعة الأعداد المركبة C

$a=1 \quad b=-2 \quad c=2 \quad \Delta= b^2-4ac$

$\Delta= (-2)^2-4(1)(2)=-4$

$z=-\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$

م.ح $=\{1-i\,,1+i\}$

٥ أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x\in C$

➤ $(a)\quad 3x^2+48=0$

$3x^2=-48$

$x^2=-\frac{48}{3}=-16$

$x=\pm\sqrt{-16}=\pm 4i$

م.ح $=\{-4i\,,+4i\}$

➤ $(b)\quad -5x^2-150=0$

$-\frac{5x^2}{-5}=\frac{150}{-5}$

$x^2=-30$

$x=\pm\sqrt{-30}=\pm\sqrt{30}i$

م.ح $=\{-\sqrt{30}i\,,\sqrt{30}i\}$

➤ $(c)\quad 8x^2+2=0$

$\frac{8x^2}{8}=-\frac{2}{8}$

$x^2=-\frac{1}{4}$

$x=\pm\sqrt{-\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}i$

م.ح $=\left\{-\frac{1}{2}i\,,+\frac{1}{2}i\right\}$

٦ أوجد مجموعة حل المعادلة : $z^2-2z+4=0$ في مجموعة الأعداد المركبة C

$a=1 \quad b=-2 \quad c=4 \quad \Delta= b^2-4ac$

$\Delta= (-2)^2-4(1)(4)=-12=12\times i$

$z=-\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm\sqrt{3}i$

مجموعة الحل $=\{1-\sqrt{3}i\,,1+\sqrt{3}i\}$

٧ أوجد مجموعة حل المعادلة : $4z^2+16z+25=0$ في C

$\Delta= (16)^2-4(4)(25)=-144$

$\Delta= -1\times(12)^2=i^2\times(12)^2$

$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-16-12i}{2\times 4}=-2-\frac{3}{2}i$

$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-16+12i}{2\times 4}=-2+\frac{3}{2}i$

مجموعة الحل $=\left\{-2-\frac{3}{2}i,-2+\frac{3}{2}i\right\}$

صفوة معلمي الكويت

٨ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=-3-4i$

بفرض $w=m+ni$ جذراً تربيعياً ل z

$\rightarrow w^2=z$

$m^2-n^2+2mni=-3-4i$

$m^2-n^2+2mni=-3-4i$

$m^2-n^2=-3 \rightarrow (1)$
$mn=-2 \rightarrow (2)$

$|\omega|^2=|z|$

$m^2+n^2=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$ $\quad m^2+n^2=5 \rightarrow (3)$

نجمع (1) مع (3) :

$2m^2=2 \Rightarrow m^2=1$

نعوض في (3):

$1+n^2=5 \Rightarrow n^2=4$

$m=\pm 1, n=\pm 2$

من المعادلة (2) نجد أن m . n متعاكسان بالإشارة

$m=-1 \quad n=2$
$m=1 \quad n=2$

الجذران: $w_1=-1+2i \quad w_2=1-2i$

٩ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=5+12i$

بفرض $w=m+ni$ جذراً تربيعياً ل z

$\rightarrow w^2=z$

$m^2-n^2+2mni=5+12i$

$m^2-n^2+2mni=5+12i$

$m^2-n^2=5 \rightarrow (1)$
$mn=6 \rightarrow (2)$

$|\omega|^2=|z|$

$m^2+n^2=\sqrt{5^2+12^2}$ $\quad m^2+n^2=13 \rightarrow (3)$

نجمع (1) مع (3) :

$2m^2=18 \Rightarrow m^2=9$

نعوض في (3):

$9+n^2=13 \Rightarrow n^2=4$

$m=\pm 3, n=\pm 2$

من المعادلة (2) نجد أن m . n هما نفس الإشارة

$m=-3 \quad n=-2$
$m=3 \quad n=2$

الجذران هما:

$w_1=-3-2i \quad w_2=3+2i$

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

١٠ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

بفرض $w = m + ni$ جذراً تربيعياً ل z

$\rightarrow w^2 = z$

$m^2 - n^2 + 2mni = 7 + 24i$

$m^2 - n^2 + 2mni = 7 + 24i$

$m^2 - n^2 = 7 \rightarrow (1)$, $|\omega|^2 = |z|$

$mn = 12 \rightarrow (2)$, $m^2 + n^2 = 25 \rightarrow (3)$

نجمع (1) مع (3) :

$2m^2 = 32 \Rightarrow m^2 = 16$

نعوض في (3):

$16 + n^2 = 25 \Rightarrow n^2 = 9$

$m = \pm 4 , n = \pm 3$

من المعادلة (2) نجد أن m . n هما نفس الإشارة

$m = -4 \quad n = -3$

$m = 4 \quad n = 3$

الجذران: $w_2 = 4 + 3i \quad w_1 = -4 - 3i$

١١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 33 - 56i$ هما:

أ) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

ب) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$

ج) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

د) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$

١٢ ظلل أ اذا كانت العبارة صحيحة وظلل ب اذا كانت العبارة خاطئة:

العبارة	أ	ب
الاحداثيات القطبية للنقطة M $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي : $M(1, \frac{5\pi}{4})$		

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

التمثيل البياني للدوال المثلثية
(الجيب ، جيب التمام ، الظل)

اختبار الكتروني تدرب و تعلم

الدوال الجيبية:

تسمى الدالة على الصورة y=a sinbx دالة الجيب والدالة على الصورة

$y = a\cos bx$ جيب التمام حيث b ≠ ٠ ,a≠٠ وكل منها دالة دورية.

تسمى |a| سعة الدالة الجيبية

|b| تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$

$\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة

١ أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

➤ $-5\cos\frac{x}{3}$

$a = -5 \ , b = \frac{1}{3}$ فيكون

$|a| = |-5| = 5$ سعة الدالة

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = 6\pi$ دورة الدالة

➤ $y = -2\cos 5x$

$a = -2 \quad b = 5$

السعة $= a = |-2| = 2$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|5|} = \frac{2\pi}{5}$

➤ $y = 2\cos x$

$a = 2 \ , b = 1$

$|a| = 2$ سعة الدالة

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ دورة الدالة

➤ $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

$a = \frac{1}{2} \quad , b = -1$

السعة $= |a| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

٢ اكتب معادلة الدالة على الصورة y=a cosbx إذا كانت :

➤ الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

y = a cos bx

$y = -2\cos(6x)$

$y = -2\cos(-6x)$

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{3}$

$|b| = \frac{2\pi \times 3}{\pi} = 6$

$b = \pm 6$

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

الدورة هي π ، $a = 0{,}25$

$$y = a\cos bx$$
$$y = 0.25\cos(2x)$$
$$y = 0.25\cos(-2x)$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1}$$
$$|b| = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$
$$b = \pm 2$$

الدورة هي 2 ، $a = 1$

$$y = a\cos bx$$
$$y = \cos(\pi x)$$
$$y = \cos(-\pi x)$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2}{1}$$
$$|b| = \frac{2\pi}{2} = \pi$$
$$b = \pm\pi$$

٣ اختر الإجابة الصحيحة:

١ في الدالة المثلثية $y = -2\sin(3x)$ السعة هي:

أ) 2 ب) -2 ج) 3 د) -3

٢ معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة ٤ والدور ٦ يمكن أن تكون:

أ) $y = -\frac{1}{4}\cos(\frac{x}{3})$ ب) $y = 4\cos(\frac{x}{3})$

ج) $y = -4\cos(\frac{3}{\pi}x)$ د) $y = -4\cos(\frac{\pi}{3}x)$

٤ ظلل أ اذا كانت العبارة صحيحة وظلل ب اذا كانت العبارة خاطئة:

العبارة	أ	ب
معادلة الدالة المثلثية حيث السعة 5 والدورة π 3، يمكن أن تكون $y = 5\sin(\frac{2}{3}\theta)$		

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

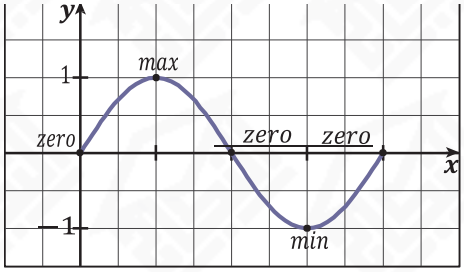
دالة الجيب

y =sinx هي دالة مثلثية مجالها R ومداها [١ ,١-]وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد

للحصول على التمثيل البياني لy=sinx في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0\ ,2\pi]$ كالتالي:

y=sinx

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



من بيان دالة الجيب نلاحظ:

لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi)=0$

لأي عدد صحيح n فإن للدالة f(x)=sinx قيمة عظمى تساوي ١ عند $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي ١-

عند $x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$

دالة الجيب دالة فردية لأن $\sin(-x)=\sin x\ ,\forall x\in R$

منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.

سعة الدالة هي: $\frac{\max f-\min f}{2}$

١ أوجد السعة والدورة للدالة : $-4\pi\le x\le 4\pi\ ,y=3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ ثم ارسم بيانها

السعة $|a|=|3|=3$

الدورة $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|}=4\pi$

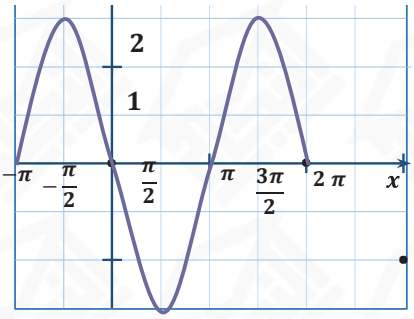
ربع الدورة $=\pi$

x	0	π	2π	3π	4π
$3\sin(\frac{1}{2}x)$	0	3	0	-3	0

صفوة معلمي الكويت

2025-2024

١ أوجد السعة والدورة للدالة : $y=-3\sin(x), x\in[-\pi,2\pi]$ ثم ارسم بيانها



هي دالة دورية $y=-3\ sin\ x$

السعة $|a|=|3|=3$

الدورة $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

ربع الدورة $=\frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-3\sin(x)$	0	-3	0	3	0

٢ أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

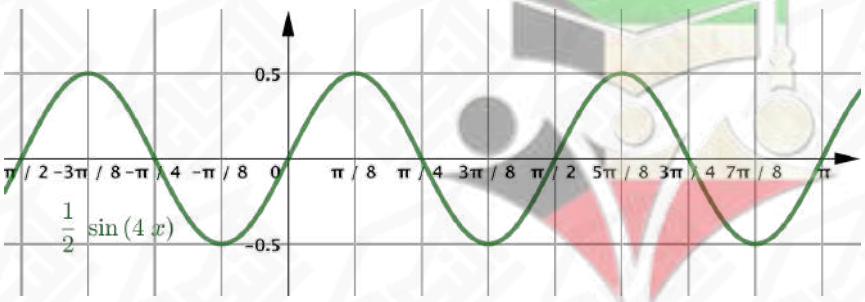
➤ $y=\frac{1}{2}\sin 4x$

$|a|=\frac{1}{2}$

الدورة $=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

ربع الدورة $=\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}\sin 4x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0



صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

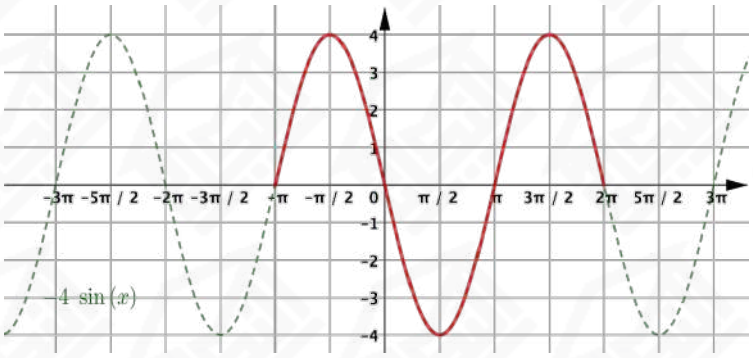
➤ $y = -4\sin x \quad , x \in [-\pi, 2\pi]$

السعة $= |a| = 4$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$

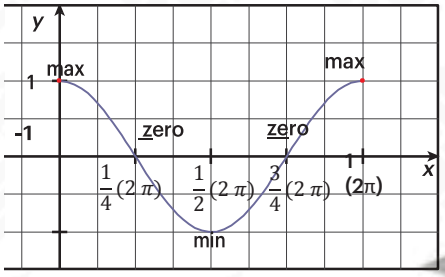
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-4\sin x$	0	$4-$	0	4	0



دالة الجيب التمام

y =cos x هي دالة مثلثية مجالها R ومداها[-١ ,١] وهي دالة دورية ذات دورة 2π، وسعتها تساوي واحد

للحصول على التمثيل البياني لـy=cosx في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0, 2\pi]$ كالتالي:



y=cosx

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

من بيان دالة جيب التمام نلاحظ:

لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$

لأي عدد صحيح n فإن للدالة f(x)=cosx قيمة عظمى تساوي ١ عند $x = 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي -١ عند $x = \pi + 2n\pi$

دالة جيب التمام دالة زوجية لأن $\cos(-x) = \cos x \ , \forall x \in R$

محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة

سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$

صفوة معلمي الكويت

2025-2024

١ أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

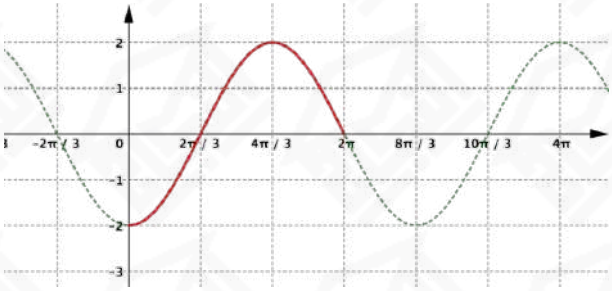
➤ $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)$, $0 \le x \le 2\pi$

السعة $= |a| = 2$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	$\frac{8\pi}{3}$
$-2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)$	-2	0	-2	0	-2



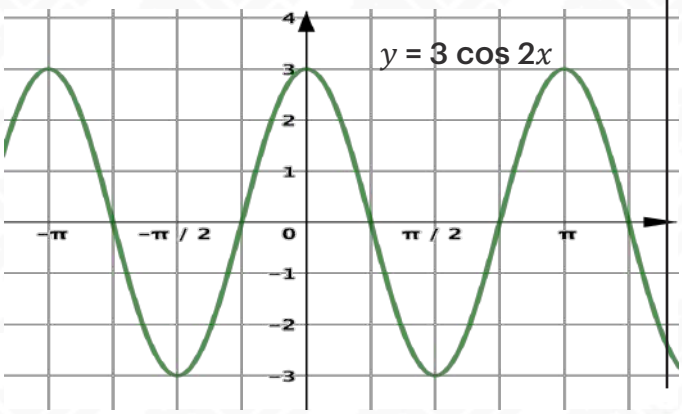
➤ $y = 3\cos 2x$

السعة $= |a| = 3$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$3\cos 2x$	3	0	-3	0	3



٢ أوجد السعة والدورة للدالة $y = -3\cos(2x)$ ثم ارسم بيانها.

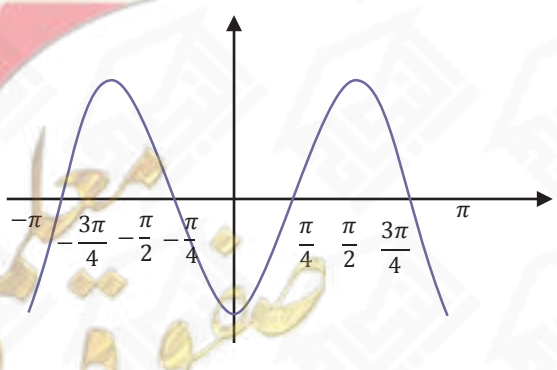
$y = 3\cos 2x$

السعة $= |a| = 3$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$3\cos 2x$	-3	0	3	0	-3



صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

٣ أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان الدالة:

$$y = \frac{1}{2}\cos(-x) \quad : \quad x \in [-2\pi, 2\pi]$$

السعة : $|a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ربع الدورة: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\frac{1}{2}\cos(-x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

دالة الظل

هي الدالة المثلثية على الصورة y = tan x وتكتب: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} : \cos x \neq 0$

مجالها: $D = R - \{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z\}$

ومداها : R

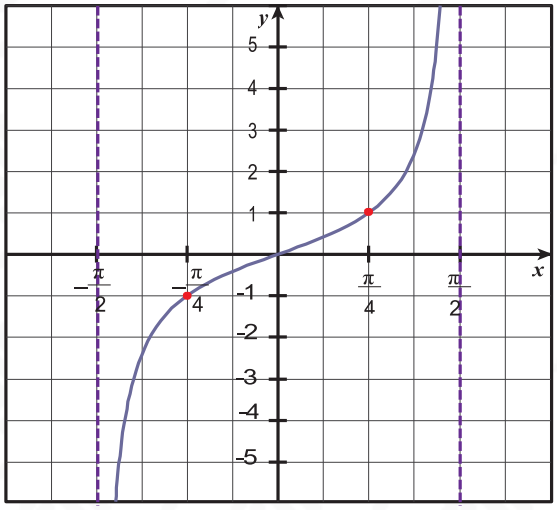
وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني ل : y = tan x

في دورة واحدة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

نقسم الدورة إلى أرباع كما هو في الجدول التالي:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف



من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل: ليس لها سعة.

لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$

لأي عدد صحيح n فإن $\tan(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0$ غير معرف وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة y = tan x

دالة فردية لأن $\tan(-x) = -\tan x, \forall x \in D$

منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

١ أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

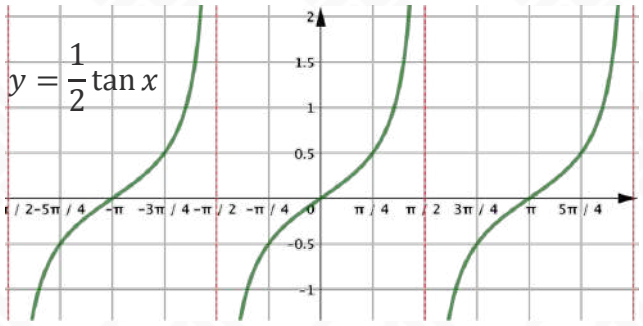
➤ $y = \frac{1}{2}\tan x$

$a = \frac{1}{2} \qquad b = 1$

الدورة $= \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \frac{1}{2}\tan x$	غير معرف	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	غير معرف



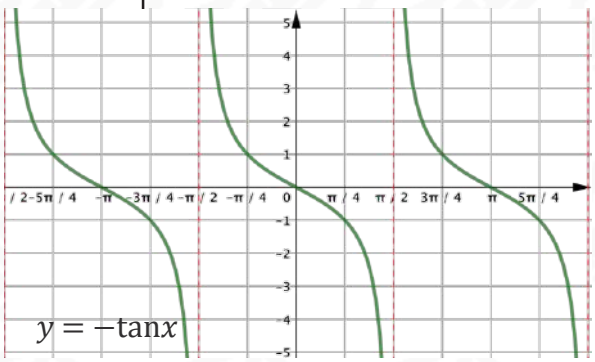
➤ $y = -\tan x$

$a = -1 \qquad b = 1$

الدورة $= \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = -\tan x$	غير معرف	1	0	-1	غير معرف



خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in Z$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$R - \{x, x = \frac{\pi}{2} + n\pi\}$
المدى	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

٢ ظلل أ اذا كانت العبارة صحيحة وظلل ب اذا كانت العبارة خاطئة:

العبارة	أ	ب
سعة الدالة $y = 3\tan(\frac{3}{4}x)$ هي ٣		

منصة تعلم الكويت

النجاح 2025-2024

اختبار الكتروني تدرب و تعلم

قانون الجيب

في أي مثلث ABC : $\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

١ حل المثلث ABC عندما :

➤ $a = 26,3$, $b = 6\ cm$ $a = 7\ cm$

$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

$\frac{\sin 26,3}{7} = \frac{\sin \beta}{6}$

$\sin \beta = \frac{6 \sin 26,3}{7} \approx 0,3798$

$\beta_1 = \sin^{-1}(0,3798) \approx 22,3$

$a + \beta_1 = 48,6 < 180$

$\gamma_1 = 180 - (26,3 + 22,3) = 131,4$

$\frac{\sin 26,3}{7} = \frac{\sin 131,4}{c}$

$c = \frac{7 \sin 131,4}{\sin 26,3} \approx 11,9\ cm$

$\beta_2 = 180 - 22.3 = 157,7$

$a + \beta_2 = 184 > 180$

➤ $a = 45$, $b = 7$ $a = 6\ cm$

$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

$\frac{\sin 45}{6} = \frac{\sin \beta}{7} =$

$\sin \beta = \frac{7 \times \sin 45}{6} = \frac{7 \times \sqrt{2}}{12} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$

$\beta = \sin^{-1} \frac{7\sqrt{2}}{12} = 55,6$

$a + \beta_1 \approx 100,6 < 180$

$\gamma_1 = 180 - (45 + 55,6) = 79,4$

$\frac{\sin 45}{6} = \frac{\sin 79,4}{c}$

$c_1 = \frac{6 \sin 79,4}{\sin 45} \approx 8,34\ cm$

$\beta_2 = 180 - 55,6 \approx 124,4$

$a + \beta_2 \approx 169,4 < 180$

$\gamma_2 = 180 - (45 + 124,4) = 10,6$

$\frac{\sin 45}{6} = \frac{\sin 10,6}{c_2}$

$c_2 = \frac{\sin 10,6}{\sin 45} = 1,56\ cm$

صفوة معلمي الكويت

2025-2024

٢ حل المثلث ABC حيث : $a = 8cm$ $\beta = 48$, $a = 36$

$\gamma = 180 - (36 + 48) = 96$ (مجموع قياسات زوايا المثلث 180)

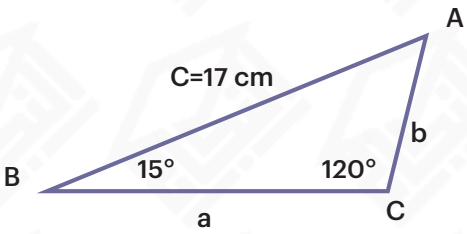
$$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36}{8} = \frac{\sin 48}{b} = \frac{\sin 96}{c}$$

$$b = \frac{8 \times \sin 48}{\sin 36} \approx 10{,}11\ cm$$

$$c = \frac{8 \times \sin 96}{\sin 36} = 13{,}54\ cm$$

٣ حل المثلث ABC :



$a = 180 - (15 + 120) = 45$

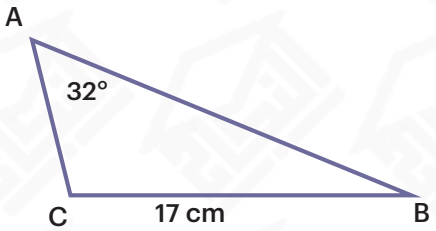
$$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45}{a} = \frac{\sin 15}{b} = \frac{\sin 120}{17}$$

$$b = \frac{17 \times \sin 15}{\sin 120}$$

$b = 5.08\ cm$

$$a = \frac{17 \times \sin 45}{\sin 120} = 13.88cm$$



$$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 32}{17} = \frac{\sin \beta}{11} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{11 \times \sin 32}{17} \approx 0.34 > 0$$

$\therefore \beta = 20.1°$

توجد زاويتان β تحققان $0 < \beta < 180$, $sin\ \beta \approx 0.34$

$\beta_1 + a \approx 20.1 + 32 = 52.1 < 180$

$\beta_2 \approx 180 - 20.1 = 159.9°$ أو

$\beta_2 + a \approx 159.9 + 32 = 191.1 > 180$ مرفوضة

$\therefore \gamma = 180 - (32 + 20.1) \approx 127.9$

صفوة تعليمي الكويت

النجاح 2025-2024

٤ حل المثلث ABC حيث : $a = 4cm, b = 3cm, c = 6cm$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{9 + 36 - 16}{(2)(3)(6)} = \frac{29}{36}$$

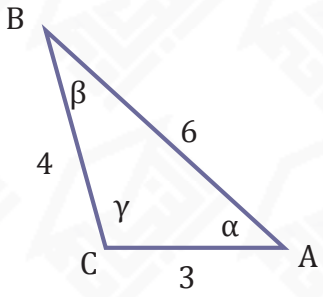
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{29}{36}\right) \approx 36.3^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16 + 36 - 9}{(2)(4)(6)} = \frac{43}{48}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{43}{48}\right) \approx 26.4^\circ$$

$$\gamma = 180 - (36.3^\circ - 26.4^\circ)$$

$$117.3^\circ$$

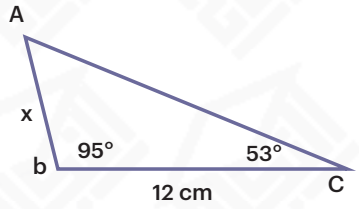


٥ اختر الإجابة الصحيحة:

١ في المثلث ABC : $AC = 40cm, AB = 30cm, m(\widehat{A}) = 120^\circ$ فإن طول $\overline{BC}$ تقريبا:

أ) 21 cm　　ب) 68 cm　　ج) 60.8 cm　　د) 36 cm

٢ في المثلث المقابل x تساوي تقريباً:



أ) 18.1 cm　　ب) 8.6 cm

ج) 19.2 cm　　د) 15 cm

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

اختبار الكتروني تدرب و تعلم

قانون جيب التمام

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

١ حل المثلث ABC حيث : $a = 11cm, b = 5cm, \gamma = 20°$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\,\gamma$

$= 11^2 + 5^2 - 2 \times 11 \times 5\,cos\,(20) \approx 42.63$

$c = \sqrt{42{,}62} \approx 6{,}53\ cm$

$cos\,a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + (6.53)^2 - 11^2}{2 \times 5 \times 6.53} \approx -0{,}817$

$a = cos^{-1}(-0{,}817) \approx 144{,}8$

$\beta = 180 - (20 + 144{,}8) \approx 15{,}2$

٢ حل المثلث ABC حيث : $a = 9cm, b = 7cm, c = 5\text{cm}$ أوجد قياس الزاوية الأكبر

$\cos a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 52 - 92}{2 \times 7 \times 5} = -\frac{1}{10}$

$a = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{10}\right) \approx 95.7$

٣ حل المثلث ABC حيث : $a = 60°, b = 9cm, c = 6\text{cm}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$a^2 = 9^2 + 6^2 - 2(9)(6)\cos 60° = 81 + 36 - 108 \times \frac{1}{2}$

$a^2 = 63 \ , a = 3\sqrt{7}$

$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(3\sqrt{7})^2 + (6)^2 - (9)^2}{2(3\sqrt{7})(6)} = \frac{\sqrt{7}}{14}$

$\beta \approx 79{,}1°$

$\gamma = 180 - (a + \beta) = 180 - (60 + 79{,}1) = 40{,}9°$

صفوة معلمي الكويت

٤ حل المثلث ABC حيث : $a = 2\text{cm}, b = 4cm, c = 5\text{cm}$

$$\cos a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 5^2 - 2^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{37}{40}$$

$$a \approx 22.3$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(2)^2 + (5)^2 - (4)^2}{2(2)(5)} = \frac{13}{20}$$

$$\beta \approx 49{,}5\,^\circ$$

$$\gamma = 180 - (a + \beta) = 180 - (22.3 + 49{,}5) = 108.2^\circ$$

٥ اختر الإجابة الصحيحة:

١ في المثلث ABC : $BC = 20cm, AC = 10cm, m(\hat{c}) = 60^\circ$ **فإن طول** $\overline{AB}$ **تقريبا:**

أ) 29 cm　　ب) 12.4 cm　　ج) $10\sqrt{3}$ cm　　د) $10\sqrt{7}$ cm

٦ ظلل أ اذا كانت العبارة صحيحة وظلل ب اذا كانت العبارة خاطئة:

العبارة	أ	ب
$\cos 94 \cos 18 + \sin 94 \sin 18$ يساوي $\cos 112$		

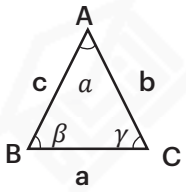
صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

اختبار الكتروني تدرب و تعلم

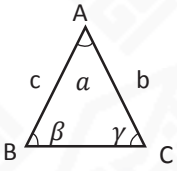
مساحة المثلث

$$Area\ (ABC) \begin{cases} = \frac{1}{2} b\ c \sin a \\ = \frac{1}{2} a\ c \sin \beta \\ = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \end{cases}$$



النظرية:

تعطى مساحة المثلث ABC أطوال أضلاعه a,b,c بقاعدة هيرون:



$$Area(ABC) = \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}$$

حيث : (نصف محيط المثلث) $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

١ أوجد مساحة المثلث ABC حيث

➤ $a = 5\ cm, \quad b = 6cm\ , c = 8\ cm$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(8+5+7) = 10cm$$

$$Area\ (ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)}$$

$$= 17.32\ cm^2$$

➤ $a = 4\ c, \quad b = 4cm\ , c = 3\ cm$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(4+4+3) = 5{,}5cm$$

$$Area\ (ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{5{,}5(5{,}5-4)(5{,}5-4)(5{,}5-3)} = \frac{3\sqrt{5{,}5}}{4}$$

$$= 5.56\ cm^2$$

➤ $7\ cm, 5\ cm, 8cm$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(7+5+8)$$

$$= 10cm$$

$$s\ (ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s\ (ABC) = \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)}$$

$$= \sqrt{10(2)(5)(3)} = 10\sqrt{3}\ cm^2$$

➤ $a = 23\ cm\ .b = 19\ cm\ .c = 12\ cm$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(23+19+12) = 27$$

$$area = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{27(27-23)(27-19)(27-12)}$$

$$= \sqrt{12960}$$

$$area = 36\sqrt{10}\ cm^2$$

$$area = 113.84\ cm^2$$

صفوة الكويت معلم

النجاح 2025-2024

٢ أوجد مساحة المثلث ABC طريقتين مختلفتين حيث : $a=4cm, b=5cm, c=8cm$

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(4+5+8)=8{,}5cm$$

$$Area=\sqrt{8{,}5(8{,}5-4)(8{,}5-5)(8{,}5-8)}\approx 8{,}18\ cm^2$$

٣ أوجد مساحة سطح مثلث أطول أضلاعه: $a=9cm, b=7cm, c=6cm$

$$s=\frac{1}{2}(9+7+6)=11$$

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{11(11-9)(11-7)(11-6)}$$

$$A=\sqrt{11(11-9)(11-7)(11-6)}=\sqrt{11\times 2\times 4\times 5}=2\sqrt{110}cm^2$$

٤ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه $7cm, 8cm, 9cm$ هي:

أ) $18\sqrt{3}\ cm^2$ ب) $16\sqrt{3}\ cm^2$ ج) $12\sqrt{5}\ cm^2$ د) $6\sqrt{5}\ cm^2$

٢ إذا كان $a=2cm, b=3cm, m(c?)=40°$ فإن مساحة المثلث تساوي حوالي:

أ) $2.3\ cm^2$ ب) $1.93\ cm^2$ ج) $3.86\ cm^2$ د) $4.6\ cm^2$

صفوة معلمي الكويت

2025-2024

المتطابقات المثلثية

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ,\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\ ,\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}\ ,\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\ ,\quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta\ ,1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

صفوة معلمي الكويت

اثبات صحة متطابقات مثلثية

اختبار الكتروني تدرب و تعلم

لإثبات أن معادلة ما هي متطابقة نحتاج إلى محاولة إثبات أن طرفي المعادلة متساويان عند كل قيم المتغير نفسها.

من خلال استخدام إحدى الإستراتيجيات التالية:

١.تبسيط الطرف الأيمن بصورة الطرف الأيسر أو العكس.

٢.تبسيط كلًّا من الطرفين على حدة حتى يتطابق ناتج تبسيطهما.

٣.ويتم تبسيط كل طرف باستخدام إحدى الطرق التالية:

٤.دمج الحدود	فصل الحدود
٥.ضرب العوامل	التحليل
٦.استخدام متطابقات معلومة	تبسيط الكسور
٧.التحويل إلى الجيب وجيب التمام	

١ أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{1+1+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta$$

٢ أثبت صحة المتطابقة : $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=(\csc x-\cot x)^2$

$$(csc\ x-cot\ x)^2=\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2$$

$$=\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

الطرف الأيمن يساوى الطرف الأيسر

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024

٣ أثبت صحة المتطابقة : $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4\tan x\,.\sec x$

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)-(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$=\frac{(1+2\sin x+\sin^2 x)-(1-2\sin x+\sin^2 x)}{1-\sin^2 x}=\frac{4\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{4\sin x}{\cos^2 x}=4\frac{\sin x}{\cos x}\,.\frac{1}{\cos x}=4\tan x\,.\sec x$$

٤ أثبت أن : $\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\sin x+\sin x\tan^2 x$

$$\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=(\sec x+\tan x)\div(\cot x+\cos x)$$

$$=\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)\div\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\cos x\right)=\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)\div\left(\frac{\cos x+\cos x\,.\sin x}{\sin x}\right)$$

$$=\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)\times\left(\frac{\sin x}{\cos x+\cos x\,.\sin x}\right)=\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)\times\left(\frac{\sin x}{\cos x\,(1+\sin x)}\right)$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sin x\sec^2 x=\sin x\,(1+\tan^2 x)=\sin x+\sin x\tan^2 x$$

٥ أثبت صحة المتطابقة : $\tan x+\cot x=\sec x\csc x$

$$tan\,x+cot\,x=\frac{sin\,x}{cos\,x}+\frac{cos\,x}{sin\,x}$$

$$=\frac{\sin^2 x}{\cos x sin\,x}+\frac{\cos^2 x}{\cos x\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x}=\frac{1}{\cos x\sin x}$$

$$\frac{1}{\cos x}\,.\frac{1}{\sin\,x}=\sec x\,.\csc x$$

صفوة معلمي الكويت

النجاح 2025-2024