الأعداد المركبة

Complex Numbers

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، بسّط كل عدد مستخدمًا الوحدة التخيلية i

(1) $\sqrt{-16} = 4i$

(2) $\sqrt{-15} = \sqrt{15}\,i$

(3) $3\sqrt{-9} = 9i$

(4) $-\frac{1}{2}\sqrt{-100} = -5i$

في التمارين (8–5)، اكتب كل عدد في الصورة الجبرية.

(5) $2+\sqrt{-3} = 2+\sqrt{3}\,i$

(6) $\sqrt{-1}+2 = 2+i$

(7) $\frac{-\sqrt{-50}-2}{6} = \frac{-1}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{6}\,i$

(8) $\frac{\sqrt{-8}+8}{2} = 4+\sqrt{2}\,i$

في التمرينين (11–9)، حل المعادلات التالية:

(9) $2x+3yi = -14+9i$ $x=-7,\ y=3$

(10) $3x+19i = 16-8yi$ $x=\frac{16}{3},\ y=\frac{-19}{8}$

(11) $14i^2-3i = 2x+(y+5)i$ $x=-7,\ y=-8$

(12) مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1 = -2+3i$ **(b)** $z_2 = -4$ **(c)** $z_3 = -i$ **(d)** $z_4 = 2(2+i)$

(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4,5)$ $4+5i$ **(b)** $M(-4,-2)$ $-4-2i$ **(c)** $N(-2,6)$ $-2+6i$ **(d)** $P(0,-3)$ $= -3i$

في التمارين (23–14)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(14) $(2+4i)+(4-i) = 6+3i$

(15) $6-(8+3i) = -2-3i$

(16) $(4+\sqrt{-9})+(6-\sqrt{-49}) = 10-4i$

(17) $(8-\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16}) = 11-5i$

(18) $(-2i)(5i) = 10$

(19) $(4i)(-9i)^2 = -324i$

(20) $-5(1+2i)+3i(3-4i) = 7-i$

(21) $(-6-5i)(1+3i) = 9-23i$

(22) $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25}) = -27+8i$

(23) $i(-6i)^3 = -216$

KuwaitTeacher.Com

$z=-i$ ، $z^{12}=1$ $z^{27}=i$

(24) إذا كان $z=\frac{1-i}{1+i}$ فأوجد: z^{12} , z^{27}

(25) إذا كان $z_1=2+i$, $z_2=-3+4i$ فأوجد:

(a) $-\frac{1}{3}z_2=1-\frac{4}{3}i$ (b) $z_1\cdot z_2=-10+5i$ (c) z_1^3 (d) $\overline{z_1\cdot z_2}=-2+11i$

(e) $\overline{z}_1-\overline{z}_2\ 5+3i$ (f) $z_1\cdot\overline{z}_2\ -2-11i$

(26) إذا كان $z=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد: $\overline{z}$ $-\sqrt{3}-i$

(27) أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3-2i$ (b) $5i$ (c) $3i-4$ $-\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i$

$-\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$ $-\frac{1}{5}i$

(28) إذا كان $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-\sqrt{3}+2i$ فأوجد: $\overline{\frac{z_1}{z_2}}$, $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$, $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$

$\frac{\overline{z_1}}{z_2}=-\frac{5}{7}-\frac{\sqrt{3}}{7}i$ ، $\frac{z_1}{\overline{z_2}}=-\frac{5}{7}+\frac{\sqrt{3}}{7}i$ ، $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{1}{7}-\frac{3\sqrt{3}}{7}i$

(29) **تفكير ناقد:** أوجد العلاقة بين y , x عندما يكون $(x+yi)^2$ عددًا تخيّليًا.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$ (a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z=3+4i$ هو: $\overline{z}=-3-4i$ (a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=3-2i$ هو: $-z=3+2i$ (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$ (a) (b)

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

في التمارين (14–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

(a) $-15+6i$ (b) $6+15i$ (c) $6-15i$ (d) $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

(a) $x=5\ ,\ y=-2$ (b) $x=-5\ ,\ y=-2$ (c) $x=-5\ ,\ y=2$ (d) $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=5i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

(a) $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $x\,i^2+3\,y\,i=5+3\,i^5$: فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

(a) $(5,\ 1)$ (b) $(-5,\ -1)$ (c) $(5,\ -1)$ (d) $(-5,\ 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

(a) $18+17i$ (b) $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$

(c) $6+17i$ (d) 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

(a) $z=-3+4i$ (b) $z=5+4i$ (c) $z=-3$ (d) $z=5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

(a) $z=14+13i$ (b) $z=14-13i$ (c) $z=2-11i$ (d) $z=2-13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\frac{i}{i+2}$ هي:

(a) $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ (b) $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

(c) $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ (d) $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

(a) $-i$ (b) i (c) 1 (d) -1

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

(a) $\mathbb{Z}^+$ (b) $\{0,2,4,6,...\}$ (c) $\{1,3,5,...\}$ (d) $\{2,4,6,...\}$

معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

تمرَّنْ
7–2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد:

(a) $|5+12i| = 13$ **(b)** $|2-2i| = \sqrt{8}$ **(c)** $|2i| = 2$

في التمارين (7–2)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = 1+\sqrt{3}i$

(3) $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

(4) $\left(1.5, \frac{7\pi}{3}\right) \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$

(5) $(2, \pi) = -2$

(6) $(2, 270^\circ)$ $-2i$

(7) $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right) \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

في التمارين (13–8)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8) $(1, 1)$ $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

(9) $(-2, 5)$ $(\sqrt{29}, 111.8)$

(10) $(-3, 0)$ $(3, \pi)$

(11) $(0, 4)$ $(4, 90)$

(12) $(-2, -2\sqrt{3})$ $\left(4, \frac{4\pi}{3}\right)$

(13) $(3\sqrt{3}, -3)$ $\left(6, \frac{11\pi}{6}\right)$

في التمارين (21–14)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية:

(14) $3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(15) $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(16) $-2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(17) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

(18) $-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

(19) $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(20) $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$

(21) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 1\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

في التمارين (28–22)، اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$:

(22) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(23) $8(\cos 30^\circ - i\sin(-150^\circ))$

(24) $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

(25) $2(\cos 45^\circ + i\sin 405^\circ)$

صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

Subject: كراسة التمارين / /

التمارين P.12 اكتب في الصورة المثلثية (22-28)

(22) $5(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = 5(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})$
$= 5(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

(23) $8(\cos 30 - i\sin(-150))$ $\quad \sin(-150) = -\sin 30$
$= 8(\cos 30 - i(-\sin 30)) = 8(\cos 30 + i\sin 30)$

(24) $-\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = \sqrt{2}(-\cos\frac{7\pi}{6} - i\sin\frac{7\pi}{6})$
$= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

(25) $2(\cos 45 + i\sin 405) = 2(\cos 45 + i\sin 45)$

(26) $4(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) =$
$= 4(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$
$-\cos\frac{\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6})$
$= \cos\frac{7\pi}{6}$
$\sin\frac{\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{7\pi}{6}$

(27) $5(\cos(-60) + i\sin(-60)) = 5(\cos 60 - i\sin 60)$
$= 5(\cos 300 + i\sin 300)$

(28) $3(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}) =$
$= 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$
$\sin\frac{\pi}{3} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$
$= \cos\frac{\pi}{6}$
$\cos\frac{\pi}{3} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$
$= \sin\frac{\pi}{6}$

معلمة الكويت
Kuwaitteacher.Com

(26) $4\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(27) $5\left(\cos(-60°)+i\sin(-60°)\right)$

(28) $3\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين (33–29)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(29) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}-i$

(30) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1-i$

(31) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

(32) $7\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{2}i$

(33) $\sqrt{3}(\cos 225°+i\sin 225°)$ $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3},2)$ — (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2},135°)$ هي: $B(-1,1)$ — (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$ — (a) (b)

(4) العدد المركب: $z=\sqrt{3}-i$ بصورة المثلثية هو: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ — (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z=1-i$ — (a) (b)

(6) السعة الأساسية للعدد $z=\cos 30°+i\cos 240°$ هي $330°$ — (a) (b)

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2,2\sqrt{3})$ (b) $A(-2,2\sqrt{3})$ (c) $A(-2,-2\sqrt{3})$ (d) $A(2,-2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ (b) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(c) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (d) $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ (b) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ (b) $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(c) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ (d) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي: $i^{2n+2}(1+i^6)$

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) i^{-2n}

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

(a) $35 - 12i$ (b) $35 + 12i$ (c) $81 - 12i$ (d) $81 + 12i$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حل المعادلات

الجبر A تمارين مقالية P.15

① $3z - 1 + i = 5 - 2i$

$3z = 5 + 1 - 2i - i$

$3z = 6 - 3i$

$z = 2 - i$

② $z + 2\bar{z} = 4 + i$ $\quad z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

$a + bi + 2(a - bi) = 4 + i$

$a + 2a + bi - 2bi = 4 + i$

$3a - bi = 4 + i$

$3a = 4 \qquad -b = 1$

$a = \frac{4}{3} \qquad b = -1 \Rightarrow z = \frac{4}{3} - i$

③ $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

$2z = 5 - 6i$

$z = \frac{5}{2} - 3i$

④ $z + 3(1 + i)z - 8(2 - i) = 0$ $\quad z = a + bi$

$[1 + (3 + 3i)](a + bi) - 16 + 8i = 0$

$(4 + 3i)(a + bi) = 16 - 8i$

$z = \frac{16 - 8i}{4 + 3i} \times \frac{4 - 3i}{4 - 3i}$

$z = \frac{8}{5} - \frac{16}{5}i$

معلمة الكويت
صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

Subject: / /

اوجد مجموعة حل كل معادلات التالية

(5) $16x^2+64=0$

$16x^2=-64$

$x^2=\frac{-64}{16} \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x=\mp 2i$

مجموعة الحل $=\{2i\ ,\ -2i\}$

(6) $x^2-5x+7=0$

$a=1 \qquad b=-5 \qquad c=7$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(7)=-3$

$x=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\mp\sqrt{-3}}{2(1)}=\frac{5\mp\sqrt{3}i}{2}$

مجموعة الحل $=\left\{\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

(7) $x^2+5x+25=0$

مجموعة الحل $=\{-3-4i\ ,\ -3+4i\}$

(8) $Z^2-2Z+4=0$

مجموعة الحل $=\{1-\sqrt{3}i\ ,\ 1+\sqrt{3}i\}$

(9) $Z+\frac{4}{Z}=2$

$Z^2+4=2Z \Rightarrow Z^2-2Z+4=0$

مجموعة الحل $\{1-\sqrt{3}i\ ,\ 1+\sqrt{3}i\}$

معلمة الكويت
A L A D I B Notebook
KuwaitTeacher.Com

Subject: / /

(10) لتكن المعادلة $z^2+z+2=0$ بدون حل المعادلة
اثبت أن $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ هو جذر المعادلة ثم اوجد الجذر الثاني

$$\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)+2=$$

$$=\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+2=$$

$$\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i+\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i+2=0$$

$\therefore \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ هو جذر المعادلة
ويكون الجذر الثاني $\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$

ونلاحظ:

$$z_1+z_2=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}=\frac{-2}{2}=-1=\frac{b}{a}$$

$$z_1\cdot z_2=\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)$$

$$=\frac{(-1+\sqrt{7}i)(-1-\sqrt{7}i)}{4}$$

$$=\frac{(-1)^2+(\sqrt{7})^2}{4}$$

$$=\frac{1+7}{4}=2=\frac{c}{a}$$

معلم الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

Subject: / /

(11) اوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = -3 + 4i$

نفرض أن $m + ni$ هو الجذر التربيعي للعدد Z فيكون

$$w^2 = Z \Rightarrow (m+ni)^2 = -3 + 4i$$
$$m^2 - n^2 + 2mni = -3 + 4i$$

بالمطابقة

$$m^2 - n^2 = -3 \quad \ldots (1)$$
$$2mn = 4 \quad \ldots (2)$$
$$|w|^2 = |Z| \Rightarrow \left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(3)^2+(4)^2}$$
$$m^2 + n^2 = \sqrt{(-3)^2+(4)^2}$$
$$m^2 + n^2 = 5 \quad \ldots (3)$$

بجمع (3), (1)

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow$$

$$m = 1 \quad \text{or} \quad m = -1$$

بالتعويض في (2) نجد

$2mn = 4$	$2mn = 4$
$2(1)n = 4$	$2(-1)n = 4$
$n = 2$	$n = -2$
$1 + 2i$	$-1 - 2i$

∴ الجذرين التربيعيين

ملاحظة: أحد هذين الجذرين نظير جمعي للآخر

معلم الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

Subject: / /

(12) اوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = 5+12i$

بفرض أن $w = a+bi$ هو الجذر التربيعي للعدد Z فيكون

$$w^2 = Z \Rightarrow (a+bi)^2 = 5+12i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 5+12i$$

بالمطابقة

$$a^2 - b^2 = 5 \quad \cdots (1)$$

$$2ab = 12 \quad \cdots (2)$$

$$|w|^2 = |Z| \Rightarrow (\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{5^2+12^2}$$

$$a^2+b^2 = \sqrt{5^2+12^2}$$

$$a^2+b^2 = 13 \quad \cdots (3)$$

بجمع (3), (1)

$$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$a = 3 \quad \text{or} \quad a = -3$$

بالتعويض في (2)

$2ab = 12$ ، $2(3)b = 12$ ، $b = 2$ ، $3+2i$

$2ab = 12$ ، $2(-3)b = 12$ ، $b = -2$ ، $-3-2i$

∴ الجذرين التربيعيين

ونلاحظ أنه طرحنا الجذرين أصبحا النظير الجمعي للآخر

معلمة الكويت
Kuwaitteacher.Com

Subject: / /

(14) حل المعادلة $(2+i)Z^2 = 22-19i$

$$Z^2 = \frac{22-19i}{2+i} = 5-12i$$

بفرض أن $Z = a+bi$ فيكون

$$(a+bi)^2 = 5-12i$$

$$a^2-b^2+2abi = 5-12i$$

بالمطابقة

$$a^2-b^2 = 5 \quad \text{---} \ (1)$$

$$2ab = -12 \quad \text{---} \ (2)$$

$$|w|^2 = |Z| \Rightarrow (\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{5^2+(-12)^2}$$

$$a^2+b^2 = \sqrt{5^2+(-12)^2} = 13$$

$$a^2+b^2 = 13 \quad \text{---} \ (3)$$

بجمع (3), (1) نجد

$$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$a = 3 \quad \text{or} \quad a = -3$$

بالتعويض في (2)

$$2ab = -12 \qquad 2ab = -12$$

$$2(3)b = -12 \qquad 2(-3)b = -12$$

$$b = -2 \qquad b = 2$$

$$Z_1 = 3-2i \qquad Z_2 = -3+2i$$

إذن

$$\therefore \text{مجموعة حل المعادلة} = \{3-2i \ , \ -3+2i\}$$

A L A D I B Notebook
صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $z = 3 + i$ هو: $\overline{z} + 2 = 5 - i$ (a) (b)

(2) حل المعادلة: $z = 1 - 5i$ هو: $2z + \overline{z} - 3 - 5i = 0$ (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي: $\{-2 - i, 2 + i\}$ (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $1, -1$ (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i,\ z_2 = -5 - 3i$ (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$ (a) (b)

في التمارين (10–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\overline{z}$ هو:

(a) $z = 1 + 6i$ (b) $z = -1 + 6i$ (c) $z = 1 - 6i$ (d) $z = -1 - 6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

(a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$ (b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

(c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$ (d) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$ (d) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

Subject: / /

اختبار الوحدة السابعة

بسط كلاً من التعابير التالية

① $4\sqrt{-9} - 2 = -2 + 12i$

② $(4 - i) + (5 - 9i) = 9 - 10i$

③ $(-3 + 2i) - (6 + i) = -9 + i$

④ $(2 + 3i)(8 - 5i) = (16 + 15) + (-10 + 24)i = 31 + 14i$

⑤ المعكوس الجمعي للعدد $3 - 7i$ هو $-3 + 7i$

المعكوس الضربي للعدد $3 - 7i$ هو

$$\frac{1}{3 - 7i} = \frac{3 + 7i}{3^2 + 7^2} = \frac{3}{58} + \frac{7}{58}i$$

⑥ اوجد القيمة المطلقة للعدد $7 - 2i$

$$|7 - 2i| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$$

⑦ اوجد

ⓐ $-3i^{77} = -3i$ ⓑ $i^{50} = -1$

ⓒ $(-2 + 3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

⑧ اوجد مجموعة حل المعادلة $2x^2 + 10 = 0$

$x^2 = -5$

$x = \sqrt{5}i$ ، $x = -\sqrt{5}i$

مجموعة الحل $= \{\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i\}$

معلم الكويت
Kuwaitteacher.Com

Subject: / /

⑨ اكتب العدد $\frac{1+3i}{3+2i}$ في الصورة الجبرية ثم صورها الى الصورة المثلثية :

$$\frac{1+3i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(3+6)+(-2+9)i}{9+4} = \frac{9}{13} + \frac{7}{13}i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{9}{13}\right)^2 + \left(\frac{7}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{13}$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{7}{13}}{\frac{9}{13}}\right| = \frac{7}{9} \Rightarrow \alpha = 37^\circ\ 52'\ 30''$$

$\theta = \alpha = 37^\circ\ 52'\ 30''$ تقع في الربع الأول ⇐

∴ الصورة المثلثية :

$$Z = \frac{\sqrt{130}}{13}\left(\cos 37^\circ\ 52'\ 30'' + i \sin 37^\circ 52'\ 30''\right)$$

⑩ اوجد مجموعة حل المعادلة $\frac{Z+1}{Z-1} = 2i$

$$2i(Z-1) = Z+1$$
$$2iZ - 2i = Z+1$$
$$2iZ - Z = 1+2i$$
$$Z(2i-1) = 1+2i \Rightarrow Z = \frac{1+2i}{-1+2i}$$

$$Z = \frac{1+2i}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{(-1+4)+(-2-2)i}{1+4} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

Subject: / /

(11) اوجد مرافق العدد $\frac{3-i}{1+i}$

$$\frac{3-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{(3-1)+(-3+-1)i}{1+1} = \frac{2}{2} + \frac{-4}{2}i$$

$$= 1-2i$$

$$\overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)} = 1+2i$$

(12) حل المعادلة

$$2z^2 - 6z + 5 = 0$$

$$a=2 \qquad b=-6 \qquad c=5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(2)(5) = -4$$

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)+\sqrt{-4}}{2\times 2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)-\sqrt{-4}}{2\times 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

مجموعة الحل $= \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \text{ ، } \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

(13) اكتب الاعداد التالية بالصورة المثلثية

(a) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 0 + i \sin 0)$

(b) $-3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right)$

(c) $2\sqrt{3} + 6i = 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

معلم الكويت
Kuwait Teacher.Com

Subject: / /

(14) اكتب العدد $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة المثلثية مستخدماً السعة الأساسية

$$z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

(15) اكتب العدد $z = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ بالصورة الجبرية

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\pi}{3} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \qquad = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$$

(16) اوجد الجذرين التربيعيين للعدد $-8 + 6i$

الجذرين التربيعيين :

$1+3i$ ، $-1-3i$

(17) (a) اثبت أن $-2+\frac{3}{2}i$ هو احد جذري المعادلة $4z^2+16z+25=0$

(b) اوجد الجذر الآخر

$$4\left(-2+\frac{3}{2}i\right)^2 + 16\left(-2+\frac{3}{2}i\right) + 25 =$$

$$= 4\left(\frac{7}{4} - 6i\right) + 16\left(-2+\frac{3}{2}i\right) + 25$$

$$= 7 - 24i + -32 + 24i + 25 = 0$$

الجذر الآخر $-2 - \frac{3}{2}i$

معلم الكويت
KuwaitTeacher.Com

ص ١٩

(1) حدّد دورة كل دالة مما يلي ومعتها:

(a) $y = 3\cos x$

(b) $y = \sin 2x$

(c) $y = 3\sin\frac{x}{3}$

(d) $y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$

الحل :

(a) $y = 3\cos x$

$\because \quad a = 3 \quad , \quad b = 1$

سعة الدالة : $|a| = 3$

دورة الدالة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

(b) $y = \sin 2x$

$\because \quad a = 1 \quad , \quad b = 2$

سعة الدالة : $|a| = 1$

دورة الدالة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

(c) $y = 3\sin\frac{x}{3}$

$\because \quad a = 3 \quad , \quad b = \frac{1}{3}$

السعة : $|a| = |3| = 3$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = 6\pi$

(d) $y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$

$\because \quad a = \frac{1}{3} \quad , \quad b = \frac{1}{2}$

السعة : $|a| = |\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

معلمتي صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

(2) ص ١٩ اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin(bx)$ في كل من الحالات التالية :

(a) الدورة $\frac{2\pi}{3}$ ، $a = 1$

الحل :

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \mp 3$

$\therefore y = a\sin(bx) \Rightarrow$

$y = \sin 3x$ أو $y = \sin(-3x)$

(b) الدورة π ، $a = \frac{1}{3}$

الحل

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \mp 2$

$\therefore y = \frac{1}{3}\sin(2x)$ أو $y = \frac{1}{3}\sin(-2x)$

(c) الدورة 4π ، $a = -4$

الحل :

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \mp \frac{1}{2}$

$\therefore y = a\sin(bx)$

$y = -4\sin(\frac{1}{2}x)$ أو $y = -4\sin(-\frac{1}{2}x)$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

③ ص ١٩

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos(bx)$ في كل من الحالات التالية:

ⓐ الدورة 3π ، $a = 5$

الحل

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = 3\pi \Rightarrow |b| = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \mp\frac{2}{3}$

$\therefore y = a\cos(bx)$

$y = 5\cos(\frac{2}{3}x)$ أو $y = 5\cos(-\frac{2}{3}x)$

ⓑ الدورة π ، $a = -\frac{1}{2}$

الحل :

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \mp 2$

$\therefore y = a\cos(bx)$

$y = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ أو $y = -\frac{1}{2}\cos(-2x)$

ⓒ الدورة $\frac{\pi}{2}$ ، $a = \frac{3}{5}$

الحل

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4 \Rightarrow b = \mp 4$

$\therefore y = a\cos(bx)$

$y = \frac{3}{5}\cos(4x)$ أو $y = \frac{3}{5}\cos(-4x)$

صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

ص ١٩

(4) مثّل بيانيًا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = 2\sin x$ (b) $y = -3\sin x$ (c) $y = 0.5\sin 2x$

(d) $y = 4\sin\frac{1}{2}x$ (e) $y = -\sin 5x$ (f) $y = 5\cos x$

(g) $y = 3\cos 5x$ (h) $y = -\cos 3x$ (i) $y = -\cos 2x$

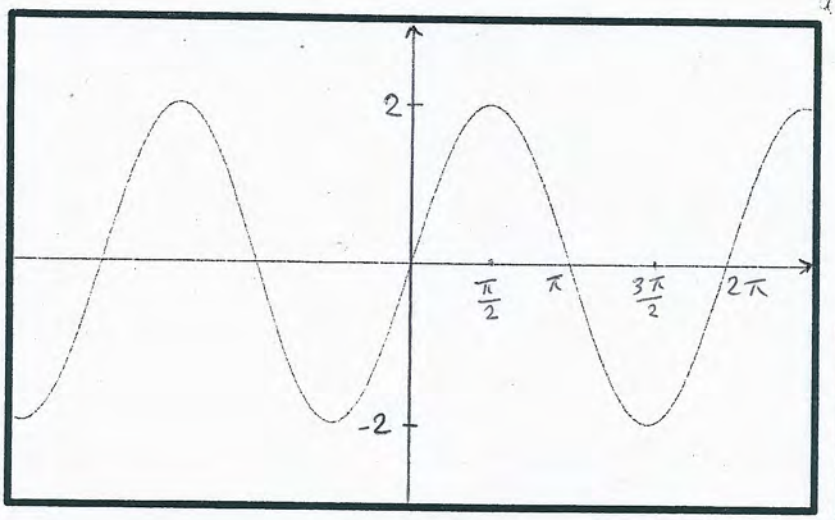
(a) $y = \sin X$

الحل الدالة دورية مجالها $\mathbb{R}$

السعة: $|a| = |2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

∴ ربع الدورة $\frac{\pi}{2}$



X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin X$	0	1	0	-1	0
$2\sin X$	0	2	0	-2	0

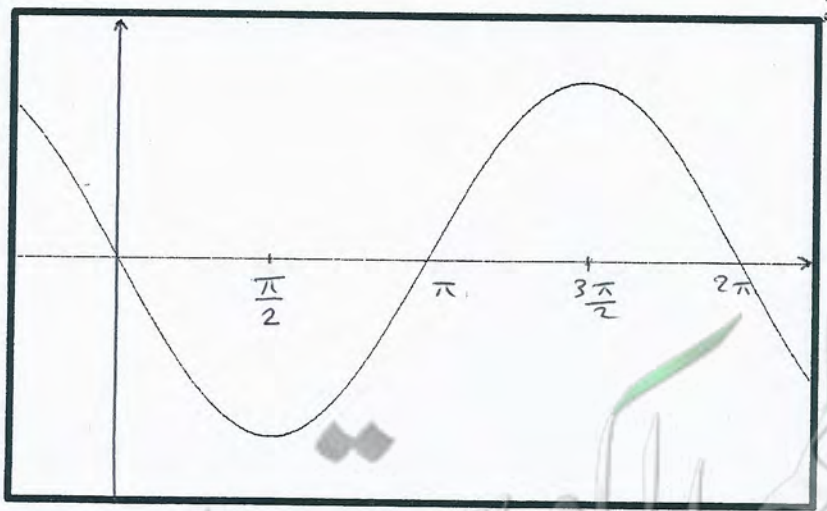
(b) $y = -3\sin X$

الحل الدالة دورية مجالها $\mathbb{R}$

السعة: $|a| = |-3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

∴ ربع الدورة $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

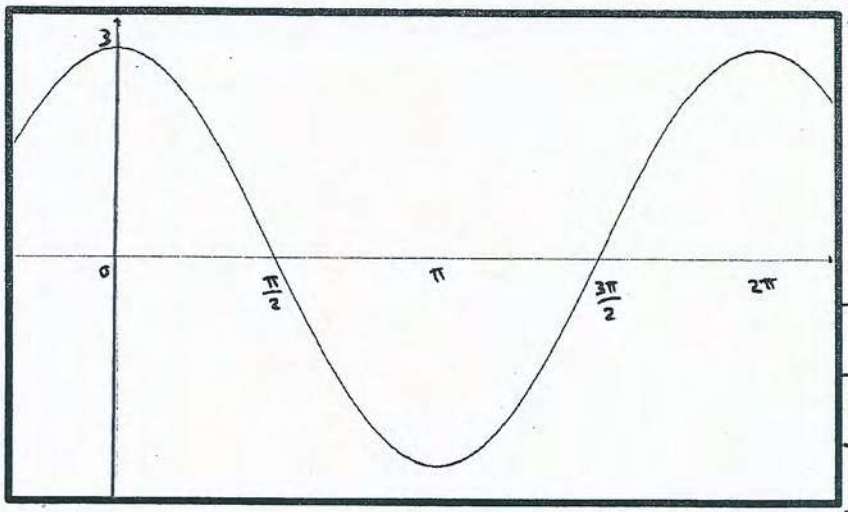


X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin X$	0	1	0	-1	0
$-3\sin X$	0	-3	0	3	0

صوت الكويت
KuwaitTeacher.Com

(f) $y = 3\cos x$

الحل



الدالة $y = 3\cos x$ دالة دورية

السعة : $|a| = |3| = 3$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ربع الدورة : $\frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$3\cos x$	3	0	-3	0	3

(h) $y = -\cos 3x$

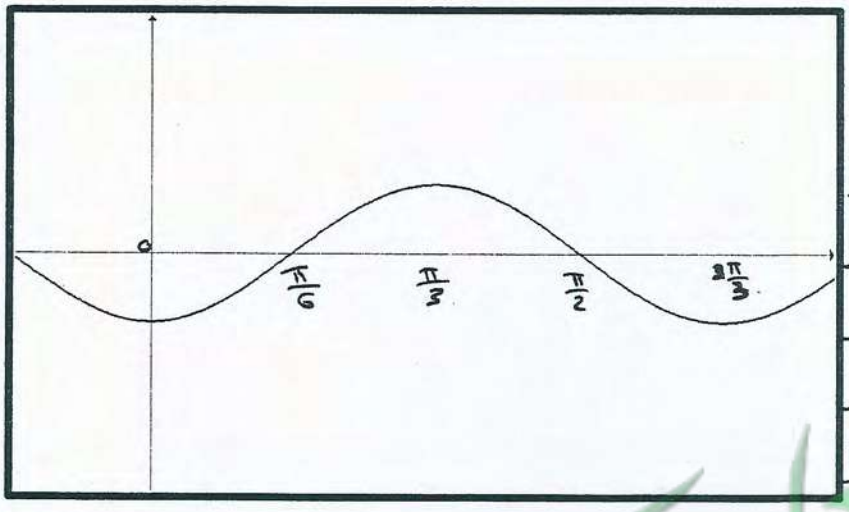
الحل

الدالة $y = -\cos 3x$ دالة دورية مجالها $\mathbb{R}$

السعة : $|a| = |-1| = 1$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$

ربع الدورة : $\frac{\pi}{6}$



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 3x$	1	0	-1	0	1
$-\cos 3x$	-1	0	1	0	1

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(5) ص 19 جد دورة كل دالة مما يلي :

(a) $y = \tan 5x$

الحل

الدالة $y = \tan 5x$ هي دالة دورية

الدورة : $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5}$

(b) $y = \tan \frac{3x}{2}$

الحل :

الدالة $y = \tan \frac{3x}{2}$ هي دالة دورية

الدورة : $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|\frac{3}{2}|} = \frac{2\pi}{3}$

---

(6) ص 20

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = \tan(bx)$ في كل من الحالات التالية :

(a) الدورة $\frac{\pi}{5}$

الحل الدورة : $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = \pm 5$

$\therefore \quad y = \tan(bx)$

$y = \tan(5x)$ أو $y = \tan(-5x)$

(b) الدورة $\frac{2\pi}{3}$

الحل $\frac{\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$

$\therefore \quad y = \tan(\frac{3}{2}x)$ أو $y = \tan(-\frac{3}{2}x)$

KuwaitTeacher.Com

(7) مثل بيانيًا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

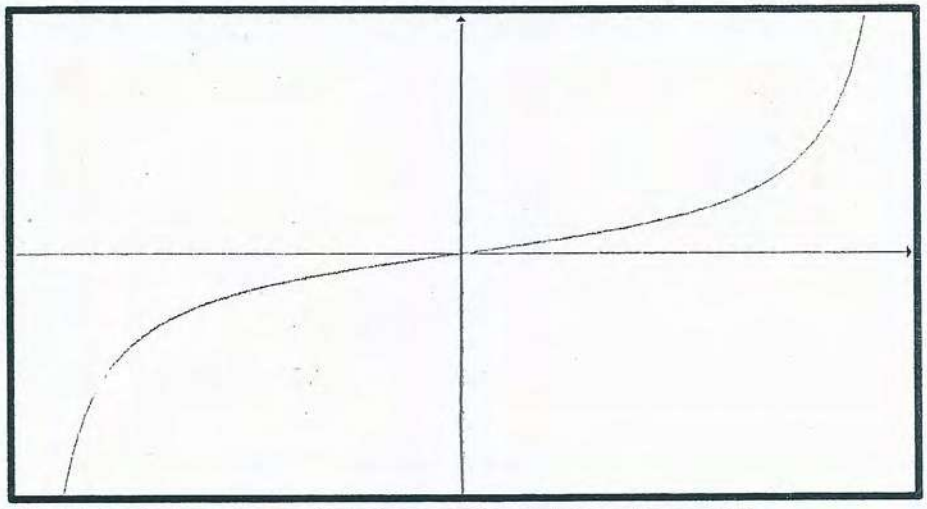
(a) $y = \tan 2x$ (b) $y = \tan \frac{x}{2}$ (c) $y = -3\tan x$

الحل الدالة دورية

@ $y = \tan 2x$

الدورة : $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$

ربع الدورة : $\frac{\pi}{8}$



x	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$2x$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan 2x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

© $y = -3\tan x$

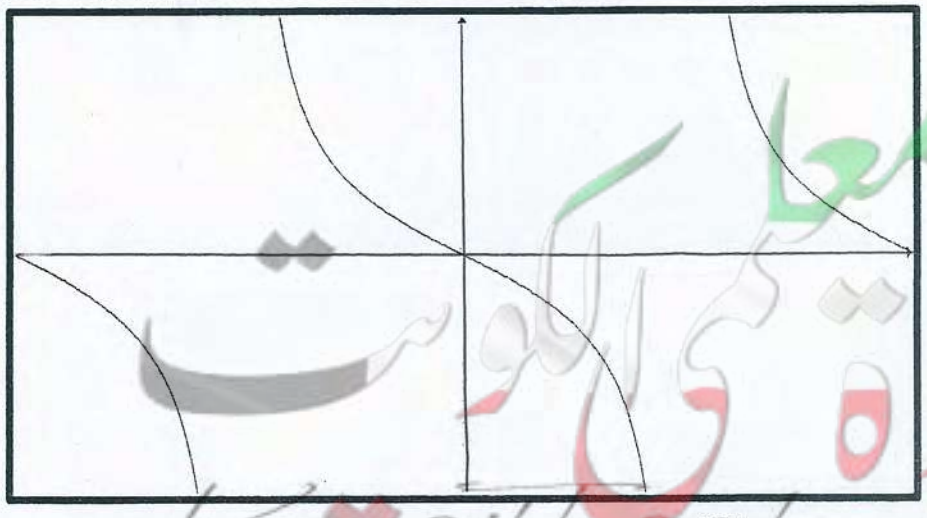
الحل

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف
$-3\tan x$	غير معرف	3	0	-3	غير معرف

الدالة دورية

الدورة $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

ربع الدورة $\frac{\pi}{4}$



معلم الكويت
صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

صـ٤٤

(1) صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين h ، f لكل مما يلي:

(a) $f(x) = \cos 2x$, $h(x) = \frac{5}{3}\cos 2x$

يمكنه الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بانكماش رأسي معامله $\frac{5}{3}$

(b) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$, $h(x) = -\frac{2}{3}\sin \frac{x}{3}$

يمكنه الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بانكماش رأسي معامله $\frac{2}{3}$ |a| = $\frac{2}{3}$ ∴ a سالبة ∴ يوجد انعكاس في محور السينات

(c) $f(x) = \sin x$, $h(x) = \sin 3x$

يمكنه الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بانكماش أفقي معامله $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{|b|}$

(d) $f(x) = \cos x$, $h(x) = \cos \frac{x}{5}$

يمكنه الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بتمدد أفقي معامله $\frac{1}{|b|}$ = $\frac{1}{\frac{1}{5}}$ = 5

(e) $f(x) = \sin x$, $h(x) = -\frac{1}{3}\sin(-2x)$

$h(x) = -\frac{1}{3}\sin(-2x)$

$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{3}\sin 2x$

يمكنه الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بانكماش رأسي معامله $\frac{1}{3}$ وانكماش أفقي معامله $\frac{1}{2}$

(f) $f(x) = \cos x$, $h(x) = 1.5\cos 4x$

يمكنه الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بتمدد رأسي معامله 1.5 وانكماش أفقي معامله $\frac{1}{4}$

(g) $f(x) = \cos 2x$, $h(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

$h(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow h(x) = \cos 2(x + \frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow h(x) = \cos(2(x - (-\frac{\pi}{6}))$

يمكنه الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بازاحة أفقية لليسار مقدار $\frac{\pi}{6}$

(h) $f(x) = \sin 3x$, $h(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$h(x) = \sin(3(x - \frac{\pi}{12}))$

يمكنه الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بازاحة أفقية لليمين مقدار $\frac{\pi}{12}$

(i) $f(x) = 0.3\cos 2x$, $h(x) = 0.3\cos 2x + 4$

يمكنه الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بازاحة رأسية لأعلى 4 وحدات

(j) $f(x) = 3\sin \frac{x}{2}$, $h(x) = 3\sin \frac{x}{2} - 1$

يمكنه الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بازاحة رأسية وحدة واحدة لأسفل

KuwaitTeacher.Com

ص ٤٢

(2) صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_1 = \cos x \ , \ y_2 = \cos 3x$
ثم ارسم دورتين من الدالة y_2

نكتفي بالحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = \cos 3x$ من التمثيل البياني للدالة $y_1 = \cos x$ بانكماش أفقي معامله $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{|3|} = \frac{1}{3}$

x_1	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y_1	1	0	-1	0	1
x_2	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
y_2	1	0	-1	0	1

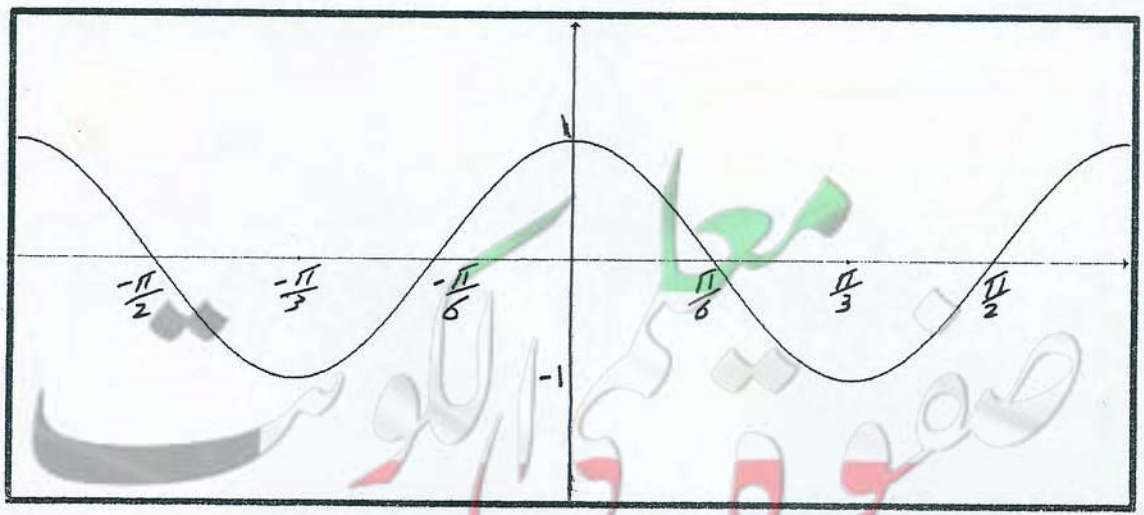
نضرب x في معامل الانكماش $\frac{1}{3}$

حيث الدالة $y_2 = \cos 3x$

سعة $|a| = |1| = 1$

دورة $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

ربع الدورة $\frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$



معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

(3) وضح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين باستخدام تحويلات الدوال المثلثية $y = \sin x$ أو $y = \cos x$، ثم أوجد سعة كل دالة ودورتها.

(a) $y = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

(b) $y = +3.5\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

صـ ٢٢

(a) $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \Rightarrow y = -2\sin\left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$

بالمقارنة مع $y = a\sin\left(b\left(x - \frac{h}{b}\right)\right) + k$

نجد أن $a = -2$ ، $b = 1$ ، $\frac{h}{b} = -\frac{\pi}{4}$ ، $k = 1$

يمكننا الحصول على التمثيل البياني للدالة y من التمثيل البياني للدالة $\sin x$ عن طريق التحويلات التالية بحسب الترتيب الآتي:

أولاً: إزاحة أفقية إلى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{4}$ للحصول على $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ثانياً: تمدد رأسي بمعامل $|a| = |-2| = 2$ للحصول على $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ثالثاً: انعكاس في محور السينات للحصول على $-2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

رابعاً: إزاحة رأسية وحدة لأعلى للحصول على $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

وتكون السعة: $|a| = |-2| = 2$

دورتها: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

(b) $y = 3.5\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

$\Rightarrow y = 3.5\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 1$

$y = a\sin\left(b\left(x - \frac{h}{b}\right)\right) + k$ بالمقارنة مع

نجد أن $a = 3.5$ ، $b = 2$ ، $\frac{h}{b} = \frac{\pi}{4}$ ، $k = -1$

يمكننا الحصول على التمثيل البياني للدالة y من التمثيل البياني للدالة $\sin x$ عن طريق التحويلات التالية

أولاً: انكماش أفقي بمعدل $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{2}$ للحصول على $\sin 2x$

ثانياً: إزاحة أفقية لليمين بمقدار $\frac{\pi}{4}$ للحصول على $\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

ثالثاً: تمدد رأسي بمعدل 3.5 ، $|3.5|$ ، $|a|$ للحصول على $3.5\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

رابعاً: إزاحة رأسية وحدة لأسفل للحصول على $y = 3.5\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 1$

وتكون السعة $|a| = |3.5| = 3.5$

دورتها $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

معلم الكويت
KuwaitTeacher.Com

قانون الجيب

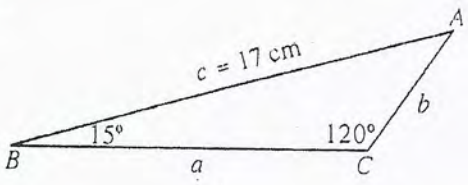
Law of Sine

تمرّن 8–3

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1)



الحل :

* $\alpha = 180^\circ - (120^\circ + 15^\circ) = 45^\circ$

* $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$

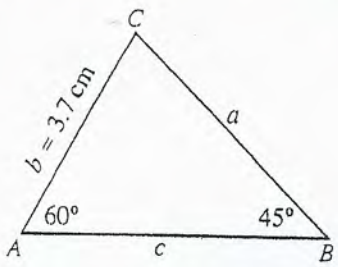
$\frac{\sin 45^\circ}{a} = \frac{\sin 120^\circ}{17}$

$a = \frac{17\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 13.9 \text{ cm}$

* $\frac{\sin 120^\circ}{17} = \frac{\sin 15^\circ}{b}$

$b = \frac{17\sin 15^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 5.1 \text{ cm}$

(2)



الحل :

* $\gamma = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$

* $\frac{\sin 60^\circ}{a} = \frac{\sin 45^\circ}{3.7}$

$a = \frac{3.7\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 4.5 \text{ cm}$

* $\frac{\sin 75^\circ}{c} = \frac{\sin 45^\circ}{3.7}$

$c = \frac{3.7\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 5.1 \text{ cm}$

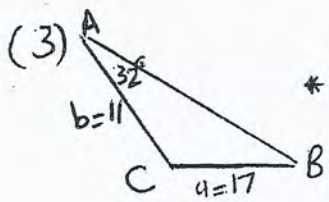
في التمرينين (4–3)، حلّ المثلث ABC:

(3) $m(\widehat{A}) = 32^\circ, a = 17 \text{ cm}, b = 11 \text{ cm}$

(4) $m(\widehat{A}) = 43^\circ, a = 32 \text{ cm}, b = 28 \text{ cm}$

الحل :

(3)



* $\frac{\sin 32^\circ}{17} = \frac{\sin\beta}{11}$

$\sin\beta = \frac{11\sin 32}{17} \approx 0.34$

$\therefore \beta_1 \approx 19.9^\circ$ or $\beta_2 = 180 - 19.9 = 160.1^\circ$

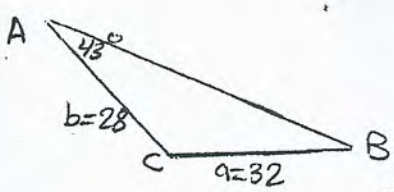
$\beta_1 + \alpha < 180^\circ$ مقبولة | $\beta_2 + \alpha > 180^\circ$ مرفوضة

$\therefore \gamma = 180^\circ - (32^\circ + 19.4^\circ) \approx 128^\circ$

$\therefore \frac{\sin 32}{17} = \frac{\sin 128}{c}$

$\therefore c = \frac{17\sin 128}{\sin 32} \approx 25.3 \text{ cm}$

(4)



$\frac{\sin 43^\circ}{32} = \frac{\sin\beta}{28}$

$\therefore \sin\beta = \frac{28\sin 43^\circ}{32} \approx 0.$

$\therefore \beta_1 = 36.2^\circ$ or $\beta_2 = 180^\circ - 36.2^\circ = 143.8$

$\therefore \beta_1 + \alpha < 180^\circ$ مقبولة | $\therefore \beta_2 + \alpha > 180^\circ$ مرفوضة

$\therefore \gamma = 180^\circ - (36.2^\circ + 43^\circ) = 100.8^\circ$

$\therefore \frac{\sin 100.8^\circ}{c} = \frac{\sin 43^\circ}{32}$

$\therefore c = \frac{32\sin 100.8^\circ}{\sin 43^\circ} \approx 46 \text{ cm}$

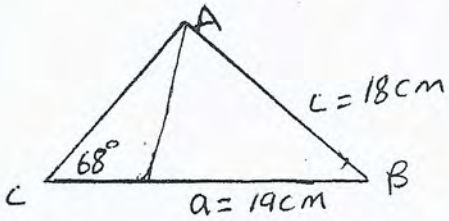
معلم الكويت
KuwaitTeacher.Com

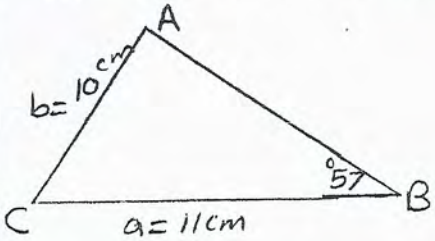
في التمرينين (6–5)، يمكن تكوين مثلثين باستخدام القياسات المعطاة، حلّ كلًّا منهما:

(5) $m(\widehat{C}) = 68°, a = 19\,\text{cm}, c = 18\,\text{cm}$

(6) $m(\widehat{B}) = 57°, a = 11\,\text{cm}, b = 10\,\text{cm}$

الحل:





$* \dfrac{\sin 68}{18} = \dfrac{\sin\alpha}{19}$

$\sin\alpha = \dfrac{19\sin 68}{18} \approx 0.98$

$\therefore \alpha_1 = 78.5°$ or $\alpha_2 = 101.5°$

$\alpha_1 + \gamma < 180°$ مقبوله

$\beta_1 = 180° - (68° + 78.5°) = 33.5°$

$\dfrac{\sin 68°}{18} = \dfrac{\sin 33.5°}{b_1}$

$\therefore b_1 = \dfrac{18\sin 33.5°}{\sin 68}$

$b_1 \approx 10.7\,\text{cm}$

$\alpha_2 + \gamma < 180°$ مقبوله

$\beta_2 = 180° - (101.5° + 68°)$

$\beta_2 = 10.5°$

$\dfrac{\sin 68°}{18} = \dfrac{\sin 10.5°}{b_2}$

$\therefore b_2 = \dfrac{18\sin 10.5°}{\sin 68°}$

$b_2 \approx 3.5\,\text{cm}$

$\dfrac{\sin\alpha}{11} = \dfrac{\sin 57°}{10}$

$\sin\alpha = \dfrac{11\sin 57}{10} \approx 0.92$

$\therefore \alpha_1 \approx 67$ or $\alpha_2 \approx 113°$

$\alpha_1 + \beta < 180°$ مقبوله

$\therefore \gamma_1 = 180° - (67° + 57°)$

$r_1 \approx 56°$

$\dfrac{\sin 57°}{10} = \dfrac{\sin 56°}{c_1}$

$\therefore c_1 = \dfrac{10\sin 56°}{\sin 57}$

$c_1 \approx 9.9\,\text{cm}$

$\alpha_2 + \beta < 180°$ مقبوله

$r_2 = 180° - (113° + 57°)$

$r_2 \approx 10°$

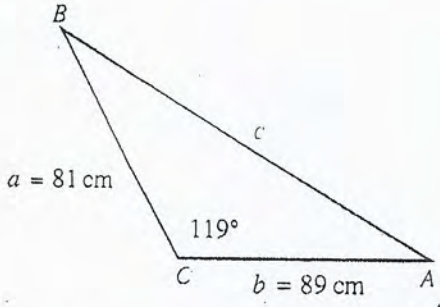
$\dfrac{\sin 57°}{10} = \dfrac{\sin 10°}{c_2}$

$c_2 = \dfrac{10\sin 10°}{\sin 57°}$

$c_2 \approx 2.1\,\text{cm}$

في التمرينين (8–7)، قرر ما إذا كان يمكن حلّ المثلث باستخدام قانون الجيب، ثم حلّه إذا كان ذلك ممكنًا. وإذا لم يكن ممكنًا فاشرح السبب.

(7)



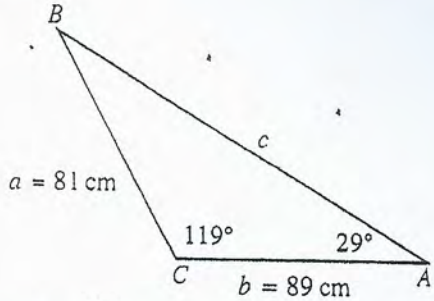
الحل:

لا يمكن حل المثلث باستخدام قانون الجيب

السبب:

جداع مقابل لزاويه منفرجه

(8)



الحل:

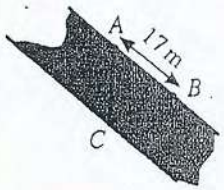
$B = 180° - (119° + 29°) = 32°$

$\dfrac{\sin 29°}{81} = \dfrac{\sin 119°}{C}$

$c = \dfrac{81\sin 119°}{\sin 29°} \approx 146\,\text{cm}$

KuwaitTeacher.Com

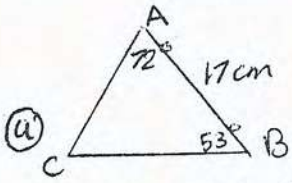
(9) **مسح جداول المياه:** تقع العلامتان A, B على الحافة نفسها لجدول مياه، تساوي المسافة بينهما 17 m وتقع علامة ثالثة C على الحافة المقابلة بحيث $m(\widehat{BAC}) = 72°$ ، $m(\widehat{ABC}) = 53°$



(a) أوجد المسافة بين A, C

(b) أوجد المسافة بين حافتي الجدول على افتراض أنهما متوازيتان.

الحل :



(a) $r = 180° - (72° + 53°) = 55°$

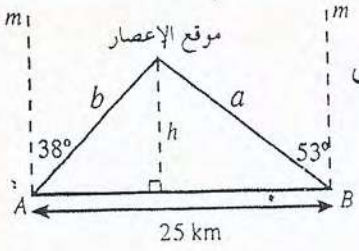
$$\frac{\sin 53^\circ}{AC} = \frac{\sin 55^\circ}{17}$$

$$AC = \frac{17 \sin 53^\circ}{\sin 55^\circ} \approx 16.6 \text{ cm}$$

(b) $$\sin 72^\circ = \frac{h}{16.6}$$

$$h = 16.6 \sin 72^\circ \approx 15.8 \text{ cm}$$

(10) **التوقّع بحالة الطقس:** وقف اثنان من مصلحة الأرصاد الجوية أحدهما في غرب الطريق عند النقطة A والآخر في شرق الطريق عند النقطة B، تفصل بينهما مسافة 25 km



رأى الواقف عند النقطة A إعصارًا في اتجاه 38° شرق الشمال ورأى الواقف عند النقطة B الإعصار نفسه في اتجاه 53° غرب الشمال.

(a) أوجد المسافة بين كل من الشخصين وموقع الإعصار.

(b) أوجد المسافة بين الإعصار والطريق.

الحل :

(a) * $\alpha = 90° - 38° = 52°$

$\beta = 90° - 53° = 37°$

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 91°$

* $$\frac{\sin 52^\circ}{a} = \frac{\sin 91^\circ}{25}$$

$$a = \frac{25 \sin 52^\circ}{\sin 91^\circ} \approx 19.7 \text{ Km}$$

* $$\frac{\sin 37^\circ}{b} = \frac{\sin 91^\circ}{25}$$

$$b = \frac{25 \sin 37^\circ}{\sin 91^\circ} \approx 15 \text{ Km}$$

(b) $$\sin 52^\circ = \frac{h}{15}$$

$$\therefore h = 15 \sin 52^\circ \approx 11.8 \text{ Km}$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

قانون جيب التمام

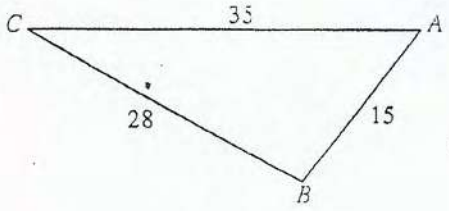
8-4

Law of Cosine

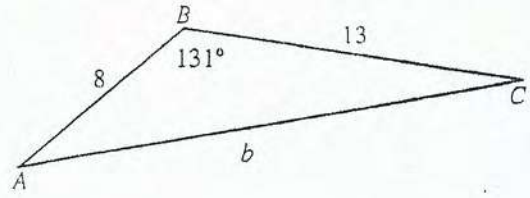
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1)



(2)



الحل :- نوجد قياسات الزوايا الثلاث باستخدام قانون جيب التمام

1

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(35)^2+(15)^2-(28)^2}{2\times 35\times 15}$$

$$\cos\alpha = \frac{111}{175} \Longrightarrow \therefore \alpha \approx 50.6^\circ$$

$$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$= \frac{(28)^2+(15)^2-(35)^2}{2\times 28\times 15}$$

$$\cos\beta = -\frac{9}{35} \Longrightarrow \beta \approx 104.9^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow \gamma \approx 24.5^\circ$$

KuwaitTeacher.Com

2

الحل :- نوجد b ، α ، γ

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$b^2 = (13)^2 + (8)^2 - 2\times13\times8\cos131^\circ$$

$$= 169 + 64 - 208\cos131^\circ$$

$$= 233 - 208\times-0.656$$

$$b^2 = \frac{46181}{125} = 369.4$$

$$b = 19.22 \text{ cm}$$

لإيجاد قياس γ ، α نستخدم قانون جيب التمام :-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{369.4 + 64 - 169}{2\times19.22\times8}$$

$$\cos\alpha = 0.8597$$

$$\alpha \approx 30.7^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

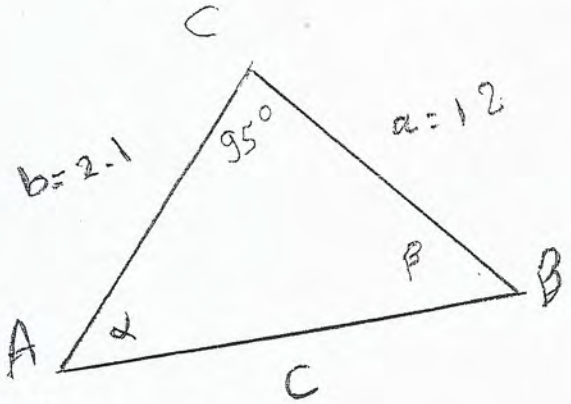
$$= \frac{169 + 369.4 - 64}{2\times13\times19.22}$$

$$\cos\gamma = 0.9493 \longrightarrow \gamma \approx 18.3^\circ$$

معلم الكويت
KuwaitTeacher.Com

في التمارين (8–3)، حلّ كل مثلث مما يلي:

(3) $a = 12, b = 21, m(\widehat{C}) = 95°$



$$C^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$= (12)^2 + (21)^2 - (2 \times 12 \times 21)\cos 95°$$

$$= 144 + 441 - 504\cos 95°$$

$$= 585 - (-43.9264)$$

$$= 628.9264$$

$$C \approx 25.0 \text{ cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{441 + 628.9264 - 144}{2 \times 21 \times 25}$$

$$\cos\alpha = -0.3161 \Longrightarrow \alpha \approx 28.6°$$

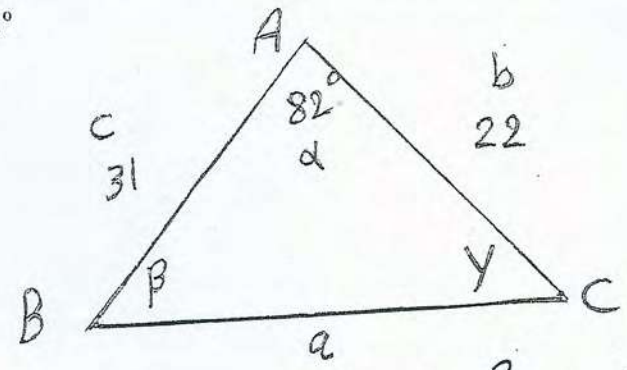
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(12)^2 + 628.9264 - 441}{2 \times 12 \times 25}$$

$$\cos\beta = 0.55321$$

$$\beta \approx 56.4°$$

معلمي الكويتي
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(4) $b = 22, c = 31, m(\widehat{A}) = 82°$



الحل :- نوجد a ، β ، γ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$= (22)^2 + (31)^2 - 2 \times 22 \times 31 \times \cos 82°$$
$$= 484 + 961 - 1364 \cos 82°$$
$$= 1445 - 189.832$$
$$a^2 = 1255.168$$
$$a = 35.4 \text{ cm}$$

لإيجاد قياس β ، γ نستخدم قانون جيب التمام :-

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$= \frac{1255.168 + 961 - 484}{2 \times 35.4 \times 31}$$
$$\cos\beta = 0.789$$
$$\beta \approx 38°$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$
$$\cos\gamma = \frac{1255.168 + 484 - 961}{2 \times 5.4 \times 22} = 0.499594$$
$$\gamma \approx 60°$$

معلم الكويت
صفوة الكويت
KuwaitTeacher.com

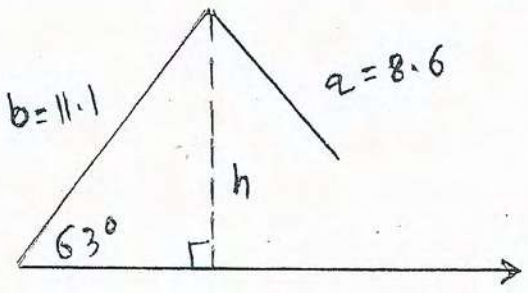
(5) $a = 1, b = 5, c = 4$

الحل :- لا يوجد مثلث لأن :-

$$a + c = 1 + 4$$
$$= 5$$
$$= b$$

(7) $m(\widehat{A}) = 63°, a = 8.6, b = 11.1$

الحل :-



$$h = b \sin \alpha$$
$$= 11.1 \times \sin 63°$$
$$h = 9.89 \text{ cm}$$

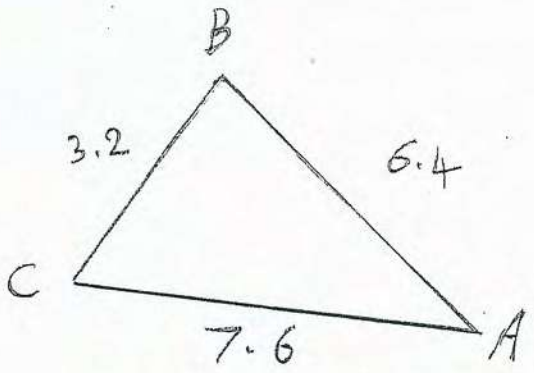
$$\because a = 8.6 < 9.89$$

$$\therefore a < h$$

∴ لا يوجد مثلث

معلمة الكويت
KuwaitTeacher.Com

(6) $a = 3.2, b = 7.6, c = 6.4$



الحل :- نوجد قياسات الزوايا الثلاث ؛
باستخدام قانون جيب التمام :-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(7.6)^2 + (6.4)^2 - (3.2)^2}{2 \times 7.6 \times 6.4}$$

$$\cos\alpha = \frac{553}{668} = 0.9095$$

$$\alpha \simeq 24.6^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{(3.2)^2 + (6.4)^2 - (7.6)^2}{2 \times 3.2 \times 6.4}$$

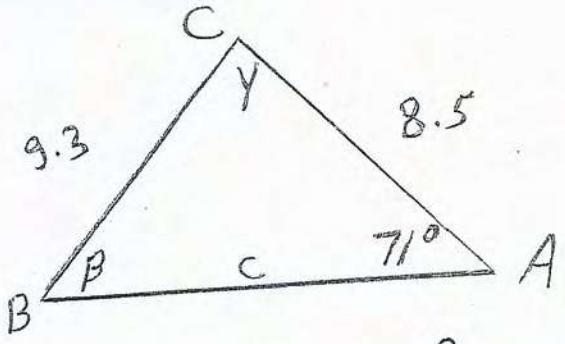
$$\cos\beta = -\frac{41}{256} \Longrightarrow \beta \approx 99.2^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(3.2)^2 + (7.6)^2 - (6.4)^2}{2 \times 3.2 \times 7.6}$$

$$\cos\gamma = \frac{169}{304} \Longrightarrow \gamma \approx 56.2^\circ$$

معلم الكويت KuwaitTeacher.com

(8) $m(\widehat{A}) = 71°, a = 9.3, b = 8.5$



الحل:- نوجد γ ، β ، c :-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$(9.3)^2 = (8.5)^2 + c^2 - 2 \times 8.5 \times c \times \cos 71^\circ$$

$$86.49 = 72.25 + c^2 - 5.53c$$

$$0 = c^2 - 5.53c - 14.24$$

$$c = \frac{5.53 \pm \sqrt{(-5.53)^2 + 4 \times 1 \times 14.24}}{2}$$

$c \simeq 7.443$ أو $c \simeq -1.913$ (مرفوضة)

∴ لدينا مثلث واحد :-

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$$

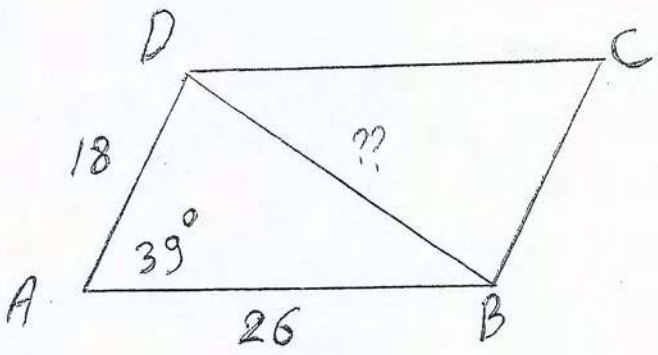
$$\cos\beta = \frac{(9.3)^2 + (7.443)^2 - (8.5)^2}{2 \times 9.3 \times 7.443}$$

$$\cos\beta = 0.503 \Longrightarrow \beta \approx 60^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Longrightarrow \gamma \approx 49^\circ$$

صفوف الكويت
KuwaitTeacher.Com

(9) **في الهندسة:** متوازي أضلاع يساوي طول ضلعيه المتجاورين 18 cm، 26 cm وقياس الزاوية بينهما 39°.
أوجد طول قطره الأصغر.



الحل :-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$(DB)^2 = (18)^2 + (26)^2 - 2 \times 18 \times 26 \times \cos 39^\circ$$

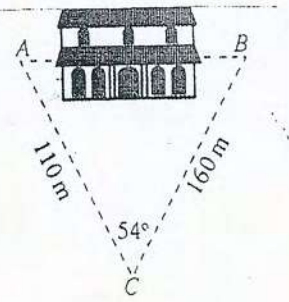
$$= 324 + 676 - 936 \cos 39^\circ$$

$$= 1000 - 727.4$$

$$(DB)^2 = \frac{1363}{5}$$

$$DB = 16.5 \text{ cm}.$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com



(10) **قياس المسافة بطريقة غير مباشرة:** أراد عادل أن يقيس المسافة بين نقطتين A وB في جهتين مختلفتين من مبنى وذلك من الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 110 m وعن B مسافة 160 m كما في الشكل المقابل.

إذا كان $m(\widehat{C}) = 54°$. فأوجد المسافة AB.

الحل :-

$$(AB)^2 = (Ac)^2 + (cB)^2 - 2(Ac)(cB)\cos C$$

$$= (110)^2 + (160)^2 - 2(110)(160)\cos 54°$$

$$= 12100 + 25600 - 35200 \cos 54°$$

$$= 37700 - 20690$$

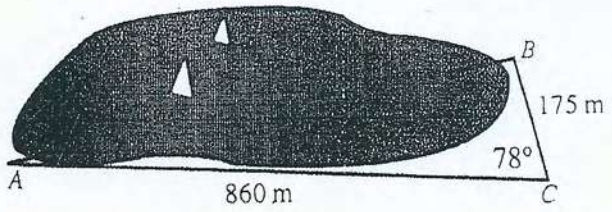
$$(AB)^2 = 17010$$

$$(AB) = 9\sqrt{210}$$

$$AB = 130.4 \text{ m}$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(11) **حسابات مسّاحي الأراضي:** أراد خالد أن يقيس المسافة من A إلى B في جهتين مختلفتين من البحيرة. فوقف في الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 860 m وعن B مسافة 175 m وقاس الزاوية C فوجد أن قياسها 78°، أوجد طول المسافة AB.



الحل :.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos Y$$

$$(AB)^2 = (Bc)^2 + (Ac)^2 - 2(Bc)(Ac)\cos C$$

$$= (175)^2 + (860)^2 - 2 \times 175 \times 860 \times \cos 78^\circ$$

$$= 30625 + 739600 - 301000 \cos 78^\circ$$

$$= 30625 + 739600 - 62581.4189$$

$$= 707643.5811$$

$$AB = 841.2155 \ m$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مساحة المثلث

Area of Triangle

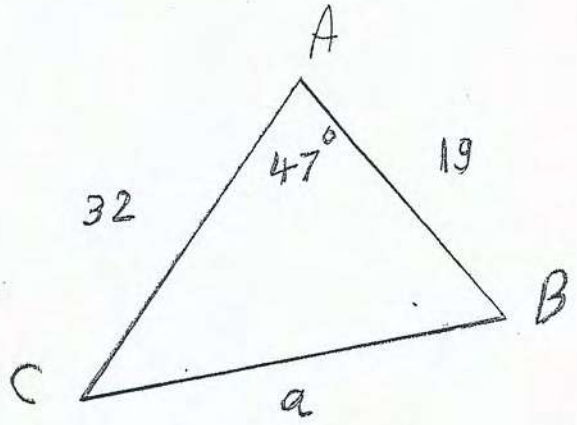
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين.

(1) $m(\hat{A}) = 47°$, $b = 32\,\text{cm}$, $c = 19\,\text{cm}$ (2) $a = 4\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$

الحل :-

①



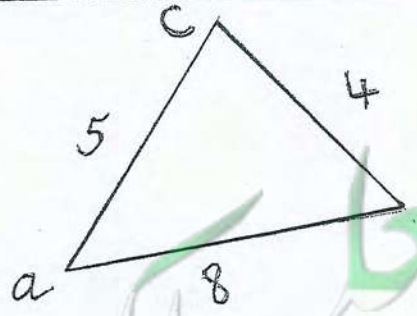
$$\text{Area} = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \times 32 \times 19 \times \sin 47°$$

$$= 304 \sin 47°$$

$$\text{Area} \approx 222.33 \text{ cm}^2$$

②



$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(4+5+8)$$

$$s = \frac{1}{2} \times 17 = 8.5 \text{ cm}$$

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8.5(8.5-4)(8.5-8)(8.5-8)}$$

$$= \frac{3\sqrt{119}}{4} \approx 8.181 \text{ cm}^2$$

موقع معلم الكويت
KuwaitTeacher.com

في التمارين (6–3)، استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه كالتالي. (الأطوال بالسنتيمتر).

(3) $a = 5 , b = 9 , c = 7$ (4) $a = 23 , b = 19 , c = 12$

الحل :-

③ $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$= \frac{1}{2}(5+9+7)$

$= \frac{1}{2} \times 21$

$S = 10.5 \text{ cm}$

$\text{Area} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$= \sqrt{10.5(10.5-5)(10.5-9)(10.5-7)}$

$= \sqrt{10.5 \times 5.5 \times 1.5 \times 3.5}$

$\text{Area} = \frac{21\sqrt{11}}{4} \approx 17.4 \text{ cm}^2$

④ $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$= \frac{1}{2}(23+19+12)$

$= \frac{1}{2}(54)$

$S = 27 \text{ cm}$

$\text{Area} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

$= \sqrt{27(27-23)(27-19)(27-12)}$

$= \sqrt{12960} = 36\sqrt{10} \approx 113.8419 \text{ cm}^2$

معلمون
KuwaitTeacher.com

(5) $a = 19.3$, $b = 22.5$, $c = 31$

(6) $a = 18.2$, $b = 17.1$, $c = 12.3$

الحل :-

(5) $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$= \frac{1}{2}(19.3 + 22.5 + 31)$

$= \frac{1}{2} \times 72.8$

$s = \frac{182}{5} = 36.4$ cm

$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{36.4(36.4-19.3)(36.4-22.5)(36.4-31)}$

$= \sqrt{46720.3464}$

$\text{Area} \approx 216.1488 \text{ cm}^2$

(6) $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$= \frac{1}{2}(18.2 + 17.1 + 12.3)$

$= \frac{1}{2} \times 47.6$

$s = \frac{119}{5} = 23.8$ cm

$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{23.8(23.8-18.2)(23.8-17.1)(23.8-12.3)}$

$\text{Area} \approx 101.337 \text{ cm}^2$

معلمة الكويت
KuwaitTeacher.Com

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (9–1)، استخدم المتطابقات الأساسية في تبسيط كل من المقادير التالية:

(1) $\csc x - \csc x \cos^2 x$

$= \csc x(1 - \cos^2 x)$

$= \frac{1}{\sin x} \cdot \sin^2 x$

$= \sin x$

(2) $\frac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$

$= \tan^2 x \cdot \frac{1}{\sec^2 x}$

$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x$

$= \sin^2 x$

(3) $\frac{1 + \tan^2 x}{\csc^2 x}$

$= \frac{\sec^2 x}{\csc^2 x}$

$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x$

$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

(4) $\cos x \csc x + \sin x \sec x$

$= \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$ «باستخدام متطابقتي المقلوب ونواتج القسمة»

$= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \csc x \cdot \sec x$

(5) $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x}$

$= \sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x$

$= \sin^2 x + \cos^2 x$ «متطابقة فيثاغورث»

$= 1$

(6) $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$

$= \frac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}$ «باستخدام متطابقتي المقلوب ونواتج القسمة»

$= \frac{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}$

$= \frac{(\cos x + \sin x)}{\cos x} \times \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \tan x$

KuwaitTeacher.Com

(7) $\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}$

$$= \frac{1+\sin x + 1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \frac{2}{1-\sin^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x} = 2\sec^2 x$$

«متطابقة مقلوب»

---

(8) $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1-\cos x}{\sin x}$

$$= \frac{\sin^2 x + (1-\cos x)^2}{(1-\cos x)\cdot \sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x}{(1-\cos x)\cdot \sin x}$$

«متطابقة فيثاغورث»

$$= \frac{1+1-2\cos x}{(1-\cos x)\cdot \sin x}$$

$$= \frac{2-2\cos x}{(1-\cos x)\cdot \sin x}$$

$$= \frac{2(1-\cos x)}{(1-\cos x)\cdot \sin x} = \frac{2}{\sin x} = 2\csc x$$

«متطابقة مقلوب»

---

(9) $\frac{\tan x \csc x}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\cos^2 x}$$

«متطابقة مقلوب»

$$= \frac{1}{\cos^3 x} = \sec^3 x$$

في التمارين (16–10)، بسّط المقادير إلى 1 أو 1–

(10) $\frac{1}{\cot^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}$

$$= \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x}{\cos^2 x} = -1$$

معلمي الكويت صفوق
KuwaitTeacher.Com

(11) $\frac{1}{\csc^2 x} + \frac{1}{\sec^2 x}$

$= \sin^2 x + \cos^2 x$

$= 1$

« متطابقة المقلوب »

متطابقة فيثاغورث

(12) $\frac{\tan x \times \cos x}{\sin x}$

$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x}{\sin x}$

$= \frac{\sin x}{\sin x} = 1$

باستخدام متطابقة القسمة

(13) $\cot(-x)\tan(-x)$

$= (-\cot(x)) \cdot (-\tan x)$

$= \cot x \cdot \tan x$

$= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1$

(14) $\sec^2(-x) - \tan^2 x$

$= (\sec x)^2 - (\tan^2 x)$

$= \sec^2 x - \tan^2 x$

$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$

« متطابقة المقلوب والقسمة »

« متطابقة فيثاغورث »

(15) $\sin^2(-x) + \cos^2(-x)$

$= (-\sin x)^2 + (\cos x)^2$

$= \sin^2 x + \cos^2 x$

$= 1$

« متطابقة فيثاغورث »

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(16) $\frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

„ باستخدام متطابقات فيثاغورث „

$= \frac{1 + \tan^2 x - \tan^2 x}{1}$

$= 1$

في التمارين (19–17)، استخدم التحليل إلى عوامل في كل مما يلي:

(17) $\sin^2 c + \sin^2 c \tan^2 c$

$= \sin^2 c (1 + \tan^2 c)$

$= \sin^2 c \cdot \sec^2 c$

$= \frac{\sin^2 c}{\cos^2 c} = \tan^2 c$

---

(18) $1 - 2\sin x + (1 - \cos^2 x)$

„ من متطابقة فيثاغورث „

$= 1 - 2\sin x + \sin^2 x$

$= \sin^2 x - 2\sin x + 1$

$= (\sin x - 1)^2$

---

(19) $\cos x - 2\sin^2 x + 1$

„ من متطابقة فيثاغورث „

$= \cos x - 2(1 - \cos^2 x) + 1$

$= \cos x - 2 + 2\cos^2 x + 1$

„ بالتحليل „

$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$

$= (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x)=\dfrac{\sin^2 x+\tan^2 x+\cos^2 x}{\sec x}$ هي: $E(x)=\sec x$

(b)

(2) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x)=(\sec^2 x+\csc^2 x)-(\tan^2 x+\cot^2 x)$ هي: $E(x)=2$

(b)

(3) المقدار: $E(x)=\dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}$ هو: $E(x)=1+\sin x$

(a)

(4) المقدار: $E(x)=\dfrac{(\cos x+\sin x)^2-2\sin x\cos x}{\cos^2 x}$ هو: $E(x)=\sec^2 x$

(b)

(5) المقدار: $E(x)=\csc x-\cos x\cot x$ هو: $E(x)=\cos x$

(a)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) المقدار: $E(x)=\dfrac{\tan^2 x}{1-\sec^2 x}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x)=$

(a) 1 (b) -1

(c) $\tan^4 x$ (d) $-\tan^4 x$

(7) المقدار: $E(x)=\dfrac{1}{\sec x+1}-\dfrac{1}{\sec x-1}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x)=$

(a) $2\tan^2 x$ (b) $-2\tan^2 x$

(c) $2\cot^2 x$ (d) $-2\cot^2 x$

(8) تحليل المقدار: $E(x)=\cos^2 x+\dfrac{3}{\sec x}+2$ إلى عوامل هو: $E(x)=$

(a) $(1-\cos x)(2+\cos x)$ (b) $(1+\cos x)(2+\cos x)$

(c) $(1+\cos x)(2-\cos x)$ (d) $(1-\cos x)(2-\cos x)$

(9) الدالة $f(x)=\sqrt{\sec^2 x-1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x)=$

(a) $\tan x$ (b) $-\tan x$

(c) $\cot x$ (d) $|\tan x|$

(10) الدالة $f(x)=\sqrt{\csc^2 x-1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x)=$

(a) $|\cot x|$ (b) $\tan x$

(c) $-\cot x$ (d) $\cot x$

معلمة الكويت
صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

تمرّنْ
9–2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (14–1)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(1) $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

$\cos x(\tan x + \sin x \cot x) = \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \cos x\right)$

$= \cos x \times \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x \times \cos x = \sin x + \cos^2 x$

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

(2) $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

$(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \sin x \times \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x \times \frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$= (\sin x) \times \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \sin x\right)$

$= \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \times \sin x = \cos x + \sin^2 x$

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

(3) $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$

$(1 - \tan x)^2 = 1 - 2\tan x + \tan^2 x$

$= (1 + \tan^2 x) - 2\tan x$

$= \sec^2 x - 2\tan x$

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

(4) $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$

$= \frac{1}{\sin x} \times \frac{1}{\cos x} = \csc x \times \sec x$

$= \sec x \csc x$

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

معلم الكويت
KuwaitTeacher.Com

(5) $\tan x + \cot x + 2 = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

$$\tan x + \cot x + 2 = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 2$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(6) $\dfrac{1}{1-\cos x} + \dfrac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{(1+\cos x) + (1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \frac{2}{1-\cos^2 x} = \frac{2}{\sin^2 x} = 2\csc^2 x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(7) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{1-\cos x}{\cos x}$

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \tan^2 x \div (\sec x + 1) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \div \left(\frac{1}{\cos x} + 1\right)$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \div \left(\frac{1+\cos x}{\cos x}\right) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} \times \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos x \cdot \cos x} \times \frac{\cos x}{(1+\cos x)}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\cos x}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

معلمة الكويت
KuwaitTeacher.Com

(8) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$

$$\cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \cos^2 x \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cos^2 x \cot^2 x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(9) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 1 \times (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(10) $\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sec x + 1}{\tan x}$

$$\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\tan x}{\sec x - 1} \times \frac{\sec x + 1}{\sec x + 1}$$

$$= \frac{\tan x \times (\sec x + 1)}{\sec^2 x - 1} = \frac{\tan x (\sec x + 1)}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{\sec x + 1}{\tan x}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(11) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{2\sin^2 x - 1}{1 + 2\sin x \cos x}$

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \times \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin^2 x - (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - 1 + \sin^2 x}{1 + 2 \sin x \cos x} = \frac{2\sin^2 x - 1}{1 + 2 \sin x \cos x}$$

Kuwaitedu.com

(12) $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2(1+\cos x)}{\sin x}$

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)\sin x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\sin x}=\frac{1-\cos^2 x+1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\sin x}$$

$$=\frac{2-2\cos^2 x}{(1-\cos x)\sin x}=\frac{2(1-\cos^2 x)}{(1-\cos x)\sin x}$$

$$=\frac{2(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)\sin x}=\frac{2(1+\cos x)}{\sin x}$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

(13) $\sin^2 x\cos^3 x=(\sin^2 x-\sin^4 x)(\cos x)$

$$\sin^2 x\cos^3 x=\sin^2 x\cos^2 x\cdot\cos x$$

$$=\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)\cdot\cos x$$

$$=(\sin^2 x-\sin^4 x)(\cos x)$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

(14) $\sin^3 x\cos^3 x=(\sin^3 x-\sin^5 x)(\cos x)$

$$\sin^3 x\cos^3 x=\sin^3 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x$$

$$=\sin^3 x\,(1-\sin^2 x)\cdot\cos x$$

$$=(\sin^3 x-\sin^5 x)(\cos x)$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المتطابقة: $3\sin x = \sin(3x)$ صحيحة .

(a) (b)

(2) المتطابقة: $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ صحيحة .

(a) (b)

(3) المتطابقة: $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$ صحيحة.

(a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للمقدار: $\sqrt{\frac{\csc x}{\sin^3 x} - \frac{\cot x}{\sin^3 x}}$ هي: $\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

(a) (b)

في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$ (b) $\sin x \sec^2 x$

(c) $\cos x \sec^2 x$ (d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4\sin x \cos x$ (b) 2

(c) -2 (d) $4\sin x \cos x$

(7) المقدار: $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$ (b) $\sec x \sin x$

(c) $\sec x \cos x$ (d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$ (b) $\cot^2 x$

(c) $\tan^2 x \sin^2 x$ (d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

(a) 1 (b) -1

(c) 2 (d) -2

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$ (b) $-\tan x$

(c) $\tan x \sin x$ (d) $\tan x$

معلمة الكويت
صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

تمرّن
9–3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(1) $\sin x = \frac{-1}{2}$

الحل

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\sin\alpha = |\sin x| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\alpha = \sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$

$\because \sin x < 0$ $\therefore x$ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما x تقع في الربع الرابع:

$x = (2\pi - \frac{\pi}{6}) + 2K\pi$ ، $K \in Z$

$\therefore x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$

عندما x تقع في الربع الثالث:

$x = (\pi + \frac{\pi}{6}) + 2K\pi$ ، $K \in Z$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2K\pi$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{7\pi}{6} + 2K\pi$ أو $x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$ ، $K \in Z$

---

(2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\cos\alpha = |\cos x| = |\frac{\sqrt{3}}{2}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$ $\because \cos x > 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما x تقع في الربع الرابع:

$x = (2\pi - \frac{\pi}{6}) + 2K\pi$ ، $K \in Z$

$x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$

عندما x تقع في الربع الأول:

$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$ ، $K \in Z$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

Kuwait Teacher.Com

(3) $2\cos x = -1$

الحل

$2\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\therefore \cos\alpha = |\cos x| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$ $\quad \because \cos x < 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث .

عندما x تقع في الربع الثاني	عندما x تقع في الربع الثالث .
$x = (\pi - \frac{\pi}{3}) + 2K\pi$ ، $K \in Z$	$x = (\pi + \frac{\pi}{3}) + 2K\pi$ ، $K \in Z$
$x = \frac{2\pi}{3} + 2K\pi$	$x = \frac{4\pi}{3} + 2K\pi$

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \frac{2\pi}{3} + 2K\pi$ (أو) $x = \frac{4\pi}{3} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

---

(4) $\sqrt{3}\tan x = 1$

الحل

$\sqrt{3}\tan x = 1$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\tan\alpha = |\tan x| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$ $\quad \because \tan x > 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث .

وكل الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\therefore \tan(\pi + x) = \tan x$

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \frac{\pi}{6} + K\pi$

حيث $K \in Z$

معلمة الكويت
صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

(5) $2\cos x\sin x-\cos x=0$

الحل

$2\cos x\sin x-\cos x=0$

$\cos x(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0$ أو $2\sin x-1=0$

$2\sin x=1$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$\sin x=\frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\sin\alpha=|\sin x|=|\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$

$\because \sin x>0$

$\therefore x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما x تقع في الربع الأول: $x=\frac{\pi}{6}+2K\pi$ و $K\in Z$

عندما x تقع في الربع الثاني: $x=(\pi-\frac{\pi}{6})+2K\pi$, $K\in Z$

$x=\frac{5\pi}{6}+2K\pi$

$\cos x=0$

$\therefore x$ زاوية ربعية

$x=\frac{\pi}{2}$ أو $x=\frac{3\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}+2K\pi$ و $K\in Z$

$x=\frac{3\pi}{2}+2K\pi$, $K\in Z$

$\therefore$ حل المعادلة: $x=\frac{\pi}{2}+2K\pi$ أو $x=\frac{3\pi}{2}+2K\pi$ أو $x=\frac{\pi}{6}+2K\pi$ أو $x=\frac{5\pi}{6}+2K\pi$

حيث $K\in Z$

---

(6) $\tan x\sin^2 x=\tan x$

الحل

$\tan x\sin^2 x=\tan x \Rightarrow \tan x\sin^2 x-\tan x=0$

$\tan x(\sin^2 x-1)=0$

$\tan x(\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$\tan x=0$ أو $\sin x=1$ أو $\sin x=-1$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\tan\alpha=|\tan x|=0$

$\therefore \alpha=0$

$\tan(\pi+x)=\tan x$

لدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\therefore x=K\pi$, $K\in Z$

$\sin x=1$

$\therefore x$ زاوية ربعية

$x=\frac{\pi}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}+2K\pi$, $K\in Z$

$\sin x=-1$

$\therefore x$ زاوية ربعية

$x=\frac{3\pi}{2}$

$x=\frac{3\pi}{2}+2K\pi$, $K\in Z$

$\therefore$ حل المعادلة: $x=K\pi$ أو $x=\frac{\pi}{2}+2K\pi$ أو $x=\frac{3\pi}{2}+2K\pi$

حيث $K\in Z$

صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

(7) $\tan^2 x = 3$

الحل

$\tan^2 x = 3$

$\tan^2 x - 3 = 0$

$(\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3}) = 0$

$\tan x = \sqrt{3}$ أو $\tan x = -\sqrt{3}$

$\tan x = \sqrt{3}$

نفرض أن α_1 هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\tan \alpha_1 = |\tan x| = |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$

$\because \tan x > 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

$\because$ الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\tan(\pi + x) = \tan x$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \; , k \in Z$

أو

$\tan x = -\sqrt{3}$

نفرض أن α_2 هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\tan \alpha_2 = |\tan x| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$

$\because \tan x < 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الثاني أو في الربع الرابع

$\because$ الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\therefore \tan(\pi - x) = \tan(2\pi - x)$

$\therefore x = (\pi - \frac{\pi}{3}) + k\pi \; , k \in Z$

$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ حيث $k \in Z$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(8) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

الحل

$4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

$(2\cos x - 1)^2 = 0$

$2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\cos\alpha = |\cos x| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ $\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because \cos x > 0$ $\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما x تقع في الربع الأول: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ، $k \in Z$

عندما x تقع في الربع الرابع: $x = (2\pi - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi$ ، $k \in Z$

$x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

حيث $k \in Z$

في التمارين (9–11)، أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$

(9) $\sin 2x = 1$

الحل

$\sin 2x = 1$

$0 \leq x < 2\pi$

$0 \leq 2x < 4\pi$

$\therefore 2x$ تقع في دورتين

$\because \sin 2x = 1$

$\therefore 2x$ زاوية ربعية

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$k = 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi)$

$k = 1$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} + \pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi)$

$k = 2$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{9\pi}{4} \notin [0, 2\pi)$

$\therefore$ حل المعادلة:

$x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{5\pi}{4}$

معلم الكويت
KuwaitTeacher.Com

(10) $2\cos 3x = 1$

الحل

$0 \leq x < 2\pi$

$0 \leq 3x < 6\pi$

$\therefore 3x$ تقع في 3 دورات

$2\cos 3x = 1$

$\therefore \cos 3x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية $3x$

$\cos\alpha = |\cos 3x| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because \cos 3x > 0$ $\therefore 3x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما $3x$ تقع في الربع الأول :

$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi}$

$k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9}$ ، $\frac{\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi = \frac{7\pi}{9}$ ، $\frac{7\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$k=2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}(2\pi) = \frac{13\pi}{9}$ ، $\frac{13\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$k=3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}(3\pi) = \frac{19\pi}{9}$ ، $\frac{19\pi}{9} \notin [0, 2\pi)$

عندما $3x$ تقع في الربع الرابع :

$3x = (2\pi - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi \Rightarrow 3x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

$\boxed{x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi}$

$k=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9}$ ، $\frac{5\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$k=1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{9}$ ، $\frac{11\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$k=2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}(2\pi) = \frac{17\pi}{9}$ ، $\frac{17\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$k=3 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}(3\pi) = \frac{23}{9}\pi$ ، $\frac{23\pi}{9} \notin [0, 2\pi)$

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \frac{\pi}{9}$ ، $x = \frac{7\pi}{9}$ ، $x = \frac{13\pi}{9}$

أو $x = \frac{5\pi}{9}$ ، $\frac{11\pi}{9}$ ، $\frac{17\pi}{9}$

KuwaitTeacher.Com

(11) $\tan 2x = 1$

الحل

$0 \le x < 2\pi$

$0 \le 2\pi < 4\pi$

$\therefore 2x$ تقع في دورتين

$\tan 2x = 1$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية $2x$

$\tan\alpha = |\tan 2x| = |1| = 1 \implies \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\because \tan 2x > 0$ $\therefore 2x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

$\therefore$ الدالة $\tan 2x$ دالة دورية ودورها π

$\boxed{\tan 2x = \tan(2x+\pi)}$

$2x = \frac{\pi}{4} + K\pi \implies \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}K\pi}$

$K=0 \implies x = \frac{\pi}{8}$ ، $\frac{\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=1 \implies x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$ ، $\frac{5\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=2 \implies x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$ ، $\frac{9\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=3 \implies x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(3\pi) = \frac{13\pi}{8}$ ، $\frac{13\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=4 \implies x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(4\pi) = \frac{17\pi}{8}$ ، $\frac{17\pi}{8} \notin [0, 2\pi)$

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \frac{\pi}{8}$ ، $x = \frac{5\pi}{8}$ ، $x = \frac{9\pi}{8}$ ، $x = \frac{13\pi}{8}$

في التمارين (12–14)، حلّ المعادلات التالية:

(12) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$

الحل

$\sin^2 x - 2\sin x = 0$

$\sin x(\sin x - 2) = 0$

$\sin x = 0$ أو $\sin x = 2$

$\sin x = 0$

$\therefore x$ زاوية ربعية .

$x = 0$ أو $x = \pi$

$x = 2K\pi$ ، $K \in Z$

أو $x = \pi + 2K\pi$ ، $K \in Z$

أو

$\sin x = 2$

$y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$2 \notin [-1, 1]$

$\therefore \sin x = 2$ ليس لها حل

$\therefore$ حل المعادلة

$x = 2K\pi$ ، $K \in Z$

أو $x = \pi + 2\pi\pi$

Kuwait Teacher.Com

(13) $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

الحل

$2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ أو $\sin x + 2 = 0$

$2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = -2$

$\sin x = -2$

$y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$-2 \notin [-1, 1]$

$\sin x = -2$ ليس لها حل

أو $\sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\sin\alpha = |\sin x| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \because \sin x > 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما x تقع في الربع الأول

$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$ ، $K \in Z$

عندما x تقع في الربع الثاني

$x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2K\pi$ ، $K \in Z$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$

أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$ حيث $K \in Z$

(14) $\tan^2 x \cos x + 5\cos x = 0$

الحل

$\tan^2 x \cos x + 5\cos x = 0$

$\cos x(\tan^2 x + 5) = 0$

$\cos x = 0$ أو $\tan^2 x + 5 = 0$

$\tan^2 x = -5$

أو $\tan^2 x = -5$ ليس لها حل

$\cos x = 0$

$\therefore x$ زاوية ربعية

$x = \frac{\pi}{2}$ أو $x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ ، $K \in Z$

أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$ ، $K \in Z$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$ حيث $K \in Z$

معلم الكويت
صفوة الكويت
Kuwait Teacher Qatar

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (a) (b)

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ (a) (b)

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول (b) الأول أو الثالث

(c) الثالث (d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$

(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x \cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

(9) عدد حلول المعادلة: $2\cos 4x = 1$ حيث $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right)$ هو:

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

(10) حلول المعادلة: $3\tan 2y = \sqrt{3}$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(b) $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(c) $\frac{7\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$، $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$، حيث k عدد صحيح.

(d) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(11) مجموعة حل المعادلة $3\tan(3x) = \sqrt{3}$ على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هي:

(a) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}\right\}$ (b) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$ (c) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right\}$ (d) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

معا من أجل الكويت
Kuwaitteacher.com

تمرّنْ
9–4

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3–1)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(1) $\sin 15°$ (2) $\tan 135°$ (3) $\cos 75°$

[1] $\sin 15^\circ$

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

$\therefore \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

[2] $\tan 135^\circ$

$135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$

$\therefore \tan 135^\circ = \frac{\tan 180^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 180^\circ \tan 45^\circ}$

$= \frac{0 - 1}{1 + 0}$

$= -1$

صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

[3] $\cos 75^\circ$

$75 = 30^\circ + 45^\circ$

$\therefore \cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ)$

$= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

---

(4) إذا كان $\sin\gamma = \frac{4}{5}$ ، $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-8}{17}$ ، $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

(a) أوجد: $\sin(\beta + \gamma)$

(b) أوجد: $\cos(\beta - \gamma)$

(c) أوجد: $\tan(\gamma + \beta)$

بالشكل

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$\sin^2\beta + \left(\frac{-8}{17}\right)^2 = 1$

$\sin^2\beta = \frac{225}{289}$

$\sin\beta = \pm\frac{15}{17}$

$\because \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

$\therefore \sin\beta = \frac{15}{17}$

$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$

$\therefore \cos^2\gamma = \frac{9}{25}$

$\cos\gamma = \pm\frac{3}{5}$

$\because 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos\gamma = \frac{3}{5}$

[a] $\sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$

$= \frac{15}{17} \times \frac{3}{5} + \frac{-8}{17} \times \frac{4}{5} = \frac{13}{85}$

KuwaitTeacher.Com

[b] $\cos(\beta-\gamma) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$

$= \frac{-8}{17} \times \frac{3}{5} + \frac{15}{17} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{36}{85}$

[c] $\tan(\gamma+\beta) = \frac{\tan\gamma + \tan\beta}{1 - \tan\gamma\tan\beta}$

$= \frac{4/3 + -15/8}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{-15}{8}}$

$= \frac{-13}{84}$

$\tan\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$

$= \frac{4}{3}$

$\tan\beta = \frac{-15}{8}$

في التمارين (10–5)، اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أوظل الزاوية.

(5) $\sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ$

(6) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{5}$

(7) $\frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ}$

(8) $\cos\frac{\pi}{7}\cos x + \sin\frac{\pi}{7}\sin x$

(9) $\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x$

(10) $\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y\tan 3x}$

[5] $\sin 42^\circ\cos 17^\circ - \cos 42^\circ\sin 17^\circ$

$= \sin(42^\circ - 17^\circ) = \sin 25^\circ$

[6] $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{5}$

$= \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{7\pi}{10}$

[7] $\frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ} = \tan(19^\circ + 47^\circ) = \tan 66^\circ$

معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

(8) $\cos\frac{\pi}{7}\cos x + \sin\frac{\pi}{7}\sin x$

$= \cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right)$

(9) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

$= \sin(3x - x) = \sin 2x$

(10) $\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x} = \tan(2y + 3x)$

(11) اختصر: $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

$= \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} =$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(a) (b)

(2) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(a) (b)

(3) $\cos(h + \frac{\pi}{2}) = -\cos h$

(a) (b)

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12} + \tan^2\frac{5\pi}{12} = 14$

(a) (b)

KuwaitTeacher.Com

في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ (b) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

(c) $2+\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ (b) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $1+\tan h$ (b) $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

(c) $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ (d) $1-\tan h$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ (b) $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

(9) $\cos 94^\circ\cos 18^\circ+\sin 94^\circ\sin 18^\circ$ تساوي:

(a) $\cos 112^\circ$ (b) $\cos 76^\circ$

(c) $\sin 112^\circ$ (d) $\sin 76^\circ$

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

(a) $\cos\frac{4\pi}{21}$ (b) $\sin\frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos\frac{10\pi}{21}$ (d) $\sin\frac{10\pi}{21}$

(11) $\frac{\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

(a) $\tan\frac{2\pi}{15}$ (b) $\tan\frac{8\pi}{15}$

(c) $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$ (d) $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$

معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

تمرّنْ
9–5

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

(1) $\sin 2x + \cos x$

(2) $\sin 2x + \cos 2x$

(3) $\cos 3x$

(4) $\cos 4x$

(1) $\sin 2x + \cos x = 2\sin x \cos x + \cos x$
$= \cos x\,(2\sin x + 1)$

---

(2) $\sin 2x + \cos 2x$
$= 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1$
$= 2\cos x\,(\sin x + \cos x) - 1$

---

(3) $\cos 3x$
$= \cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$
$= \cos x\,(2\cos^2 x - 1) - \sin x\,(2\sin x \cos x)$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$
$= 4\cos^3 x - 3\cos x$

معلمة الكويت
صوت الكويت
KuwaitTeacher.Com

(4) $\cos 4x = \cos(2(2x))$

$= 1 - 2\sin^2 2x$

$= 1 - 2(2\sin x \cos x)^2$

$= 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

$= 1 - 8\sin^2 x(1 - \sin^2 x)$

$= 1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x$

في التمارين (7–5)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(5) $2\csc 2x = \csc^2 x \tan x$

(6) $\sin 3x = (\sin x)(4\cos^2 x - 1)$

(7) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

الحل :-

(5) $2\csc 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

$= \dfrac{2}{2\sin x \cos x}$

$= \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

$\csc^2 x \tan x$

$= \dfrac{\tan x}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{\sin x}{\sin^2 x \cos x} = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

∴ الطرفان متساويان

حل آخر :-

$2\csc 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

$= \dfrac{2}{2\sin x \cos x}$

$= \dfrac{1}{\sin x \cos x} \times \dfrac{\sin x}{\sin x}$; $\sin x \neq 0$

$= \dfrac{1}{\sin^2 x} \times \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= \csc^2 x \cdot \tan x$

∴ الطرفان متساويان

(6) $\sin 3x = \sin(x + 2x)$

$= \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$

$= \sin x(2\cos^2 x - 1) + \cos x(2\sin x \cos x)$

$= 2\sin x \cos^2 x - \sin x + 2\sin x \cos^2 x$

معا
KuwaitTeacher.Com

$= 4\sin x\cos^2 x - \sin x$

$= \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$

(7) $\cos 4x = \cos 2(2x)$

$= 1 - 2\sin^2 2x$

$= 1 - 2(2\sin x\cos x)^2$

$= 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

في التمارين (10–8)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

(8) $\sin 15°$

(9) $\tan 195°$

(10) $\cos 75°$

(8) $\sin 15°$

$= \sin\left(\frac{30}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

الحل :-

$\because 15°$ تقع في الربع الأول

$\because \sin 15 > 0$

$\simeq 0.2588$

(9) $\tan 195°$

$= \tan\left(\frac{390}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 390}{1+\cos 390}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30}{1+\cos 30}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \simeq \pm 0.2679$

$\because 195°$ تقع في الربع الثالث

$\tan 195° > 0$ $\because$

$= 0.2679$

(10) $\cos 75°$

$= \cos\frac{150}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 150}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$\simeq \pm 0.2588$

$\because 75°$ تقع في الربع الأول

$= 0.2588$

KuwaitTeacher.Com

(11) اختصر كلًا من التعابير التالية:

(a) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ (b) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ (c) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

a) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{1+2\cos^2 x-1} = \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$:الحل

(b) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$

$\because \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$

$\because \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$\therefore \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$

(C) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$\because \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$\therefore 2\cos^2\frac{x}{2} = 1+\cos x$

$\because \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$\therefore 2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$

بالتعويض

$\therefore \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \tan^2\frac{x}{2}$

حل آخر:-

$\because \tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$\therefore \tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(12) إذا كانت $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\sin x = -\frac{12}{13}$ فأوجد $\sin\frac{x}{2}$

الحل :- متطابقة فيثاغورث

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{144}{169}$$

$$= \frac{25}{169}$$

$$\therefore \cos x = \pm\frac{5}{13} \qquad \because \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

$$\therefore \cos x = \frac{5}{13}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}}$$

$$= \pm 0.5547$$

$$\therefore \sin\frac{x}{2} = 0.5547$$

$270 < x < 360$

$135 < \frac{x}{2} < 180$

$\therefore \frac{x}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\therefore \sin\frac{x}{2} > 0$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ — (a) ✓ (b)

(2) $\sin 4x = -4\cos x \sin^3 x + 4\cos^3 x \sin x$ — (a) ✓ (b)

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ — (a) ✓ (b)

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ — (a) ✓ (b)

(5) $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$ — (a) ✓ (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\sin 3x + \cos 2x$ تساوي:

(a) $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

(b) $3\cos^2 x \sin x - \sin^2 x + \cos^2 x$

(c) ✓ $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x - \sin^2 x + \cos^2 x$

(d) $3\sin^2 x \cos x - \sin^3 x + \cos^2 x$

(7) $2\cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1+\cos x}{2}$

(b) ✓ $1+\cos x$

(c) $1+\cos 2x$

(d) $\frac{1-\cos 2x}{2}$

(8) $\sin 3x$ تساوي:

(a) $\sin^3 x + 3\cos^2 x \sin x$

(b) $3\sin x - \sin^3 x$

(c) $(3-2\sin^2 x)(\sin x)$

(d) ✓ $3\sin x - 4\sin^3 x$

(9) باستخدام متطابقات نصف الزاوية نجد أن $\cos \frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

(b) $\sqrt{2}-1$

(c) ✓ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

(10) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$

(b) $\frac{-2}{5}$

(c) ✓ $\frac{-3}{5}$

(d) $\frac{3}{5}$

KuwaitTeacher.Com

اختبار الوحدة التاسعة

في التمارين (3–1)، حوّل المقادير إلى sin وcos. اكتب إجابتك على صورة كسر واحد.

(1) $\tan x + \cot x$

(2) $\sin x \cot x - \cos x \tan x$

(3) $\dfrac{\sec y}{\cos y} - \dfrac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

1) $\tan x + \cot x$

$= \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$= \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

2) $\sin x \cot x - \cos x \tan x$

$= \sin x \dfrac{\cos x}{\sin x} - \cos x \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= \cos x - \sin x$

3) $\dfrac{\sec y}{\cos y} - \dfrac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

$= \dfrac{1}{\cos^2 y} - \dfrac{\sin^2 y}{\cos^2 y}$

$= \dfrac{1 - \sin^2 y}{\cos^2 y}$

$= \dfrac{\cos^2 y}{\cos^2 y} = 1$

معلمي الكويت صفوة
KuwaitTeacher.Com

في التمارين (8–4)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(4) $\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}=2\sec x$

(5) $\frac{1-3\cos x-4\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-4\cos x}{1-\cos x}$

(6) $\sqrt{1-\cos x}\times\sqrt{1+\cos x}=\sin x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

(7) $\frac{2\sin x\times\cos x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}=\tan x$

(8) $\frac{1+2\sin x\times\cos x}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$

[4] $\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}=2\sec x$

الحل

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{\cos(1-\sin x)+\cos(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$

$$=\frac{\cos x-\cos x\sin x+\cos x+\cos x\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{2}{\cos x}=2\sec x$$

[5] $\frac{1-3\cos x-4\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-4\cos x}{1-\cos x}$

الحل

$$\frac{1-3\cos x-4\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-3\cos x-3\cos^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin^2 x-3\cos x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

KuwaitTeacher.Com

حل آخر

الطرف الأول $= \frac{(1-4\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$= \frac{1-4\cos x}{1-\cos x}$

الطرف الثاني $=$

$= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{3\cos x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$

$= 1 - \frac{3\cos x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$= 1 - \frac{3\cos x}{1-\cos x}$

$= \frac{1-\cos x-3\cos x}{1-\cos x}$

$= \frac{1-4\cos x}{1-\cos x}$

6) $\sqrt{1-\cos x} \times \sqrt{1+\cos x} = \sin x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

الطرف

$\sqrt{1-\cos x} \times \sqrt{1+\cos x} = \sqrt{1-\cos^2 x}$

$= \sqrt{\sin^2 x}$

$= \sin x$

7) $\frac{2\sin x \times \cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x$

الطرف

$\frac{2\sin x \times \cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\sin x \times \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}$

$= \frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

معلم الكويت
KuwaitTeacher.Com

[8] $\frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$

الحل

$$\frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}$$

$$=\sin x+\cos x$$

في التمارين (13–9)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(9) $\tan\frac{5\pi}{12}$

(10) $\sin\frac{-\pi}{12}$

(11) $\cos(x-y)-\cos(x+y)$

(12) $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

(13) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

[9] $\tan\frac{5\pi}{12}$

$=\tan 75^\circ$

$=\tan(30^\circ+45^\circ)$

$=\frac{\tan 30^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 45^\circ}$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\times 1}=2+\sqrt{3}$

حل آخر

$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)$

$=\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}}$

$=2+\sqrt{3}$

معلم الكويت
KuwaitTeacher.Com

10) $\sin -\frac{\pi}{12}$

$= -\sin\frac{\pi}{12}$

$= -\sin(45^\circ - 30^\circ)$

$= -[\sin 45\cos 30 - \cos 45 \sin 30]$

$= -\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right]$

$= -\left[\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

11) $\cos(x-y) - \cos(x+y)$

$= \cos x \cos y + \sin x \sin y - (\cos x \cos y - \sin x \sin y)$

$= 2\sin x \sin y$.

12) $\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$

$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$= \sin x - \cos x$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

13 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$= \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)$

$= 2\cos\frac{\pi}{3}\sin x$

$= 2 \times \frac{1}{2}\sin x$

$= \sin x$

(14) **(a)** أوجد ناتج: $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$

(b) أوجد القيمة الصحيحة لكلّ مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ **(2)** $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(15) أوجد قيمة $\sin 2x$، إذا كان $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$

(16) أوجد: $\cos 2x$، إذا كان $\cos x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

14 (a) $\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$

(b) 1 $\cos\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

صفوة المعلمين الكويت
KuwaitTeacher.Com

[2] $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$

$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

[15] $\because \sin x - \cos x = \frac{1}{5}$

$\therefore (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{25}$

$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = \frac{1}{25}$

$1 - 2\sin x \cos x = \frac{1}{25}$

$1 - \frac{1}{25} = 2\sin x \cos x$

$\therefore \sin 2x = \frac{24}{25}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

16 $\cos x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$= 2\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 1$

$= 2\left(\frac{2+6+4\sqrt{3}}{16}\right) - 1$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ع. محمد اللسي

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

تمرّنْ
10–1

المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (5–1)، هل الشكل يجب أن يكون موجودًا في مستوٍ واحد فقط؟

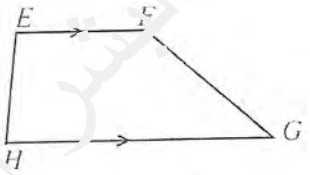
(1) 

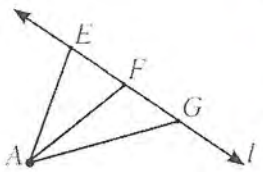
(2) 

(١) مستقيم واحد لا يعينه مستوٍ وحيد لذا فالمستقيم يمكن أن يكون في عدد لا نهائي من المستويات.

(٢) النقطة الواحدة لا تعين مستوٍ وحيد لذا فالنقطة تكون موجودة في عدد لا نهائي من المستويات

(3) 

(4) 

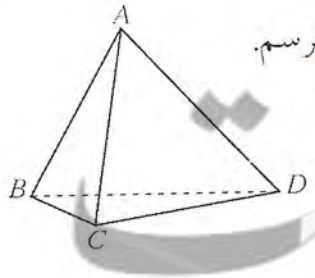
(5) 

(3) مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط لذا فالمستقيمان المتقاطعان يجب أن يكونا في مستوٍ واحد فقط

(4) شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان والمستقيمان المتوازيان المختلفان يعينان مستوٍ وحيد

(5) مستقيم ونقطة خارجة عنه يعينان مستويًا واحدًا فقط فالشكل يجب أن يكون موجودًا في مستوٍ واحد فقط

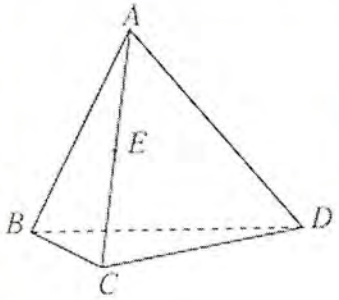
(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة. سمّ المستويات الأربعة التي تجدها في الرسم.



أربع نقاط مختلفة وليست مستوية يمر بها عدد من المستويات يساوي $4C_3 = 4$ حيث أن المستوى يعينه ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة والمستويات هي

(ABC) ، (ACD) ، (ABD) و (BCD)

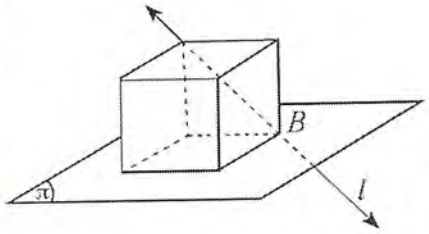
(7) أثبت أن النقطة E تقع في المستوي ADC وفي المستوي ABC



$E \in \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ABC)$, $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ADC)$

$\therefore$ E تقع في المستويين ADC , ABC

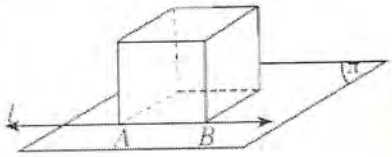
(8) (a) أوجد نقطة تقاطع المستوي π والمستقيم l.



المستقيم l هو قطر وجه من أوجه المكعب الذي أحد أوجهه محتوى في المستوى π ، B أحد رؤوس المكعب

$\therefore B \in \overleftrightarrow{l}$, $B \in \pi$ $\therefore \overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{B\}$

(b) أوجد تقاطع المستوي π والمستقيم l.

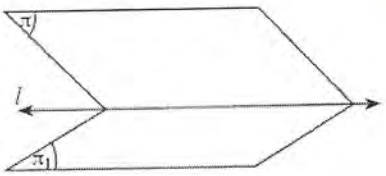


النقطتان A , B تنتميان إلى المستوى π وإلى المستقيم l

$\therefore l$ يقع بأكمله في المستوى π

$\therefore \overleftrightarrow{l} \cap \pi = \overleftrightarrow{l}$

(c) أوجد تقاطع المستوي π والمستوي π_1.



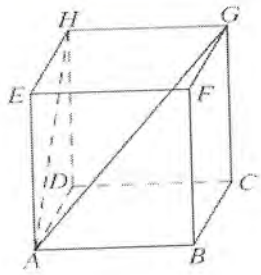
$\overleftrightarrow{l} \subseteq \pi$, $\overleftrightarrow{l} \subseteq \pi_1$

π , π_1 مستويان مختلفان

$\therefore \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{l}$

معلمي الكويت
صفوة التعليم في الكويت

(9) في شبه المكعب المقابل، أكمل:

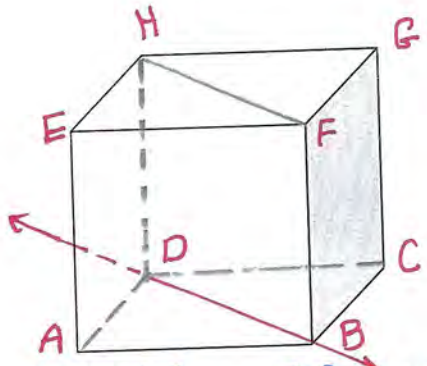


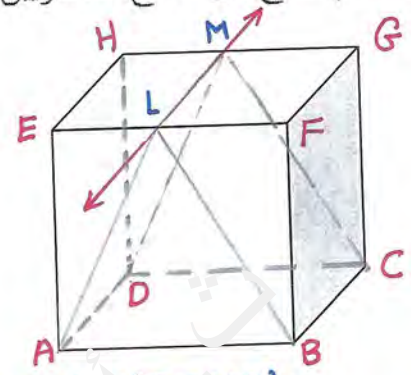
(a) $(AGH) \cap (ABC) = \overleftrightarrow{AB}$ $\quad (AGH) = (ABGH)$ $\quad (ABC) = (ABCD)$

(b) ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين $BFH, ABCD$

(c) إذا كانت L نقطة تنتمي إلى $\overline{EF}$،

ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين ADL, BCL





b) $\overleftrightarrow{BF} // \overleftrightarrow{DH} \quad \therefore \overleftrightarrow{HD} \subseteq (BFH) \quad \therefore (BFH) = (BFHD)$

$\overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABCD) \; , \overleftrightarrow{BD} \subseteq (BFHD) \quad \therefore (ABCD) \cap (BFH) = \overleftrightarrow{BD}$

c) $\overline{LM} // \overline{GF} // \overline{EH}$ $\longleftarrow$ $EL = HM$ بحيث $M \in \overline{HG}$ نأخذ

$\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{LM}$ متوازيان يحويهما المستوى $BCML$

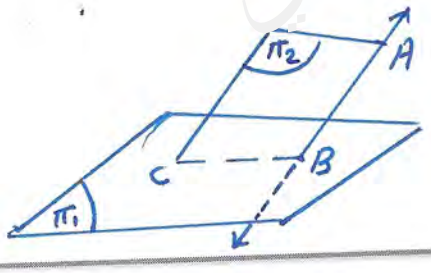
$\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{LM}$ متوازيان يحويهما المستوى $ADML$

$\therefore (BCML) \cap (ADML) = \overleftrightarrow{LM}$

$\therefore (ADL) \cap (BCL) = \overleftrightarrow{LM}$

---

(10) ارسم $\overline{AB}$ يقطع مستويًا π_1 في النقطة B، ثم ارسم المستوي π_2 يقطع المستوي π_1 في مستقيم يمر بالنقطة B.



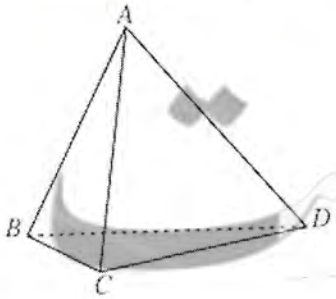
$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi_1 = \{B\}$

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CB}$

---

(11) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة أوجد:

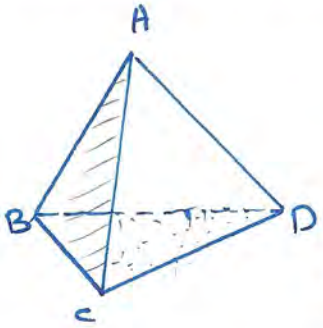
(a) تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي BCD؟



$B \in \overleftrightarrow{AB}$ و $B \in (BCD)$

$\overleftrightarrow{AB} \cap (BCD) = \{B\}$

معلمتي الكويت
Kuwait Teacher



(b) تقاطع $\overline{AB}$ مع المستوي ACD؟

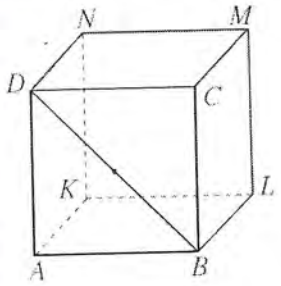
$A \in \overleftrightarrow{AB}$ ، $A \in (ACD)$ ، $B \notin (ACD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \cap (ACD) = \{A\}$

(c) تقاطع (ABC) مع المستوي BCD؟

$\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$ ، $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (BCD)$

$\therefore (BCD) \cap (ABC) = \overleftrightarrow{BC}$



(12) في الرسم المقابل $ABCDKLMN$ مكعب أوجد إن أمكن العلاقة بين:

(a) $\overline{ND}$ ، $\overline{BD}$؟ مستقيمان متقاطعان في نقطة D

(b) $\overline{AD}$ ، $\overline{BC}$؟ من خواص المكعب أن وجه من أوجهه مربع

$\therefore \overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ مستقيمان متوازيان حيثما

$\overline{AD}$ ، $\overline{BC}$ متقابلتان في الوجه ABCD

(c) $\overline{BD}$ ، $\overline{ML}$؟ $\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{ML}$ غير متقاطعان ولا يحويهما مستوى واحد

فهما مستقيمان متخالفان

(d) $\overline{ML}$ والمستوي $ABLK$؟ يشتركان في نقطة واحدة وهي النقطة L

فهما متقاطعان ويكونه $\overleftrightarrow{ML} \cap (ABLK) = \{L\}$

(e) سمّ المستقيم الذي هو تقاطع المستويين NBD، $ABCD$

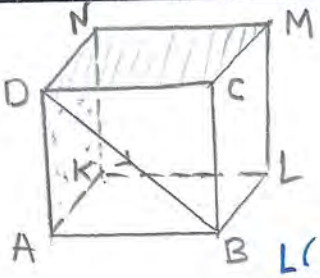
$\overleftrightarrow{NL} // \overleftrightarrow{BD}$ يحويهما مستو واحد فقط

$(NBD) = (NLBD)$

$\because (NLBD) \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore$ المستقيم $\overleftrightarrow{BD}$ هو تقاطع المستويين NBD ، ABCD

أحمد السوسي الوطني
معلمي
صوتي
Kuttabonline.com



(f) أثبت أن النقاط L, B, D, N تنتمي إلى مستوٍ واحد.

$\because \overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{LB}$ ، $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{ND}$

$\therefore \overleftrightarrow{LB} \parallel \overleftrightarrow{ND}$

$\therefore \overleftrightarrow{LB}$ ، $\overleftrightarrow{ND}$ يصنعان مستوٍ وحيد يحوي النقاط L, B, D, N

(g) هل $\overline{ML}$ ، $\overline{ND}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

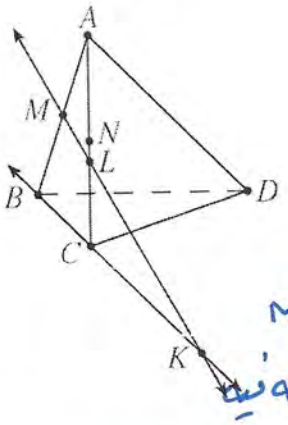
$\overleftrightarrow{ML}$ ، $\overleftrightarrow{ND}$ مستقيمان متخالفان لا يصنعان مستويًا واحدًا .

(h) أثبت أن المستويين ADK , CMN يتقاطعان.

$N \in (ADK)$, $D \in (CMN)$ $\therefore (ADK) = (ADNK)$, $(CMN) = (CMND)$

$\because (ADNK) \cap (CMND) = (\overleftrightarrow{ND})$.

$\therefore$ المستويين ADK ، CMN يتقاطعان وفق المستقيم $\overleftrightarrow{ND}$



(13) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$، $L \in \overline{AC}$، $L \neq N$

(a) أثبت أن: $\overline{ML}$ يقع في المستوي ABC

$M \in \overleftrightarrow{AB} \therefore M \in (ABC)$ ، $L \in \overleftrightarrow{AC} \therefore L \in (ABC)$

$\therefore$ المستقيم $\overleftrightarrow{ML}$ يشترك مع المستوى ABC في نقطتين فيقع بأكمله فيه

(b) أثبت أن: $\overline{ML}$, $\overline{CB}$ يتقاطعان في النقطة K

$\because \overline{MN} \parallel \overline{BC}$ و $L \neq N$

$\overleftrightarrow{ML}$ ، $\overleftrightarrow{CB}$ يحويهما المستوى (ABC) وغير متوازيان فهما متقاطعان

$\therefore K \in \overleftrightarrow{ML}$, $K \in \overleftrightarrow{CB}$ $\therefore \overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{CB} = \{K\}$

(c) ما نقطة تقاطع المستقيم $\overline{ML}$ مع المستوي BCD؟

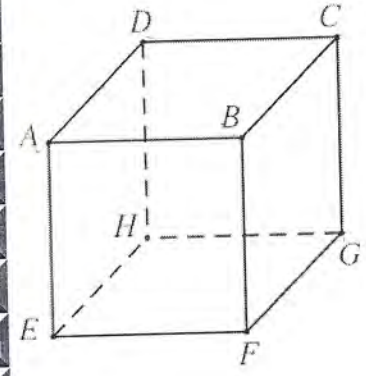
$\because K \in \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (CBD)$ $\therefore K \in (CBD)$, $M \notin (CBD)$

$\because K \in \overleftrightarrow{ML}$ $\therefore \overleftrightarrow{ML} \cap (BCD) = \{K\}$

صفوة الكويت

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.



$ABCDEFGH$ مكعّب.

(1) المستقيمان AB, HG يعينان مستويًا.

(a) (b)

$\overleftrightarrow{HG} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ $\longrightarrow$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HG}$

مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا

(2) النقاط B, D, H, F تعيّن مستويًا.

(a) (b)

$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{HF}$

مستقيمان متوازيان يعينان مستويًا يحوي النقاط B و D و H و F

(3) النقاط A, B, G, C تعيّن مستويًا.

(a) (b)

$\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{GC}$ مستقيمان متخالفان فهما لا يعينان مستويًا

(4) المستقيمان GC, EF يعينان مستويًا.

(a) (b)

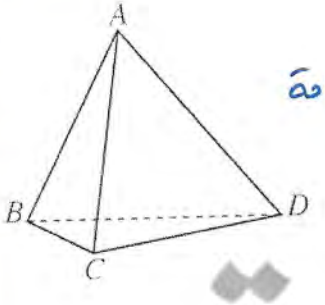
$\overleftrightarrow{EF}$ ، $\overleftrightarrow{GC}$ متخالفان لا يعينان مستويًا

(5) المستقيمان AB, BC يعينان مستويًا.

(a) (b)

$\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ متقاطعان في B فهما يعينان مستويًا

في التمرينين (7–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



(6) النقاط B, C, D تعيّن:

لأن نقاط مختلفة ليست على استقامة

(a) مستويًا واحدًا

(b) مستويين مختلفين

(c) عدد لا منته من المستويات المختلفة

(d) لا يمكن أن تعيّن مستويًا

(7) أوجه منشور قائم خماسي القاعدة يعيّن:

(a) خمسة مستويات مختلفة

(b) ستة مستويات مختلفة

(c) سبعة مستويات مختلفة

(d) ثمانية مستويات مختلفة

لقاعدتيه وخمسة أوجه

معلمتي

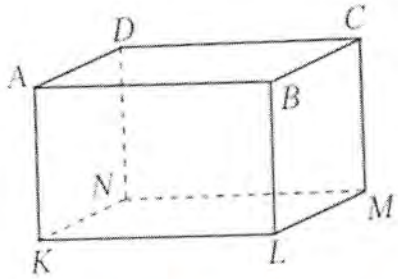
تمرّنْ
10–2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $ABCDKLMN$ شبه مكعب.



(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CM}$

(b) أثبت أن النقاط A, K, M, C تنتمي إلى مستو واحد.

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AD}$ يوازي المستوي MKN

حل خواص شبه المكعب

a) $\overleftrightarrow{CM} \parallel \overleftrightarrow{BL}$ ، $\overleftrightarrow{BL} \parallel \overleftrightarrow{AK}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{CM} \parallel \overleftrightarrow{AK}$

b) AK ، CM يحويهما مستو واحد لأنهما متوازيان

$\therefore$ النقاط A ، K ، M ، C تنتمي إلى مستو واحد

c) $\overleftrightarrow{KN} \subseteq (MKN)$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{KN}$

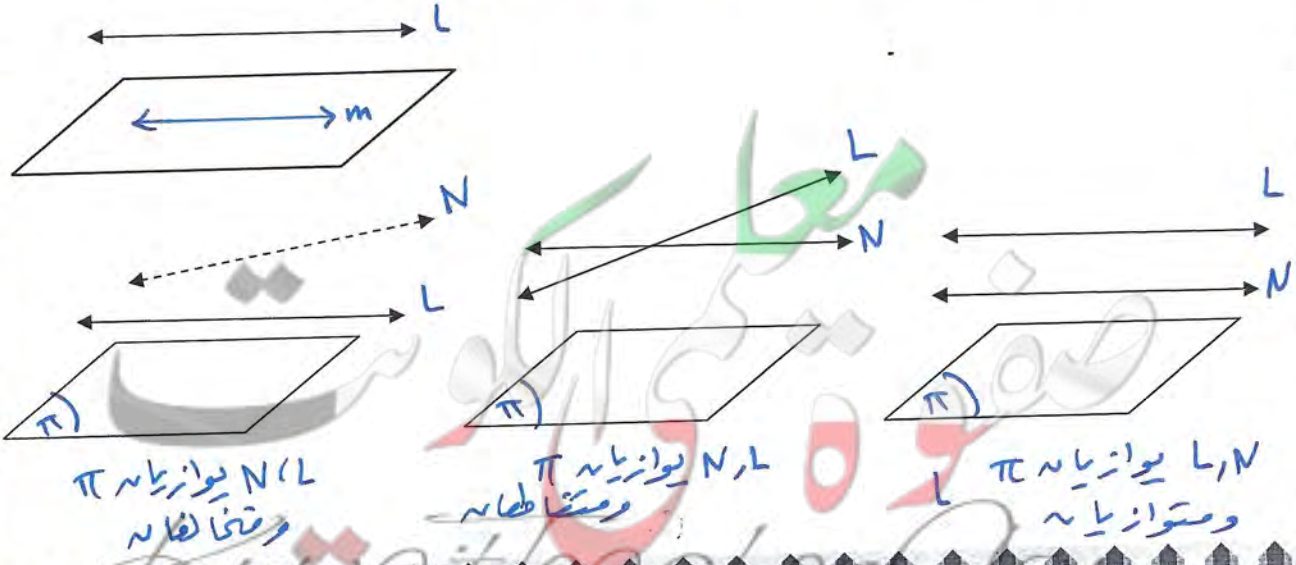
$\therefore \overleftrightarrow{AD} \parallel (MKN)$

---

(2) (a) متى يكون المستقيم l موازيًا للمستوي π؟ وضح ذلك بالرسم.

(b) ارسم مستقيمًا آخرًا يوازي المستوي π

a) اذا وازى L مستقيماً في المستوى π فإنه يوازي π



π يوازي N ، L ومتنافيان

π يوازي N ، L ومستقاطعان

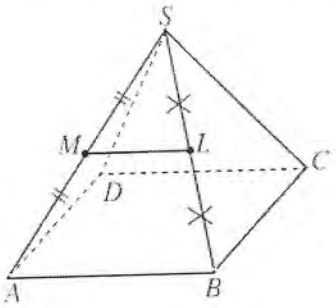
π يوازي N ، L ومستوازيان

موقع صفوة الكويت

(3) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف $[SA]$، L منتصف $[SB]$

أثبت أن: $(ML) \parallel (ABCD)$



∵ M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$

∴ $\overline{ML} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

∵ $\overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABCD)$

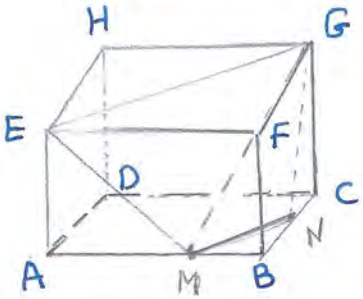
∴ $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$

---

(4) $ABCDEFGH$ مكعب

$M \in [AB]$، المستوي GEM يقطع $[BC]$ في النقطة N

أثبت أن: $\overleftrightarrow{GE} \parallel \overleftrightarrow{MN}$



∵ GEM يقطع $\overline{BC}$ في N

∴ $N \in (GEM)$

المستويان ABCD و EFGH متوازيان يقطعهما المستوى GEMC في المستقيمين $\overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{MN}$.

∴ $\overleftrightarrow{EG} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

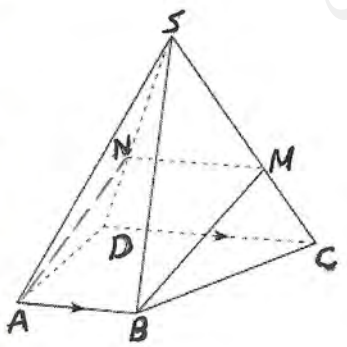
---

(5) $SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$M \in [SC]$، المستوي ABM يقطع $[SD]$ في N

(a) أثبت أن: $\overline{AB}$ يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن: $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$



$N \in (ABM)$

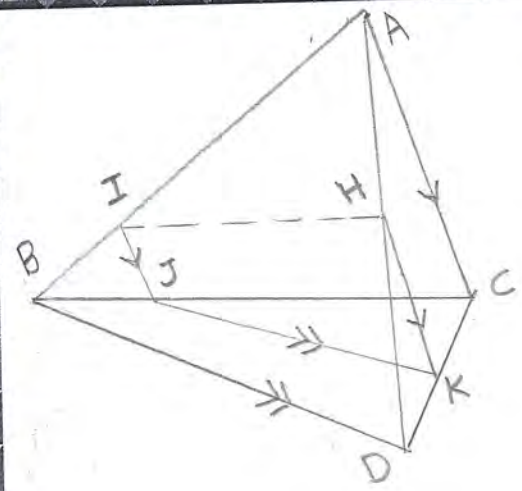
∵ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{DC} \subseteq (SDC)$

∴ $\overleftrightarrow{AB} \parallel (SDC)$

المستقيمان $\overleftrightarrow{DC}$ و $\overleftrightarrow{MN}$ متوازيان ومرسومان في المستويين المتوازيين ABMN , SDC وتقاطعهما

∴ $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

موقع أحمد الزومي



(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، $I \in \overline{AB}$

المستقيم الموازي لِـ $\overline{AC}$ والمار بالنقطة I يقطع $\overline{BC}$ في J

المستقيم الموازي لِـ $\overline{BD}$ والمار بالنقطة J يقطع $\overline{CD}$ في K

المستقيم الموازي لِـ $\overline{AC}$ والمار بالنقطة K يقطع $\overline{AD}$ في H

(a) ضع رسمًا مناسبًا.

(b) أثبت أن: $\overline{IH} \parallel \overline{BD}$

$\because \overleftrightarrow{IJ} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{HK} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{HK} \parallel \overleftrightarrow{IJ}$ (IJKH) لتحديدهما المستوى

$\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{JK}$ مستقيمان متوازيان ومرسومان كل منهما المستويان

$\overleftrightarrow{IH}$ على الترتيب وتقاطعهما المستويان في BDHI ، JKHI

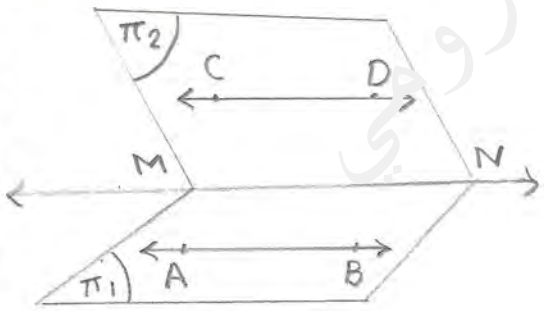
$\therefore \overleftrightarrow{IH} \parallel \overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{JK}$

(7) ليكن π_1 ، π_2 مستويان متقاطعان في $\overline{MN}$ حيث:

$\overline{AB} \subset \pi_1$ ، $\overline{AB} \parallel \pi_2$

و $\overline{CD} \subset \pi_2$ ، $\overline{CD} \parallel \pi_1$

أثبت أن: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$ ، $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ ..... (1)

$\because \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$ ، $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ ..... (2)

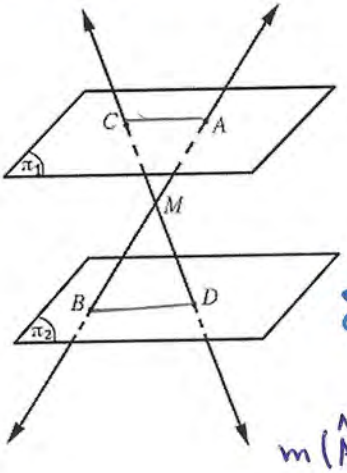
من (1) ، (2) نستنتج أن

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ المستقيمان المتوازيان لا يقعان في فضاء متوازيان.

(9) في الشكل المقابل π_1, π_2 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان فهما يعينان مستو واحد

وليكن π_3 يقطع π_1 ، π_2 على الترتيب في $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{BD}$

$\therefore \overleftrightarrow{CA} // \overleftrightarrow{BD}$

في المثلثين ACM , BDM $m(\hat{C}) = m(\hat{D})$, $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$

$\therefore$ المثلثان ACM , BDM متشابهان

$\therefore \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل. (a) (b)

يشتركان المستويان في مستقيم (يتقاطعان)

أي أنه إذا اشترك المستويان في نقطتين على الأقل يكونا متوازيين أو متقاطعين

(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما. (a) (b)

اذا وقع المستقيم بأكمله في المستوى فإنه يوازيه

وفي هذه الحالة يكون بينهما نقاط مشتركة

(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن l يوازي مستقيمًا وحيدًا في π (a) (b)

اذا وازى مستقيم مستويًا فإنه يوازي عدد لانهائي من المستقيمات داخل هذا المستوى

(4) إذا كان: $\overrightarrow{m} // \pi$, $l // \pi$ فإن $l // \overrightarrow{m}$ (a) (b)

قد يكون $\overleftrightarrow{L}$, $\overrightarrow{m}$ متوازيان أو متقاطعان أو

(5) إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان فإنه

تقاطعهما هو مستقيم يوازي كل من هذين المستقيمين (a) (b)

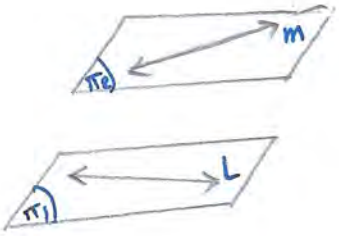
في التمارين (8–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستو ثالث فإن خطّي التقاطع:

(a) متقاطعان (b) متخالفان

(c) متوازيان (d) متعامدان

(7) إذا كان $\pi_1 // \pi_2$ ، $\vec{l} \subset \pi_1$ ، $\vec{m} \subset \pi_2$ فإن:

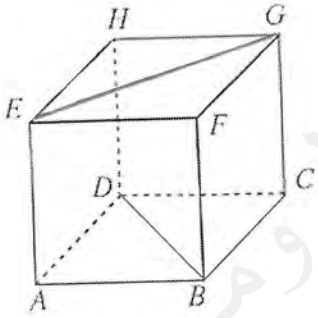


(a) $\vec{l} // \vec{m}$ (b) $\vec{l} \perp \vec{m}$

(c) $\vec{l}, \vec{m}$ متخالفان (d) $\vec{l} \cap \vec{m} = \phi$

يمكنه أن يكونا متوازيان أو متخالفان

(8) في المكعّب $ABCDEFGH$، $\overline{BD}$, $\overline{EG}$ هما:



(a) متوازيان (b) متقاطعان

(c) متخالفان (d) يحويهما مستوٍ واحد

معلمي الكويت
صفوة التربويين
Kuwait Teachers Club

تمرّن
10–3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

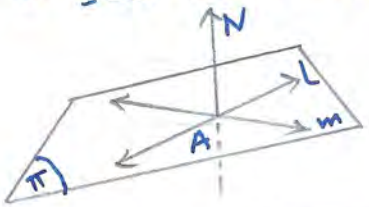
Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) متى يكون المستقيم عموديًّا على المستوي؟

(b) ارسم مستقيمًا عموديًّا على مستو.

(a) يكون المستقيم عموديًا على المستوى اذا كان عمودياً على مستقيمين متقاطعين فيه.

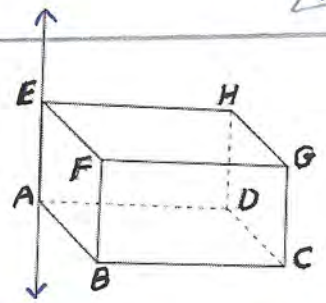


(b) $\overleftrightarrow{L} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{M} \subset \pi$

$\overleftrightarrow{L} \cap \overleftrightarrow{M} = \{A\}$, $\overleftrightarrow{N} \perp \overleftrightarrow{L}$, $\overleftrightarrow{N} \perp \overleftrightarrow{M}$

---

(2) $ABCDEFGH$ شبه مكعب



(a) سمّ المستقيمات المتعامدة مع $\overline{AE}$

(b) سمّ المستويات المتعامدة مع $\overline{AE}$

(c) أثبت أن $\overline{AD}$ عمودي على المستوي CGH

(a) $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AD}$

وكذلك $\overleftrightarrow{AE}$ عموديًا على كل من $\overleftrightarrow{HG}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{EF}$

(b) المستويات المتعامدة مع $\overline{AE}$ هي

$(EHFG)$, $(ABCD)$

(c) $\overleftrightarrow{CG} \parallel \overleftrightarrow{DH}$ يعينان مستو واحد

$\therefore D \in (CGH)$ $\therefore (CGH) = (CGHD)$

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DC}$

$\overleftrightarrow{HD} \cap \overleftrightarrow{DC} = \{D\}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp (DCGH)$

معلمي الكويت
صفوة

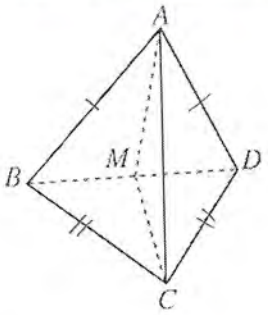
(3) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$CD = CB$ ، $AD = AB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overline{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$



في المثلث ABD ←

$\because$ $AB = AD$ ، $\overline{DB}$ منتصف M

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BD}$ ⟶ (1)

في المثلث CBD ←

$CB = CD$ ، $\overline{BD}$ منتصف M

$\therefore \overleftrightarrow{CM} \perp \overleftrightarrow{BD}$ ⟶ (2)

$\because$ $\overleftrightarrow{AM}$ ، $\overleftrightarrow{CM}$ متقاطعان يعينان المستوى (ACM)

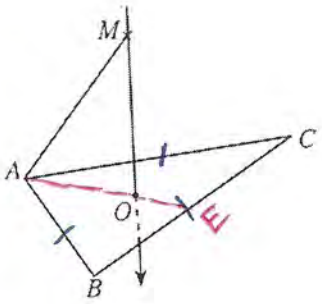
$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

$\because \overleftrightarrow{AC} \subseteq (AMC)$

$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

(4) ABC مثلث متطابق الأضلاع مركزه O، $\overline{MO}$ عامد مع (ABC)

أثبت أن: $\overline{CB} \perp \overline{AM}$



الحل: نفرض $\overrightarrow{AO}$ يقطع $\overline{BC}$ في E

$\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع مركزه O

$\therefore \overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ..... (1)

$\because \overleftrightarrow{OM} \perp (ABC)$ ، $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$

$\therefore \overleftrightarrow{OM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ..... (2)

$\because$ $\overleftrightarrow{OM}$ ، $\overleftrightarrow{OA}$ متقاطعان يعينان المستوى AOM

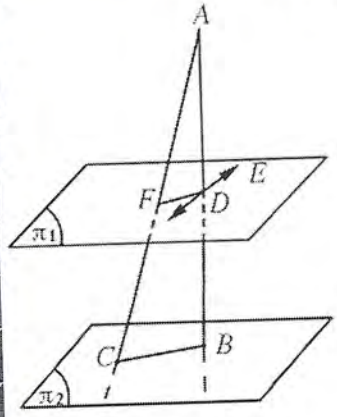
$\therefore \overleftrightarrow{CB} \perp (AOM)$

صفوة الكويت Kuwait Elite .Com

(5) في الشكل المقابل، $\overline{AB}$ عمودي على المستوي π_1, π_2 ، $\overline{DE} \subset \pi_1$ ، $\overline{AD} \perp \overline{DE}$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 \parallel \pi_2$



∵ D منتصف $\overline{AB}$ ، F منتصف $\overline{AC}$

∴ $\overleftrightarrow{FD} \parallel \overleftrightarrow{CB}$

∵ $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{CB} \subseteq \pi_2$ ∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CB}$

∵ $\overleftrightarrow{FD} \parallel \overleftrightarrow{CB}$ ∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{FD}$

∵ $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{FD}$

$\overleftrightarrow{ED}$ ، $\overleftrightarrow{FD}$ متقاطعان وكونهما محتوى في π_1

∴ $\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_1 \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

المستقيم العمود على مستويين مختلفين يكونان متوازيين

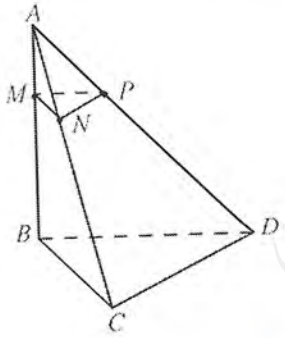
∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$

∴ $\pi_1 \parallel \pi_2$

(6) في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة حيث $\overline{AB} \perp (BCD)$ فإذا كان:

$AB = 3AM$ ، $AC = 3AN$ ، $AD = 3AP$ ،

أثبت أن $\overline{AB}$ عمودي على (MNP)



∵ $AD = 3AP \Rightarrow \frac{AD}{AP} = 3$

$AC = 3AN \Rightarrow \frac{AC}{AN} = 3$

$AB = 3AM \Rightarrow \frac{AB}{AM} = 3$

∴ $\frac{AD}{AP} = \frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM} = 3$

∴ $\overleftrightarrow{NP} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{MP} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ ∴

∴ $(BCD) \parallel (MNP)$

∵ $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (MNP)$

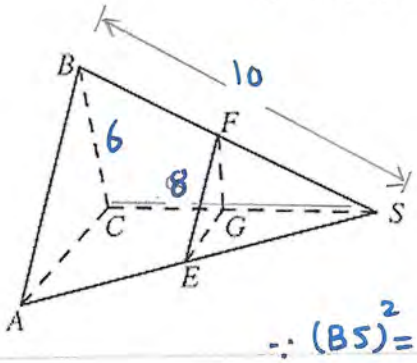
معلمي الكويت
صفوة الكويت
Kuwaititeacher.com

(7) في الشكل المقابل، $(ABC)\,//\,(EFG)$, S نقطة خارج $(EFG),(ABC)$

بحيث $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC}$

فإذا كان: $SB = 10\,\text{cm}\,, SC = 8\,\text{cm}\,, BC = 6\,\text{cm}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{FE}$



في المثلث BCS

$\because (BS)^2 = 100\,,\ (BC)^2 + (CS)^2 = 36 + 64 = 100$

$\therefore$ المثلث قائم الزاوية في C

$\left.\begin{array}{l} \therefore \overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{BC} \\ \therefore \overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC} \end{array}\right\} \therefore \overleftrightarrow{SC} \perp (ABC)$

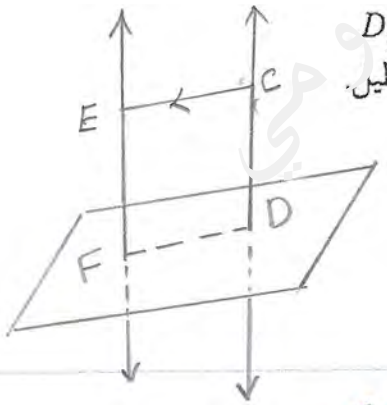
$\because (ABC)\,//\,(EFG)$

$\therefore \overleftrightarrow{SC} \perp (EFG)$

$\because \overleftrightarrow{FE} \subseteq (EFG)$

$\therefore \overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{EF}$

(8) ليكن $\overline{EF}$, $\overline{CD}$ عموديان على المستوي π ويقطعانه في D, F على الترتيب. فإذا كان $\overline{CE}$ يوازي π. أثبت أن $CDFE$ مستطيل.



$\because \overleftrightarrow{CD} \perp \pi\,,\ \overleftrightarrow{EF} \perp \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{CD}\,//\,\overleftrightarrow{EF} \Rightarrow$ CDFE يصنعان المستوى

$\because \overleftrightarrow{CE}\,//\,\pi\,,\ \overleftrightarrow{FD} \subseteq \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{CE}\,//\,\overleftrightarrow{FD}$

ECDF متوازي أضلاع (2) (1) من

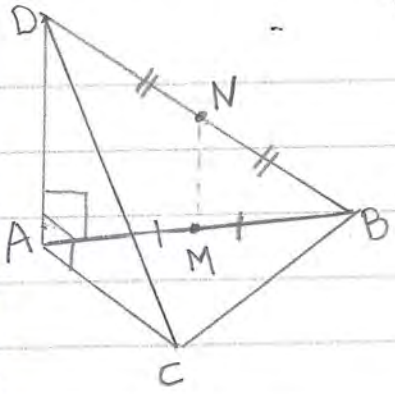
$\overleftrightarrow{EF} \perp \pi\,,\ \overleftrightarrow{FD} \subset \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{FD}\ \ m(\hat{EFD}) = 90^\circ$

$\therefore$ ECDF مستطيل

صفوة الكويت

(9) ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان: $\overline{DA}$ عموديًا على كل من $\overline{AB}$، $\overline{AC}$

فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{DB}$، أثبت أن: $\overline{MN} \perp (ABC)$



$\because \overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{DA} \perp (ABC)$ ..... (1)

$\because$ M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{BD}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{DA}$ ..... (2)

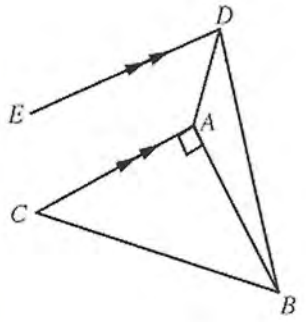
من (1) ، (2) نستنتج أن

$\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

(10) في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A

رسم $\overline{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overline{ED} // \overline{CA}$

أثبت أن: $\overline{ED} \perp \overline{B}$



$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ABC)$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

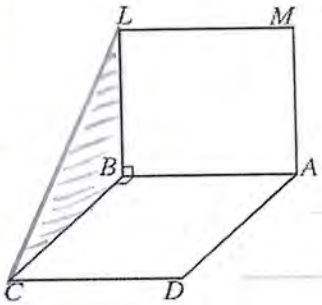
$\because \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ $\Big\} \therefore \overleftrightarrow{AC} \perp (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{ED}$, $\overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{ED} // \overleftrightarrow{CA}$ $\therefore \overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{BD}$

(11) $ABCD$، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،

أثبت أن: $\overline{LM} \perp (LBC)$



من خواص المربع

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BL}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (LBC)$: $\overleftrightarrow{LB} \cap \overleftrightarrow{CB} = \{B\}$

$\because \overleftrightarrow{LM} // \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

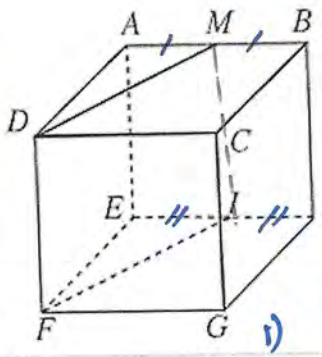
معلم الكويت
صفوة التعليم

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (2–1)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEHGF$ مكعّب

النقطة M منتصف $\overline{AB}$، I منتصف $\overline{EH}$.



(1) $\overrightarrow{MI} \perp (EFGH)$ (a) (b)

(2) $\overrightarrow{MD} \perp (BCGH)$ (a) (b)

1) $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EF}$ $\therefore \overleftrightarrow{AE} \perp (EFGH)$ $\therefore \overleftrightarrow{ML} // \overleftrightarrow{AE}$

2) $\overleftrightarrow{DC}$ ، $\overleftrightarrow{MD}$ متقاطعان في D ، $\overleftrightarrow{DC}$ ⊥ (BCGH)

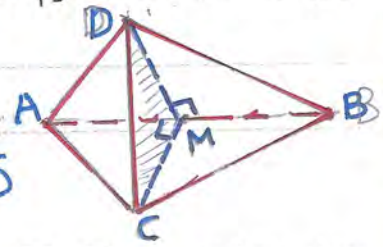
$\therefore \overleftrightarrow{MD}$ ليس عمودياً على (BCGH)

(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ (a) (b)

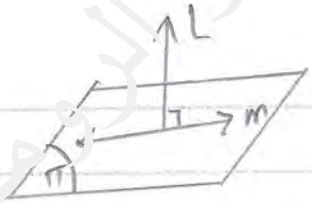
نأخذ M منتصف $\overline{AB}$

$\overline{CM} \perp \overline{AB}$, $\overline{DM} \perp \overline{AB}$

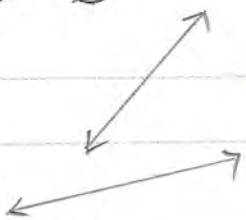
$\therefore \overline{AB} \perp (CMD)$ $\therefore \overline{AB} \perp \overline{CD}$



(4) إذا كان $\vec{l} \perp \vec{m}$, $\vec{m} \subset \pi$ فإن $\vec{l} \subset \pi$ (a) (b)



(5) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\vec{n} \perp \vec{m}$ فإن $\vec{l} \perp \vec{n}$ (a) (b)



$\overleftrightarrow{l}$ ، $\overleftrightarrow{n}$ قد يكونا متوازيان أو متخالفان أو متقاطعان

(6) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\vec{n} \perp \vec{m}$ فإن $\vec{n}$, $\vec{l}$ متخالفان. (a) (b)

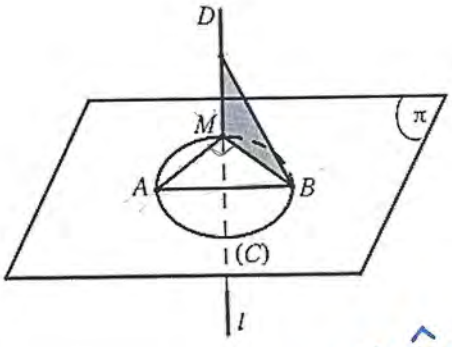
متخالفان أو متوازيان أو متقاطعان

معلم صفوة الكويت

في التمارين (11–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) في الشكل المقابل :

إذا كان $\vec{l} \perp (AMB)$ ، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن:



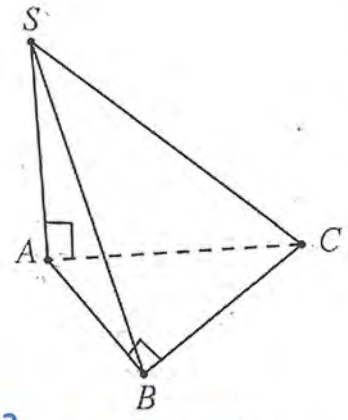
(a) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BD}$ (b) $\vec{l} \perp (BMD)$

(c) $\overrightarrow{AM} \perp (BMD)$ (d) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BM}$

$m(\hat{AMB}) = 90^\circ \therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{MB}$ ....(1)

$\because \overleftarrow{l} \perp (AMB) \because \overleftarrow{l} \perp \overleftrightarrow{AM} \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AM}$

(8) في الشكل المقابل إذا كان $m(\widehat{B}) = 90^\circ$، $\overrightarrow{SA} \perp (ABC)$ فإن:



(a) المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$

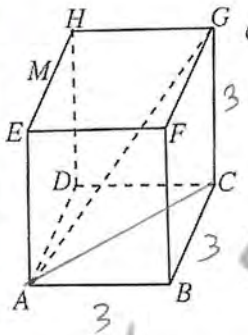
(b) $\overrightarrow{CB} \perp (SAB)$

(c) المثلث SAB متطابق الضلعين.

(d) المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$

$\overleftrightarrow{SA} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ $\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (ASB)$

(9) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره $\overline{AG}$ يساوي



(a) $\sqrt{3}$ cm (b) $3\sqrt{3}$ cm

(c) 9 cm (d) 18 cm

طول قطر وجه المكعب $= AC$ طول الحرف $\times \sqrt{2}$

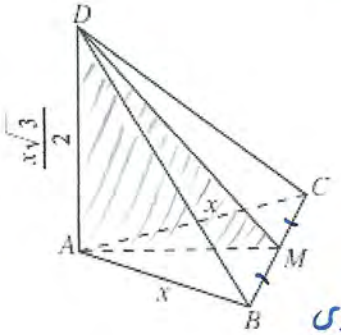
طول قطر المكعب $= AG$ طول الحرف $\times \sqrt{3}$

تمرّن
10–4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية



(1) ABC مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه x

$\overline{AD}$ متعامد مع المستوي ABC، $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$،

M منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overline{CB}$ متعامد مع المستوي AMD

نثبت أن $\overline{BC}$ عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوى

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$ $\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ①

المثلث ABC متطابق الأضلاع ، M منتصف $\overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ②

من ① ، ② $\overleftrightarrow{BC}$ عمودياً على المستقيمين $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{AM}$ المتقاطعين

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$

(b) عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DCB, \overline{BC}, ACB)$

$\overleftrightarrow{BC}$ هو خط تقاطع المستويين (ACB) ، (DCB)

$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ في المستوى ACB

$\overleftrightarrow{DM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ في المستوى DCB

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية هي $A\hat{M}D$

(c) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DCB, \overline{BC}, ACB)$

المثلث AMC ثلاثيني ستيني طول وتره x ، $\overline{AM}$ مقابل للزاوية $60°$

$\therefore AM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

المثلث DAM قائم الزاوية متطابق الضلعين فيه $DA = AM$

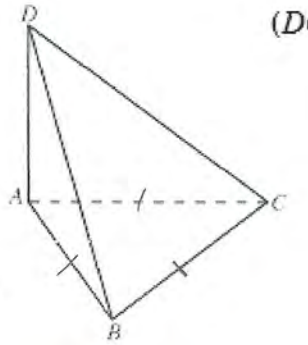
$\therefore m(A\hat{M}D) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $= \frac{\pi}{4}$

(2) ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$



$\overleftrightarrow{DA}$ هو خط تقاطع المستويين DAB , DAC

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AD}$ في المستوى ADC

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ في المستوى ADB

∴ الزاوية $(B\hat{A}C)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

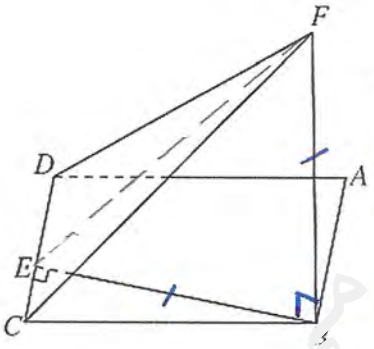
∵ المثلث ABC متطابق الأضلاع وزواياه متطابقة .

$\therefore m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{3}$

(3) في الشكل المقابل $ABCD$ شكل رباعي، $\overline{FB}$ عمودي على المستوي $ABCD$.

$\overline{BE} \perp \overline{CD}$ فإذا كان $FB = BE$،

أوجد قياس الزواية الزوجية بين $(ABCD)$، (FCD)



$\overleftrightarrow{CD}$ خط تقاطع بين FCD , ABCD

① $\overleftrightarrow{EB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ في المستوى (ABCD)

② ∵ $\overleftrightarrow{BF} \perp (ABCD)$ فهو عمودي على $\overleftrightarrow{DC}$ فيه

من ① ، ② $(FBE) \perp \overleftrightarrow{DC}$

③ ∴ $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{DC}$ في المستوى FCD

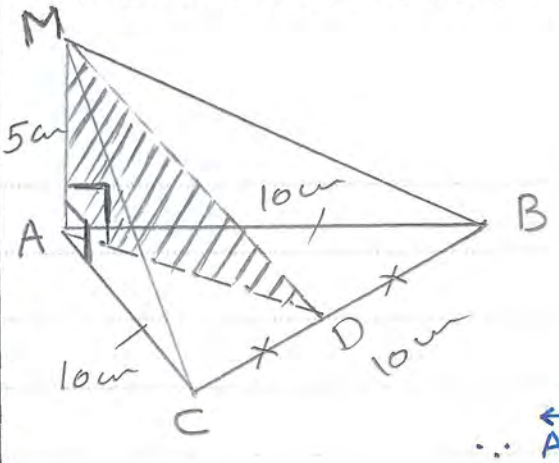
من ① ، ③ $(F\hat{E}B)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية .

المثلث EFB قائم الزاوية فيه $BE = FB$

$\therefore m(F\hat{E}B) = \frac{\pi}{4}$

معلمي الكويت
صفوة
kuwaitteachers.com

(4) $MABC$ هرم ثلاثي رأسه M وقاعدته مثلث متطابق الأضلاع ABC،
طول ضلعه $10\,cm$، إذا كان $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MAC}) = 90°$، $MA = 5\,cm$، D منتصف $\overline{BC}$



(a) أثبت أن: $\overline{BC} \perp (MAD)$

نثبت أن $\overleftrightarrow{BC}$ عمودي على مستقيمين في المستوى

∵ المثلث ABC متطابع الأضلاع

M ، منتصف CB

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ⟶ (1)

∵ $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{AC}$ $\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp (ACB)$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ⟶ (2)

من (1) ، (2)

$\overleftrightarrow{BC} \perp (MAD)$

(b) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين (MBC)، (ABC)

$\overleftrightarrow{BC}$ خط التقاطع بين المستويين MBC ، ABC

المستوى AMD يقطع الزاوية الزوجية في $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{MD}$

وعمودي على الحافة $\overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $(M\hat{D}A)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

المثلث ABC متطابع الأضلاع ، D منتصف $\overline{BC}$

$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{2}(10) = 5\sqrt{3}$

$\therefore \tan(A\hat{D}M) = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore m(A\hat{D}M) = \frac{\pi}{6}$

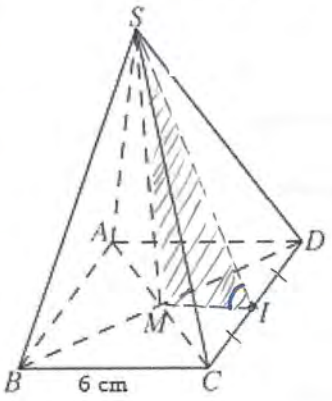
معلمي الكويت
صفوة الكويت

(5) $SABCD$ هرم مربع القاعدة طول ضلعها 6 cm ومركزها M

بحيث إن $\overline{SM} \perp (ABCD)$ ، I منتصف $\overline{CD}$

(a) أثبت أن: $(M\hat{I}S)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ABCD, \overline{CD}, SCD)$

(b) أوجد: $m(M\hat{I}S)$ إذا كان $SM = \sqrt{3}\ cm$



(a) $\overleftrightarrow{CD}$ خط تقاطع المستويين SCD , ABCD

$\because I$ منتصف $\overleftrightarrow{CD}$ $\therefore \overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{MI}$

$\overleftrightarrow{SM} \perp (ABCD)$: $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{SM}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (SMI)$

في المستوى SCD $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{SI}$ $\therefore$

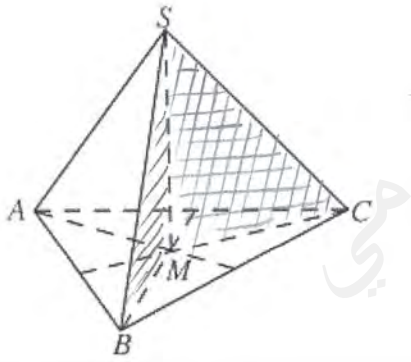
في المستوى ABCD $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{MI}$

$\therefore$ (SIM) هي المستوية للزاوية الزوجية .

(b) في المثلث MIS القائم الزاوية في M فيه $SM = \sqrt{3}$

$\because$ M مركز المربع $\leftarrow$ $MI = \frac{1}{2} BC = 3$

$\therefore \tan(M\hat{I}S) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m(M\hat{I}S) = \frac{\pi}{6}$



(6) $SABC$ هرم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع مركزه M

بحيث إن $\overline{SM} \perp (ABC)$

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(SMB, \overline{SM}, SMC)$

$\overleftrightarrow{SM}$ هو خط تقاطع بين المستويين

$\overleftrightarrow{MC} \perp \overleftrightarrow{SM}$ في المستوى SMC

$\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{SM}$ في المستوى SMB

$\therefore (B\hat{M}C)$ هي المستوية للزاوية الزوجية $(SMB, \overleftrightarrow{SM}, SMC)$

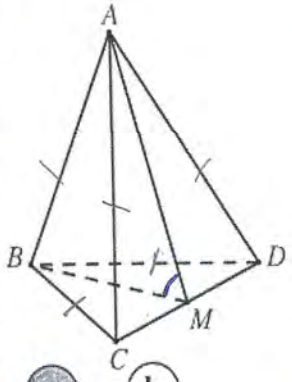
$\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع ، M مركز المثلث

$\therefore m(B\hat{M}C) = 120^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية يساوي $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

حيث أن قياس الزاوية بين مستويين هو الزاوية الحادة

المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (2–1)، على الشكل المقابل.

إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف $\overline{CD}$

فإن:

(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$ (a) (b)

(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BDC, \overline{DC}, ADC)$ هي $\widehat{AMD}$ (a) (b) $A\hat{M}B$

(1) (a) $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (AMB)$ ، $\overline{AB} \subseteq (ABM)$

(2) (a) $\overleftrightarrow{DC}$ خط التقاطع بين المستويين ،

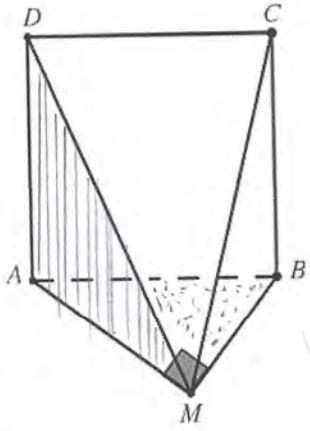
$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ في المستوى ADC

$\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ في المستوى BDC

أسئلة التمرينين (4–3)، على الشكل المقابل.

المثلث AMB قائم الزاوية في M، $\overline{AD}$ متعامد مع المستوي AMP

إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا فإن:



(3) $\overleftrightarrow{BM}$ متعامد مع (MAD) (a) (b)

(4) $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع (AMB) (a) (b)

(3) $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{AM}$ ، $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{DA} \longrightarrow \overleftrightarrow{BM} \perp (MAD)$

(4) $\overleftrightarrow{AD} \perp (AMB)$ ، $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ $\therefore \overleftrightarrow{CB} \perp (AMB)$

صفوة الكويت
Kuwait Elite

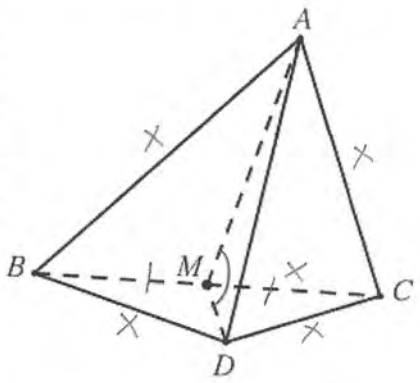
في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمارين (7–5)، على الشكل المقابل. حيث إن:

M منتصف $\overline{BC}$

ABC، DBC مثلثان لهما ضلع مشترك $\overline{BC}$ حيث $BC = x$

وهما متطابقا الأضلاع ولا يحويهما مستو واحد.



(5) الزاوية الزوجية $(BAC\ ,\ \overleftrightarrow{BC}\ ,\ BCD)$ هي:

(a) $A\hat{M}D$ (b) $B\hat{M}C$ (c) $A\hat{M}B$ (d) $B\hat{A}M$

$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ← $\overline{BC}$ منتصف M ، متطابق الأضلاع ABC في المثلث

$\overleftrightarrow{DM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ← $\overline{BC}$ منتصف M ، متطابق الأضلاع BDC في المثلث

∴ زاوية $(A\hat{M}D)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BC}$

(6) إذا كان: $m(A\hat{M}D) = 60°$ فقيمة AD بدلالة x هي:

(a) $\frac{x}{2}$ (b) $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ (c) $x\sqrt{3}$ (d) $\frac{x\sqrt{3}}{2}$

∵ المثلثان ABC ، DBC مثلثان متطابقا الأضلاع وطول ضلع كل منهما x

$\therefore AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

في المثلث AMD ، $DM = AM$ ، $m(A\hat{M}D) = 60°$

$\therefore m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 60°$ فيكون AMD مثلث متطابق الأضلاع

$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

(7) إذا كان $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$، فإنّ $m(A\hat{M}D)$ يساوي:

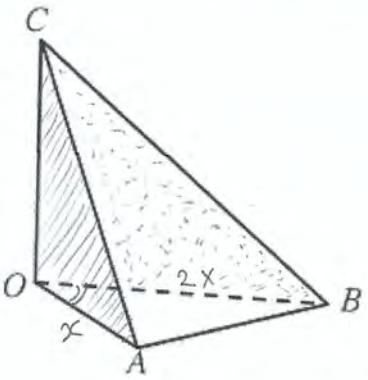
(a) 90° (b) 45° (c) 60° (d) 30°

∵ $AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$\therefore DA = AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ، $m(A\hat{M}D) = 60°$

حتى يكون المثلث AMD متطابق الأضلاع .

معلمتي صفوت كتات
Mathematics Teacher



أسئلة التمرينين (9–8) على الشكل المقابل.

إذا كان OAB مثلث فيه:

$m(A\widehat{O}B) = 60°$ ، $OB = 2x$ ، $OA = x$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:

(a) x (b) $x\sqrt{2}$ (c) $x\sqrt{3}$ (d) $\frac{x}{2}$

في المثلث OAB صـ فائدة جيب التمام

$(AB)^2 = (2x)^2 + x^2 - 2(2x)(x)\cos 60°$ $= 3x^2$

$\therefore AB = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}\,x$

(9) قياس الزاوية الزوجية $(A, \overleftrightarrow{OC}, B)$ هو:

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

$\overleftrightarrow{OC}$ خط التقاطع أو حافة الزاوية الزوجية

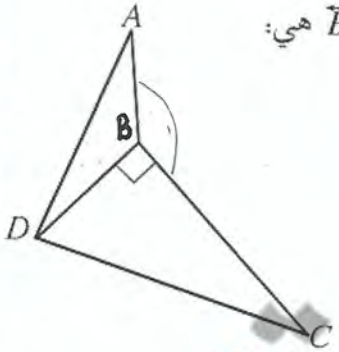
$\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{OC}$ في المستوى OBC

$\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{OC}$ في المستوى AOC

$\therefore$ زاوية $(A\hat{O}B)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية وقياسها 60°

(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B،

فإذا كان $\overline{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي:



(a) $D\widehat{B}C$ (b) $A\widehat{B}C$

(c) $A\widehat{B}D$ (d) $A\widehat{D}C$

$\overleftrightarrow{BD}$ حافة الزاوية الزوجية

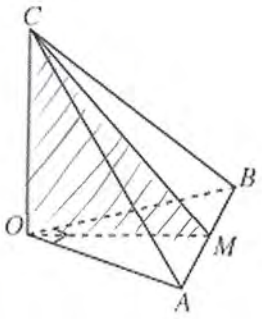
$\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp (DBC)$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore$ الزاوية $(A\hat{B}C)$ بين التقييمين $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ هي الزاوية المستوية .

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية



(1) OAB مثلث قائم في $\widehat{O}$، $OA = OB = 1$

$\overline{OC}$ متعامد مع المستوي OAB، $OC = 1$،

M منتصف $\overline{AB}$

(a) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي OAB

$\overleftrightarrow{OC} \perp (OAB)$, $\overleftrightarrow{CO} \subseteq (COM)$

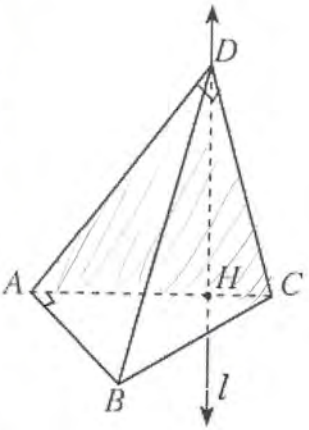
$\therefore (COM) \perp (OAB)$

(b) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي CAB

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OC}$, $\because OA = OB$, $MA = MB$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OM}$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp (C\,M)$ $\because \overleftrightarrow{AB} \subseteq (CAB)$

$\therefore (COM) \perp (CAB)$



(2) ABC مثلث قائم في $\widehat{A}$، $H \in \overline{AC}$

نأخذ المستقيم l المتعامد مع المستوي ABC والمار بالنقطة H

$D \in l$ حيث يكون المثلث ADC قائم الزاوية في D

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع (ACD)

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ..... (1) معطى

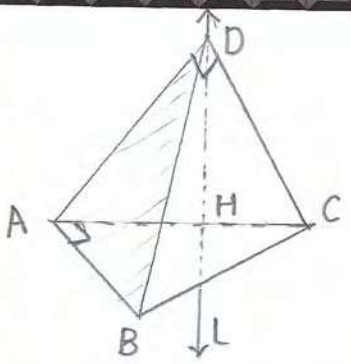
$\because \overleftrightarrow{DH} \perp (ABC)$ $\therefore \overleftrightarrow{DH} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ..... (2)

من (1) و (2)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$

حيث $\overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان ضمنيا ً مستوى وحيدهو ADC

معا ً نحو التميز الرقمي
صفوة الكويت
KuwaitEdu.com



(b) استنتج أن $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$ متعامدان وأن المثلث ABD قائم في $\widehat{A}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$, $\overleftrightarrow{DC} \subset (ADC)$

$\therefore \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AD}$ متعامدان

$\because \overleftrightarrow{AD} \subset (ADC)$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$

$\therefore$ المثلث ABD قائم في $\hat{A}$

(c) أثبت أن $\overrightarrow{CD}$ متعامد مع (ADB)

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CD}$ معطى ..... (1)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$, $CD \subseteq (ADC)$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ....(2)

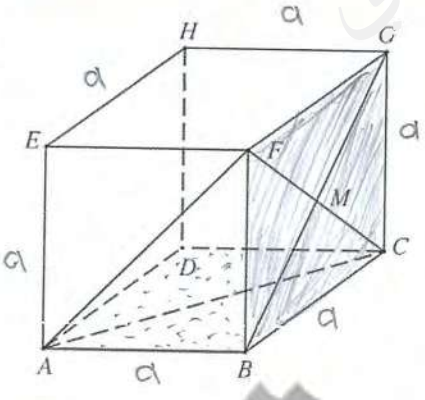
من (1) ، (2)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (ADB)$

(d) استنتج أن (CDB), (BDA) متعامدان.

$\because \overleftrightarrow{CD} \perp (ADB)$, $\overleftrightarrow{CD} \subseteq (CDB)$

$\therefore (ADB) \perp (CDB)$



(3) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a:

(a) أثبت أن: $(ABCD) \perp (FBCG)$

من خواص المكعب

$\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ $\rightarrow \overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$

$\because \overleftrightarrow{FB} \subseteq (FBCG)$

$\therefore (ABCD) \perp (FBCG)$

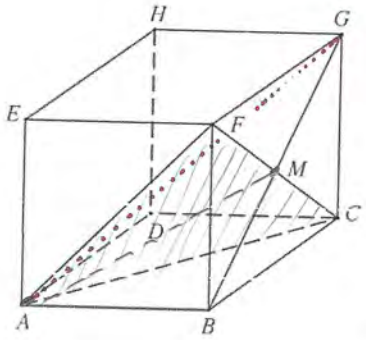
معلم الكويت
صفوة الكويت
Kuwait Teachers Group

(b) أثبت أن المثلث ACF متطابق الأضلاع.

$\overline{AC}$, $\overline{CF}$, $\overline{AF}$ هي أوتار لمثلثات قائمة أطوال أضلاع القائمة فيها جميعًا متطابقة وكل منها يساوي ضلع المكعب a

$\therefore AC = CF = AF = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}a$

أو أقطار لأوجه مكعب



(c) M نقطة تقاطع $\overline{FC}$، $\overline{BG}$،

أثبت أن: $\overline{AM} \perp \overline{FC}$

∵ المثلث AFC متطابق الأضلاع

M منتصف $\overline{FC}$

$\therefore \overline{AM} \perp \overline{FC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{FC}$

(d) أثبت أن: $(BCGF) \perp (ABG)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BF}$ $\longrightarrow$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$

$\overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABG)$

$\therefore (BCGF) \perp (ABG)$

(e) أثبت أن: $(ABG) \perp \overline{FC}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$, $\overleftrightarrow{FC} \subseteq (BCGF)$

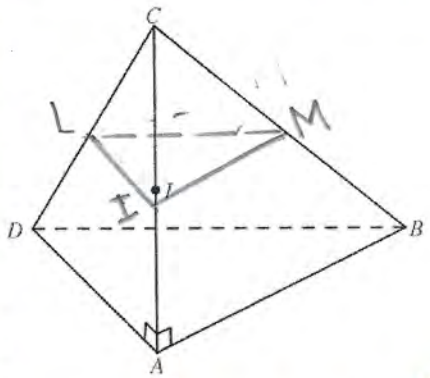
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{FC}$ ..... (1)

$\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{FC}$ ..... (2) وقطر المربع متعامدان

ضد (1) ، (2)

$\overleftrightarrow{FC} \perp (ABG)$

معلم البشير الرومي
صفوة التوجيهي
Tawjihi.net



(4) $CABD$ هرم ثلاثي القاعدة فيه:

$\overrightarrow{CA} \perp (ABD)$، I منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن المستوي العمودي من I على $\overline{AC}$ يقطع (ADC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{DC}$ ويقطع (ABC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{BC}$

نفرض ILM مستوى عمودي على $\overleftrightarrow{AC}$ ويقطع $\overleftrightarrow{DC}$ في L ويقطع $\overleftrightarrow{BC}$ في M

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp (ABD)$, $\overleftrightarrow{AC} \perp (ILM)$

$\therefore (ABD) \parallel (ILM)$

المستويين ILM, ABC متوازيان ويقطعهما في $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{IM}$ على الترتيب.

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{IM}$ $\therefore \frac{CM}{MB} = \frac{CI}{IA} = 1$

$\therefore CM = MB$

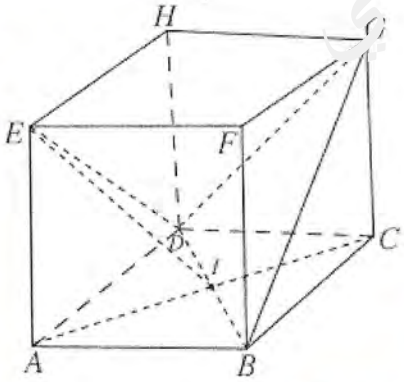
$\therefore$ M منتصف BC

بالمثل المستوى ADC قاطع للمستويين المتوازيين في $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{IL}$ على الترتيب

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{IL} \Rightarrow \frac{CI}{IA} = \frac{CL}{LD}$

$\therefore CL = LD$

$\therefore$ L منتصف DC



(5) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 5 cm

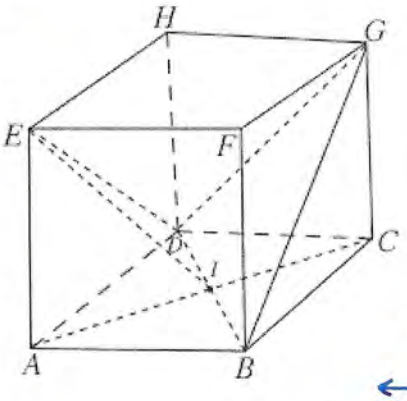
(a) أثبت أن المثلث EDB متطابق الأضلاع.

$\overline{ED}$, $\overline{BD}$, $\overline{EB}$ أوتارًا في مثلثات قائمة أضلاع القائمة فيها جميعًا تساوي طول ضلع المكعب 5

$\therefore ED = BD = EB = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$

$\therefore$ المثلث EDB متطابق الأضلاع.

أو هي أقطار لأوجه مكعب فهي متساوية في الطول.



(b) I نقطة تقاطع القطرين في المربع $ABCD$،

أثبت أن: $(DBG) \perp (AEI)$

المستويين AEI ، $AEGC$ متطابقان

$\therefore AEI = AEGC$

قطر مربع $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ..... (1)

$\because \overleftrightarrow{EA} \perp (ABCD)$ ، $\overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABCD)$

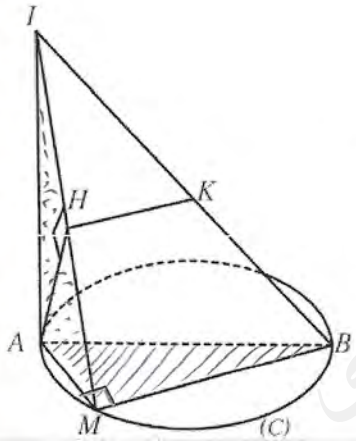
$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{EA}$ ..... (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن $\overleftrightarrow{DB} \perp (ACGE)$

$\therefore \overleftrightarrow{DB} \subseteq (DBG)$

$\therefore (DBG) \perp (ABCD)$

$\therefore (DBG) \perp (AEI)$



(6) في الشكل المقابل:

(C) دائرة قطرها $\overline{AB}$، M نقطة على الدائرة مختلفة عن A و B

$\overline{IA}$ عمودي على مستوى الدائرة.

(a) أثبت أن: $(IMB) \perp (IAM)$

$\overline{AB}$ قطر في الدائرة $\leftarrow m(\hat{AMB}) = 90^\circ$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{MB}$ .... (1)

$\overleftrightarrow{IA}$ عمودي على مستوى الدائرة ، $\overleftrightarrow{MB}$ محتوى في مستوى الدائرة

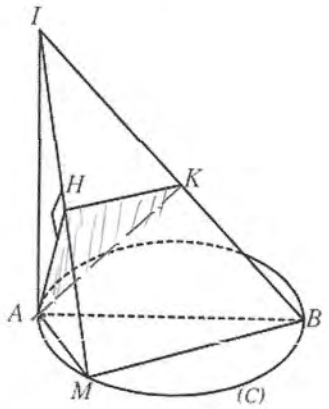
$\therefore \overleftrightarrow{IA} \perp \overleftrightarrow{MB}$ .... (2)

من (1) ، (2)

$\overleftrightarrow{MB} \perp (IAM)$ .... *

$\therefore \overleftrightarrow{MB} \subseteq (IMB)$ .... **

من * ، ** $(IAM) \perp (IMB)$



(b) إذا كان $\overline{AH} \perp \overline{IM}$, K نقطة على $\overline{IB}$

أثبت أن: $(IMB) \perp (AHK)$

$\overleftrightarrow{MB} \perp (\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{IA}$

$\therefore \overleftrightarrow{MB} \perp (IAM)$

$\overleftrightarrow{AH} \subseteq (IAM)$ $\therefore \overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{AH}$ ....(1)

$\because \overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{IM}$ .... (2)

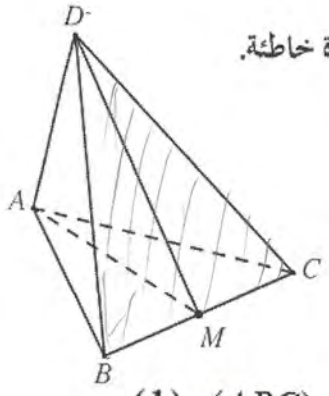
من (1) ، (2) نستنتج أن

$\overleftrightarrow{AH} \perp (IMB)$

$\overleftrightarrow{AH} \subseteq (AHK)$

$\therefore (AHK) \perp (IMB)$

المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمارين (5–1)، على الشكل المقابل.

إذا كان $\overline{AD}$ متعامد مع (ABC)، $AB = AC$، M منتصف $\overline{BC}$ فإن:

(1) $(ABC) \perp (DAC)$ (a) (b)

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{AD} \subseteq (DAC)$

(2) $(DBC) \perp (DAC)$ (a) (b)

(3) $(AMD) \perp (ABC)$ (a) (b)

$\overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$

معلم أحمد البشير الروحي
صفوة الكتب

(4) $(AMD) \perp (DBC)$ (a) (b)

$\overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (DBC)$

(5) $DC = DB$ (a) (b)

$\overleftrightarrow{DM} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overline{BC}$ منتصف M

(6) المستويان العمودان على ثالث متوازيان. (a) (b)

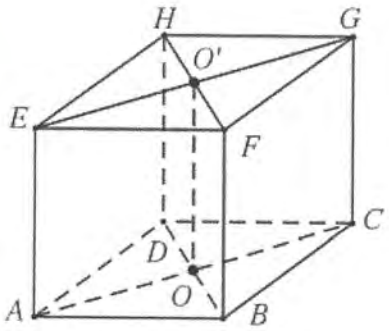
ممكن يكونا متوازيين أو متقاطعين

في التمارين (12–7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمرينين (8–7)، على الشكل المقابل حيث إن:

$ABCDEFGH$ شبه مكعب فيه:

O مركز المستطيل $ABCD$، O' مركز المستطيل $EFGH$



(7) $(EFGH)$، $(FGCB)$ هما:

(a) متعامدان (b) متوازيان (c) منطبقان (d) ليس أيًّا مما سبق

$\overleftrightarrow{EF} (FGCB)$, $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (EFGH)$

(8) $(DBFH)$، $(ABCD)$ هما:

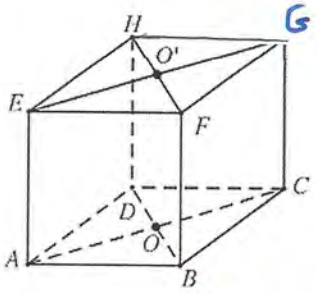
(a) متوازيان (b) منطبقان (c) متعامدان (d) ليس أيًّا مما سبق

$\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$, $\overleftrightarrow{FB} \subseteq (FGCB)$

صفوة الكويت
Kuwait Elite

أسئلة التمرينين (10–9)، على الشكل المقابل حيث إن: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a.

O مركز المربع $ABCD$، O' مركز المربع $EFGH$



(9) $(EACG)$، $(DHFB)$ هما:

(a) منطبقان (b) متعامدان

(c) متوازيان (d) ليس أيًّا مما سبق

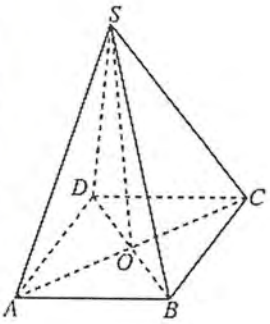
$\overleftrightarrow{AC} \perp (DHFB)$, $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (EACG)$

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{OO'}$, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB} \rightarrow \overleftrightarrow{AC} \perp (DHFB)$

(10) (HGE)، (OAB) هما:

(a) متعامدان (b) متوازيان (c) منطبقان (d) ليس أيًّا مما سبق

$HGE = HGFE$
$OAB = ABCD$
$\therefore HGFE \parallel ABCD$
$\therefore HGE \parallel OAB$



(11) إذا كان $ABCD$ مربع مركزه O، $\overleftrightarrow{SO} \perp (ABCD)$ فإن:

(a) $(SAB) \perp (SBC)$ (b) $(SAC) \perp (SBD)$

(c) $(SAB) \parallel (SCD)$ (d) $(SAD) \perp (ABCD)$

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{SO}$ $\therefore \overleftrightarrow{AS} \perp (SBD)$

$\overleftrightarrow{AS} \subseteq (SAC)$

$\therefore (SAC) \perp (SBD)$

(12) إذا كان: $\overleftrightarrow{T} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{T} \subset \pi_2$ فإن:

(a) $\pi_1 \parallel \pi_2$ (b) $\pi_1 \perp \pi_2$ (c) $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{T}$ (d) $\pi_1 = \pi_2$

اذا تعامد مستقيم على مستو فكل مستو آخر يمر بهذا المستقيم يكون عموديًا على المستوى الأول .

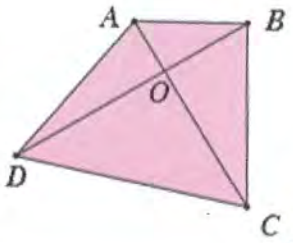
معلم الكويت
Kuwait Teacher

حاول ان تحل هندسة الفضاء

المستقيمات والمستويات في الفضاء
Lines and Planes in Space

مسلمات الفضاء-حالات تعيين مستوى في الفضاء –أوضاع المستقيمات في الفضاء – أوضاع مستويين في الفضاء

حاول أن تحل



1 في الشكل المقابل $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ يتقاطعان في O

أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

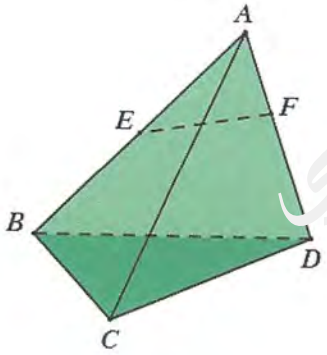
$\overline{BD}$ ، $\overline{AC}$ متقاطعان فيهما يعينان مستوى وحيد ولتكن π

النقطتان A ، B تقعان في هذا المستوى فتكون $\overline{AB} \subset \pi$

بالمثل B ، C تقعان في π فتكون $\overline{BC} \subset \pi$

بالمثل $\overline{AD} \subset \pi$ ، $\overline{CD} \subset \pi$

حاول أن تحل



2 إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$ ، النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$.

$\overline{EF}$ لا يوازي $\overline{BD}$. أثبت أن $\overline{EF}$ يقطع (BCD).

$\overleftrightarrow{EF}$ ، $\overleftrightarrow{BD}$ غير متوازيان ويحويهما مستوى واحد هو (ABD) فيهما متقاطعان في نقطة ولتكن K

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{K\}$

$\because \overleftrightarrow{BD} \subset (BCD) \quad \therefore K \in (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \cap (BCD) = \{K\}$

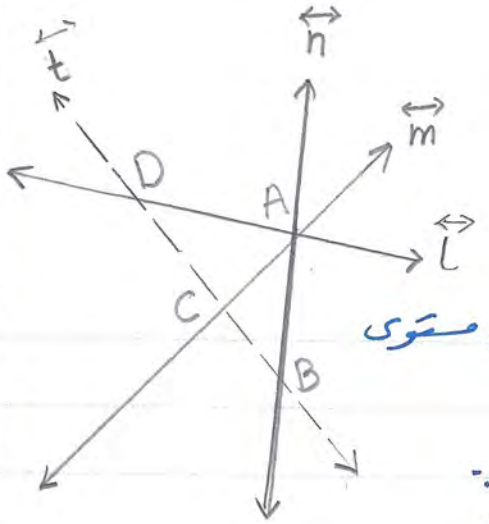
معلم البشر الرومي
صفوة الكويت
Kuwait Teachers Group

حاول أن تحل

3 $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A.

المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب.

أثبت أن المستقيمات l, m, n, t تقع في مستوٍ واحد.



$\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$ متقاطعان في A فهما يعينان مستوى وحيد ولكيكن π

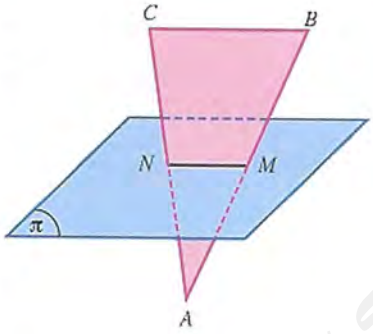
$\therefore \overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{m} = \{C\}$, $\overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{l} = \{D\}$

$\therefore \{C, D\} \subset \overleftrightarrow{t} \cap \pi \quad \therefore \overleftrightarrow{t} \subset \pi$

$\because \overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{n} = \{B\}$, $\overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} = \{A\}$

$\therefore \{A, B\} \subset \overleftrightarrow{n} \cap \pi \quad \therefore \overleftrightarrow{n} \subset \pi$

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء
Parallel Lines and Planes in Space



حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$،

M ، N تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\overline{BC} \parallel \pi$.

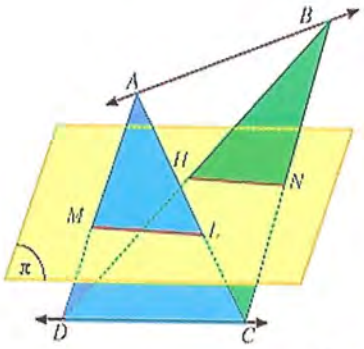
$\overline{AB}$ منتصف M ، $\overline{AC}$ منتصف N

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{MN} \subset \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{CB} \parallel \pi$

معلمي الكويت
صفوة
tutorialkuwait.com

حاول أن تحل



2 في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L.

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N.

إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع.

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{DC} \subset (ADC)$, $(ADC) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$

$\therefore \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{ML}$ ... (1)

بالمثل $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{DC} \subset (DCB)$, $(DCB) \cap \pi = \overleftrightarrow{HN}$

$\therefore \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{HN}$ ... (2) $\therefore \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{HN}$

بالمثل:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (ABC)$, $(ABC) \cap \pi = \overleftrightarrow{NL}$

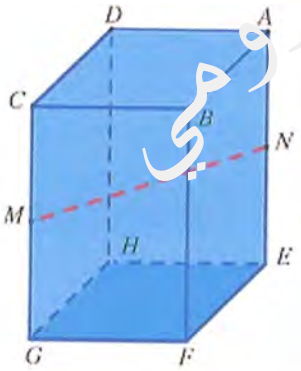
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{NL}$

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MH}$ بالمثل نستطيع اثبات أن

$\therefore \overleftrightarrow{NL} \parallel \overleftrightarrow{MH}$

$\therefore$ الشكل $LMHN$ متوازي أضلاع

حاول أن تحل



3 $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$ ، N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overline{MN}$.

من خواص شبه المكعب $AEGC$ مستطيل

$\therefore M$ منتصف $\overline{CG}$ ، N منتصف $\overline{AE}$

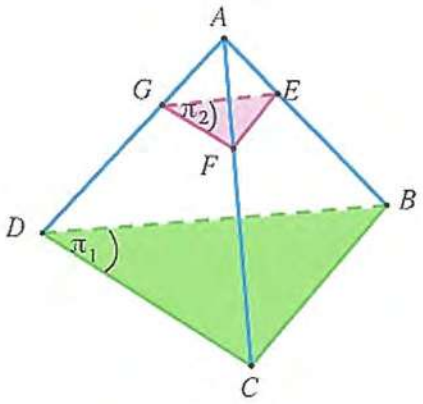
$\therefore$ الشكل $MNEG$ مستطيل

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{GE}$, $\overleftrightarrow{GE} \subset (EFGH)$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel (EFGH)$

أ. أحمد البشير الرومي
صفوة المعلمين الكويت
KuwaitTeachersElite.com

حاول أن تحل



4 في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 , π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB}=\frac{1}{3}$ ، $FG=6$ cm

فأوجد DC

π_1 , π_2 مستويان متوازيان والمستوى ADC يقطعهما في $\overleftrightarrow{GF}$, $\overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \overleftrightarrow{GF} // \overleftrightarrow{DC} \rightarrow \frac{FG}{DC}=\frac{AF}{AC}$ ... (1)

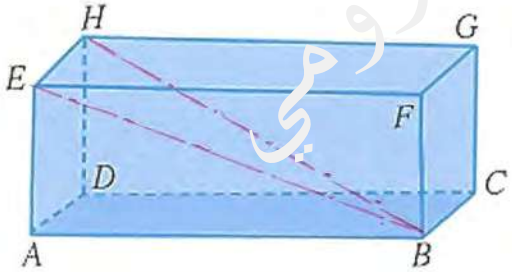
بالمثل المستوى ABC يقطعهما في π_1, π_2 $\overleftrightarrow{FE}$, $\overleftrightarrow{CB}$

$\therefore \overleftrightarrow{FE} // \overleftrightarrow{CB} \rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن

$\frac{AF}{AC}=\frac{FG}{DC}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$ $\therefore DC = 18$ سم

تعامد مستقيم مع مستوٍ
Perpendicular Line With a Plane



حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\hat{E}$.

$\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EA}$, $\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EF}$ $\therefore \overleftrightarrow{EH} \perp (ABFE)$

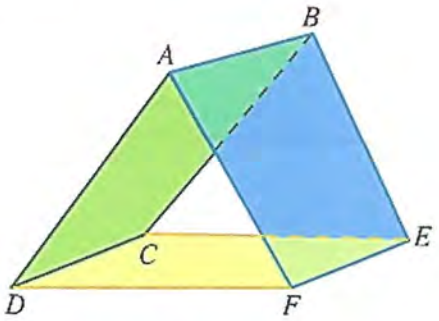
$\because \overleftrightarrow{EB} \subset (ABFE)$

$\therefore \overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EB}$ $\therefore m(B\hat{E}H)=90^\circ$

$\therefore$ المثلث BEH قائم في $\hat{E}$

صفوة التوت

حاول أن تحل



2 في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$

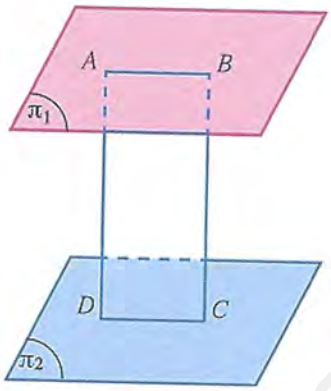
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (BEC)$ ... 1

بالمثل $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AF}$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (AFD)$ ... 2

إذا كان مستقيم عموديًا على مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين

$\therefore (BEC) \parallel (AFD)$

حاول أن تحل



3 في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{BC} \perp \pi_2$, $\overline{AD} \perp \pi_2$ أثبت أن $ABCD$ مستطيل.

π_1, π_2 مستويان متوازيان يقطعهما المستوى ABCD في $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ .....(1)

$\because \overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2$ $\therefore m(B\hat{C}D) = 90^\circ$

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$ $\therefore m(A\hat{D}C) = 90^\circ$

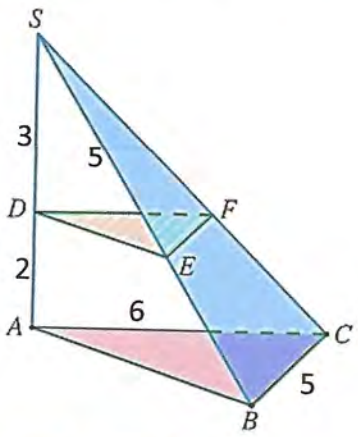
$(B\hat{C}D)$, $(A\hat{D}C)$ زاويتان داخلتان للمستقيمين $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}$

ومجموع قياسهما يساوي 180°

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ .....(2)

من (1)، (2) الشكل ABCD متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة فهو مستطيل

أ. أحمد البشير الرومي



حاول أن تحل

4 في الشكل المقابل:

المستويان $(DEF),(ABC)$ متوازيان

$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان: $SE = 5\text{ cm}$, $SD = 3\text{ cm}$, $DA = 2\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث DEF

$\overleftrightarrow{DF}$, $\overleftrightarrow{AC}$ في (SAC) مستويان متوازيان يقطعهما المستوى (ABC) , (DEF)

$\therefore \overleftrightarrow{DF} \parallel \overleftrightarrow{AC} \longrightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{DF}{AC} = \frac{SE}{SB} = \frac{3}{5}$

$\therefore DF = \frac{3\times6}{5}$ $\therefore DF = \frac{18}{5}$ $DF = 3.6$

$\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{BC}$ في (SBC) بالمثل (DEF) , (ABC) مستويان متوازيان ويقطعهما المستوى

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC} \longrightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{EF}{BC} = \frac{3}{5}$

$\therefore EF = 3$

$\because \overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$, $(ABC) \parallel (DEF)$

$\therefore \overleftrightarrow{SA} \perp (DEF)$ $\because \overleftrightarrow{DE} \subset (DEF)$

$\therefore \overleftrightarrow{SA} \perp \overleftrightarrow{DE}$

في المثلث القائم SDE ومن فيثاغورث

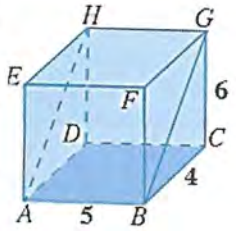
$DE = \sqrt{5^2-3^2} = 4$ $\therefore DE = 4$

$\therefore$ محيط المثلث DEF يساوي

$DF + EF + DE = 3.6 + 3 + 4 = 10.6$ cm

معلمي الكويت
صفوة
Kuwait Teachers Club

الزاوية الزوجية
The Dihedral Angle



حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.

$\overleftrightarrow{AB}$ حافة الزاوية الزوجية بين المستويين ABCD , ABGH

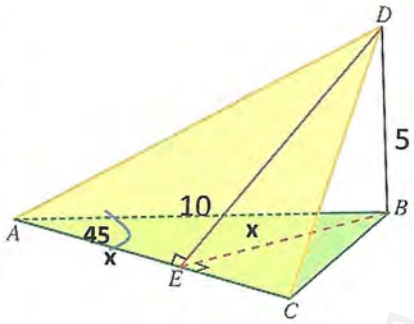
$\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في المستوى ABCD

$\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في المستوى ABGH حيث $\overleftrightarrow{BG} \subset (BCGF)$

$\therefore (C\hat{B}G)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$\because \tan(G\hat{B}C) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \therefore m(G\hat{B}C) = 56.3^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $= 56.3^\circ$



حاول أن تحل

2 في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $DB = 5\text{ cm}$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

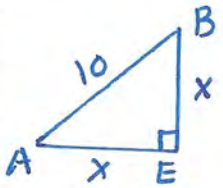
$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC، DAC

$\overleftrightarrow{AC}$ الحافة للزاوية الزوجية بين DAC و BAC

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BE}$ في المستوى (ABC) ، $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DE}$ في المستوى ADC

$\therefore (D\hat{E}B)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية



$\because m(BAC) = 45^\circ$

$\therefore$ المثلث AEB قائم الزاوية متطابق الضلعين

$\therefore AE = EB = 5\sqrt{2} \Leftarrow x^2 + x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50$

في المثلث DBE

$\overline{DB} \perp (ABC)$ ، $\overline{EB} \subset ABC \quad \therefore \overline{DB} \perp EB$

$\therefore \tan(D\hat{E}B) = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore m(D\hat{E}B) = 35.3^\circ$

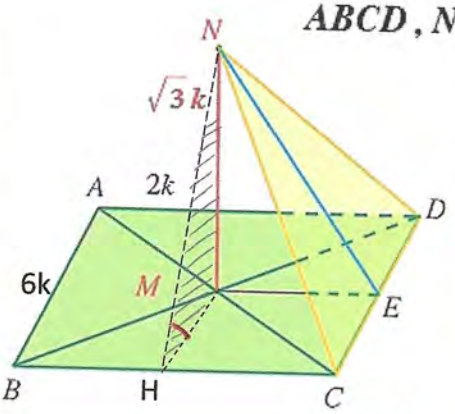
صفوت أحمد البشير الرومي

حاول أن تحل

3 $ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عموداً على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}k$

إذا كان $AB = 6k$، فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD, NBC$



نرسم عمود من النقطة M يقطع $\overline{BC}$ في H.
ثم نصل $\overline{NH}$

$MH = \frac{1}{2}AB = 3k$

$\overleftrightarrow{BC}$ حافة الزاوية الزوجية

$\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{MH}$ في المستوى ABCD ..... (1)

$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{NM} \perp \overleftrightarrow{BC} \\ \overleftrightarrow{MH} \perp \overleftrightarrow{BC}\end{array}\right\} \therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (MHN)$

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{NH}$ في المستوى (NBC) ..... (2)

من (1)، (2)

زاوية $(N\hat{H}M)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

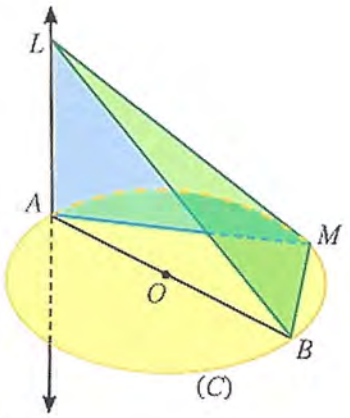
$\tan(N\hat{H}M) = \frac{NM}{HM} = \frac{\sqrt{3}k}{3k} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore m(N\hat{H}M) = 30^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NBC, ABCD تساوي 30°

معلمي الكويت
صفوة
Kuwait Teachers

المستويات المتعامدة
Perpendicular Planes



حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل، C دائرة مركزها O، $\overline{AB}$ قطر.

M نقطة تنتمي إلى الدائرة.

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة.

أثبت أن:

a $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

b $(LBM) \perp (LAM)$

(a)

$\overline{AB}$ قطر في الدائرة

$\therefore m(A\hat{M}B) = 90^\circ$ $\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BM}$ ... (1)

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوى الدائرة ، $\overleftrightarrow{BM}$ محتوى في مستوى الدائرة

$\therefore \overleftrightarrow{LA} \perp \overleftrightarrow{MB}$ ... (2)

من (1) ، (2)

$\overleftrightarrow{MB} \perp (LAM)$

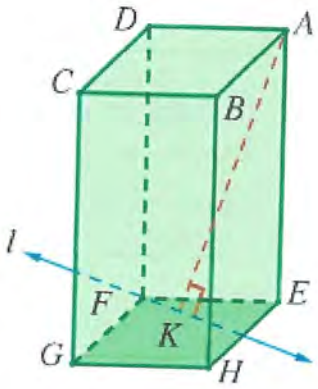
(b)

$\because \overleftrightarrow{MB} \perp (LAM)$ ، $\overleftrightarrow{MB} \subset (MB)$

$\therefore (LBM) \perp (LAM)$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwait Teachers Group

حاول أن تحل



2 في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل:

$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F.

$\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

أثبت أن:

a $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

b $(FDK) \perp (AEK)$

(a) من خواص شبه المكعب

$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{FE}$

$\therefore \overleftrightarrow{AE} \perp (EFGH)$

$\because \overleftrightarrow{l} \subset (EFGH)$ $\therefore \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{AE}$ ... (1)

$\because l \perp \overleftrightarrow{AK}$ .... (2)

من (1) , (2)

$\overleftrightarrow{l} \perp (AEK)$

$\because \overleftrightarrow{EK} \subset (AEK)$

$\therefore \overleftrightarrow{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

(b)

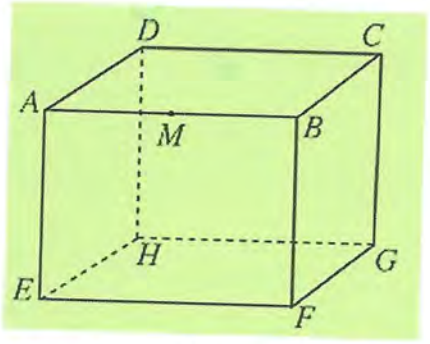
$\because \overleftrightarrow{l} \perp (AEK)$, $\overleftrightarrow{l} \subset (FDK)$

$K \in \overleftrightarrow{l}$ ، حيث $\overleftrightarrow{l}$ يمر في نقطة F

$\therefore (AEK) \perp (FDK)$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwait Teachers Com

اختبار الوحدة العاشرة



(1) $ABCDEFGH$ مكعب، M منتصف $\overline{AB}$

(a) هل $\overleftrightarrow{AB}$ والنقطة M تعينان مستويًا واحدًا؟

M منتصف $\overline{AB}$

$\therefore M \in \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ والنقطة M لا تعينان مستويًا واحدًا. (نقطة خارج المستقيم والمستقيم تعينان مستويًا واحدًا)

(b) هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GH}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{HG}$ من خواص المكعب

$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{HG}$

والمستقيمان المختلفان المتوازيان يعينان مستويًا واحدًا

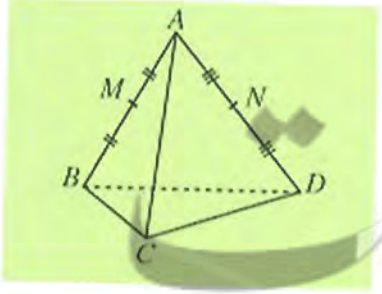
(c) سمّ ثلاثة مستويات تحتوي كل منها على النقطة M

$M \in \overline{AB}$ $\therefore M \in \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{AB} \subset ABCD$, $\overleftrightarrow{AB} \subset ABFE$, $\overleftrightarrow{AB} \subset ABHG$

$\therefore$ المستويات (ABHG) و(ABFE) و(ABCD) تحتوي كل منها النقطة M

(2) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة. النقطة M منتصف $\overline{AB}$ والنقطة N منتصف $\overline{AD}$



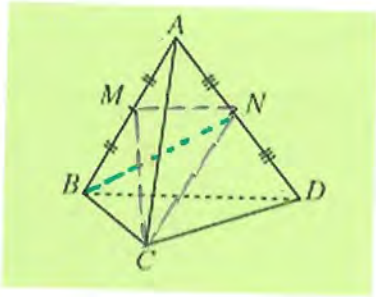
(a) $\overline{NM} /\!/\!/ \overline{BD}$

في المثلث ABD

M منتصف $\overline{AB}$, N منتصف $\overline{AD}$

$\therefore \overline{MN} // \overline{BD} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{BD}$

معلم الكويت
Kuwait Teacher.com



(b) $(ABD) \cap (CNM) =$ $\overleftrightarrow{MN}$

$M \in \overline{AB} \therefore M \in (ABD)$

$N \in \overline{AD} \therefore N \in (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \subset (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{MN} \subset (CNM)$

$\} (ABD) \cap (CNM) = \overleftrightarrow{MN}$

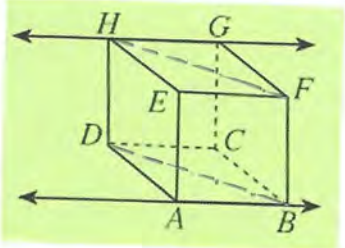
(c) $(CNB) \cap (ABD) =$ .....

$\because N \in \overline{AD} \therefore N \in (ADB)$ ، $\because B \in (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{BN} \subset (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{BN} \subset (BNC)$

$\therefore (CNB) \cap (ABD) = \overleftrightarrow{BN}$



(3) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overline{GH} \parallel \overline{AB}$

من خواص شبه المكعب

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ ، $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{HG}$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HG}$

المستقيمات الموازية لثالث في الفضاء متوازية

(b) أثبت أن: $BDHF$ هو مستطيل.

$\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$ ، $\overleftrightarrow{HD} \perp (ABCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{FB} \parallel \overleftrightarrow{HD}$ ، $\because FB = HD$ حرفان في المكعب

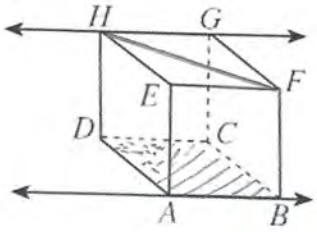
$\therefore BDHF$ متوازي أضلاع

$\because \overleftrightarrow{DB} \subset (ABCD)$ $\therefore \overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore m(F\hat{B}D) = 90^\circ$

$\therefore BDHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل

أحمد البشير الروبي
صفوة المعلمين
KuwaitTeachers.Com



(c) أثبت أن: (HF) موازٍ للمستوي $ABCD$

$\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$, $\overleftrightarrow{HD} \perp (ABCD)$ $\therefore \overline{FB} \parallel \overline{HD}$

$\because FB = HD$

$\therefore$ الشكل DBFH متوازي أضلاع

$\therefore \overleftrightarrow{HF} \parallel \overleftrightarrow{DB}$, $\overleftrightarrow{DB} \subset (ABCD)$ $\therefore \overleftrightarrow{HF} \parallel (ABCD)$

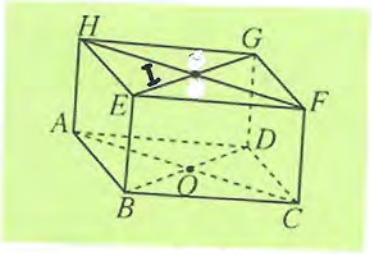
---

(4) $ABCDHEFG$ شبه مكعب.

النقطة O مركز المربع $ABCD$،

النقطة I مركز المربع $EFGH$

(a) أثبت أن النقاط: D ، G ، E تقع في المستوي $EGDB$



$\overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{DG}$

$\therefore$ هما يعينان مستو وحيد هو (EBDG)

$\therefore$ النقاط D ، G ، E تقع في المستوي (EGDB)

(b) أكمل: $(BEGD) \cap (AHFC) = \overleftrightarrow{OI}$

$I \in \overleftrightarrow{HF}$, $O \in \overleftrightarrow{AC}$ $\therefore \overleftrightarrow{OI} \subset (AHFC)$

$I \in \overleftrightarrow{EG}$, $O \in \overleftrightarrow{BD}$ $\therefore \overleftrightarrow{OI} \subset (BEGD)$ بالمثل.

$\therefore (BEGD) \cap (AHFC) = \overleftrightarrow{OI}$

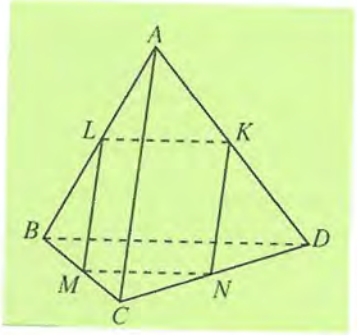
(c) أثبت أن: $\overline{AH} \parallel \overline{CF} \parallel \overline{OI}$

$\overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{EB}$, $\overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{HA}$ $\therefore \overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{HA}$

$\because I$ منتصف $\overline{HF}$ ، O منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{OI} \parallel \overleftrightarrow{HA} \parallel \overleftrightarrow{CF}$

صفوة التعليم



(5) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة: L منتصف $\overline{AB}$، M منتصف $\overline{CB}$، N منتصف $\overline{CD}$، K منتصف $\overline{AD}$

(a) أثبت أن: $\overline{NK} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{LM}$

في المثلث ACD K منتصف $\overline{AD}$ ، N منتصف $\overline{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ ... (1)

بالمثل في المثلث ACL L منتصف $\overline{AB}$ ، M منتصف $\overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ ... (2)

$\overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{LM}$ من (1) ، (2)

(b) أثبت أن: $KLMN$ هو متوازي أضلاع.

في المثلث ABD $\overline{LK}$ واصلة بين منتصفي ضلعين فيه $\overline{AD}$ و $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{LK} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ ... (1)

بالمثل في المثلث BCD $\overline{MN}$ واصلة بين منتصفي $\overline{CN}$ و $\overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ ... (2)

$\overleftrightarrow{LK} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ من (1) ، (2)

$\therefore$ الشكل KLMN فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين فهو متوازي أضلاع

(c) أثبت أن: $\overline{NL}$ يتقاطع مع $\overline{KM}$

$\because$ الشكل KLMN متوازي أضلاع

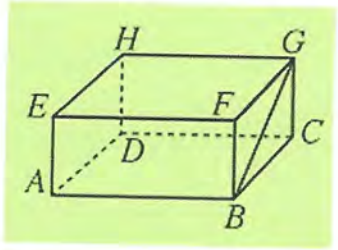
$\therefore$ النقاط K ، L ، M ، N تعين مستوى وحيد

$\therefore \overleftrightarrow{KM}$ ، $\overleftrightarrow{LN}$ يقعان في مستوى واحد وهما غير متوازيين

$\therefore \overleftrightarrow{KM}$ و $\overleftrightarrow{LN}$ متقاطعان

تم رفعه بواسطة أحمد البشر الرومي
صفوة الكويت
Kuwait Teachers Group

(6) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.



أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{GB}$

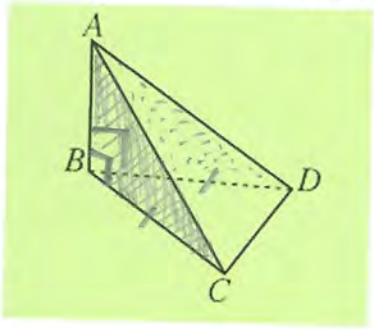
$\overleftrightarrow{HG} \perp \overleftrightarrow{CG}$ ، $\overleftrightarrow{HG} \perp GF$ $\therefore \overleftrightarrow{HG} \perp (BCGF)$

$\therefore \overleftrightarrow{BG} \subset (BGFC)$

$\therefore \overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GB}$

---

(7) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة $BC = BD$، $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع المستوي BCD



أثبت أن: $m(A\hat{C}B) = m(A\hat{D}B)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ ، $\overleftrightarrow{BC} \subset (BCD)$ ، $\overleftrightarrow{BD} \subset (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ المثلثان ABD ، ABC قائما الزاوية

فيهما $\overline{AB}$ مشترك ، $BC = BD$

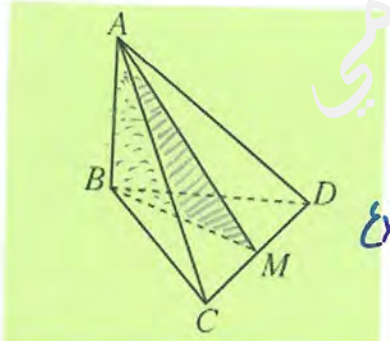
$\therefore$ المثلثان متطابقان

$\therefore m(A\hat{C}B) = m(A\hat{D}B)$

---

(8) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، قاعدته BCD مثلث متطابق الأضلاع، $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$:

M منتصف $\overline{CD}$



(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp (ABM)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ ، $\overleftrightarrow{CD} \subset (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ⟶ (1)

$\therefore M$ منتصف $\overline{CD}$ في المثلث BCD المتطابق الأضلاع

$\therefore \overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ⟶ (2)

$\overleftrightarrow{CD} \perp (ABM)$ ← (2) ، (1) من

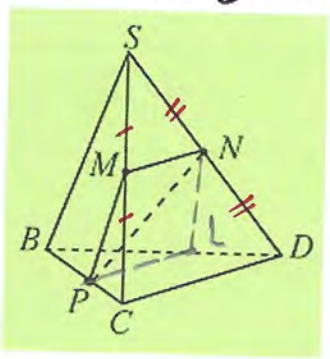
(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AM}$

$\overleftrightarrow{CD} \perp (ABM)$ ، $\overleftrightarrow{AM} \subset (ABM)$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AM}$

أحمد البشير الروحي
معلمتي
صفوة التوجيهية
Tawjihi.net

(9) $SBCD$ هرم ثلاثي قاعدته BCD، M منتصف $\overline{SC}$، N منتصف $\overline{SD}$، P نقطة على $\overline{BC}$



(a) أثبت أن $\overline{MN}$ موازٍ للمستوي BCD

في المثلث SCD

$\overline{SC}$ منتصف M ، $\overline{DS}$ منتصف N

$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{CD}$ $\quad \therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\because \overleftrightarrow{CD} \subset (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel (BCD)$

(b) إذا كان (PMN) يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ في النقطة L

أثبت أن: $\overline{PL} \parallel \overline{CD}$

$\therefore$ المستوى (PMN) يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ في L

$\therefore L \in (PMN)$

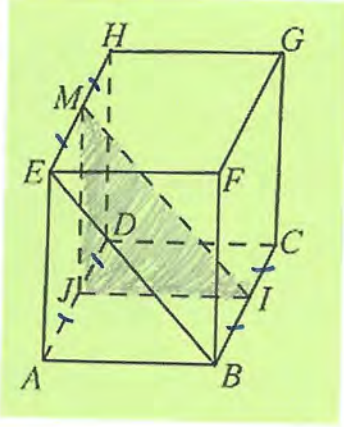
$\because \overleftrightarrow{MN}$ يوازي (BCD) ويحتوى في $(MNPL)$ والمستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{PL}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PL}$

$\because \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{PL} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com



(10) $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $\overline{BC}$،
J منتصف $\overline{AD}$، M منتصف $\overline{EH}$

(a) أثبت أن $\overline{AD} \perp (IJM)$

$\overline{BC}$ منتصف I ، $\overline{AD}$ منتصف J

$\therefore \overleftrightarrow{JI} \parallel \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{JI}$ ⟵ (1)

$\overleftrightarrow{MJ} \parallel \overleftrightarrow{HD} \parallel \overleftrightarrow{AE}$ ← بالمثل

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{MJ}$ ⟵ (2)

$\overleftrightarrow{AD} \perp (IJM)$ من (1) و (2)

(b) أثبت أن $\overline{AD} \perp (AEB)$

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AE}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp (AEB)$

(c) أثبت أن (IJM)، (ABE) متوازيان

لإثبات توازي مستويين نثبت أن كلاهما عمودي على مستقيم واحد

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (AEB)$ و $\overleftrightarrow{AD} \perp (IJM)$

$\therefore (IJM) \perp (ABE)$

(d) أثبت أن: $\overline{IJ} \perp (ADHE)$

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AE}$: $\overleftrightarrow{AB} \perp (ADEH)$

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{JI}$

$\therefore \overleftrightarrow{IJ} \perp (ADHE)$

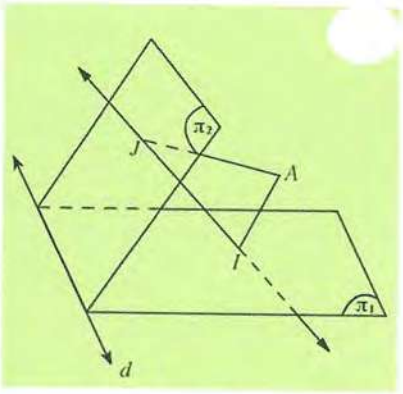
تعلم صفوة الكويت
Kuwait Teachers Com
تم إعداد بواسطة أحمد البشر الروضي

(11) (π_1) ، (π_2) يتقاطعان في $\vec{d}$، A نقطة خارج (π_1) وخارج (π_2)

$\overrightarrow{AI} \perp (\pi_1)$ ، $\overrightarrow{AJ} \perp (\pi_2)$

(a) أثبت أن $(AIJ) \perp (\pi_1)$

وأن $(AIJ) \perp (\pi_2)$



$\because \overleftrightarrow{AI} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{AI} \subset (AIJ)$

$\therefore (AIJ) \perp \pi_1$

$\because \overleftrightarrow{AJ} \perp \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{AJ} \subset (AJI)$

$\therefore (AJI) \perp \pi_2$

(b) أثبت أن $\vec{d} \perp (AIJ)$

$\because \overleftrightarrow{AI} \perp \pi_1 \ , \ \vec{d} \subset \pi_1$

$\therefore \overleftrightarrow{AI} \perp \vec{d} \longrightarrow (1)$

بالمثل ←

$\because \overleftrightarrow{AJ} \perp \pi_2 \ , \ \vec{d} \subset \pi_2$

$\therefore \overleftrightarrow{AJ} \perp \vec{d} \longrightarrow (2)$

$\vec{d} \perp (AIJ)$ من (1) ، (2)

(c) أثبت أن: $\vec{d} \perp \overrightarrow{IJ}$

$\because \vec{d} \perp (AIJ)$

، $\overleftrightarrow{IJ} \subset (AIJ)$

$\therefore \vec{d} \perp \overleftrightarrow{IJ}$

انتهى نسألكم الدعاء

معلم الكويت
صفوة الكويت

تمرين 11-2 ص 75

نظرية ذات الحدين
The Binomial Theorem

المجموعة A تمارين مقالية

(1) استخدم مثلث باسكال لفك كل مما يلي:

(a) $(a+b)^3$ (b) $(a+b)^4$ (c) $(x+y)^6$

(a) نستخدم الأعداد في الصف الرابع للمثلث كمعاملات 1 3 3 1

$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(b) نستخدم الأعداد في الصف الخامس كمعاملات 1 4 6 4 1

$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

(c) نستخدم الأعداد في الصف السابع كمعاملات 1 6 15 20 15 6 1

$(x+y)^6 = 1x^6y^0 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6x^1y^5 + 1x^0y^6$

$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

(2) استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل مما يلي:

(a) $(x+y)^4$ (b) $(x-y)^4$ (c) $(x-2)^5$

(a) $(x+y)^4 = {}_4C_0x^4y^0 + {}_4C_1x^3y^1 + {}_4C_2x^2y^2 + {}_4C_3x^1y^3 + {}_4C_4x^0y^4$

$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

(b) $(x-y)^4 = {}_4C_0x^4(-y)^0 + {}_4C_1x^3(-y)^1 + {}_4C_2x^2(-y)^2 + {}_4C_3x^1(-y)^3 + {}_4C_4x^0(-y)^4$

$= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

(c) $(x-2)^5 = {}_5C_0x^5(-2)^0 + {}_5C_1x^4(-2)^1 + {}_5C_2x^3(-2)^2 + {}_5C_3x^2(-2)^3 + {}_5C_4x^1(-2)^4 + {}_5C_5x^0(-2)^5$

$= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

KuwaitTeacher.Com

(3) فك كلًّا مما يلي:

(a) $(3x-y)^5$ (b) $(x^2+y)^4$ (c) $(3x+5y)^3$

(a) $(3x-y)^5 = {}_5C_0(3x)^5(-y)^0 + {}_5C_1(3x)^4(-y)^1 + {}_5C_2(3x)^3(-y)^2 + {}_5C_3(3x)^2(-y)^3$
$+ {}_5C_4(3x)^1(-y)^4 + {}_5C_5(3x)^0(-y)^5$
$= 243x^5 - 405x^4y + 270x^3y^2 - 90x^2y^3 + 15xy^4 - y^5$

(b) $(x^2+y)^4 = {}_4C_0(x^2)^4y^0 + {}_4C_1(x^2)^3.y^1 + {}_4C_2(x^2)^2y^2 + {}_4C_3(x^2)^1.y^3$
$+ {}_4C_4(x^2)^0y^4$
$= x^8 + 4x^6y + 6x^4y^2 + 4x^2y^3 + y^4$

(c) $(3x+5y)^3 = {}_3C_0(3x)^3.(5y)^0 + {}_3C_1(3x)^2(5y)^1 + {}_3C_2(3x)^1(5y)^2$
$+ {}_3C_3(3x)^0(5y)^3$
$= 27x^3 + 135x^2y + 225xy^2 + 125y^3$

في التمارين (8–4)، أوجد الحد المعين من مفكوك ثنائية الحد في كل مما يلي:

(4) الحد الثالث من $(x+3)^{12}$

(5) الحد الثاني من $(x+3)^9$

(6) الحد الثاني عشر من $(2+x)^{11}$

(7) الحد الثامن من $(x-2y)^{15}$

(8) الحد السابع من $(x^2-2y)^{11}$

(4) $T_{2+1} = {}_{12}C_2(x^{10})(3)^2 = 594x^{10}$

(5) $T_{1+1} = {}_9C_1(x)^8(3)^1 = 27x^8$

(6) $T_{11+1} = {}_{11}C_{11}(2)^0(x)^{11} = x^{11}$

(7) $T_{7+1} = {}_{15}C_7(x)^8(-2y)^7 = -822680x^8y^7$

(8) $T_{6+1} = {}_{11}C_6(x^2)^5(-2y)^6 = 29568x^{10}y^6$

معلم الكويت
KuwaitTeacher.Com

(9) تحليل الخطأ: زعم أحد الطلاب بأن، $^{4}y^{2}x^{3}C_{3}7$ هو أحد حدود ذات الحدين. اشرح خطأ الطالب.

*) يجب أن يكون أس y = 5 لأن 7-2=5

*) لابد أن يكون مجموع أس x و y يساوي n=7

---

(10) أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-7y)^5$

$$T_4 = T_{3+1} = {}_5C_3 (3x)^2 \cdot (-7y)^3 = -30870x^2y^3$$

---

(11) في مفكوك $(5-3ab)^7$ أوجد الحد الذي يحتوي على a^3b^3

$$T_4 = T_{3+1} = {}_7C_3 (5)^4 \cdot (-3ab)^3 = -590625a^3b^3$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5+5c^4+10c^3+10c^2+5c+1$

(2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$، فإنّ قيمة n هي 5

(3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإنّ قيمة n هي 7

(4) الحدّ الثاني من $(x+3)^3$ هو $54x^3$

(5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب.

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

(a) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$

(b) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(c) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$

(d) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

(a) $-21a^5b^2$

(b) $-7a^6b$

(c) $7a^6b$

(d) $21a^5b^2$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معامله 2 160 هو:

(a) الحدّ الثاني

(b) الحد الثالث

(c) الحد الرابع

(d) الحد الخامس

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$ هو:

(a) 5 170

(b) 3 312

(c) 4 320

(d) 2 316

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد $126x^3y^4$ هي:

(a) الرابعة (b) الخامسة (c) السادسة (d) التاسعة

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

(a) T_3 (b) T_4 (c) T_5 (d) T_6

يعدل إلى T_6

صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

تمرّن
11-3

ص 73

الاحتمال

Probability

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2—1)، وميت حجري نرد. بين ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا.

(1) مجموع العددين الظاهرين هو عدد أولي، المجموع أصغر من 4

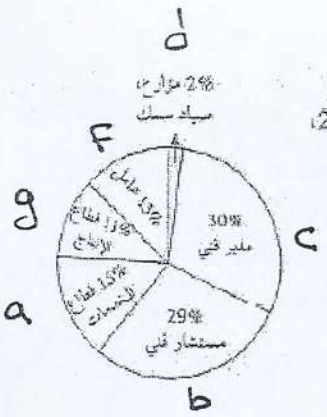
(2) ناتج ضرب العددين الظاهرين 24، أحد العددين هو عدد أولي.

الحل :

1- الحدثان غير متنافيان لأن 2+1 = 3 عدد أولي أصغر من 4

2- متنافيان 6x4 =24 عدد أولي ، 4 ، 6 عددين غير أوليين

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com



(3) يبيّن التمثيل البياني أدناه، أنواع عقود العمل في إحدى الدول في العام 2011.
أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

(a) اختيار شخص من قطاع الخدمات.

(b) اختيار شخص من قطاع الخدمات أو مستشار فني.

(c) اختيار شخص ليس مديرًا فنيًا.

(d) اختيار شخص ليس عاملًا وليس من قطاع الإنتاج.

a)- 15%

b)- 44% (15% + 29% = 44%

c)- 70% (1- 30%= 70%)

d)- 76% 1- (30% + 11%) = 76%

طريقة ثانية

a) $P(a) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

b) $P(a \cup b) = \frac{15}{100} + \frac{29}{100} = \frac{44}{100} = \frac{11}{25}$

c) $P(\bar{c}) = 1 - \frac{30}{100} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$

d) $P(\bar{f} \cap \bar{g}) = P(\overline{f \cup g}) = 1 - P(f \cup g)$

$= 1 - (\frac{13}{100} + \frac{11}{100})$

$= \frac{76}{100} = \frac{19}{25}$

معلمة الكويت
KuwaitTeacher.Com

(4) يبيّن الجدول المقابل كيف يمضي موظفو إحدى المؤسسات عطلتهم الصيفية. اختير عشوائيًا موظف من هذه المؤسسة. ما احتمال أن يسكن خلال عطلته الصيفية في فندق على شاطئ البحر؟

السكن	الجبل	شاطئ البحر	المجموع
استئجار شقة في مبنى	14	6	20
فندق	16	12	28
منزل مستقل	8	18	26
المجموع	38	36	74

الحل

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{74} = \frac{6}{37}$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(5) يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون وكرتين حمراء اللون. أخذت كرتان معًا من دون النظر داخل الكيس. أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

(a) الكرتان زرقاوان.

(b) كرة زرقاء وكرة حمراء.

(c) الكرتان من اللون نفسه.

الحل :

طريقة الحل

$n(S) = {}_6C_2 = 15$

A حدث دال على الكرتين زرقاوين

$n(A) = {}_4C_2 \times {}_2C_0 = 6$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

a)* $\frac{2}{5}$

B حدث دال على كرة زرقاء وكرة حمراء

$n(B) = {}_4C_1 \times {}_2C_1 = 8$

$P(B) = \frac{8}{15}$

b)* $\frac{8}{15}$

C الحدث الدال على الكرتين من اللون نفسه

$n(C) = {}_4C_2 \times {}_2C_0 + {}_2C_2 \times {}_4C_0 = 7$

$P(C) = \frac{7}{15}$

c)* $\frac{7}{15}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(6) إذا كان الحدثان t, r غير متنافيين، أكمل الجدول أدناه لإيجاد كل احتمال.

	$P(t)$	$P(r)$	$P(t \cap r)$	$P(t \cup r)$
(a)	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{11}$
(b)	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
(c)	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$
(d)	$\frac{2}{x}$	$\frac{3}{2x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{5}{2x}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(7) إذا كان الحدثان t , r متنافيان. أوجد $P(t \cup r)$.

(a) $P(t)=\frac{5}{8}$, $P(r)=\frac{1}{8}$

(b) $P(t)=12\%$, $P(r)=27\%$

a) $P(t \cup r)=\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ الحل

b) $P(t \cup r)=\frac{12}{100}+\frac{27}{100}=\frac{39}{100}=39\%$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(8) إذا كان الحدثان m, n مستقلان. أوجد $P(m \cap n)$.

(a) $P(m)=\frac{1}{4}$; $P(n)=\frac{2}{3}$

(b) $P(m)=0.6$; $P(n)=0.9$

a)* $p(m \cap n) = p(m) \times p(n)$

$p(m \cap n) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

b)* $p(m \cap n) = 0.6 \times 0.9 = 0.54$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(9) في أحد البلدان، 30% من السكان هم تحت سن العشرين، 17% فوق الستين. اختير شخص من السكان عشوائيًا. فما احتمال أن يكون تحت سن العشرين أو فوق الستين؟

الحل

$$P(A) = \frac{30}{100}$$

$$P(B) = \frac{17}{100}$$

$$P(A \cup B) = \frac{30}{100} + \frac{17}{100} = \frac{47}{100} = 47\%$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(10) رميت حجر نرد. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية.

(a) 3 أو عدد فردي.

(b) عدد زوجي أو عدد أصغر من 4

(c) عدد فردي أو عدد أولي

(d) 4 أو عدد أصغر من 6

الحل

توضيح الحل

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$n(S)=6$

a) $a=\{1,3,5\}$ $n(a)=3$

$P(a)=\frac{n(a)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

a)* $\frac{1}{2}$

b) $b=\{1,2,3,4,6\}$ $n(b)=5$

$P(b)=\frac{n(b)}{n(S)}=\frac{5}{6}$

b)* $\frac{5}{6}$

c) $c=\{1,2,3,5\}$ $n(c)=4$

$P(c)=\frac{n(c)}{n(S)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

c)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

d) $d=\{1,2,3,4,5\}$ $n(d)=5$

$P(d)=\frac{n(d)}{n(S)}=\frac{5}{6}$

d)* $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

معلمة الكويت
KuwaitTeacher.Com

40 %

(11) في إحدى المدن، وافق 40% من السكان على مرور القطار السريع في المدينة. ما هو احتمال أن من بين 10 أشخاص عشوائيًا من سكان المدينة، فما احتمال أن يكون 4 منهم قد وافقوا على مرور القطار السريع؟

$$p(A) = {}_{10}C_4 X(0.40)^4 X(0.60)^6 \cong 0.25$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(12) يستخدم حوالي 11% من الطلاب اليد اليسرى للكتابة. يوجد في أحد الصفوف 30 طالبًا. فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة؟

$$p(A) = {}_{30}C_4 X(0.11)^4 X(0.89)^{26} \cong 0.1939$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إن اختيار لون السيارة عشوائيًا، اختيار الدراليب عشوائيًا هما حدثان مستقلان.

(a) (b)

(2) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{12}{17}$ ، $P(n)=\frac{3}{8}$ إذًا $P(m\cap n)=\frac{9}{17}$

(a) (b)

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$

(a) (b)

(4) في اختبار صح – خطأ، أجبت عن 5 أسئلة عشوائيًا. احتمال أن تكون 3 من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$

(a) (b)

في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{1}{3}$، $P(n)=\frac{9}{10}$ إذًا $P(m\cap n)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{25}{30}$

(c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{11}{30}$

(6) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{3}{5}$، $P(r)=\frac{1}{3}$ إذًا $P(t\cup r)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{14}{15}$

(c) $\frac{4}{15}$ (d) 0

(7) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{1}{7}$، $P(r)=60\%$ إذًا $P(t\cup r)$ تساوي:

(a) 28% (b) 42%

(c) $\frac{16}{35}$ (c) $\frac{26}{35}$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

(a) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{5}{6}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائيًا كرتان معًا من الكيس. احتمال الحدث، أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء، هو:

(a) $\frac{1}{14}$ (b) $\frac{28}{15}$

(c) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{15}{28}$

(4) حل رقم 4

$$5C_3\,(0{,}5)^3\times(0{,}5)^2$$

$$=\frac{5}{16}$$

معلم الكويت
Kuwaitteacher.Com

(10) يتوزّع طلاب مدرستين A، B على الصفوف الثلاثة الأخيرة وفق النسب التالية.

المدرسة / الصف	العاشر	الحادي عشر	الثاني عشر
A	37%	35%	28%
B	38%	34%	28%

اختير عشوائيًا طالب من كل مدرسة. احتمال أن يكون طالب من الصف العاشر أو الصف الحادي عشر من المدرسة A وطالب من الصف الثاني عشر من المدرسة B هو:

(a) 20.16% (b) 100%

(c) 0% (d) 79.84%

(11) 90% من القمصان التي تنتجها إحدى الشركات لا عيب فيها. اختار مراقب الجودة 8 قمصان عشوائيًا. احتمال أن يكون 3 قمصان من هذه المجموعة فيها عيب هو:

(a) 0.033 (b) 5.9×10^{-4}

(c) 4×10^{-4} (d) 2.955

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com