

رياضيات

الصف الثاني عشر

علمي

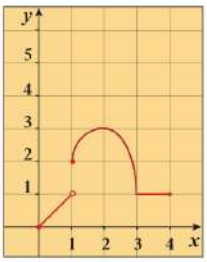
الترم الاول

2022/2023

KuwaitTeacher.Com

النهايات والاتصال

تدريب (1)



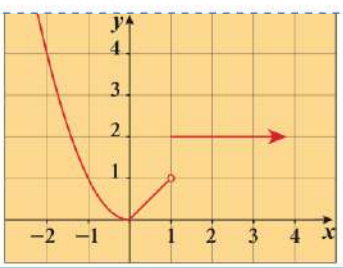
الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة: $f:[0,4]\to\mathbb{R}$

أكمل ما يلي:

1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ldots$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ldots$
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\ldots$
4. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\ldots$
5. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\ldots$
6. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\ldots$
7. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\ldots$
8. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\ldots$
9. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\ldots$
10. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ldots$
11. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\ldots$

مثال (1)

الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f.

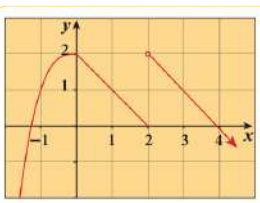


أوجد إن أمكن:

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

حاول أن تحل

1. يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة f.



أوجد إن أمكن:

a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
b. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
d. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

صفوة المعلمين الكويت
KuwaitTeacher.Com

2 بفرض أنّ: $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$ ، $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$

أوجد:

a $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$ b $\lim_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$ c $\lim_{x\to 2}\left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

أوجد:

1 $\lim_{x\to 1}(x^3+3x^2-2x-17)$ 2 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$

مثال (4)

إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & : x<1\\ 5 & : x=1\\ \frac{5}{x} & : x>1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 1} f(x)$

حاول أن تحل

4 إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : x<2\\ x-1 & : x>2\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 2} f(x)$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (5) إذا كانت الدالة g : فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 0} g(x)$

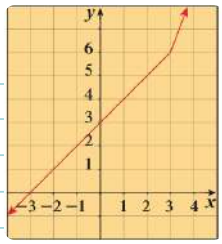
$$g(x)=\begin{cases} x^2-2 & : x\leqslant 0 \\ 1-2x & : x>0 \end{cases}$$

حاول أن تحل 5 إذا كانت الدالة g : فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 1} g(x)$

$$g(x)=\begin{cases} x^3+x & : x>1 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & : x\leqslant 1 \end{cases}$$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

مثال (6) لتكن: $f(x) = |x-3| + 2x$ الممثلة بالشكل.



a) اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b) أوجد $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ ، $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

c) هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ ؟

حاول أن تحل 6 لتكن f : $f(x) = x^2 - |x+2|$

a) اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b) أوجد: $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ ، $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

c) هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل 7 أوجد:

a $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-5}$

b $\lim_{x\to 4}(x+\sqrt{x})^4$

c $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

مثال (8) أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$

b $\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$

معلمة الكويت
Kuwaitteacher.com

c $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

حاول أن تحل

a $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

معلم الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

b $\lim_{x \to -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$

c $\lim_{x \to 5} \frac{|x+2| - 7}{x^2 - 25}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

أوجد:

a $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

b $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

c $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

حاول أن تحل 9 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

b $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

معلمة الكويت
Kuwaitteacher.com

c $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

أوجد:

a $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

معلمة الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

b $\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$

حاول أن تحل 10 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

معلمة الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

b $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$

معلم الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$

نظرية (7)

لتكن f : $f(x)=\frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

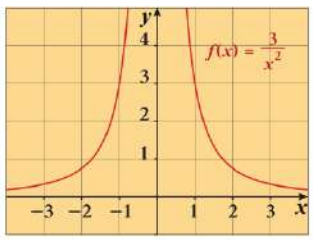
تدريب

الشكل يمثّل بيان الدالة f : $f(x)=\frac{3}{x^2}$

أكمل ما يلي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}=\text{.....}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=\text{.....}$$



نظرية (8)

لتكن f : $f(x)=\frac{k}{x^n}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, $k\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{k}{x^n}=0$$

أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+4}$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

b $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+5}{x^2+25}$

c $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3}{5-7x^3}$

معلم الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

1 أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2}$

b $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2+9}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

c $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 5}$

معلمة الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

صيغ غير معينة

$\lim_{x\to\infty}(-x^5)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}2x^3=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(5x^7)=-\infty$

$\lim_{x\to\infty}(-4x^4)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}(5x^2)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{3}=\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(-4x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}(-3x^4)=-\infty$

أوجد: $\lim_{x\to\infty}(2x^2-3x+1)$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\lim_{x\to\infty}(-3x^2+2x-4)$

نظرية (11)

إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$$

فإن: $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0$

a $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{b_m}$: $n=m$

b $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$: $n<m$

مثال (2)

استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a $\lim_{x\to\infty}\frac{4-3x^3}{2x^3+5}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

b $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{3x^4-x}$

c $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-1}{7-2x^4}$

حاول أن تحل

2 استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

b $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{4x^3-2x+3}$

مثال (3)

إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$

فأوجد قيمة كل من الثابتين a , b

حاول أن تحل

3 أوجد قيمة كل من الثابتين a , b إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (4)

أوجد: $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x + 1}$

b $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 9}}$

معلمة الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

نهايات بعض الدوال المثلثية

نظرية (12)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ، حيث x بالراديان

نتيجة (1)

إذا كان a ، b عددين حقيقيين، $b\neq 0$ ، $a\neq 0$ فإن:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$

$\lim_{x\to 0}\sin x=0$ ، $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ ، $\lim_{x\to 0}\tan x=0$

أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}$

b $\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x}$

c $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

أوجد النهاية:

1 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$

2 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$

3 $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

معلم الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

أوجد:

a $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

b $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\tan x}$

b $\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x + x^2\cos x}{5x}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\frac{5x+\sin x}{x}$

b $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x-2x\cos x}{3x}$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x-x^2}{3x^2}$

b $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x+3x\cos 4x}{5x}$

معلمة الكويت
Kuwaitteacher.com

الاتّصال

مثال (1)

لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2+3x & : \ x \geq 1 \\ 5x-1 & : \ x<1 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$.

حاول أن تحل

1 لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^3+x & : \ x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : \ x>0 \end{cases}$

ابحث اتصال f عند $x=0$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (2)

لتكن f :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & : x>3\\ 7 & : x\le 3\end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$.

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & : x<2\\ 1 & : x=2\\ x^2+1 & : x>2\end{cases}$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (3) ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{|x-2|} & : x\neq 2\\ 1 & : x=2\end{cases}$$

حاول أن تحل

3 ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

نظريات الاتصال

دوال متّصلة

1. الدالة $f: f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
2. الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
3. الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
4. الدالة $f: f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
5. الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

مثال (1) ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

a $f(x) = x^2 + |x|$, $c = -1$

b $f(x) = \sin x - \cos x$, $c = \frac{\pi}{2}$

حاول أن تحل 1 ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

a $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$, $c = 3$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

b $f(x)=\dfrac{\tan x}{x+1}$, $c=\dfrac{\pi}{4}$

مثال (2) ابحث اتصال الدالة f: $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+9}-\dfrac{1}{x}$ عند $x=3$

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-\dfrac{2x}{x-2}$ عند $x=1$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

a الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،

ومتصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $g(c) > 0$

فإن الدالة: $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

مثال (3) ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

a $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1}$, $x = 1$

b $f(x) = \sqrt{x + 3}$, $x = -1$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل 3 ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند $x = -2$

a $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 4}$

b $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

الدالة المركبة

إذا كانت كل من f , g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

مثال (4)

الدالتان f , g معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 1 + x$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ b $(g \circ f)(2)$ c $(f \circ g)(x)$ d $(f \circ g)(2)$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل 4 إذا كانت g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ b $(g \circ f)(-1)$ c $(f \circ g)(x)$ d $(f \circ g)(-1)$

مثال (5) لتكن: $g(x) = x^4 + 2$, $f(x) = \sqrt{x}$ أوجد:

a $(f \circ g)(x)$ b $(f \circ g)(0)$ c $(g \circ f)(x)$ d $(g \circ f)(0)$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل 5 لتكن: $g(x)=\frac{3}{x^2+4}$ ، $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ أوجد: (b) $(g\circ f)(\sqrt{3})$ (a) $(f\circ g)(x)$

اتصال الدوالّ المركّبة عند نقطة

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متّصلة عند c ، و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g\circ f$ متّصلة عند c.

مثال (6) لتكن: $f(x)=x^2+5$ ، $g(x)=\sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=-2$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل 6 لتكن: $g(x) = 2x + 3$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

مثال (7) لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل 7 لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

الاتصال على فترة

تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $(a\ ,\ b)$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\ ,\ b)$ إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّنا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)
2. الدالة f متّصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
3. الدالة f متّصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

مثال (1)

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل 1 ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}2 & : \ x=1\\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \ 1<x<5\\ \dfrac{26}{5} & : \ x=5\end{cases}$$

مثال (2) ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبيّنة:

a $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $[-1,5]$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

b $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$, $[0,5]$

حاول أن تحل 2 ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

a $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$, $[0,3]$

b $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, $[0,2]$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (3) ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x>-1 \end{cases}$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (4) لتكن الدالة f :

أوجد قيمة الثابتين a , b

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

حاول أن تحل 4 لتكن الدالة f :

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين a , b

$$f(x)=\begin{cases} 5 & : \quad x=1 \\ ax+b & : \quad 1<x<4 \\ b+8 & : \quad x=4 \end{cases}$$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

مثال (5)

لتكن f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5, 0]$.

حاول أن تحل

5 لتكن f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (6)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 3]$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (7)

لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

معدلات التغير وخطوط المماس

3 نحدّد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a, f(a))$ بالقيمة m إن وجد:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a, f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال (1) أوجد ميل المماسّ للقطع المكافئ $y = x^2$ عند النقطة $P(2, 4)$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

1 أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1,3)$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

المشتقة

تعريف: المشتقّة عند نقطة

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

حاول أن تحل

1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالّة f عند $x = a$ هي :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

مثال (2)

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $b \neq 0$ ، $x = b$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (3) بيّن أن الدالة التالية لها مشتقّة لجهة اليمين ومشتقّة لجهة اليسار عند $x = 0$، لكن ليس لها مشتقّة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x \leq 0 \\ 2x & : \quad x > 0 \end{cases}$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

3 لتكن f : $f(x) = |x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & : \quad x \le -1 \\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2} & : \quad x > -1\end{cases}$$

بيّن أن للدالة f مشتقّة لجهة اليمين مساوية للمشتقّة لجهّة اليسار عند $x=-1$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

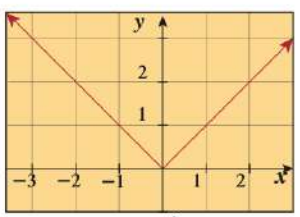
متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

الدالة f لن يكون لها مشتقّة عند نقطة $P(a, f(a))$ إذا كانت $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ غير موجودة.

وتوضّح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة:

a **ركنًا (Corner):** تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.

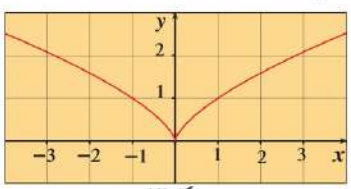
مثال: $f(x) = |x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

b **نابًا (Cusp):** يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

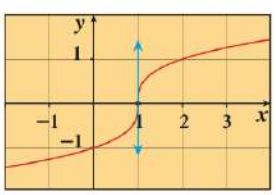


شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c **مماسًا رأسيًا:** يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا.

مثال: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$



شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$، $f'(1)$ غير موجودة

d **عدم اتصال:** تكون المشتقّة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

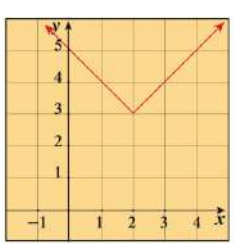


شكل (6)

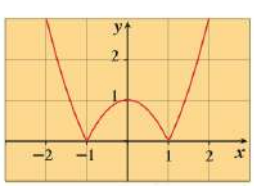
يوجد عدم اتصال عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

أوجد كل النقاط في مجال الدالة حيث تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق في كل مما يلي:

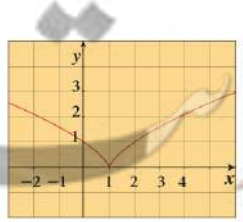
a $f(x) = |x-2|+3$



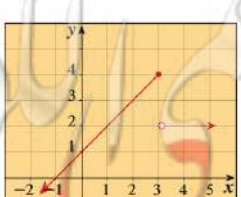
b $f(x) = |x^2-1|$



c $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$



d $f(x) = \begin{cases} 2 : x > 3 \\ x+1 : x \leq 3 \end{cases}$



معلومة:

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & : x \leq -1 \\ 1-x^2 & : -1 < x < 1 \\ x^2-1 & : x \geqslant 1 \end{cases}$$

معلم الكويت
Kuwaitteacher.Com

مثال (6) لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x<2 \\ 2x-1 & ; \ x\geq 2 \end{cases}$ ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & : \quad x\le 2 \\ 3x-2 & : \quad x>2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (9) لتكن الدالة f : أوجد إن أمكن $f'(3)$

$$f(x)=\begin{cases} x+5 & : \ x \leqslant 3 \\ x^2-1 & : \ x>3 \end{cases}$$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

9 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & : x \leqslant -1 \\ x^2-x-2 & : x > -1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

قواعد الاشتقاق

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

معلمة الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

معلمة الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

أوجد مشتقة $f(x) = \frac{x^3 - 1}{5x^2 + 1}$

حاول أن تحل 3 أوجد مشتقة $f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{2x^3 + 5}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

والمستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة $(a, f(a))$ هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ومعادلته:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

مثال (4)

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

حاول أن تحل

5 أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+5}$

لتكن: $y = \frac{x^2+3}{2x}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

حاول أن تحل

6 لتكن: $y = \frac{3x^2 + 7}{8x^2}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

مثال (8)

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & : \ x \leqslant 1\\ 2x+1 & : \ x>1\end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f''(x)$ إن أمكن

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

حاول أن تحل

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : \quad x \leqslant 2 \\ 4x-3 & : \quad x>2 \end{cases}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : \quad x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : \quad x \geq 1 \end{cases}$

معلمة الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مشتقات الدوال المثلثية

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

مثال (1) أوجد المشتقّات للدوال التالية:

a $y = x^2 \sin x$

b $u = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

c $f(x) = \sin^2 x$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

حاول أن تحل

1 أوجد المشتقات للدوال التالية:

a $h(x) = \cos^2 x$

b $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

c $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \tan x + \cot x$

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل 2 أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \dfrac{1 + \tan x}{\tan x}$

b $g(x) = \sec x + \csc x$

c $h(x) = \dfrac{\sec x}{\csc x}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (3) أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}\ ,\ 1\right)$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\right)$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

قاعدة السلسلة

مثال (1) إذا كان $g(x) = x^{10}$ ، $f(x) = 3x^2 + 1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

a $(f \circ g)'(x)$

b $(g \circ f)'(-1)$

حاول أن تحل لتكن: $g(x) = x^{13}$ ، $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$ ، $(g \circ f)'(0)$

مثال (2) لتكن: $g(x) = x^2 + 1$ ، $(x \neq 0)$ $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

صفوة معلمي الكويت
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

2 لتكن: $g(x)=\sqrt{x}$ ، $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(1)$

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $u=g(x)$ ، $y=f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u=g(x)$

مثال (3)

إذا كانت: $y=u^3-3u+1$ ، $u=5x^2+2$

فأوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل 3 لتكن: $y = u^2 + 4u - 3$ ، $u = 2x^3 + x$ أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

لتكن: $y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ ، أوجد: y'

حاول أن تحل

6 لتكن: $y = \sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$ ، أوجد: y'

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (7) أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

حاول أن تحل

7 بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائمًا يكون موجبًا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x.

حاول أن تحل 1 إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$ فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

إذا كانت $y = \sin x$. بيّن أن $y^{(4)} = y$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

2 لتكن الدالة: $y = \cos x$. بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

مثال (3)

أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\cos x}$

حاول أن تحل

3 أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

ثانيًا: الاشتقاق الضمني

مثال (4) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

a $y^2 + xy = 7x$

b $y = x + x^2y^5$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

4 لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

مثال (5)

أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

5 أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

مثال (6)

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi} \ , \ 2\pi)$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

6 أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2+y^2-2xy=1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2,1)$

مثال (7)

للمنحنى الذي معادلته $2\sqrt{y}+y=x$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3,1)$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

7 للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1, 1)$

إذا كانت $y = \sqrt{1 - 2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

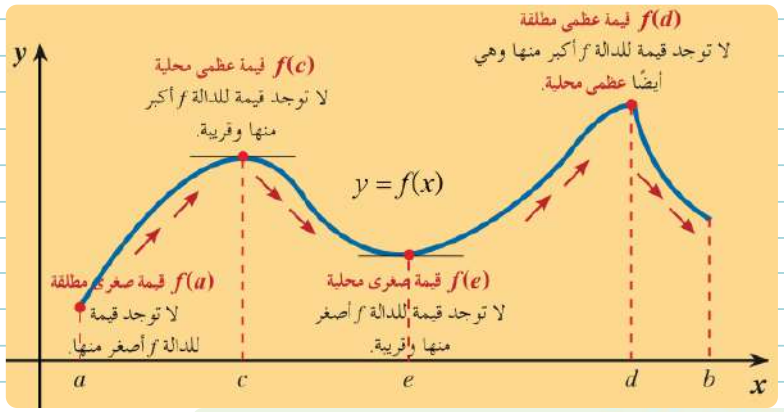
8 إذا كانت $y = x \sin x$ فأثبت أن $y''' + y' + 2 \sin x = 0$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

الوحدة الثالثة

تطبيقات على الاشتقاق

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال



تعريف (2): القيم القصوى المحليّة

لتكن $(c, f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c، تكون $f(c)$:

a) قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$, $f(c) \geq f(x)$

b) قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$, $f(c) \leq f(x)$

تعريف (3): النقطة الحرجة **Critical Point**

النقطة الداخليّة للدالّة f $(c, f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

مثال (2)

أوجد النقاط الحرجة لكلّ من الدوال المتصلة التالية:

a) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

2 أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية: $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

مثال (3) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

3 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$.

مثال (4)

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

4 أوجد القيم العظمى و الصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1,3]$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

تزايد وتناقص الدوال

مثال (3) أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

حاول أن تحل 3 أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

لتكن f : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ حدّد الفترات حيث تكون f متزايدة والفترات حيث تكون f متناقصة.

حاول أن تحل

4 إذا كانت f : $f(x) = x^3 - 6x$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (5)

إذا كانت f الدالة: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

5 حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

مثال (1)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالّة.

b الفترات التي تكون الدالّة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحليّة.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

1 لتكن الدالّة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

معلم الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (3)

أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

حاول أن تحل

3 أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

مثال (1)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

1 ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (2)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

معلمة الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

2 ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

معلم الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

تطبيقات على القيم القصوى

مثال (1) عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

3 تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a أوجد الارتفاع $h(\text{cm})$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b ما قيمة هذا الحجم؟

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

أوّلًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع معلوم

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

إذا كانت σ^2 معلومة و $n > 30$ أو $n \leq 30$.

1. نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96
2. نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، حيث σ هي الانحراف المعياري للمجتمع.
3. نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.

تفسير فترة الثقة

عند اختيار عينات عشوائية مختلفة متساوية في الحجم (n) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95% من فترات الثقة هذه تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع (μ).

فمثلًا عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (n) وفي كل مرة نحسب $\overline{x}$ وفترة الثقة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي μ الحقيقية و5 فترات لا تحويها.

معلمة الكويت
KuwaitTeacher.Com

مثال (2)

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$. باستخدام مستوى ثقة 95%

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

2 من المثال (2) إذا أجريت الدراسة على عينة أخرى من الإناث حجمها 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 18.4$

باستخدام مستوى ثقة 95%

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

معلمي الكويت
صفوة
Kuwaitteacher.Com

ثانيًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n > 30$

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

1. نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96
2. نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ ، حيث S هي الانحراف المعياري للعينة.
3. نوجد فترة الثقة $(\bar{x} - E \ , \ \bar{x} + E)$.

مثال (3)

عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16، باستخدام مستوى ثقة 95%:

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

3 أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$، وانحرافها المعياري $S = 9$، باستخدام مستوى ثقة 95%.

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

أ/عبدالعزيز بلال البيومي ت/ ٥٠٨٣٣٣٧٠

معلمي الكويت
Kuwaitteacher.Com

ثالثًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$ فإن توزيع العينة لا يؤول إلى التوزيع الطبيعي وفي هذه الحالة يلزمنا استخدام توزيع آخر هو توزيع t **للعينات الصغيرة** التي حجمها $n \leqslant 30$ ويكون تقدير فترة الثقة $(1-\alpha)$ للمتوسط الحسابي μ هو $(\bar{x}-E\ ,\ \bar{x}+E)$.

حيث $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للعينة، E هامش الخطأ.

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحساب μ إذا كانت σ^2 غير معلومة، $n \leq 30$:

1. نوجد درجات الحرية $(n-1)$.
2. نوجد القيمة الحرجة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% من جدول توزيع t.
3. نوجد هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
4. نوجد فترة الثقة $(\bar{x}-E\ ,\ \bar{x}+E)$.

مثال (4)

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (S) يساوي 10 ومتوسطها الحسابي $(\bar{x})$ يساوي 15، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

1. هامش الخطأ.
2. فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

4 أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علمًا أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $n = 13$, $S = 0.3$, $\bar{x} = 8.4$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

اختبارات الفروض الإحصائية

الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

1. صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1).
2. التحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t)، (مسترشدًا بالجدول التالي):

الانحراف المعياري (σ)	المقياس الإحصائي (Z أو t)	حجم العينة (n)
معلوم	$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	لا يشترط حجم معين للعينة
غير معلوم	$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n > 30$
	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n \leq 30$

3. تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول t ذي درجات حرية.
4. تحديد منطقة القبول: $(-Z_{\frac{\alpha}{2}} , Z_{\frac{\alpha}{2}})$ أو $(-t_{\frac{\alpha}{2}} , t_{\frac{\alpha}{2}})$ كما هو موضّح بالشكل.
5. اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

مثال (1)

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4 000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3 950 دينارًا كويتيًا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (دينارًا) $\sigma = 125$

وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

معلمي الكويت
Kuwaitteacher.Com

حاول أن تحل

1 بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو

$\mu = 1\,800$ kg مع انحراف معياري $\sigma = 150$ kg

ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكًا فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1 840 kg

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (2)

إذا كانت $S = 1.79$, $\bar{x} = 37.2$, $n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

2 متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ بانحراف معياري $S = 120$.

يقول صاحب المصنع إنّ متوسط العمر بالساعات $\mu = 1600$ للمصابيح المصنعة في المصنع.

اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

مثال (3)

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارًا كويتيًا.

فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي (دينارًا) $\overline{x} = 283$ وانحرافها المعياري (دينارًا) $S = 32$.

فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

استخدم مستوى ثقة 95% (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًا).

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبيّن من خلالها أن $S = 5$, $\overline{x} = 296$ لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها.

فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحًا أم لا؟ وضّح إجابتك.

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10 وأكثر	0.4999									

معلمي الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

جدول التوزيع t

درجات الحرية $(n-1)$	$\frac{\alpha}{2}$ 0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675

صفوة الكويت
KuwaitTeacher.Com

معلمة الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com

معلمة الكويت
صفوة
KuwaitTeacher.Com